VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA

FAKULTA STAVEBNÍ

# INŽENÝRSKÉ STATICKÉ VÝPOČTY

## Deformační metoda: řešení rámových soustav, prutové konstrukce zatížené teplotou

Jiří Brožovský

Kancelář: LP – H 406/3
Telefon: 597 321 321

E-mail: jiri.brozovsky@vsb.cz

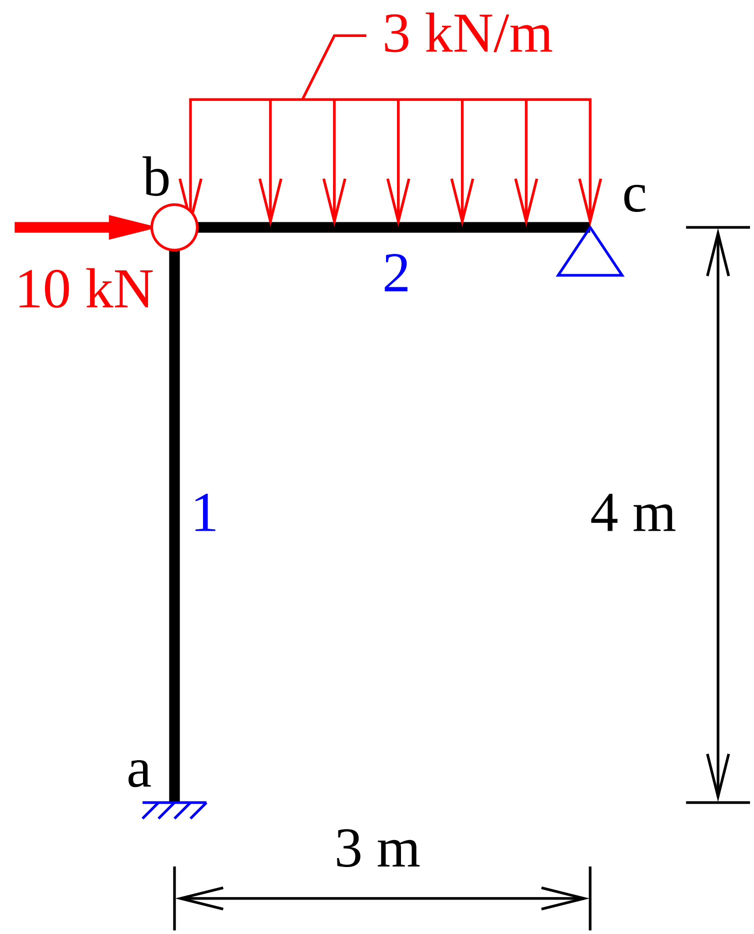
# Algoritmus obecné deformační metody

1. Stanovení stupně přetvárné neurčitosti a neznámých.
2. Sestavení lokálních matic tuhosti prutů $\mathbf{K}^*_{\mathbf{ij}}$.
3. Transformace do globálního systému souřadnic $\mathbf{K}_{\mathbf{ij}} = \mathbf{T}^{\mathbf{T}} \times \mathbf{K}^*_{\mathbf{ij}} \times \mathbf{T}$
4. Lokalizace $\mathbf{K}_{\mathbf{ij}}$ do matice tuhosti konstrukce $\mathbf{K}$
5. Výpočet primárních vektorů $\mathbf{R}^*_{\mathbf{ij}}$ na prutech a jejich transformace do globálních souřadnic: $\mathbf{R}_{\mathbf{ij}} = \mathbf{T}^{\mathbf{T}} \times \mathbf{R}^*_{\mathbf{ij}}$
6. Lokalizace členů $\mathbf{R}_{\mathbf{ij}}$ do vektoru zatížení konstrukce $\mathbf{F}$
7. Zavedení styčníkových zatížení do do vektoru zatížení konstrukce $\mathbf{F}$
8. Výpočet $\mathbf{u}$ řešením rovnice $\mathbf{K} \times \mathbf{u} = \mathbf{F}$.
9. Sestavení vektorů deformací prutů $\mathbf{u}_{\mathbf{ij}}$ z vektoru $\mathbf{u}$
10. Převedení $\mathbf{u}_{\mathbf{ij}}$ do lokálních souřadnic: $\mathbf{u}^*_{\mathbf{ij}} = \mathbf{T} \times \mathbf{u}_{\mathbf{ij}}$
11. Výpočet koncových sil na prutech: $\mathbf{F}^*_{\mathbf{ij}} = \mathbf{K}^*_{\mathbf{ij}} \times \mathbf{u}^*_{\mathbf{ij}}$
12. Vykreslení výsledků apod.

# Příklad 1: pravoúhlý rám (1)

**Zadání:** Stanovte průběhy vnitřních sil na zadaném rámu se zadanými parametry.

| Veličina | Hodnota | Jednotka |
|---|---|---|
| $E$ | 20 | GPa |
| $A_1$ | 0.02 | $m^2$ |
| $A_2$ | 0.01 | $m^2$ |
| $I_{z1}$ | $16,7 \times 10^{-6}$ | $m^4$ |
| $I_{z2}$ | $8,3 \times 10^{-6}$ | $m^4$ |




Stupeň přetvárné neurčitosti určete tak, ať je v úloze co nejméně neznámých.

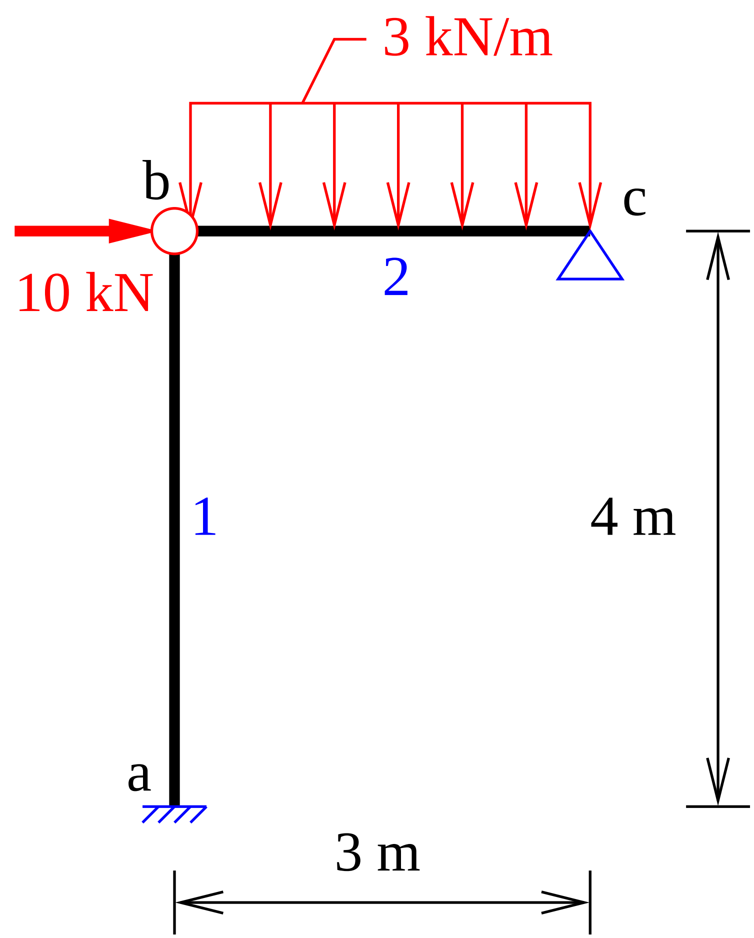
# Příklad 1: pravoúhlý rám (2)

Stupeň statické neurčitosti:

$$s_n = v - 3 + 3 \times u - k = 5 - 3 \times 0 - 1 = 1$$

Stupeň přetvárné neurčitosti:

- Styčník $a$: 0 (všechny 3 deformace jsou známé).
- Styčník $b$: 2 (prut $a-b$ má i pootočení, ale to se nepřenáší do žádného dalšího prutu – nepotřebujeme ho).
- Styčník $c$: 0 (všechny 2 posunutá jsou známá, pootočení bychom možné počítat, ale není důvod – nepřenáší se do žádného dalšího prutu, ani do podpory).



