

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA

FAKULTA STAVEBNÍ

INŽENÝRSKÉ STATICKÉ VÝPOČTY

Deformační metoda: základní pojmy

Jiří Brožovský

Kancelář: LP – H 406/3
Telefon: 597 321 321

E-mail: jiri.brozovsky@vsb.cz

Statická a přetvárná neurčitost

Statická neurčitost: počet neznámých silových veličin (reakce podpor, vnitřní síly v uzavřených částech), které je nutno stanovit, aby bylo možno pokračovat ve výpočtech vnitřních sil konstrukce. Viz využití v silové metodě (počet „staticky neurčitých“ veličin).

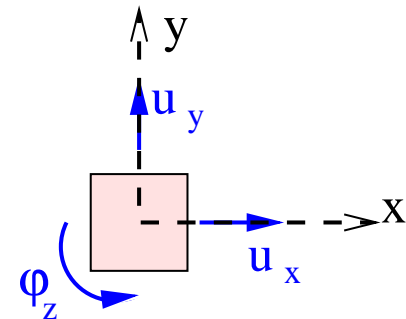
Přetvárná neurčitost: počet neznámých deformací ve styčnicích, které *je třeba stanovit*, aby bylo možno pokračovat ve výpočtech vnitřních sil konstrukce. Viz využití v deformační metodě (počet „neznámých deformačních“ veličin).

Pojem „přetvárná neurčitost“ se může lišit pro různé varianty deformační metody (zjednodušující úpravy metody se snažily mj. snížit výpočetní náročnost snížením počtu neznámých veličin). Dále uvedené vztahy budou vhodné pro **obecnou deformační metodu**.

Přetvárná neurčitost (1)

Přetvárná neurčitost: počet neznámých deformací ve styčnicích, které je třeba stanovit...

- Styčník **v rovině** má 3 možnosti pohybu (deformace): 2 posunutí, 1 pootočení (u_x, u_y, φ_z) = u, v, φ .
- Styčník **v prostoru** má 6 možností pohybu (deformace): 3 posunutí, 3 pootočení $u_x, u_y, u_z, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$.
- Platí pro každý styčník, nicméně ve **specifických případech** (příhradová konstrukce,...) nemusíme chtít počítat všechny neznámé.



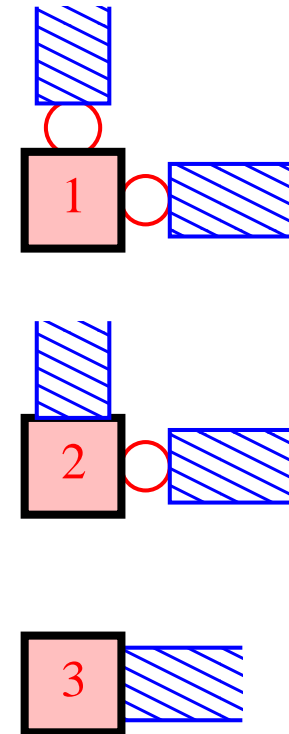
Deformace **konců prutů** připojených ke styčníku jsou **obvykle** shodné s deformacemi styčníku (záleží na druhu připojení – viz klouby).

Přetvárná neurčitost (2)

Přetvárná neurčitost: počet neznámých deformací ve styčnicích, které je třeba stanovit...

Specifické případy:

1. Kloubové spojení prutů („příhradovina“): 2 neznámé, protože φ zde není definováno
2. Kloubové připojení některých prutů: 3 neznámé
3. Volný konec: obvykle 2 neznámé (φ lze počítat, ale obvykle není důvod)

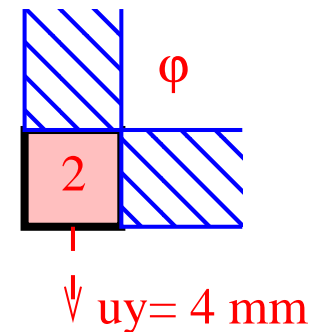
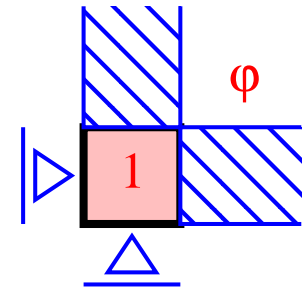


Přetvárná neurčitost (3)

Přetvárná neurčitost: počet neznámých deformací ve styčnicích, které je třeba stanovit...

Podpory:

1. Pevná vazba znamená, že příslušné posunutí nebo pootočení je nulové (např. $u_x = 0 \text{ mm}$)
2. Předepsaná deformace (např. $u_y = 11 \text{ mm}$) je informace nutná pro výpočet, proto tyto vazby **započítáme** do stupně přetvárné neurčitosti

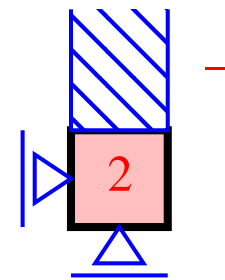
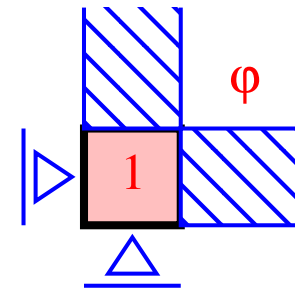


Přetvárná neurčitost (4)

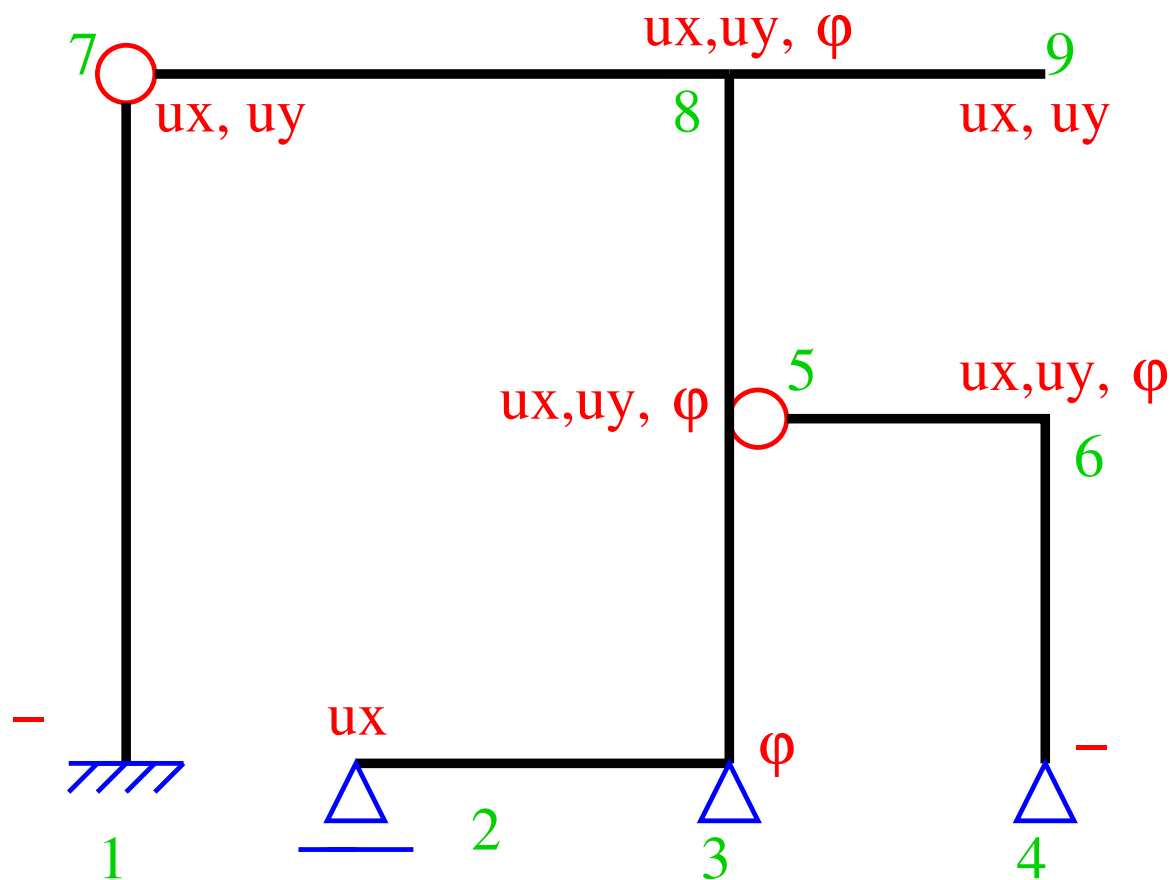
Přetvárná neurčitost: počet neznámých deformací ve styčnicích, které je třeba stanovit...

Podpory:

1. V kloubové podpoře je nutné počítat s pootočením φ
2. Výjimkou je případ, kdy je podepřen „volný konec“ – zde není nutné φ počítat (pokud tuto hodnotu nepotřebujeme pro nějaký navazující výpočet)

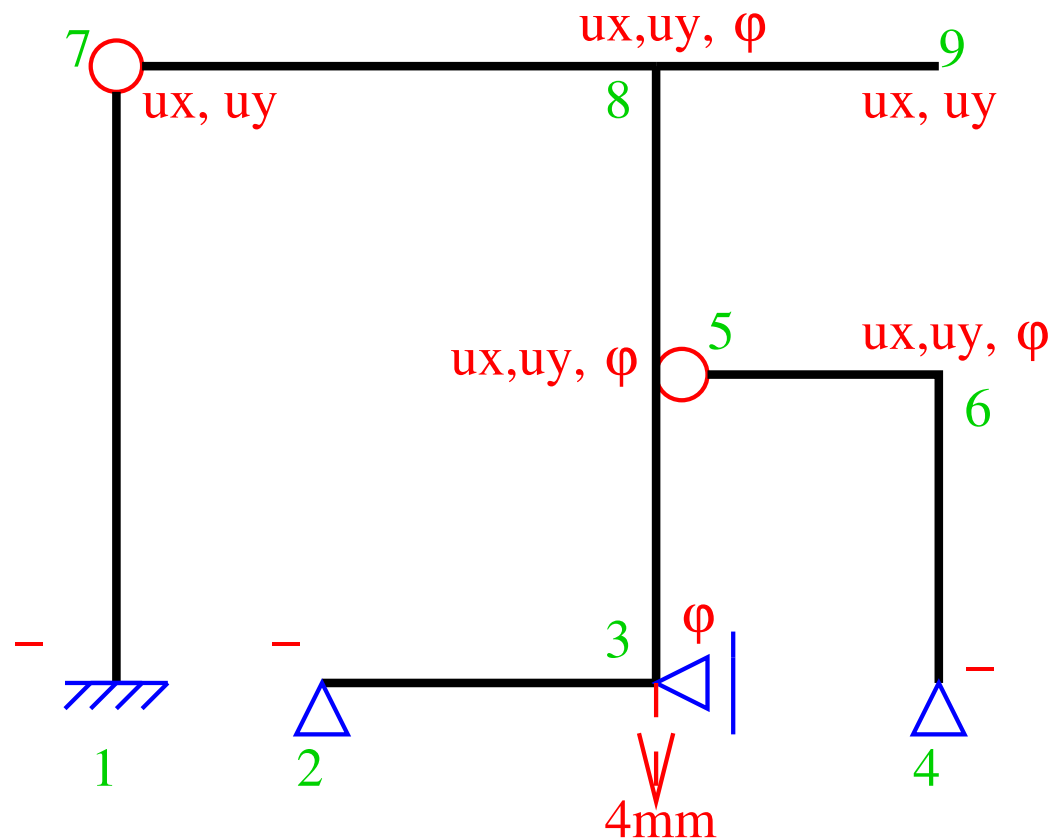


Přetvárná neurčitost (5)