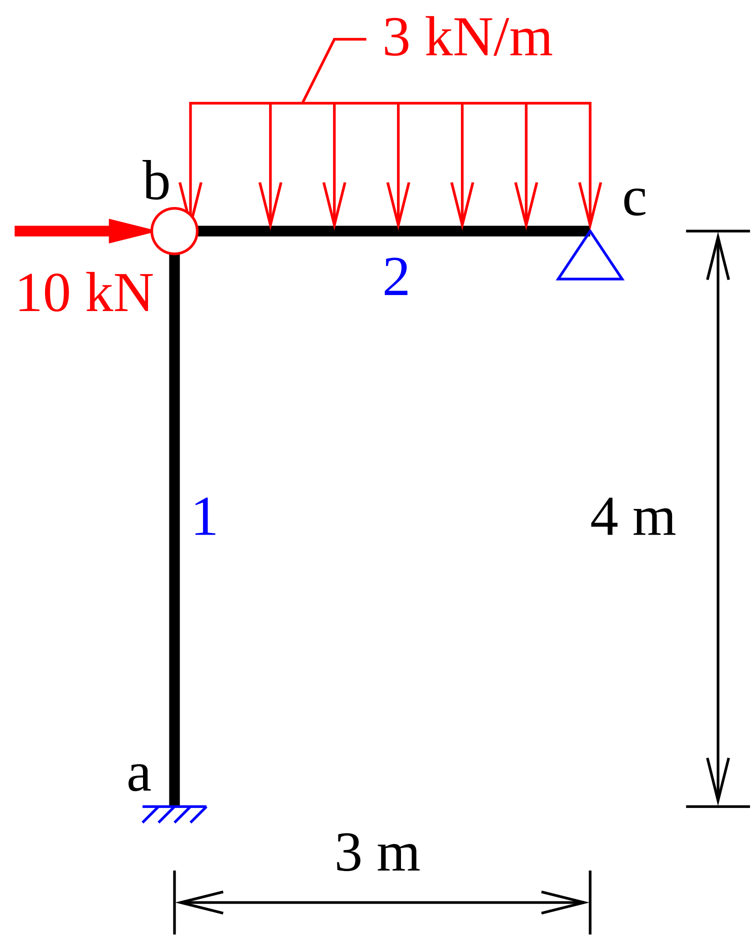

Tedy **stupeň přetvárné neurčitosti** je **2** a neznámé budou $u_b, w_b$.

# Příklad 1: pravoúhlý rám (3)

Jaké pruty použijeme:

- $a - b$: oboustranně pružně upnutý ($|$ – – $|$)
- $b - c$: oboustranně pružně upnutý ($|$ – – $|$)

A použijeme jen členy matic vztahující se k $u_b, w_b$.




Alternativně můžeme použít:

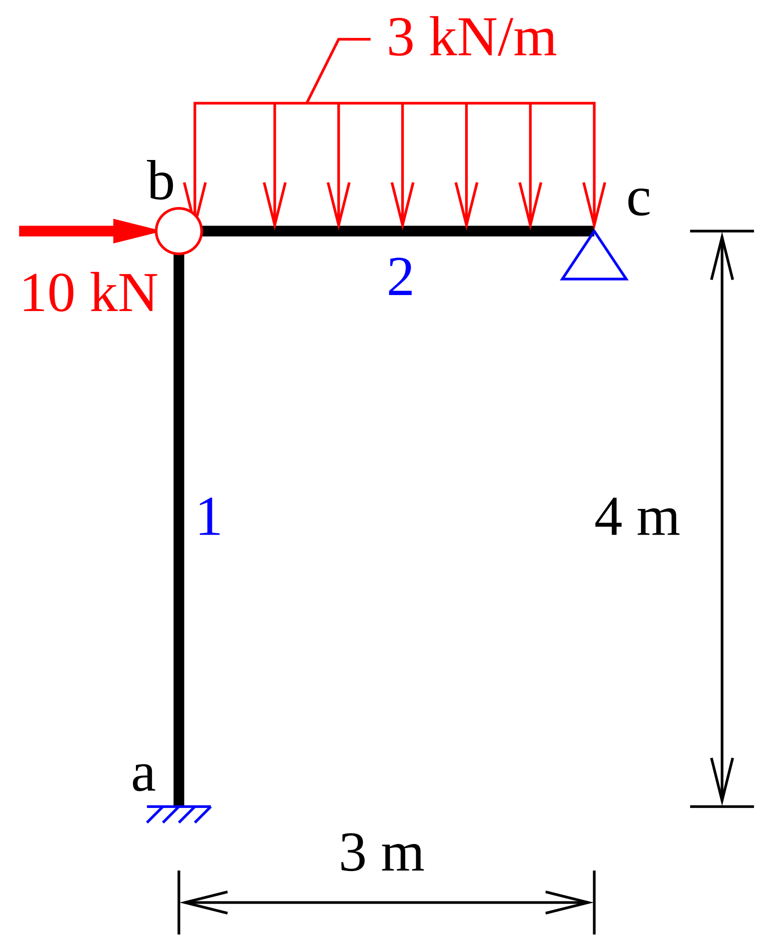
- $a - b$: v $a$ pružně upnutý, v $b$ kloub ($|$ – – $\circ$)
- $b - c$: v $b$ kloub, v $v$ pružně upnutý ($\circ$ – – $|$)

Konečné výsledky budou stejné.

# Příklad 1: pravoúhlý rám (4)

Matice tuhosti konstrukce:

$$\begin{array}{c|cc} & u_b & w_b \\ \hline u_b & k_{1,1} & k_{1,2} \\ w_b & k_{2,1} & k_{2,2} \end{array}$$




Vektor uzlových zatížení konstrukce:

$$\left\{ \begin{array}{c} F_{xb} \\ F_{zb} \end{array} \right\}$$

Vektor (uzlových) deformací konstrukce:

$$\left\{ \begin{array}{c} u_b \\ w_b \end{array} \right\}$$

# Příklad 1: pravoúhlý rám (5)

Matice tuhosti prutu 1 $(a - b)$:

$$\mathbf{K}^*_{\mathbf{ab}} = \begin{array}{c|cccccc} & u_a & w_a & \varphi_a & u_b & w_b & \varphi_b \\ \hline u_a & \frac{E\ A_1}{L_1} & 0 & 0 & -\frac{E\ A_1}{L_1} & 0 & 0 \\ w_a & 0 & \frac{12\ EI_1}{L_1^3} & -\frac{6\ EI_1}{L_1^2} & 0 & -\frac{12\ EI_1}{L_1^3} & -\frac{6\ EI_1}{L_1^2} \\ \varphi_a & 0 & -\frac{6\ EI_1}{L_1^2} & \frac{4\ EI_1}{L_1} & 0 & \frac{6\ EI_1}{L_1^2} & \frac{2\ EI_1}{L_1} \\ u_b & -\frac{E\ A_1}{L_1} & 0 & 0 & \frac{E\ A_1}{L_1} & 0 & 0 \\ w_b & 0 & -\frac{12\ EI_1}{L_1^3} & \frac{6\ EI_1}{L_1^2} & 0 & \frac{12\ EI_1}{L_1^3} & \frac{6\ EI_1}{L_1^2} \\ \varphi_b & 0 & -\frac{6\ EI_1}{L_1^2} & \frac{2\ EI_1}{L_1} & 0 & \frac{6\ EI_1}{L_1^2} & \frac{4\ EI_1}{L_1} \end{array}$$

# Příklad 1: pravoúhlý rám (6)

Matice tuhosti prutu 1 ($a - b$) s čísly:

$$\mathbf{K_{ab}} =$$

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & u_a & w_a & \varphi_a & u_b & w_b & \varphi_b \\
\hline
\begin{array}{c} u_a \\ w_a \\ \varphi_a \\ u_b \\ w_b \\ \varphi_b \end{array} &
\multicolumn{6}{c}{\left[\begin{array}{cccccc}
1e08 & 0 & 0 & -1e08 & 0 & 0 \\
0 & 6.262e04 & -1.2525e05 & 0 & -2.505e05 & -1.252e05 \\
0 & -1.252e05 & 3.3400e05 & 0 & 1.252e05 & 1.670e05 \\
1e08 & 0 & 0 & -1e08 & 0 & 0 \\
0 & -6.262e04 & 1.2525e05 & 0 & 6.262e04 & 1.252e05 \\
0 & -1.252e05 & 1.6700e05 & 0 & 1.252e05 & 3.340e05
\end{array}\right]}
\end{array}$$

Prut neleží v ose $x$, tuto matici v *lokálních souřadnicích* tedy budeme po sestavení ještě muset transformovat do ,,správné“ polohy.