Daná konstrukce obsahuje 15 neznámých uzlových parametrů, které budou vstupovat do výpočtu. **Stupeň přetvárné neurčitosti je tedy 15.**

Přetvárná neurčitost (6)

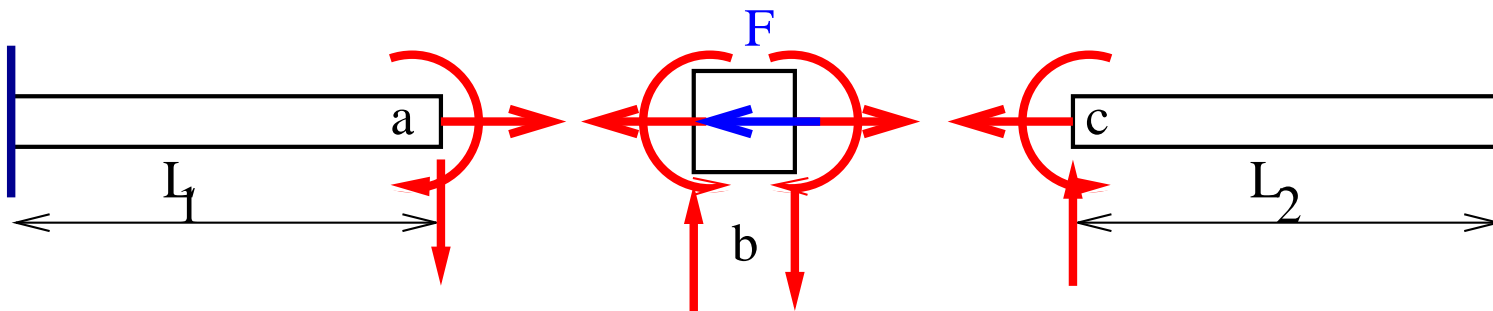


Daná konstrukce obsahuje 14 neznámých uzlových parametrů, které budou vstupovat do výpočtu. **Stupeň přetvárné neurčitosti je tedy 14.**

Popuštění podpory 4 (4 mm) počítejte jako neznámou – budeme pro ni muset sestavovat rovnice.

Deformační metoda: princip (1)

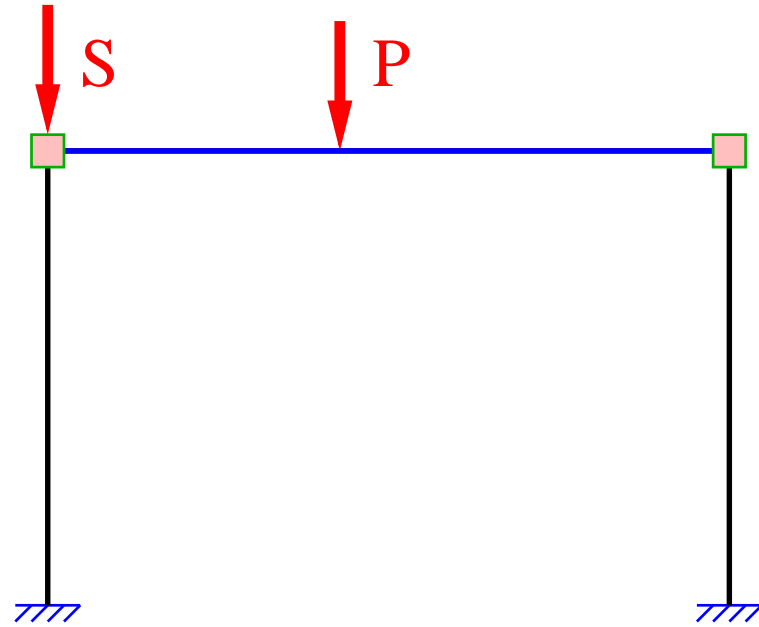
- Sestavujeme **podmínky rovnováhy** ve všech styčnících.
- Síly a momenty vyjádříme pomocí **deformací**.
- Získáme soustavu rovnice s jejíž pomocí určíme neznámé deformace.
- Z deformací dopočteme neznámé síly a momenty.



Deformační metoda: princip (2)

Zatížení může působit:

- Na jednotlivých **prutech** (tzv. primární) – na obrázku P.
- Ve **styčnicích** (tzv. sekundární) – na obrázku S.

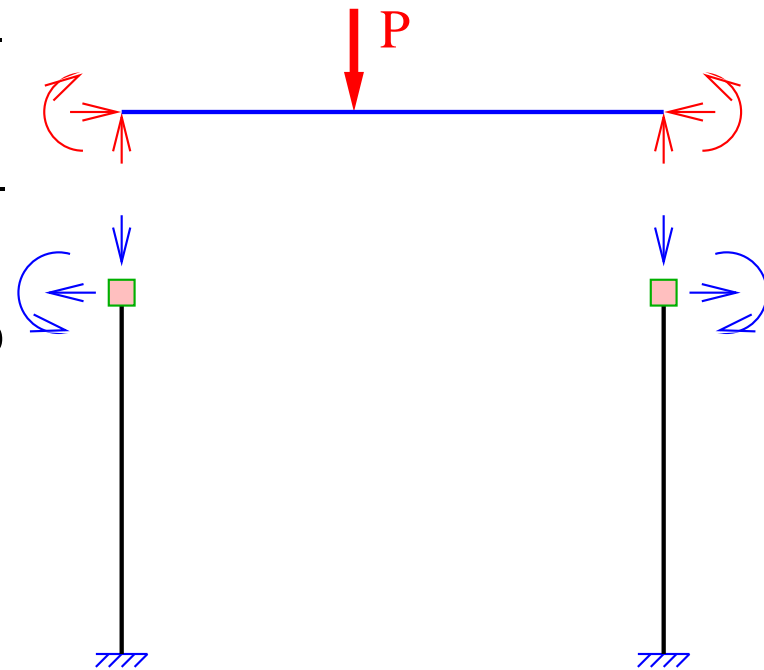


Primární zatížení na prutu vyvolá koncové síly působící na styčnící (jako „reakce“ v podporách) – s těmi můžeme dále počítat stejným způsobem jako se sekundárním zatížením (viz dále).

Deformační metoda: princip (3)

Účinky primárního zatížení:

- Stanovíme na nosníku vyjmutém z konstrukce (zbytek konstrukce nahradíme podepřením).
- Zpravidla staticky neurčitá úloha – řešení silovou metodou.
- Spočtené **reakce** poslouží jako zatížení „zbytku“ konstrukce.



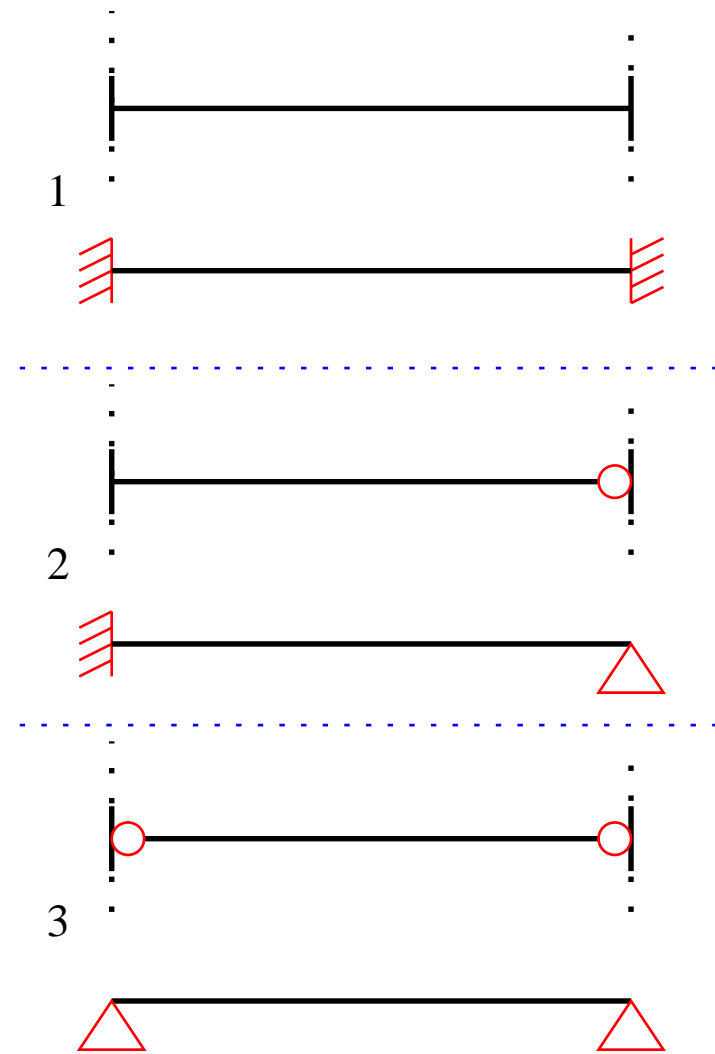
Poznámka: platí předpoklady lineární statiky a pružnosti, proto jsme užili *principu superpozice*.

Deformační metoda: princip (4)

Okrajové podmínky nosníků vyjmutých z konstrukce:

1. Oboustranně pružně upnutý nosník.
2. Nosník na jednom konci pružně upnutý a na druhém konci kloubově připojený.
3. Oboustranně kloubově připojený nosník.

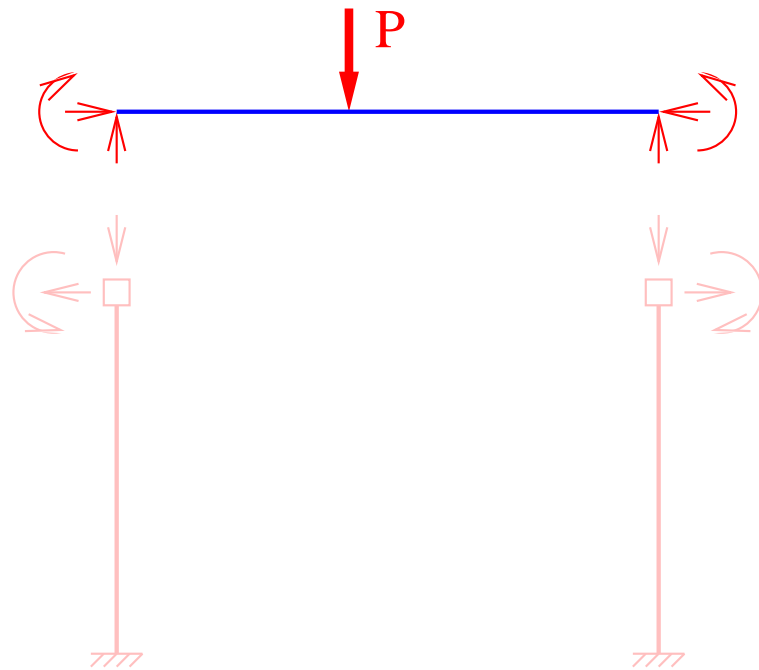
Poznámka: V dalším výkladu se zaměříme na případ 1. Ostatní varianty lze odvodit stejným postupem (s jinými okrajovými podmínkami, méně neznámými atd.).



Deformační metoda: princip (5)

Vyjmutá část konstrukce musí být v rovnováze:

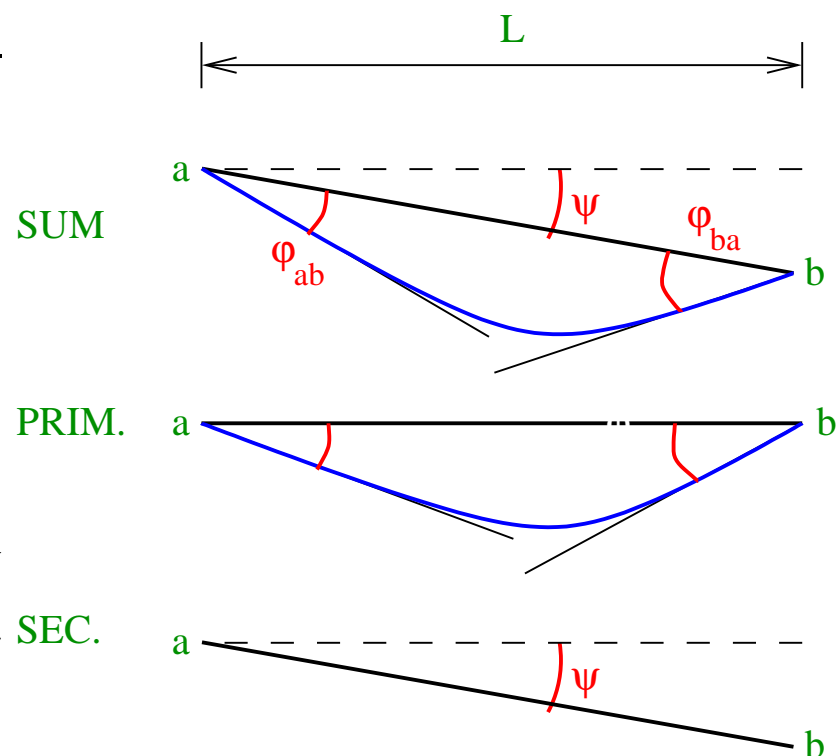
1. Můžeme tedy napsat podmínky rovnováhy jen pro tuto část.
2. Využijeme při odvození i při následných výpočtech.



Dále si odvodíme (připomeneme) vztahy mezi deformacemi a koncovými silami na přímém nosníku.

Deformační metoda: princip (6)

- Celková pootočení (SUM) **rozdělíme** na pootočení od primárních (φ – PRIM) a sekundárních (ψ – SEC) zatížení
- Dále ještě vyšetříme vliv zkrácení od primárních normálových sil...
- Můžeme si dovolit takto postupovat, protože:
 - používáme předpoklady lineární statiky (malé deformace, Hookeův zákon)
 - zanedbáváme vliv posouvajících si na deformace!

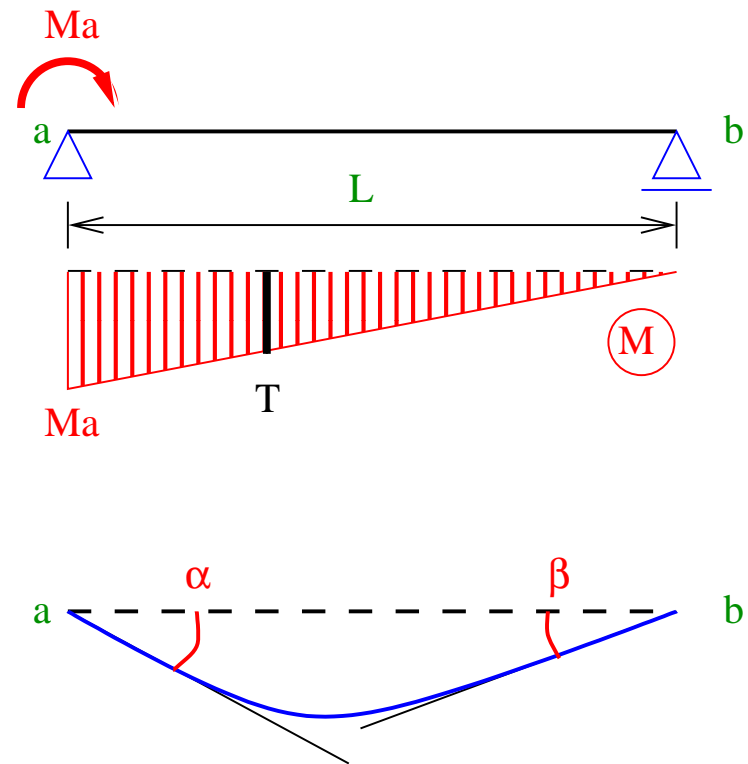


Deformace konců nosníku (1)

Vyšetříme nejprve chování nosníku od účinků primárních zatížení (na konci prutu, ne ve styčnicku).

Prostý nosník zatížený osamělým momentem na konci a :

- Moment M_a vyvolá deformaci charakterizovanou úhly α, β
- Úhly je možné stanovit například *metodou jednotkových sil*.
- Vykreslen je průběh ohybových momentů od zadaného zatížení M_a .



Deformace konců nosníku (2)

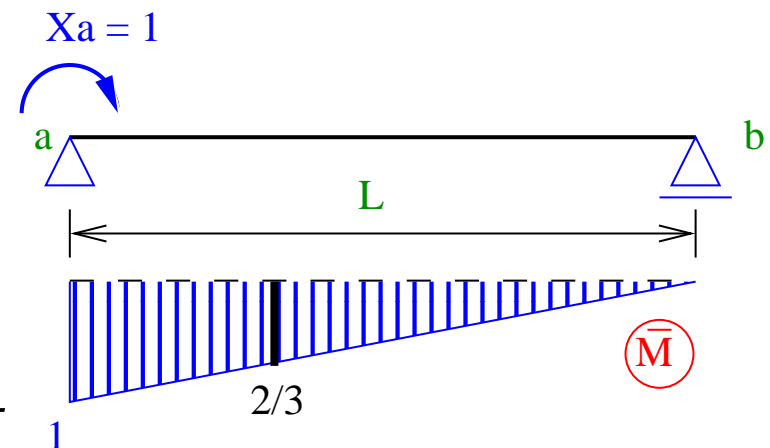
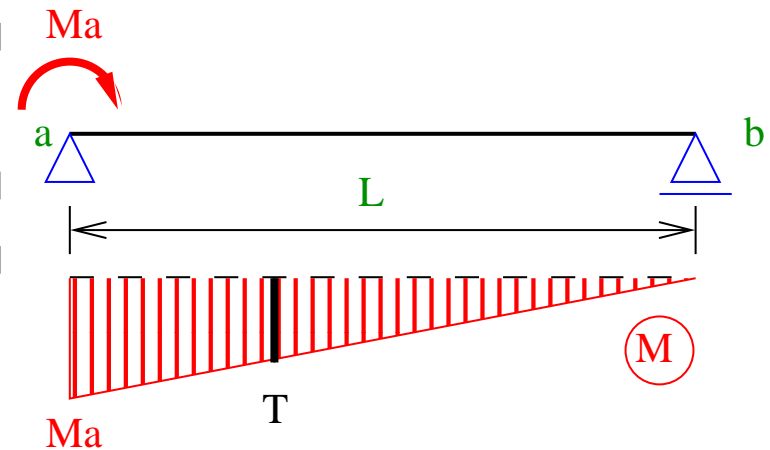
Výpočet úhlu α v bodě a :

- Stanovíme průběh ohybových momentů od skutečného zatížení (M).
- Zatížíme virtuálním jednotkovou silou $X_a = 1$ a vypočteme průběh momentů \bar{M} .
- Spočteme deformaci α :

$$\begin{aligned} \alpha &= \int_0^L \frac{M \times \bar{M}}{EI} \\ &= \frac{1}{EI} \times \frac{1}{2}L \times M_a \times \frac{2}{3} \times 1 \\ &= \frac{M_a L}{3 EI} \end{aligned}$$

- Pro $M_a = 1$ vyjde tzv. *základní deformační úhel* prostého nosníku:

$$\alpha = \frac{L}{3 EI}$$



Deformace konců nosníku (3)