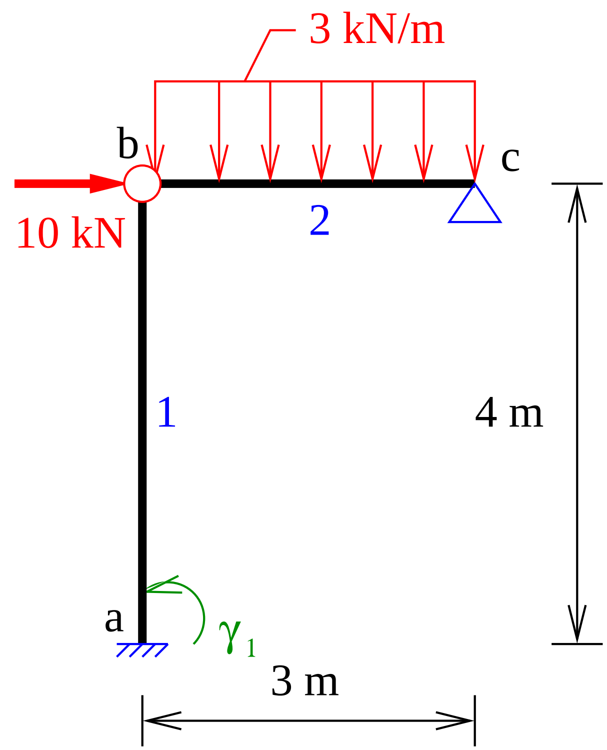
# Příklad 1: pravoúhlý rám (7)

Transformační matice pro prut $a - b$:

$$
\begin{aligned}
sin(\gamma_1) &= sin(-\pi/2) = 1 \\
cos(\gamma_1) &= sin(-\pi/2) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{T_{ab}} = \begin{bmatrix}
cos\gamma_1 & sin\gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-sin\gamma_1 & cos\gamma_1 & & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & cos\gamma_1 & sin\gamma_1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -sin\gamma_1 & cos\gamma_1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix}
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$



# Příklad 1: pravoúhlý rám (8)

Tranformace matice tuhosti prutu 1 $(a - b)$ do globálních souřadnic:

$$\mathbf{K_{ab}} = \mathbf{T_{ab}^{T}} \times \mathbf{K_{1}^{*}} \times \mathbf{T_{ab}} =$$

$$\left[\begin{array}{c|cccccc}
 & u_a & w_a & \varphi_a & u_b & w_b & \varphi_b \\
\hline
u_a & 6.262e04 & 0 & 1.252e05 & -2.505e05 & 0 & 1.252e05 \\
w_a & 0 & 1e08 & 0 & 0 & -1e08 & 0 \\
\varphi_a & 1.252e05 & 0 & 3.340e05 & -1.252e05 & 0 & 1.670e05 \\
u_b & --6.262e04 & 0 & -1.252e05 & 6.262e04 & 0 & -1.252e05 \\
w_b & 0 & 1e08 & 0 & 0 & -1e08 & 0 \\
\varphi_b & 1.252e05 & 0 & 1.670e05 & -1.252e05 & 0 & 3.340e05
\end{array}\right]$$

# Příklad 1: pravoúhlý rám (9)

Pro sestavení matice tuhosti **konstrukce** potřebujeme jen členy v pozicích $u_b, w_b$ (viz dole), ale v pozdějších fázích výpočtu se bude celá matice hodit pro výpočet koncových sil – proto jsme ji hned sestavili celou.

$$\left[\begin{array}{c|cccccc}
 & u_a & w_a & \varphi_a & u_b & w_b & \varphi_b \\
\hline
u_a & 6.262e04 & 0 & 1.252e05 & -2.505e05 & 0 & 1.252e05 \\
w_a & 0 & 1e08 & 0 & 0 & -1e08 & 0 \\
\varphi_a & 1.252e05 & 0 & 3.340e05 & -1.252e05 & 0 & 1.670e05 \\
u_b & --6.262e04 & 0 & -1.252e05 & \mathbf{6.262e04} & \mathbf{0} & -1.252e05 \\
w_b & 0 & 1e08 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{-1e08} & 0 \\
\varphi_b & 1.252e05 & 0 & 1.670e05 & -1.252e05 & 0 & 3.340e05
\end{array}\right]$$

# Příklad 1: pravoúhlý rám (10)

Vybrané členy $\mathbf{K_{ab}}$ (tučně):

$$\left[\begin{array}{c|cccccc} & u_a & w_a & \varphi_a & u_b & w_b & \varphi_b \\ \hline u_a & 6.262e04 & 0 & 1.252e05 & -2.505e05 & 0 & 1.252e05 \\ w_a & 0 & 1e08 & 0 & 0 & -1e08 & 0 \\ \varphi_a & 1.252e05 & 0 & 3.340e05 & -1.252e05 & 0 & 1.670e05 \\ u_b & --6.262e04 & 0 & -1.252e05 & \mathbf{6.262e04} & \mathbf{0} & -1.252e05 \\ w_b & 0 & 1e08 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{-1e08} & 0 \\ \varphi_b & 1.252e05 & 0 & 1.670e05 & -1.252e05 & 0 & 3.340e05 \end{array}\right]$$

vložíme do $\mathbf{K}$:

$$\mathbf{K} = \left[\begin{array}{c|cc} & u_b & w_b \\ \hline u_b & k_{1,1} & k_{1,2} \\ w_b & k_{2,1} & k_{2,2} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc} & u_b & w_b \\ \hline u_b & 6.262e04 & 0 \\ w_b & 0 & -1e08 \end{array}\right]$$

Připomenutí: hodnoty do $\mathbf{K}$ přičítáme (pokud do jednoho členu $\mathbf{K}$ přispívá více $\mathbf{K}_{ij}$ z více prutů, tak se všechny tyto hodnoty sečtou).

# Příklad 1: pravoúhlý rám (11)

Matice tuhosti prutu 2 ($b - c$):

$$\mathbf{K}^*_{\mathbf{bc}} = \begin{array}{c|cccccc} & u_b & w_b & \varphi_b & u_c & w_c & \varphi_c \\ \hline u_b & \frac{E\ A_1}{L_1} & 0 & 0 & -\frac{E\ A_1}{L_1} & 0 & 0 \\ w_b & 0 & \frac{12\ EI_1}{L_1^3} & -\frac{6\ EI_1}{L_1^2} & 0 & -\frac{12\ EI_1}{L_1^3} & -\frac{6\ EI_1}{L_1^2} \\ \varphi_b & 0 & -\frac{6\ EI_1}{L_1^2} & \frac{4\ EI_1}{L_1} & 0 & \frac{6\ EI_1}{L_1^2} & \frac{2\ EI_1}{L_1} \\ u_c & -\frac{E\ A_1}{L_1} & 0 & 0 & \frac{E\ A_1}{L_1} & 0 & 0 \\ w_c & 0 & -\frac{12\ EI_1}{L_1^3} & \frac{6\ EI_1}{L_1^2} & 0 & \frac{12\ EI_1}{L_1^3} & \frac{6\ EI_1}{L_1^2} \\ \varphi_c & 0 & -\frac{6\ EI_1}{L_1^2} & \frac{2\ EI_1}{L_1} & 0 & \frac{6\ EI_1}{L_1^2} & \frac{4\ EI_1}{L_1} \end{array}$$

# Příklad 1: pravoúhlý rám (12)

Matice tuhosti prutu 2 ($b - c$) s čísly:

$$\mathbf{K_{bc}} =$$

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & u_b & w_b & \varphi_b & u_c & w_c & \varphi_c \\
\hline
u_b & 6.666e7 & 0 & 0 & -6.666e07 & 0 & 0 \\
w_b & 0 & 1.417e5 & -1.160e5 & 0 & -4.253e5 & -1.160e5 \\
\varphi_b & 0 & -1.160e5 & 2.320e5 & 0 & 1.160e5 & 1.160e5 \\
u_c & -6.666e7 & 0 & 0 & -6.666e07 & 0 & 0 \\
w_c & 0 & -1.417e5 & 1.160e5 & 0 & 1.417e5 & 1.160e5 \\
\varphi_c & 0 & -1.160e5 & 1.160e5 & 0 & 1.160e5 & 2.320e5
\end{array}$$

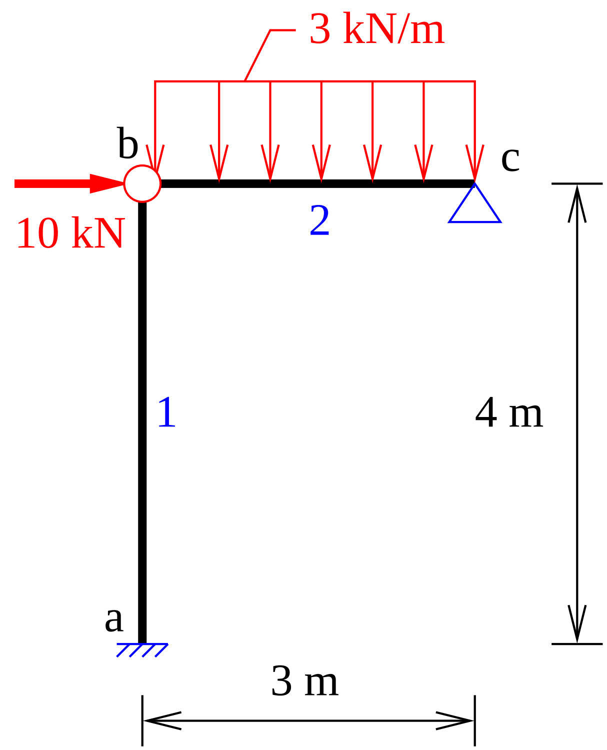
# Příklad 1: pravoúhlý rám (12)

Transformační matice pro prut $b - c$:

$$\begin{aligned} sin(\gamma_1) &= sin(0) = 0 \\ cos(\gamma_1) &= sin(0) = 1 \end{aligned}$$

$$\mathbf{T_{bc}} = \begin{bmatrix} cos\gamma_1 & sin\gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -sin\gamma_1 & cos\gamma_1 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & cos\gamma_1 & sin\gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -sin\gamma_1 & cos\gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