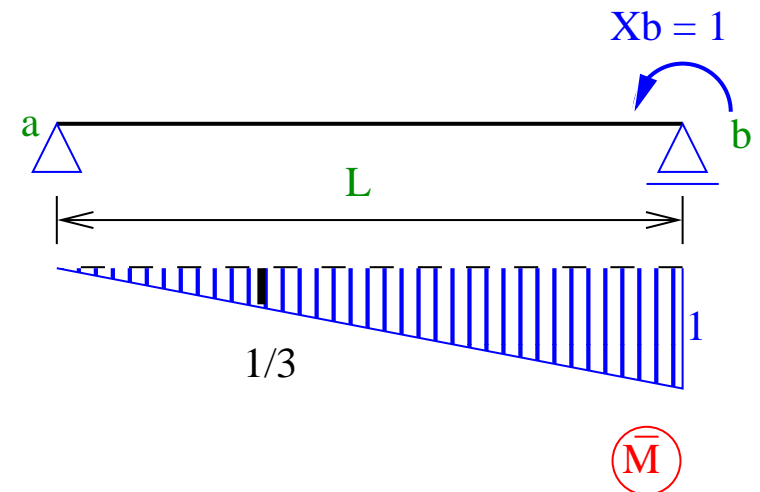
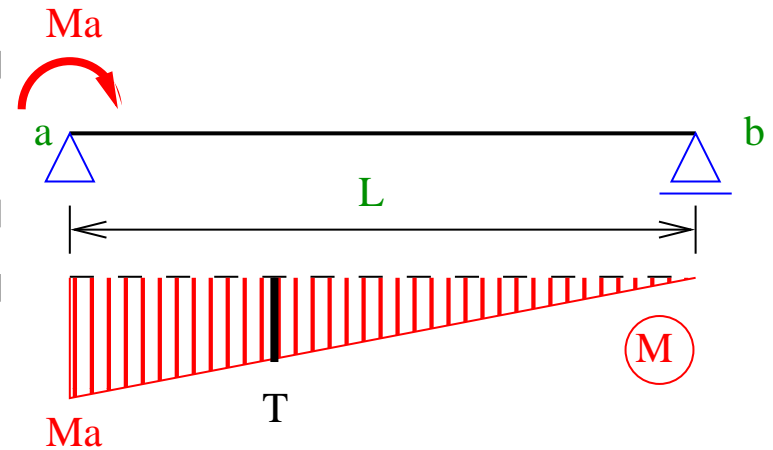
Výpočet úhlu β v bodě b :

- Stanovíme průběh ohybových momentů od skutečného zatížení (M).
- Zatížíme virtuálním jednotkovou silou $X_a = 1$ a vypočteme průběh momentů \bar{M} .
- Spočteme deformaci β :

$$\begin{aligned}\beta &= \int_0^L \frac{M \times \bar{M}}{EI} \\ &= \frac{1}{EI} \times \frac{1}{2}L \times M_a \times \frac{1}{3} \times 1 \\ &= \frac{M_a L}{6 EI}\end{aligned}$$

- Pro $M_b = 1$ vyjde tzv. *základní deformační úhel* prostého nosníku:

$$\beta = \frac{L}{6 EI}$$



Deformace konců nosníku (4)

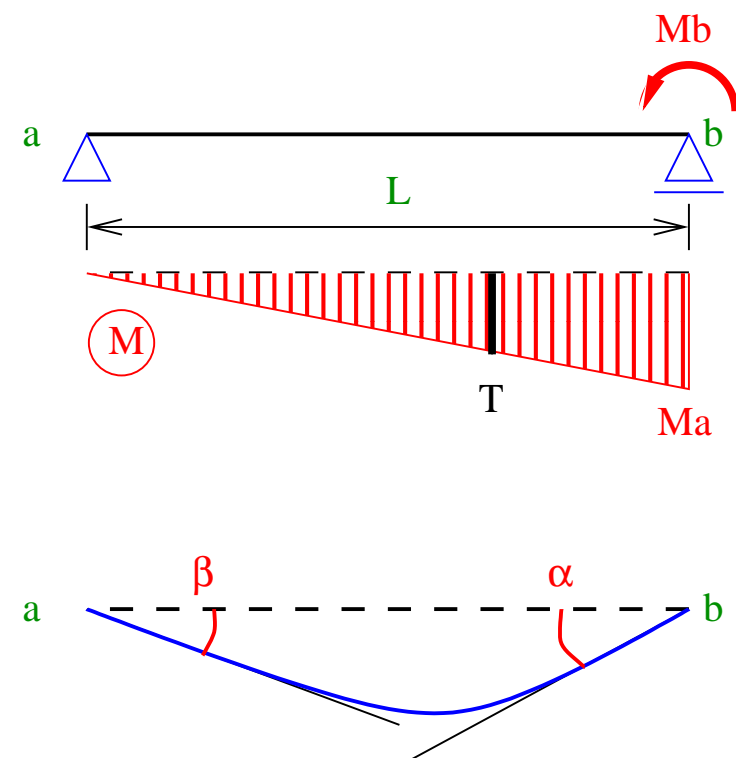
Základní deformační úhly pro moment v bodě b:

- Stanovíme stejně jako předtím.
- Úloha je jen „zrcadlově obrácená“ – můžeme vypočítat stejným postupem.
- V bodě **a** vyjde:

$$\beta = \frac{L}{6 EI}$$

- V bodě **b** vyjde:

$$\alpha = \frac{L}{3 EI}$$

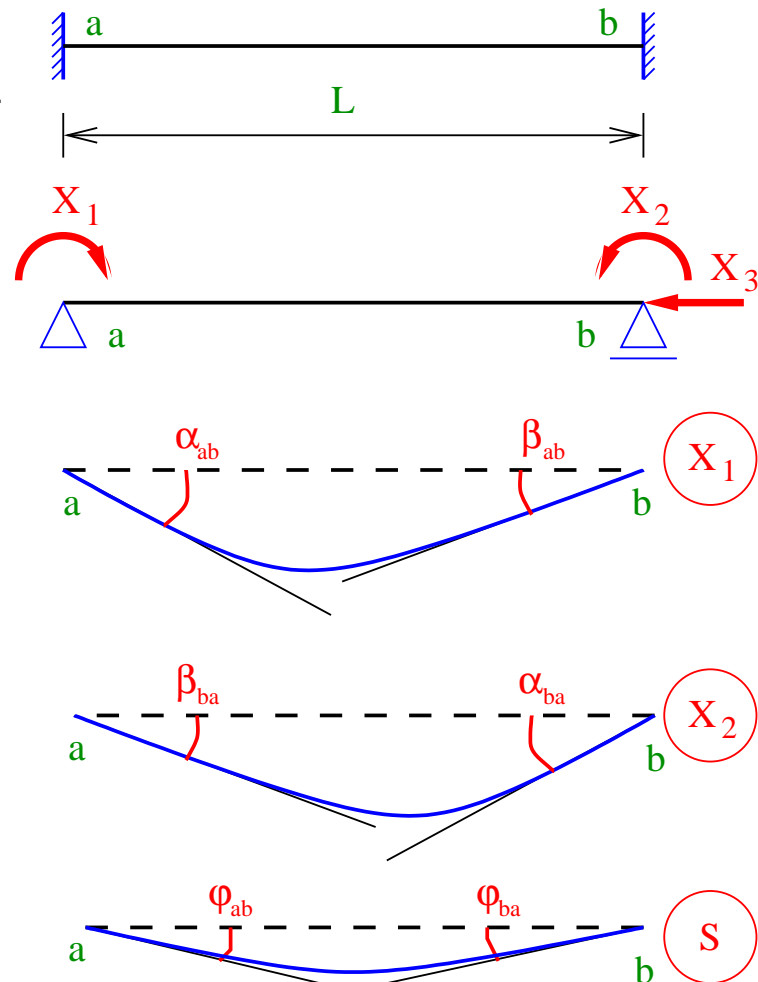


Získané hodnoty využijeme v dalším výpočtu.

Deformace konců nosníku (5)

Primární účinky – **oboustranně pružně upnutý nosník**: $3 \times$ staticky neurčitá úloha:

- Použijeme silovou metodu \Rightarrow převedeme na prostý nosník se 3 neznámými reakcemi v podporách.
- Vodorovné účinky (X_3) vyřešíme samostatně.
- Hledáme úhly φ_{ab} a φ_{ba} vyvolané účinkem skutečného zatížení.
- Hodnoty α, β využijeme z předchozích snímků.
- Sestavíme deformační rovnice pro pootočení v bodech **a**, **b**.



Deformace konců nosníku (6)

Deformační rovnice pro pootočení v bodech **a**, **b**:

$$X_1 \alpha_{ab} + X_2 \beta_{ab} + \varphi_{ab} = 0$$

$$X_1 \beta_{ba} + X_2 \alpha_{ba} + \varphi_{ba} = 0$$

Při znalosti $\alpha = \frac{L}{3EI}$, $\beta = \frac{L}{6EI}$:

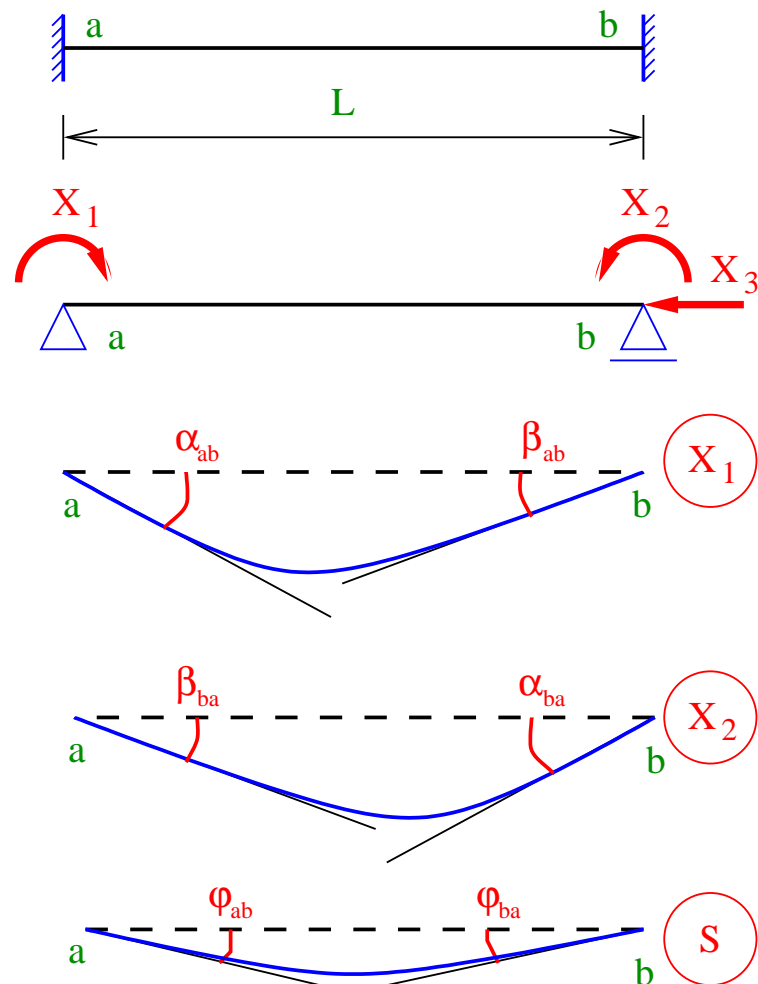
$$X_1 \frac{L}{3EI} + X_2 \frac{L}{6EI} + \varphi_{ab} = 0$$

$$X_1 \frac{L}{6EI} + X_2 \frac{L}{3EI} + \varphi_{ba} = 0$$

Lze vyřešit obecně (zkuste si doma!):

$$X_1 = M_a = \frac{2EI}{L}(\varphi_{ba} - 2\varphi_{ab})$$

$$X_2 = M_b = \frac{2EI}{L}(\varphi_{ab} - 2\varphi_{ba})$$

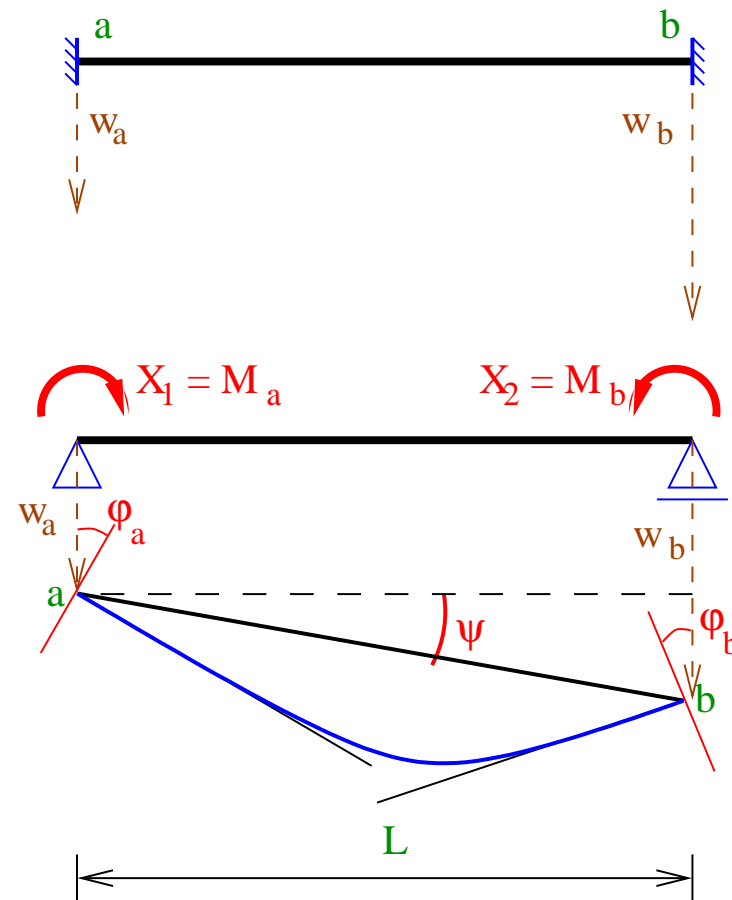


Popuštění konců nosníku (1)

Vyšetříme chování nosníku navíc od účinků sekundárních zatížení (svislý posun styčníků \Rightarrow potočení nosníku jako celku ψ).

- Sledujeme potočení prutu jako celku.
- Zanedbáme případnou osovou deformaci (prodloužení/zkrácení).
- Spočítáme silovou metodou jako popuštění podpor.
- Současně započítáme i účinky potočení konců (stanovili jsme před chvílí).
- Přibližně lze počítat (v radiánech):

$$\psi = \psi_{ab} = \psi_{ba} \approx \operatorname{tg} \psi = \frac{w_b - w_a}{L}.$$



Popuštění konců nosníku (2)

Konce nosníků se pootočí o φ_a a φ_b :

$$M_a \times \alpha_{ab} + M_b \times \beta_{ab} + \psi_{ab} = \varphi_a$$

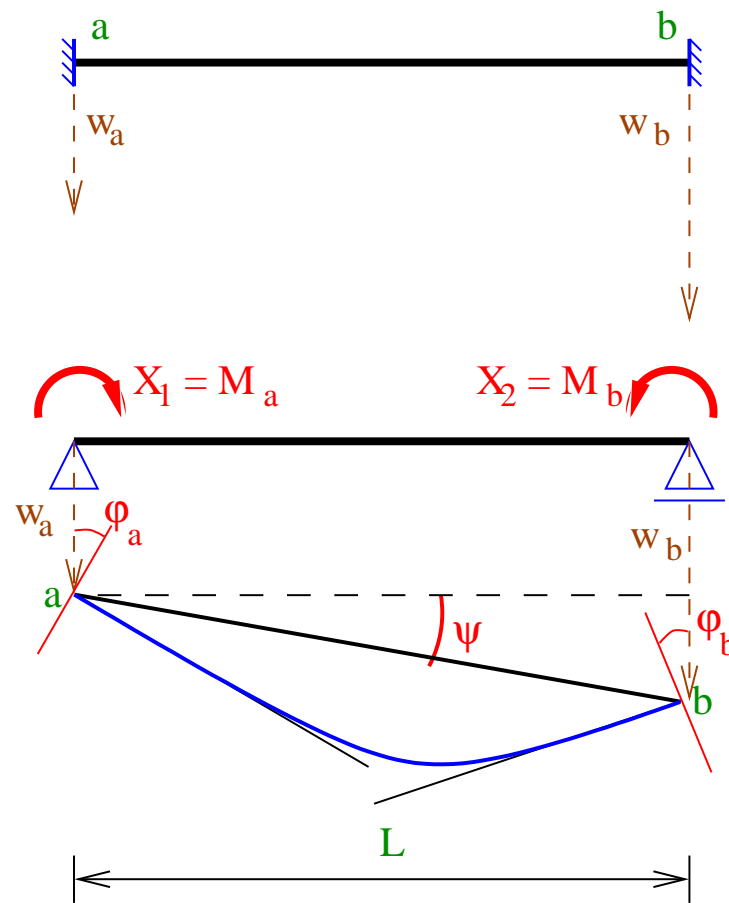
$$M_a \times \beta_{ba} + M_b \times \alpha_{ba} + \psi_{ba} = \varphi_b$$

Deformační rovnice se nerovnají 0, protože při popuštění podpor musíme očekávat nenulové pootočení podpor...

Po dosazení ($\alpha = \frac{L}{3EI}$, $\beta = \frac{L}{6EI}$) a úpravách (zkuste doma!) získáme:

$$M_a = \frac{2EI}{L} \left(2\varphi_a + \varphi_b - 3 \frac{w_b - w_a}{L} \right)$$

$$M_b = \frac{2EI}{L} \left(2\varphi_b + \varphi_a - 3 \frac{w_b - w_a}{L} \right)$$



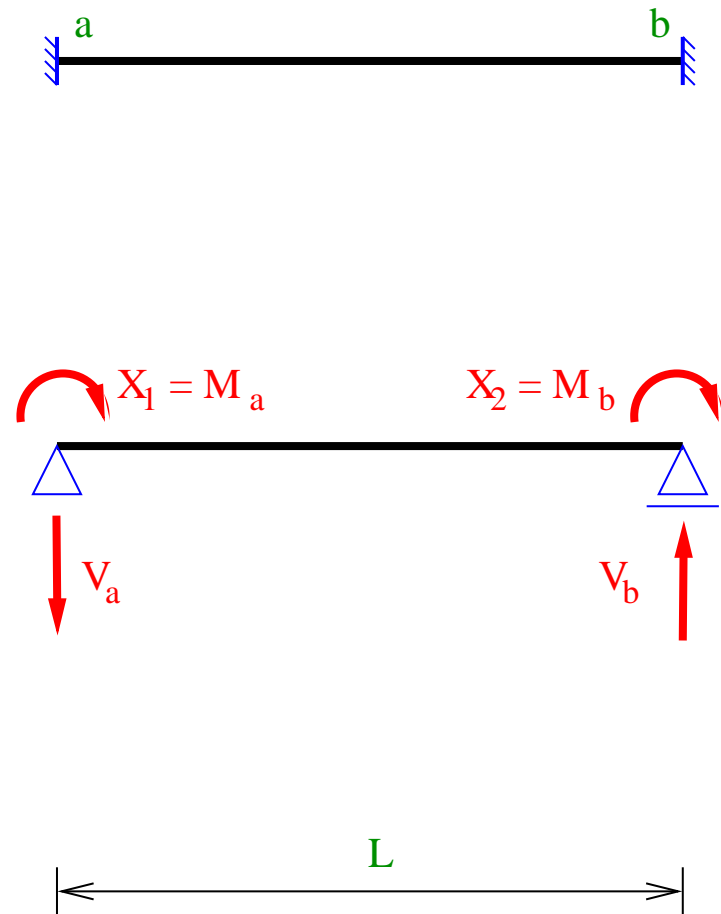
Svislé reakce koncích nosníku

- Zanedbáme vliv posouvajících („svislých“) sil na deformace.
- Reakce V_a, V_b vypočteme jen jako dvojici sil ($D_{ab} = V_a \times L = V_b \times L$) působících proti výslednému momentu, protože musí platit $\sum M_i = 0$ – nosník musí být v rovnováze.
- Tedy:

$$V_a = \frac{M_b - M_a}{L}$$
$$V_b = \frac{M_a - M_b}{L}$$

Po dosazení za M_a, M_b :

$$V_a = \frac{-6 EI}{L^2} \left(\varphi_a + \varphi_b - 2 \frac{w_b - w_a}{L} \right)$$
$$V_b = \frac{6 EI}{L^2} \left(\varphi_a + \varphi_b - 2 \frac{w_b - w_a}{L} \right)$$