# Příklad 1: pravoúhlý rám (13)

Tranformace matice tuhosti prutu 1 $(b-b)$ do globálních souřadnic:

$$\mathbf{K_{bc}} = \mathbf{T_{bc}^{T}} \times \mathbf{K_{1}^{*}} \times \mathbf{T_{bc}} =$$

$$\left[\begin{array}{c|cccccc}
 & u_b & w_b & \varphi_b & u_c & w_c & \varphi_c \\
\hline
u_b & 6.666e7 & 0 & 0 & -6.666e07 & 0 & 0 \\
w_b & 0 & 1.417e5 & -1.160e5 & 0 & -4.253e5 & -1.160e5 \\
\varphi_b & 0 & -1.160e5 & 2.320e5 & 0 & 1.160e5 & 1.160e5 \\
u_c & -6.666e7 & 0 & 0 & -6.666e07 & 0 & 0 \\
w_c & 0 & -1.417e5 & 1.160e5 & 0 & 1.417e5 & 1.160e5 \\
\varphi_c & 0 & -1.160e5 & 1.160e5 & 0 & 1.160e5 & 2.320e5
\end{array}\right]$$

Samozřejmě zde musí platit $\mathbf{K_{bc}^{*}} = \mathbf{K_{bc}}$, protože prut leží v ose $x$.

# Příklad 1: pravoúhlý rám (14)

Vybrané členy $\mathbf{K_{bc}}$ (tučně):

$$\begin{array}{c|cccccc} & u_b & w_b & \varphi_b & u_c & w_c & \varphi_c \\ \hline u_b & \mathbf{6.666e7} & \mathbf{0} & 0 & -6.666e07 & 0 & 0 \\ w_b & \mathbf{0} & \mathbf{1.417e5} & -1.160e5 & 0 & -4.253e5 & -1.160e5 \\ \varphi_b & 0 & -1.160e5 & 2.320e5 & 0 & 1.160e5 & 1.160e5 \\ u_c & -6.666e7 & 0 & 0 & -6.666e07 & 0 & 0 \\ w_c & 0 & -1.417e5 & 1.160e5 & 0 & 1.417e5 & 1.160e5 \\ \varphi_c & 0 & -1.160e5 & 1.160e5 & 0 & 1.160e5 & 2.320e5 \end{array}$$

vložíme do $\mathbf{K}$:

$$\mathbf{K} = \left[\begin{array}{c|cc} & u_b & w_b \\ \hline u_b & k_{1,1} & k_{1,2} \\ w_b & k_{2,1} & k_{2,2} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc} & u_b & w_b \\ \hline u_b & 6.273e7 & 0 \\ w_b & 0 & -9.986e7 \end{array}\right]$$

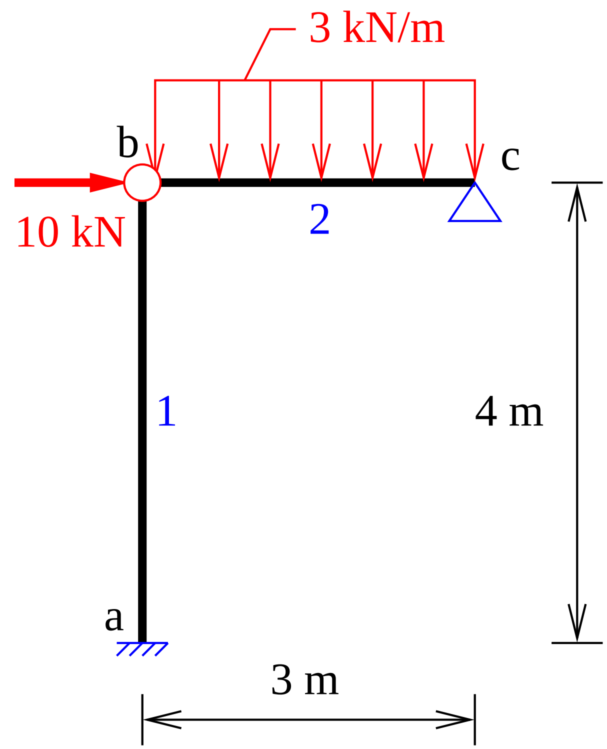
Připomenutí: hodnoty do $\mathbf{K}$ **přičítáme** (už jsou tam hodnoty z $\mathbf{K}_{ab}$!).

# Příklad 1: pravoúhlý rám (15)

Sestavení zatěžovacího vektoru – síla v uzlu $b$:

$$F = \left\{ \begin{array}{c|c} F_{bx} & 10000 \\ F_{bz} & 0 \end{array} \right\}$$

Sestavení zatěžovacího vektoru – primární účinky na prutu $b - c$:




$$\mathbf{F}^*_{\mathbf{bc}} = \mathbf{F}_{\mathbf{bc}} \left\{ \begin{array}{c} -\frac{n\ L}{2} \\ -\frac{q\ L}{2} \\ \frac{-q\ L^2}{12} \\ -\frac{n\ L}{2} \\ -\frac{q\ L}{2} \\ -\frac{-q\ L^2}{12} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{-4500} \\ -2255 \\ 0 \\ -4500 \\ 2255- \end{array} \right\}$$

Tedy výsledný zatěžovací vektor s uzlovými i primárními účinky:

$$\mathbf{F} = \left\{ \begin{array}{c|c} F_{bx} & 10000 \\ F_{bz} & 4500 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 10000 \\ 4500 \end{array} \right\}$$

# Příklad 1: pravoúhlý rám (16)

Řešení soustavy rovnic:

$$\begin{bmatrix} 6.273e7 & 0 \\ 0 & -9.986e7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_b \\ w_b \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10000 \\ 4500 \end{Bmatrix}$$

Vyjde (např. výpočtem v tabulkovém kalkulátoru):

$$\begin{bmatrix} u_b \\ w_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00015 \\ 0.000045 \end{bmatrix} [m]$$

Tedy uzel $b$ se posune doprava a dolů.

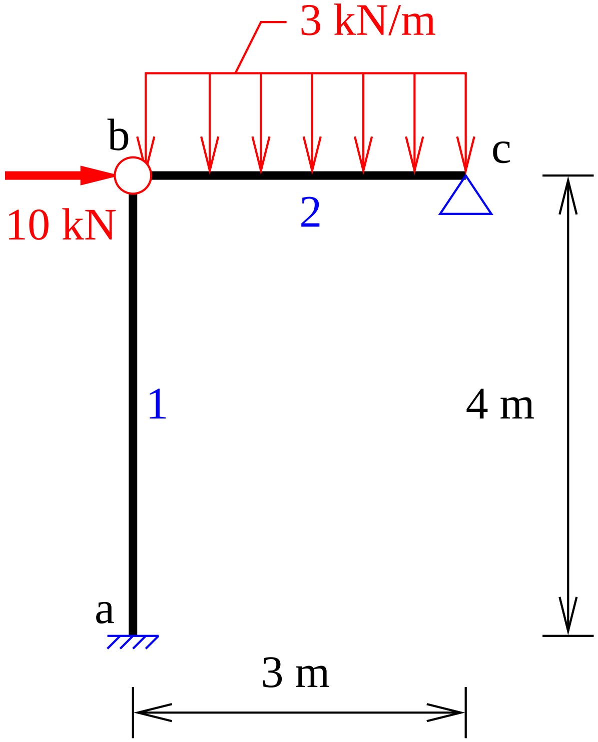
Nyní bude potřeba převést výsledky do lokálních souřadnic jednotlivých prutů a dopočítat koncové síly.

# Příklad 1: pravoúhlý rám (17)

Ze znalosti vektoru posunutí konstrukce $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_b \\ w_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00015 \\ 0.000045 \end{bmatrix} [m]$$

sestavíme vektor koncových deformací prutu $a - b$:




$$\mathbf{u_{ab}} = \left\{ \begin{array}{c|c} u_a & 0 \\ w_a & 0 \\ \varphi_a & 0 \\ u_b & 0.0015 \\ w_b & 0.000045 \\ \varphi_b & 0 \end{array} \right\}$$

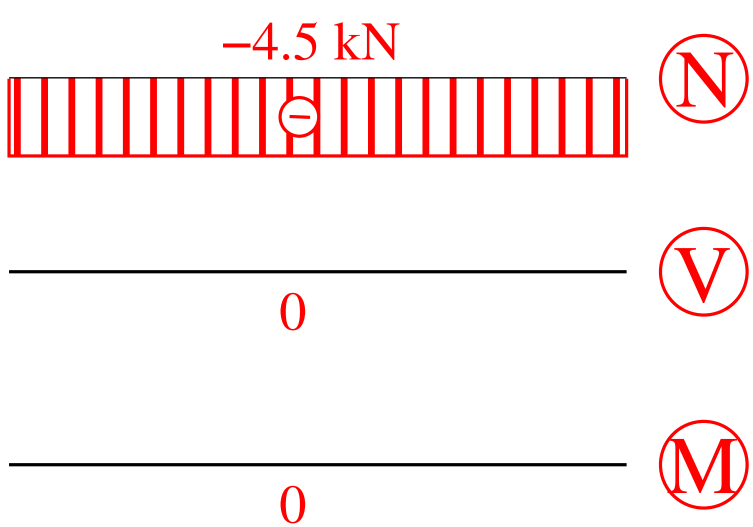
Transformujeme do lokálních souřadnic:

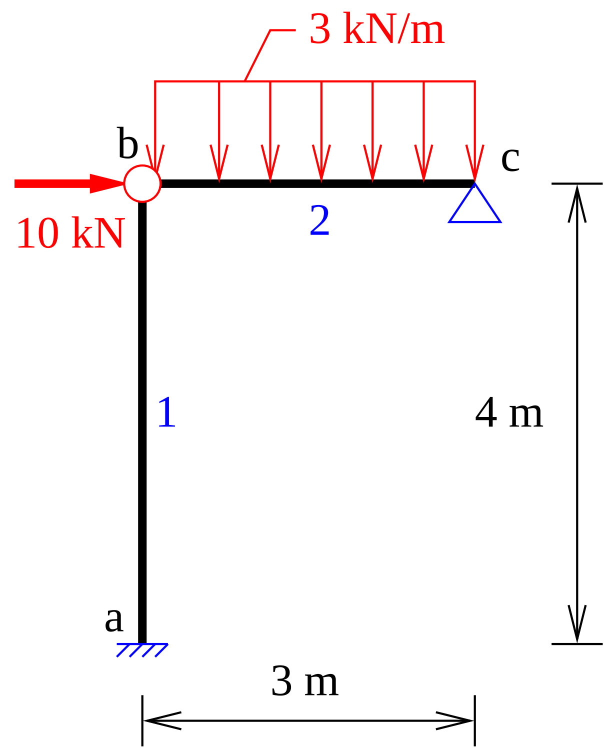
$$\mathbf{u^*_{ab}} = \mathbf{T_{ab}} \times \mathbf{u_{ab}} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.000045 \\ -0.00015 \\ 0 \end{array} \right\}$$

# Příklad 1: pravoúhlý rám (18)

Vypočítáme koncové síly na prutu $a - b$

$$\mathbf{F}^*_{\mathbf{ab}} = \mathbf{K}^*_{\mathbf{ab}} \times \mathbf{u}^*_{\mathbf{ab}} = \left\{ \begin{array}{c} 4500 \\ 0 \\ 0 \\ -4500 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} [N, Nm]$$



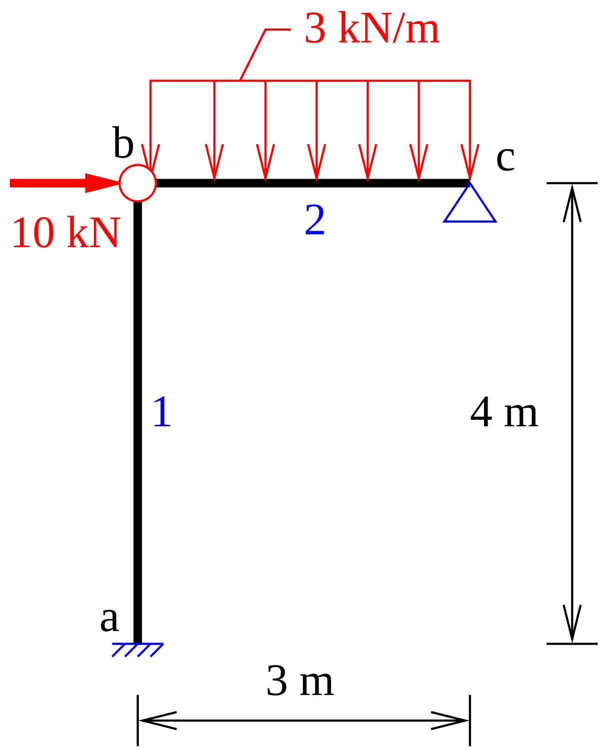
# Příklad 1: pravoúhlý rám (19)

Ze znalosti vektoru posunutí konstrukce $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_b \\ w_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00015 \\ -0.000045 \end{bmatrix} [m]$$

sestavíme vektor koncových deformací prutu $b - c$:

$$\mathbf{u_{bc}} = \left\{ \begin{array}{c|c} u_b & 0.0015 \\ w_b & -0.000045 \\ \varphi_b & 0 \\ u_c & 0 \\ w_c & 0 \\ \varphi_c & 0 \end{array} \right\}$$



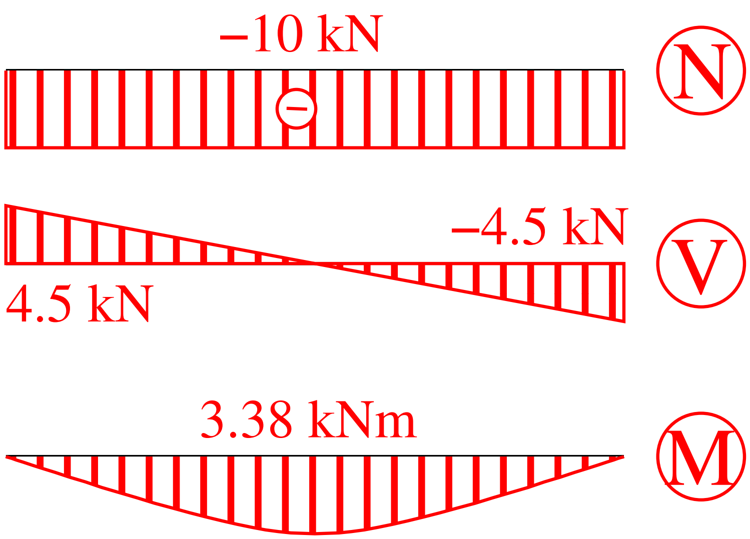

Transformujeme do lokálních souřadnic:

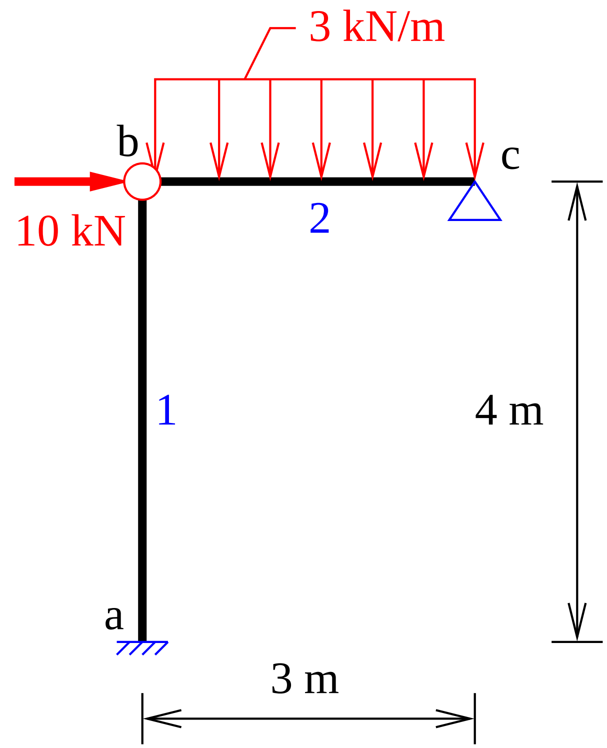
$$\mathbf{u^*_{bc}} = \mathbf{T_{bc}} \times \mathbf{u_{bc}} = \left\{ \begin{array}{c} 0.00015 \\ -0.000045 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

# Příklad 1: pravoúhlý rám (20)

Vypočítáme koncové síly na prutu $b - c$

$$\mathbf{F}^*_{\mathbf{ab}} = \mathbf{K}^*_{\mathbf{ab}} \times \mathbf{u}^*_{\mathbf{ab}} = \left\{ \begin{array}{c} 10000 \\ 0 \\ 0 \\ -10000 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} [N, Nm]$$

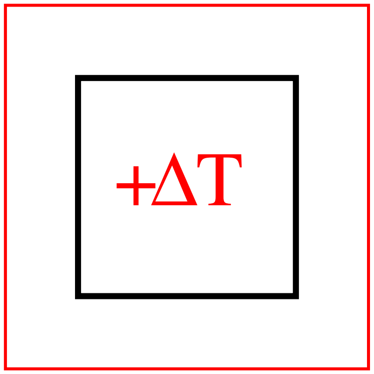


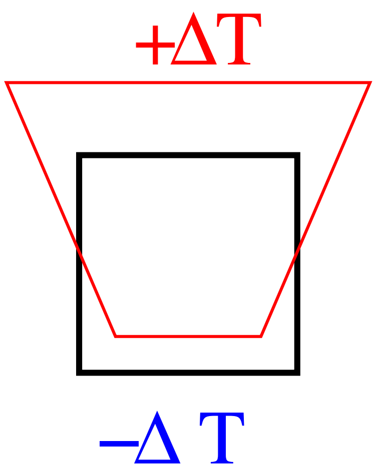




P.S. Je nutné také započítat vliv primárních sil (zde spojité zatížení)!