Vodorovné reakce na koncích nosníku

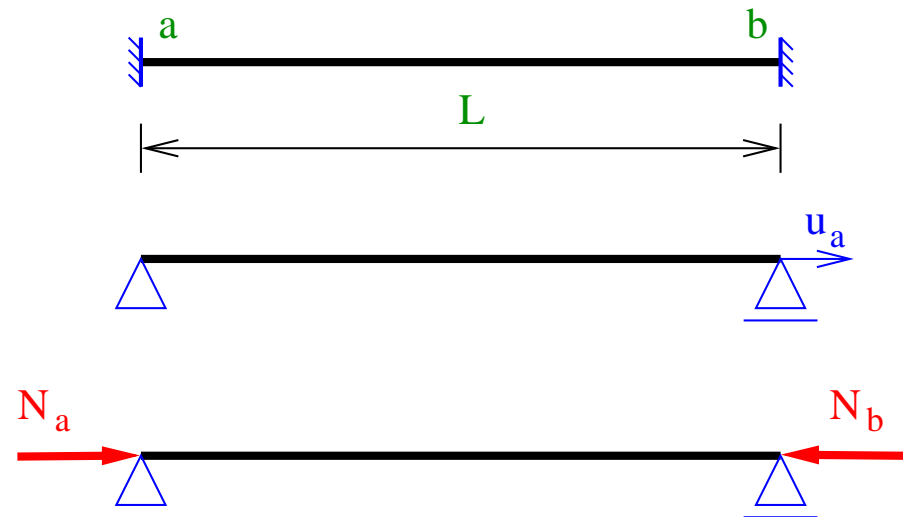
- Musí platit $\sum F_{i,x} = 0$ – nosník musí být v rovnováze.
- Zřejmě také platí: $N_a = N_b$
- Využijeme znalostí z pružnosti:

$$\Delta L = u_b - u_a = \frac{F L}{EA}.$$

- Tedy:

$$N_a = \frac{EA}{L}(u_b - u_a)$$

$$N_b = \frac{EA}{L}(u_b - u_a)$$



Stejných výsledků by šlo dosáhnout i metodou jednotkových sil (zkuste doma!).

Shrnutí: vztahy sil a deformací (1)

Celkem jsme sestavili 6 rovnic pro pružně upnutý nosník:

$$\begin{aligned}N_a &= \frac{E A}{L}(u_b - u_a) \\V_a &= \frac{-6 EI}{L^2}(\varphi_a + \varphi_b - 2\frac{w_b - w_a}{L}) \\M_a &= \frac{2 EI}{L}(2 \varphi_a + \varphi_b - 3\frac{w_b - w_a}{L}) \\N_b &= \frac{E A}{L}(u_b - u_a) \\V_b &= \frac{6 EI}{L^2}(\varphi_a + \varphi_b - 2\frac{w_b - w_a}{L}) \\M_b &= \frac{2 EI}{L}(2 \varphi_b + \varphi_a - 3\frac{w_b - w_a}{L})\end{aligned}$$

Získané rovnice bude účelné uspořádat a přepsat do maticové podoby (a také poměnit orientaci některých veličin, kvůli konvencím).

Shrnutí: vztahy sil a deformací (2)

Pro oboustranně pružně upnutý nosník:

$$\begin{aligned} \frac{EA}{L}u_a + 0w_a + 0\varphi_a - \frac{EA}{L}u_b + 0w_b + 0\varphi_b &= N_a \\ 0u_a + \frac{12EI}{L^3}w_a - \frac{6EI}{L^2}\varphi_a + 0u_b - \frac{12EI}{L^3}w_a - \frac{6EI}{L^2}\varphi_a &= V_a \\ 0u_a - \frac{6EI}{L^2}w_a + \frac{4EI}{L}\varphi_a + 0u_b + \frac{6EI}{L^2}w_b + \frac{2EI}{L}\varphi_b &= M_a \\ -\frac{EA}{L}u_a + 0w_a + 0\varphi_a + \frac{EA}{L}u_b + 0w_b + 0\varphi_b &= N_b \\ 0u_a - \frac{12EI}{L^3}w_a - \frac{6EI}{L^2}\varphi_a + 0u_b + \frac{12EI}{L^3}w_a - \frac{6EI}{L^2}\varphi_a &= V_b \\ 0u_a + \frac{6EI}{L^2}w_a + \frac{2EI}{L}\varphi_a + 0u_b - \frac{6EI}{L^2}w_b + \frac{4EI}{L}\varphi_b &= M_b \end{aligned}$$

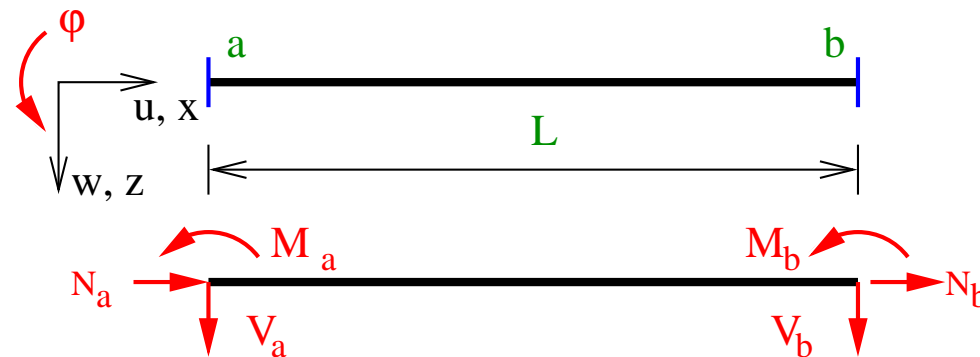
Získané vztahy by bylo účelné sestavit do maticové podoby:

$$\mathbf{K} \times \mathbf{u} = \mathbf{F}$$

Shrnutí: vztahy sil a deformací (3)

Pro oboustranně pružně upnutý nosník lze psát:

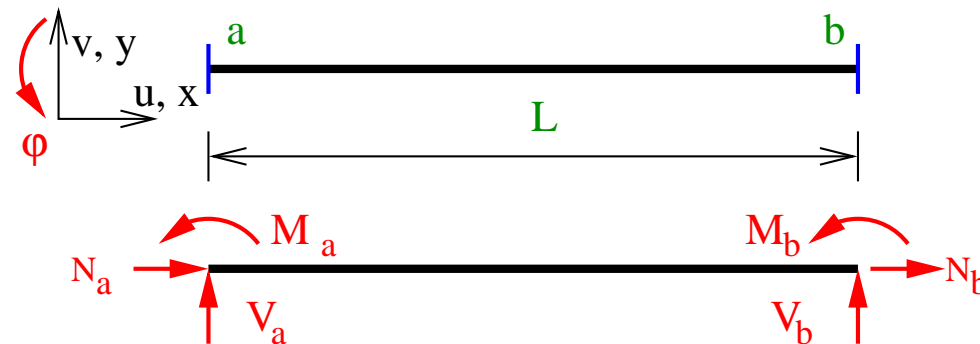
$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} u_a \\ w_a \\ \varphi_a \\ u_b \\ w_b \\ \varphi_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_a \\ V_a \\ M_a \\ N_b \\ V_b \\ M_b \end{Bmatrix}$$



Shrnutí: vztahy sil a deformací (4)

Pro oboustranně pružně upnutý nosník v rovině XY lze psát podobné vztahy:

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} u_a \\ v_a \\ \varphi_a \\ u_b \\ v_b \\ \varphi_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_a \\ V_a \\ M_a \\ N_b \\ V_b \\ M_b \end{Bmatrix}$$

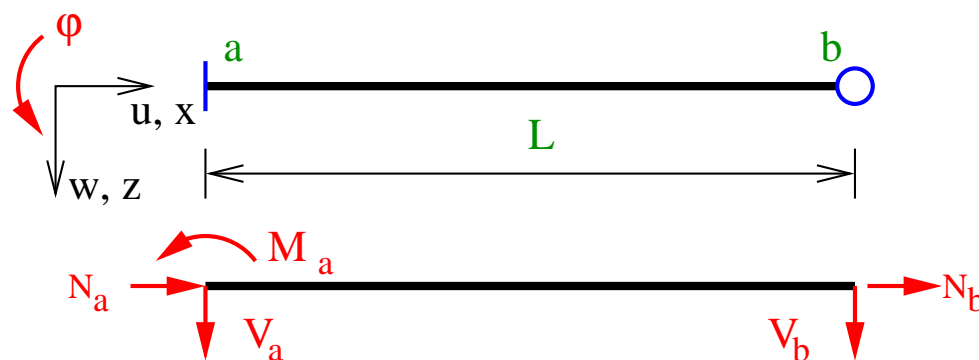


P.S. Pozor na jiný smysl svislých sil a deformací!

Shrnutí: vztahy sil a deformací (5)

Pro jednostranně vlevo pružně upnutý nosník (s kloubem vpravo) lze stejným způsobem odvodit:

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} & 0 & \frac{3EI}{L^2} & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} & 0 & \frac{3EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} u_a \\ w_a \\ \varphi_a \\ u_b \\ w_b \\ \varphi_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_a \\ V_a \\ M_a \\ N_b \\ V_b \\ 0 \end{Bmatrix}$$

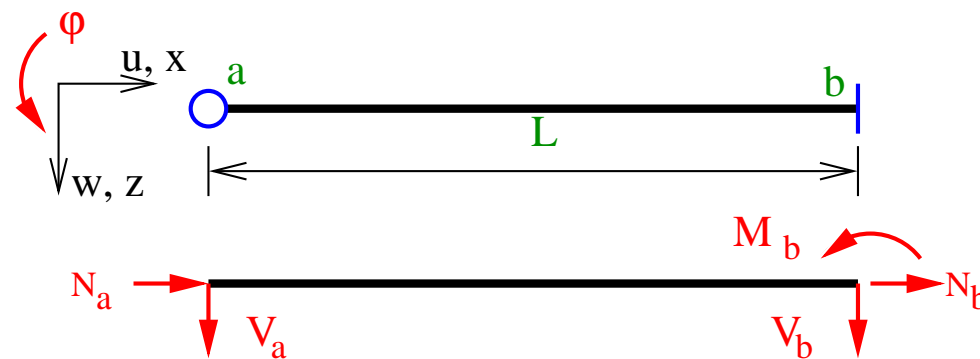


Hodnotu φ_b pro takový prut nepočítáme (nemáme jak)!