# Vliv změny teploty (1)

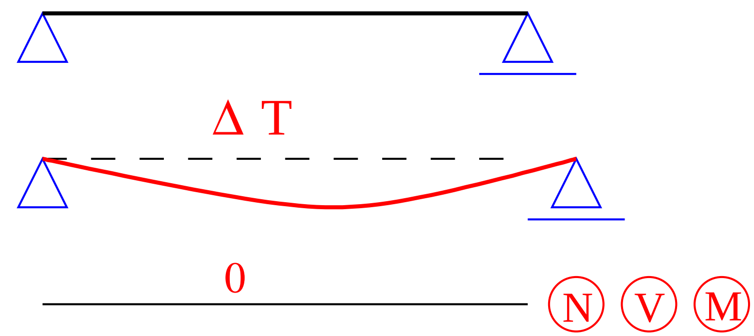
- Každá konstrukce má nějakou **výchozí teplotu** (při které byla sestavena nebo kterou byla navržena).
- Při této teplotě by měla mít minimální vnitřní síly.
- **Změny teploty** (ohřátí nebo ochlazení) vyvolávají **objemové změny** prvků konstrukce.
- Změna teploty může být:
  - rovnoměrná ve všech místech konstrukce (prvku),
  - nerovnoměrná.
- Změna teploty může, ale nemusí vyvolat dodatečné vnitřní síly v konstrukce (viz dále).

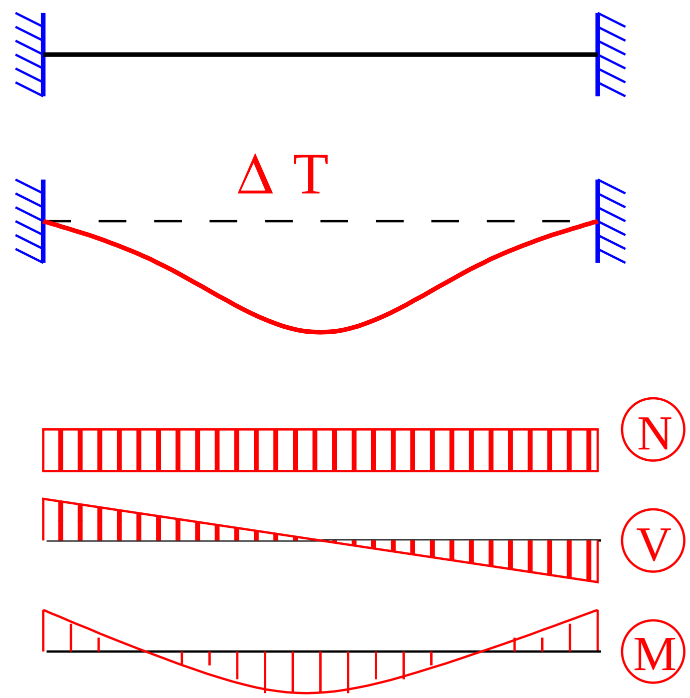


# Vliv změny teploty (2)

- Změna teploty obecně **neovlivňuje vnitřní síly** na **staticky určité konstrukci**.
- Pozor na detaily konstrukcí! (např. kombinace 2 materiálů, nebo detaily, které jsou samy o sobě staticky neurčité).
- Změna teploty **vždy** způsobí **deformaci konstrukce**.
- Ve staticky **neurčitých konstrukcích** změna teploty má **vždy** vždy vliv na **vnitřní síly**.



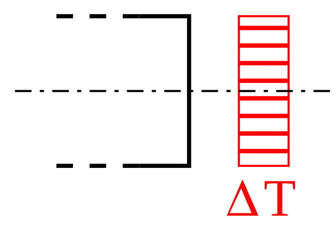



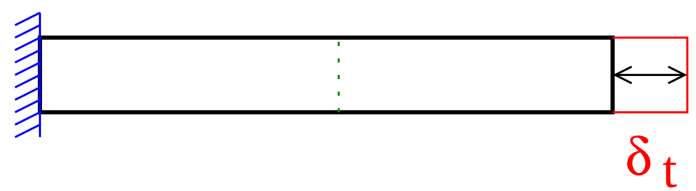
# Rovnoměrná změny teploty po průřezu (1)

- Pokud je nosník ohříván/ochlazován **rovnoměrně po výšce i šířce průřezu** dochází k osovému prodloužení nebo zkrácení nosníku.
- Pozor: prakticky **a přibližně** nastane jen u velmi štíhlých kontrukcí (ocel, hliník aj.), kde zase musíte dávat pozor na další jevy (stabilita,...).
- Z pružnosti:

$$\delta_T = \alpha_t \int_0^L \triangle\, T dx,$$

$\delta_T$ ... osová deformace, $\alpha_t$ součinitel teplotní roztažnosti, $\triangle\, T$ ... změna teploty.




**Poznámka:** zanedbáváme příčnou deformaci, ($\nu\ \delta_T$).

# Rovnoměrná změny teploty po průřezu (2)

- Uvažujeme jen osovou deformaci, budeme tedy předpokládat jen vodorovné posuny a síly (ostatní případné vnitřní síly budou 0).
- V silové metodě uvážíme tedy jen neznámou veličinu $X$ ve směru posunutí $\delta_T$
- Přetvárná podmínka:

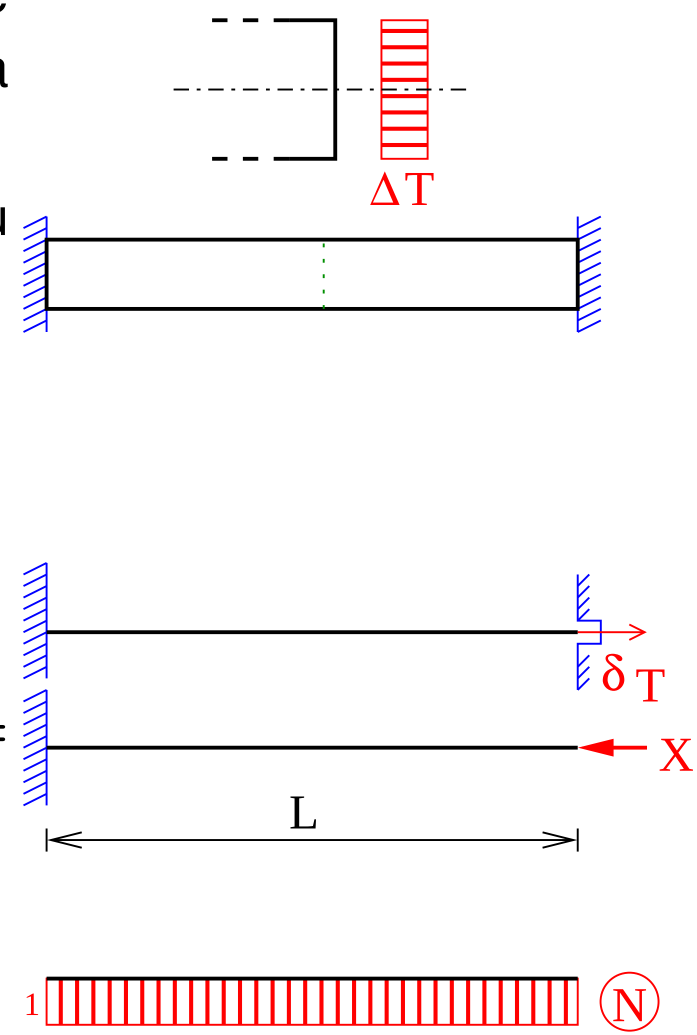
$$\delta_1 \, X_1 + \delta_T = 0$$

kde:

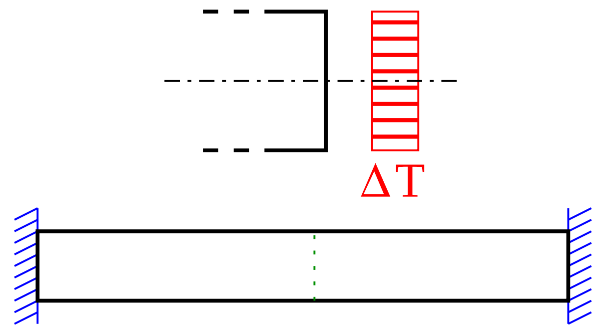
  * $\delta_1 = \int_0^L \frac{N\overline{N}}{EA} dx = \frac{1 \times L \times 1}{EA} = \frac{L}{EA}$
  * $\delta_T = \alpha_t \int_0^L \Delta \, T dx = \alpha_t \Delta \, T \int_0^L dx = \alpha_t \, \delta_T \, L$

- Tedy:

$$X_1 = N_b = -\frac{\delta_T}{\delta_1} = -E \, A \, \alpha_t \, \Delta \, T$$

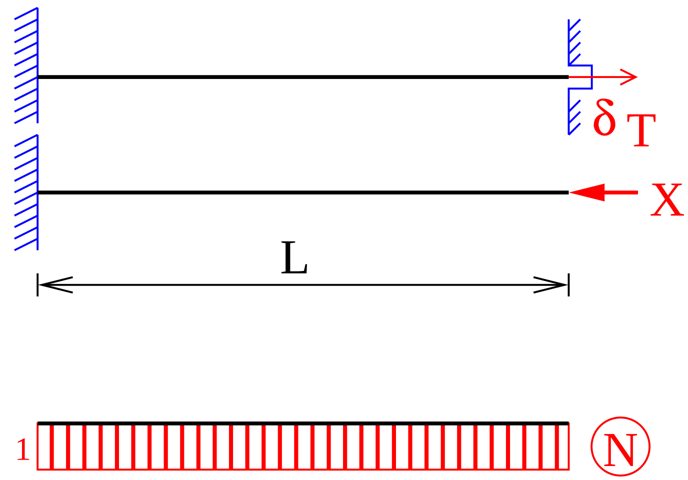


# Rovnoměrná změny teploty po průřezu (3)




Vektor **primárních** účinků tedy bude vypadat (pro libovolnou kombinaci kloubů a pružných upnutí):

$$F^{*}_{ab} = \left\{ \begin{array}{c} -E\,A\,\alpha_t\,\Delta\,T \\ 0 \\ 0 \\ E\,A\,\alpha_t\,\Delta\,T \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

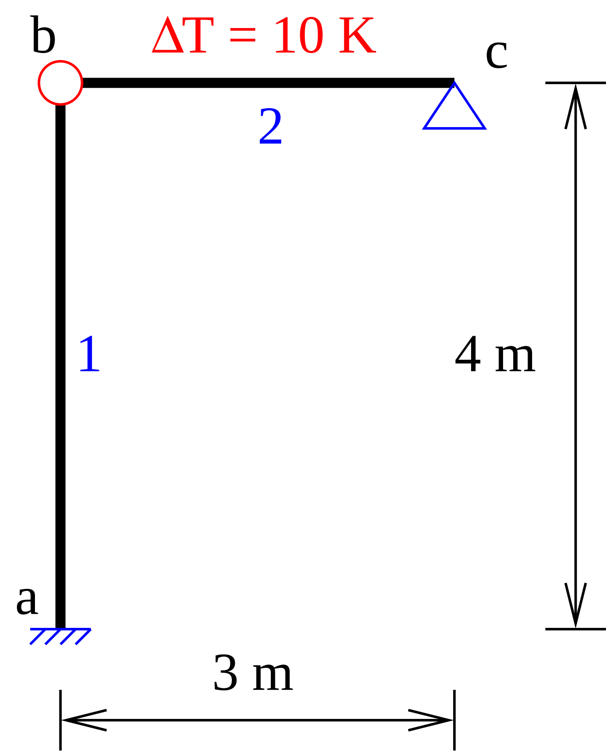


# Příklad 2: rám s rovnoměrnou změnou teploty (1)

**Zadání:** Prut 2 ($b - c$) rámu z **příkladu 1** je zatížen rovnoměrným ohřátím o 10 $K$. Stanovte vektor primárních sil prutu 2 a vypočítejte deformace konstrukce změny teploty.

Je zadáno:

- $\Delta T = 10\ K$
- $\alpha = 10 \times 10^{-6} K^{-1}$
- $E$ = 20 GPa
- $A_2$ = 0.01 $m^2$




P.S. Co je to za materiál s $\alpha = 10 \times 10^{-6} K^{-1}$?

P.P.S. Můžeme použít i jednotku [$^o\ C^{-1}$]? Jak se bude lišit výpočet?

# Příklad 2: rám s rovnoměrnou změnou teploty (2)

Výpočet koncových sil:

$$N_a = -N_b = E\,A\,\alpha_t\,\Delta_T = 20\times10^9\times0.01\times10\times10^{-6}\times10 = 200000\,N$$

Vektor koncových sil prutu $b-c$:

$$F^*_{bc} = \left\{ \begin{array}{c|c} N_b & -200000 \\ V_b & \mathbf{0} \\ M_b & 0 \\ N_c & 200000 \\ V_c & 0 \\ M_c & 0 \end{array} \right\}$$

Vektor bychom měli transformovat do globálních souřadnic ($\mathbf{F_{bc}} = \mathbf{T^T} \times \mathbf{F^*_{bc}}$). Vzhledem k tomu, že prut leží v globální ose $x$, bude výsledek: $\mathbf{F_{bc}} = \mathbf{F^*_{bc}}$.

# Příklad 2: rám s rovnoměrnou změnou teploty (3)

Soustava lineárních rovnic pro zadanou konstrukci (matice tuhosti je převzata z **příkladu 1**):

$$\begin{bmatrix} 6.273e7 & 0 \\ 0 & -9.986e7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_b \\ w_b \end{bmatrix} = \left\{ \begin{array}{c} -200000 \\ 0 \end{array} \right\}$$

Získáme deformace:

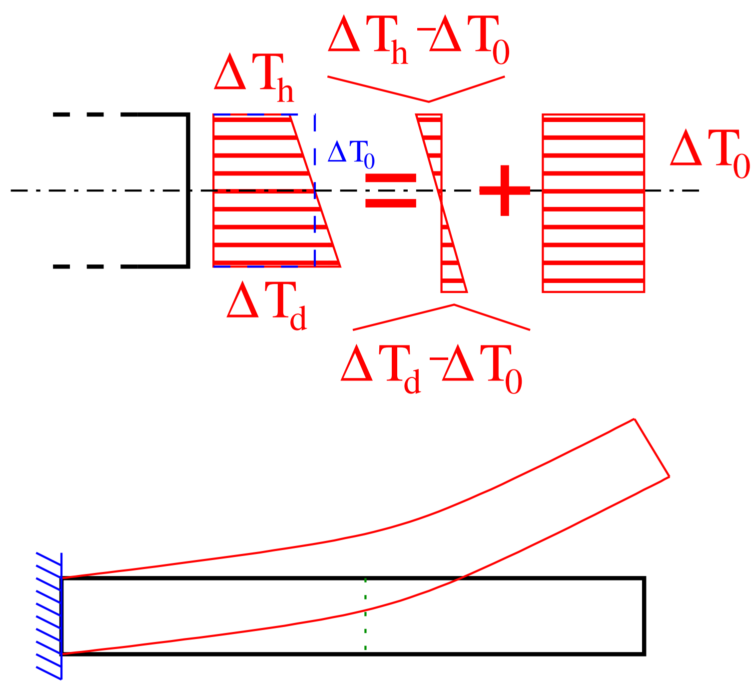
$$\mathbf{u} = \left\{ \begin{array}{c} -3 \times 10^{-3} \\ 0 \end{array} \right\}$$

Konstrukce se tedy posune **doleva** o $3\ mm$.

Pro zajímavost, normálová síla v prutu 2 ($b - c$) bude $*200\ kN$ (tlak), zatímco *povoubající* síly na koncích prutu 1 ($a - b$) vyjdou cca $|0.8|\ kN$ a momenty cca $|0.4|\ kN\ m$.

# Nerovnoměrná změny teploty po průřezu (1)

- Pokud je nosník ohříván/ochlazován **nerovnoměrně po výšce, případně i šířce průřezu** dochází k ohýbání nosníku (nenulové M, V) i k osové deformaci (N).
- Předpokládáme **lineární** změnu teploty po výšce průřezu
- Nerovnoměrnou, ale lineární, změnu teploty můžeme rozdělit na 2 části:
  - Rovnoměrou část ($\Delta T_0$) – vyvolá prodloužení/zkrácení
  - Lineárně proměnnou část ($\Delta T1 = \Delta T_d - \Delta T_h$)) – vyvolá ohyb nosníku




**Poznámka:** opět zanedbáváme příčnou deformaci, ($\nu\ \delta_T$).

# Nerovnoměrná změny teploty po průřezu (2)

Posunutí krajních vláken v průřezu $x$ podle pružnosti:

$$\alpha_t \times \Delta T_1$$

Pootočení průřezu potom bude

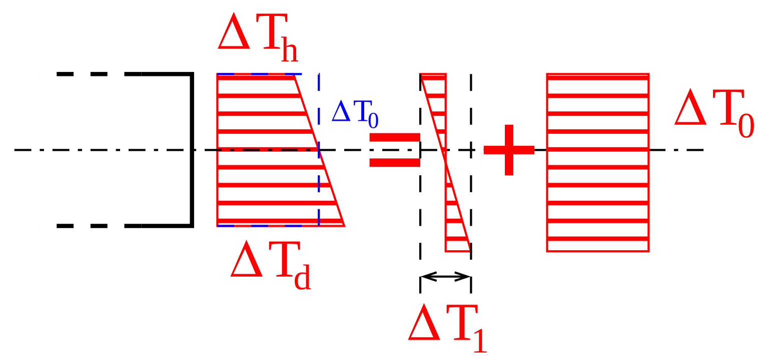
$$\varphi_x \approx \tan(\varphi_x) = \frac{\alpha_t\, \Delta T_1}{h}$$