Shrnutí: vztahy sil a deformací (6)

Pro jednostranně vpravo pružně upnutý nosník (s kloubem vlevo) lze stejným způsobem odvodit:

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3} & 0 & 0 & \frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{3EI}{L^2} & 0 & 0 & \frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} u_a \\ w_a \\ \varphi_a \\ u_b \\ w_b \\ \varphi_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_a \\ V_a \\ 0 \\ N_b \\ V_b \\ M_b \end{Bmatrix}$$

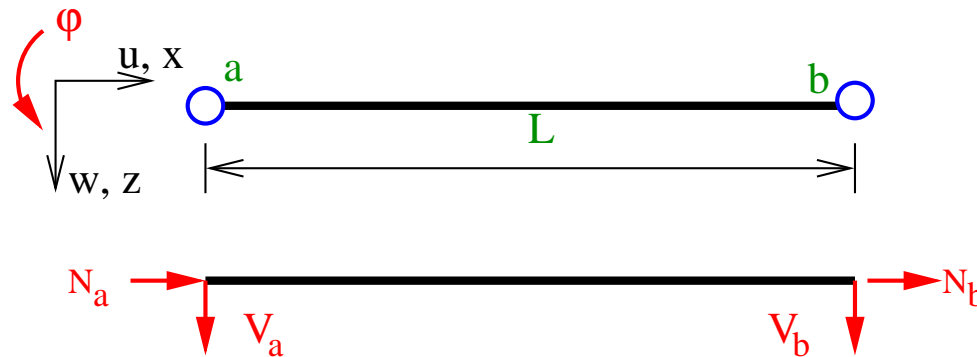


Hodnotu φ_a pro takový prut nepočítáme (nemáme jak)!

Shrnutí: vztahy sil a deformací (7)

Pro oboustranně kloubově připojený nosník odvodit (použijeme jen rovnice pro vodorovná posunutí):

$$\begin{bmatrix} \frac{E A}{L} & 0 & 0 & -\frac{E A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{E A}{L} & 0 & 0 & \frac{E A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} u_a \\ w_a \\ \varphi_a \\ u_b \\ w_b \\ \varphi_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_a \\ 0 \\ 0 \\ N_b \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Hodnoty φ_a, φ_b pro takový prut nepočítáme! Svislá posunutí se uplatní jen, pokud je prut uložen šikmo (viz dále).

Shrnutí: jak se co jmenuje

$$\mathbf{K} \times \mathbf{u} = \mathbf{F},$$

\mathbf{K} ... matice tuhosti prutu,

\mathbf{u} ... vektor posunutí konců prutu (současně jde i o posunutí styčniců),

\mathbf{F} ... vektor koncových sil (současně jde o síly působící ve styčnicích).

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} u_a \\ w_a \\ \varphi_a \\ u_b \\ w_b \\ \varphi_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_a \\ V_a \\ M_a \\ N_b \\ V_b \\ M_b \end{Bmatrix}$$

Použití:

- při znalosti deformací styčniců \mathbf{a} , \mathbf{b} prutu můžeme vypočítat koncové síly prutu,
- při znalosti koncových sil prutu můžeme vypočítat posunutí deformace styčniců \mathbf{a}, \mathbf{b} .

Matice tuhosti prutu

$$\mathbf{K} \times \mathbf{u} = \mathbf{F},$$

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Matice tuhosti K_{ab} prutu $\mathbf{a-b}$:

- vyjadřuje vztah mezi silami působícími na styčníky **a**, **b** a jejich deformací (posunutím a pootočením) vyvolaných těmimo silami,
- je dána vlastnostmi prutu **a-b** spojujícími styčníky,
- pokud mezi styčníky **a** a **b** leží více prutů, je nutno jejich matice tuhosti **maticově** sečíst – tak je možné postupně sestavit i **matici tuhosti konstrukce**.

Příklad 1: koncové síly prutu (1)

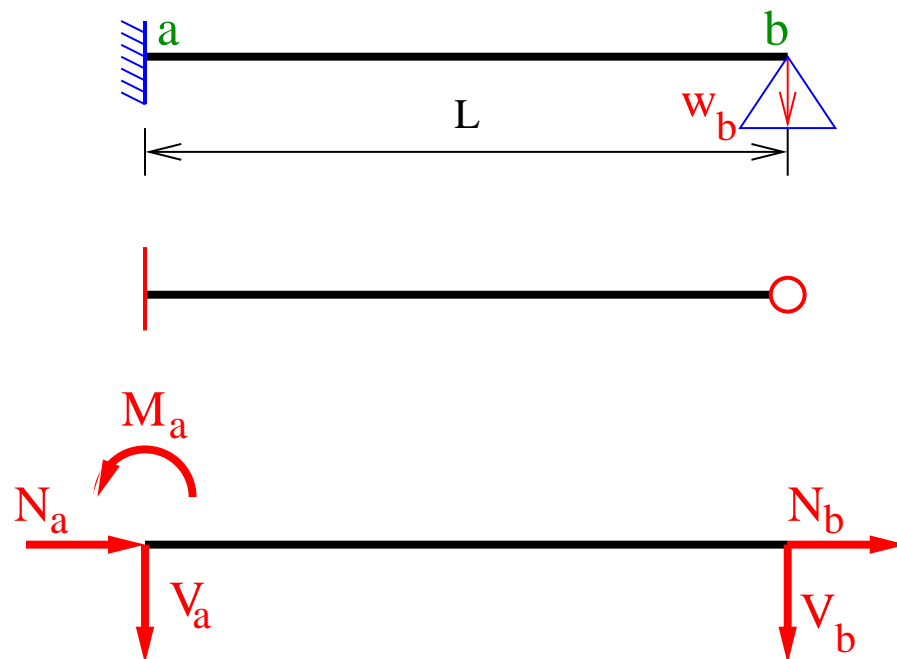
Zadání: Vypočítejte vektor koncových sil nosníku podle obrázku, je-li známo, že $u_b = 0$ m a $w_b = 0,004$ m. Parametry nosníku:

- $E = 10$ GPa
- $I = 8 \times 10^{-6}$ m⁴
- $A = 1 \times 10^{-2}$ m²
- $L = 2$ m

Stupeň přetvárné neurčitosti je 2 (u_b, w_b).

Postup:

- Ze zadání plyne, že $u_a = w_a = \varphi_a = 0$ (vetknutí) a $u_b = 0$. Zvolíme takový model prutu, abychom nemuseli počítat φ_b (pružné upnutí vlevo, kloub v pravo).
- Sestavíme matici tuhosti \mathbf{K} a vektor deformací \mathbf{u} a jejich vynásobením získáme hledané koncové síly \mathbf{F} .



Příklad 1: koncové síly prutu (2)

$$\frac{EA}{L} = 500 \times 10^5, \frac{3EI}{L^3} = 0,3 \times 10^5, \frac{3EI}{L^2} = 0,6 \times 10^5, \frac{3EI}{L} = 1,2 \times 10^5.$$

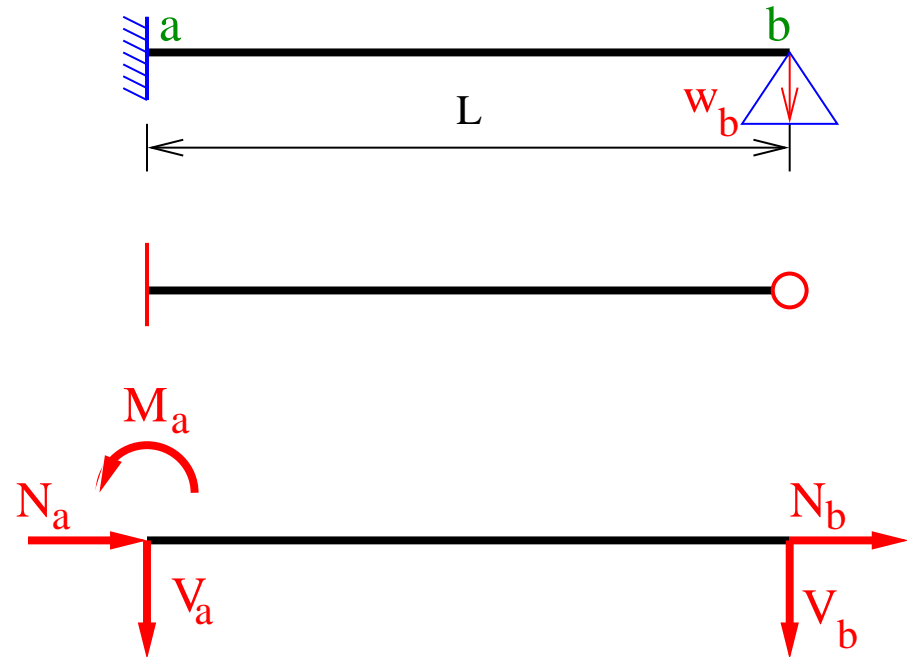
Matice tuhosti (|--o):

$$\mathbf{K}_{ab} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} & 0 & \frac{3EI}{L^2} & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} & 0 & \frac{3EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= 10^5 \times \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & -100 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3 & -0,6 & 0 & -0,3 & 0 \\ 0 & -0,6 & -1,2 & 0 & 0,6 & 0 \\ -100 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & -0,3 & 0,6 & 0 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Příklad 1: koncové síly prutu (3)

Vektor deformací:

$$\mathbf{u}_{ab} = \begin{Bmatrix} u_a \\ w_a \\ \varphi_a \\ u_b \\ w_b \\ \varphi_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,004 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Výpočet $\mathbf{F}_{ab} = \mathbf{K}_{ab} \times \mathbf{u}_{ab}$:

$$\mathbf{F}_{ab} = 10^5 \times \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & -100 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3 & -0,6 & 0 & -0,3 & 0 \\ 0 & -0,6 & -1,2 & 0 & 0,6 & 0 \\ -100 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & -0,3 & 0,6 & 0 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,004 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