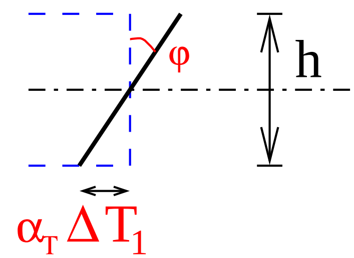
Tedy pro celý nosník délky $L$:

$$\delta_T = \int_0^L \varphi_x dx = \int_0^L \overline{M} \times \frac{\alpha_t\, \Delta T_1}{h} dx$$

Kde:

- $\Delta T_1 = \Delta T_d - \Delta T_h$
- $\Delta T_0$ má procházet neutrálnou osou, tedy u symetrického průřezu: $\Delta T_0 = \frac{\Delta T_d - \Delta T_h}{2}$



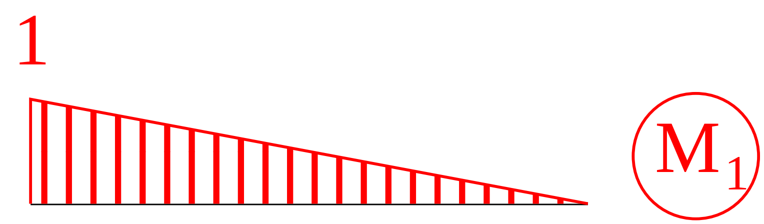
# Nerovnoměrná změny teploty po průřezu (3)

Výpočet pootočení konce prutu $a$:

$$\varphi_{ab} = \int_0^L \overline{M} \frac{\alpha_t \ \Delta T_1}{h} dx = \frac{\alpha_t \ \Delta T_1 \ L}{h}$$

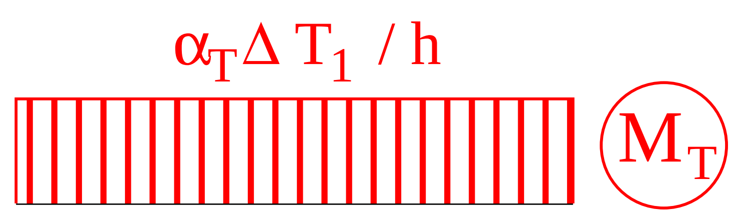
Stejně bychom stanovili $\varphi_{ba}$:

$$\varphi_{ba} = \int_0^L \overline{-M} \frac{\alpha_t \ \Delta T_1}{h} dx = -\frac{\alpha_t \ \Delta T_1 \ L}{h}$$




Protože ze silové metody (pozor na orientaci $\varphi_{ba}$) víme, že $M_a = \frac{2 \ EI}{L}(\varphi_{ba} + 2\varphi_{ab})$ lze po dosazení získat:

$$M_a = \frac{1}{h} EI \alpha_t \Delta T_1$$




a podobně bychom dostali:

$$M_b = -\frac{1}{h} EI \alpha_t \Delta T_1$$

# Primární zatěžovací vektory od nerovnoměrné změny teploty

Prut oboustranně pružně upnutý:

$$\left\{\begin{array}{c} EA\alpha_t\Delta T_0 \\ 0 \\ \frac{EI\alpha_t\Delta T_1}{h} \\ -EA\alpha_t\Delta T_0 \\ 0 \\ -\frac{EI\alpha_t\Delta T_1}{h} \end{array}\right\}$$

Prut jednostranně pružně upnutý s kloubem vpravo:

$$\left\{\begin{array}{c} EA\alpha_t\Delta T_0 \\ -\frac{3EI\alpha_t\Delta T_1}{2\,h\,L} \\ \frac{3EI\alpha_t\Delta T_1}{h} \\ -EA\alpha_t\Delta T_0 \\ -\frac{3EI\alpha_t\Delta T_1}{2\,h\,L} \\ 0 \end{array}\right\}$$

Tyto vektory použijeme stejně jako dříve odvozené vektory od silových veličin působících na prutech.

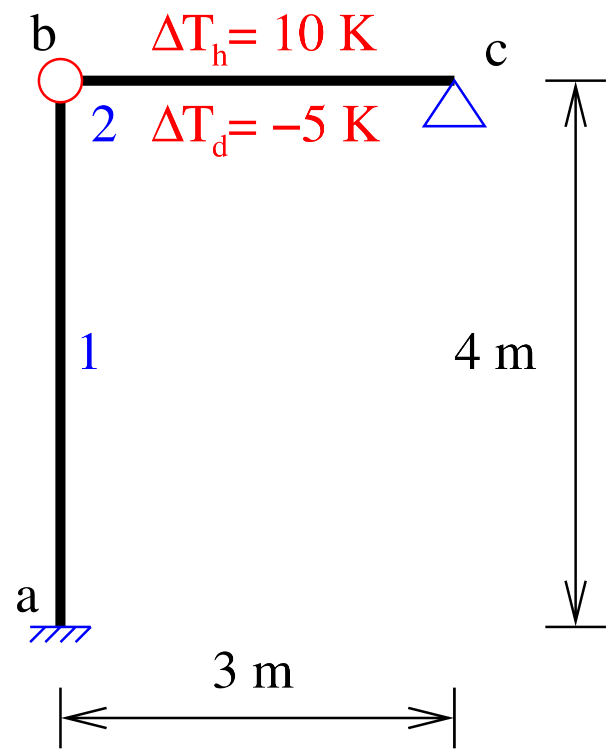
Pozn.: na oboustranně kloubově uloženém prutu má na vnitřní síly vliv pouze rovnoměrná složka změny teploty ($\Delta T_0$)!

# Příklad 3: rám s nerovnoměrnou změnou teploty (1)

**Zadání:** Prut 2 rámu z **příkladu 1** je zatížen ohřátím horního povrchu o 10 $K$ a dolního povrchu o 5 $K$. Stanovte vektor primárních sil prutu 2 ($b - c$) a vypočítejte deformace konstrukce od změny teploty.

Je zadáno:

- $\Delta T_h = 10\ K$
- $\Delta T_d = 5\ K$
- $\alpha = 10 \times 10^{-6} K^{-1}$
- $E$ = 20 $GPa$
- $h$ = 0.1 $m$
- $A_2$ = 0.01 $m^2$
- $I_{z2}$ = 8.3 × $10^{-6}$ $m^4$



# Příklad 3: rám s nerovnoměrnou změnou teploty (2)

Výpočet teplot:

$$\Delta\, T_1 = T_d - T_h = 5 - 10 = -5\ K$$

$$\Delta\, T_0 = \frac{T_d + T_h}{2} = 5 + 10 = 7.5\ K$$

Výpočet koncových sil:

$$N_a = -N_b = E\,A\,\alpha_t\,\Delta_T = 20{\times}10^9{\times}0.01{\times}10{\times}10^{-6}{\times}7.5 = 154000 kN$$

$$M_a = \frac{EI\alpha_t \Delta T_1}{h} = \frac{20 \times 10^9 \times 8.3 \times 10^{-6} \times 10 \times 10^{-6} \times -5}{0.1} = -830 N\,m$$

$$M_b = -M_a = 830\ Nm$$

# Příklad 3: rám s nerovnoměrnou změnou teploty (3)

Vektor koncových sil prutu $b - c$:

$$F^*_{bc} = \left\{ \begin{array}{l|l|c} N_b & EA\alpha_t\Delta t_0 & -154e3 \\ V_b & 0 & \mathbf{0} \\ M_b & \frac{EI\alpha_t\Delta T_1}{h} & -830 \\ N_c & -EA\alpha_t\Delta t_0 & 154e3 \\ V_c & 0 & 0 \\ M_c & -\frac{EI\alpha_t\Delta T_1}{h} & 830 \end{array} \right\}$$

Prut leží v globální ose $x$, bude výsledek: $\mathbf{F_{bc}} = \mathbf{F^*_{bc}}$

# Příklad 3: rám s nerovnoměrnou změnou teploty (4)

Soustava lineárních rovnic pro zadanou konstrukci (matice tuhosti je převzata z **příkladu 1**):

$$\begin{bmatrix} 6.273e7 & 0 \\ 0 & -9.986e7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_b \\ w_b \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} -154e3 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Získáme deformace:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} -2.3 \times 10^{-3} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Konstrukce se tedy posune **doleva** o $2.3\ mm$.

Pro zajímavost, normálová síla v prutu 2 ($b-c$) bude $-154\ kN$ (tlak), zatímco *posoubající* síly na koncích prutu 1 ($a-b$) vyjdou cca $|0.57|\ kN$ a momenty cca $|0.29|\ kN\ m$.