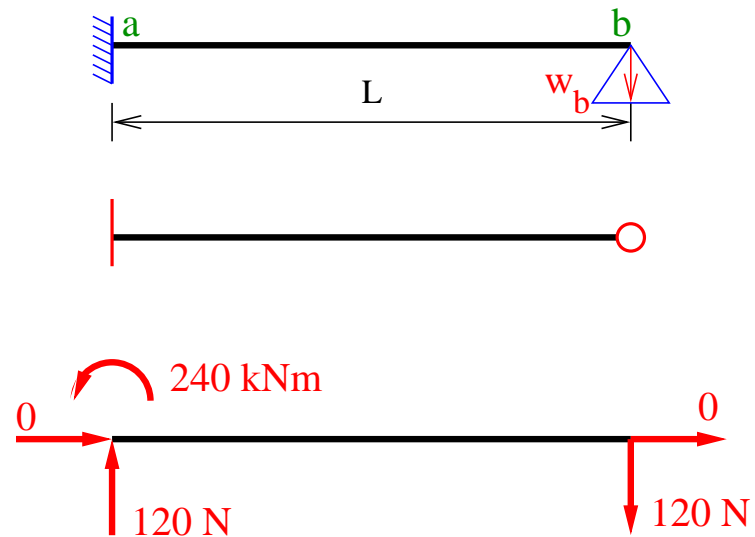
Příklad 1: koncové síly prutu (4)

Výpočet s výsledky:

$$\mathbf{F}_{ab} = \mathbf{K}_{ab} \times \mathbf{u}_{ab} =$$

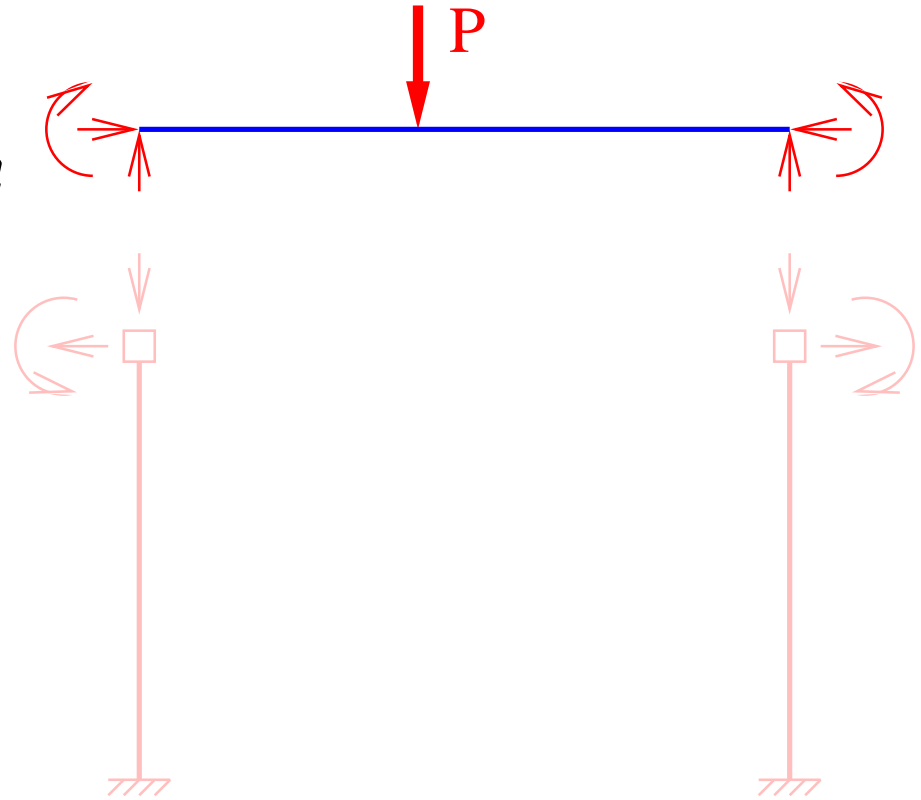
$$= 10^5 \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & -100 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3 & -0,6 & 0 & -0,3 & 0 \\ 0 & -0,6 & -1,2 & 0 & 0,6 & 0 \\ -100 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & -0,3 & 0,6 & 0 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,004 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -120 \\ 240 \\ 0 \\ 120 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Síly jsou v $[N]$, momenty v $[N \times m]$.
- Výpočet je možné provést v libovolném tabulkovém kalkulátoru (zkuste!).



Účinek primárního zatížení (1)

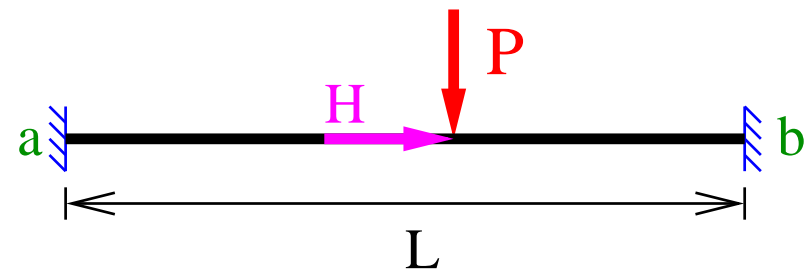
- Primární zatížení působí *na nosníku*.
- Potřebujeme ho **převést do styčnicků**.
- Postup:
 1. Stanovíme reakce nosníku.
 2. Použijeme je jako účinek na styčníky.



Účinek primárního zatížení (2)

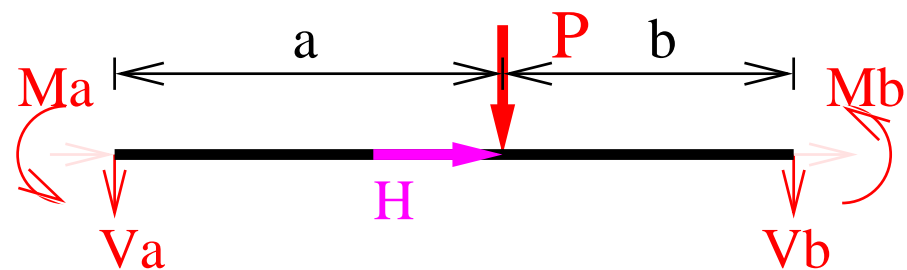
Pro pružně upnutý prut zatížený silou:

$$F_{ab} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -P \frac{b^2(L+2a)}{L} \\ P \frac{ab^2}{L} \\ 0 \\ -P \frac{a^2(L+2b)}{L} \\ P \frac{a^2b}{L} \end{array} \right\}$$



Podobně je možné určit i členy pro vodorovnou sílu a získat:

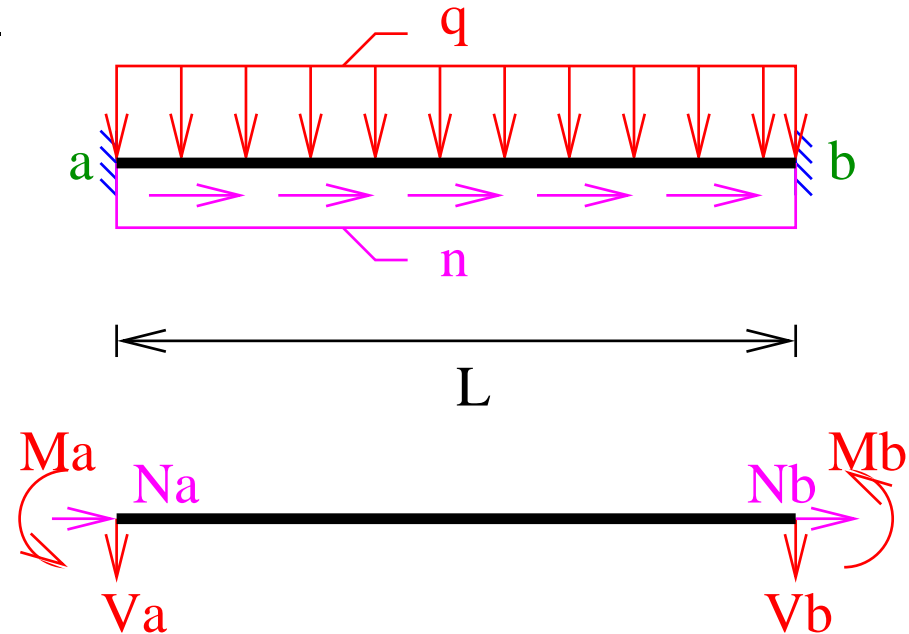
$$F_{ab} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{Hb}{L} \\ -P \frac{b^2(L+2a)}{L} \\ P \frac{ab^2}{L} \\ \frac{Ha}{L} \\ -P \frac{a^2(L+2b)}{L} \\ P \frac{a^2b}{L} \end{array} \right\}$$



Účinek primárního zatížení (3)

Pro pružně upnutý prut zatížený spojitým zatížením:

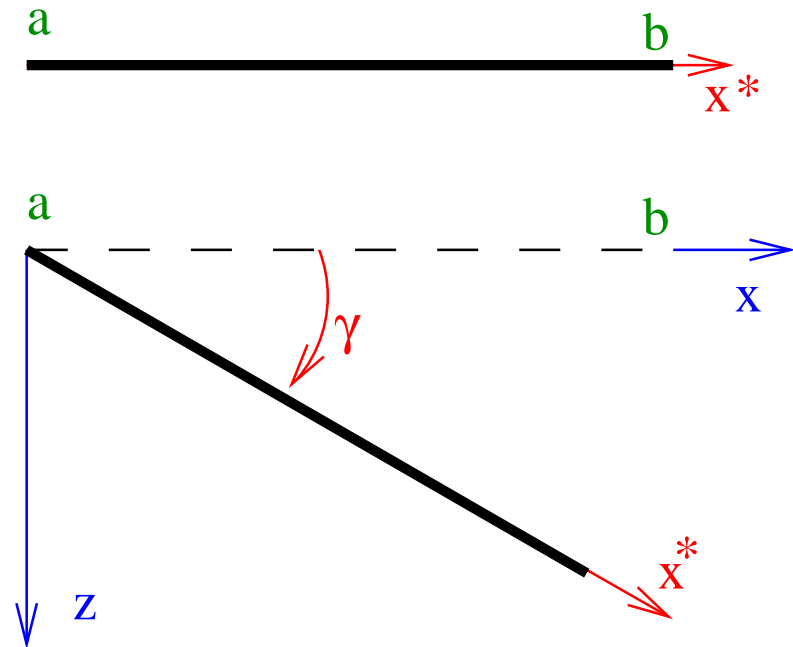
$$F_{ab} = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{n L}{2} \\ -\frac{q L}{2} \\ -\frac{q L^2}{2} \\ \frac{12}{n L} \\ -\frac{2}{n L} \\ -\frac{q L}{2} \\ -\frac{q L^2}{12} \end{array} \right\}$$



Další případy viz např.: KADLČÁK, Jaroslav a Jiří KYTÝR. *Statika stavebních konstrukcí II.: staticky neurčité prutové konstrukce*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, 2009. Učebnice. ISBN 978-80-214-3428-8.

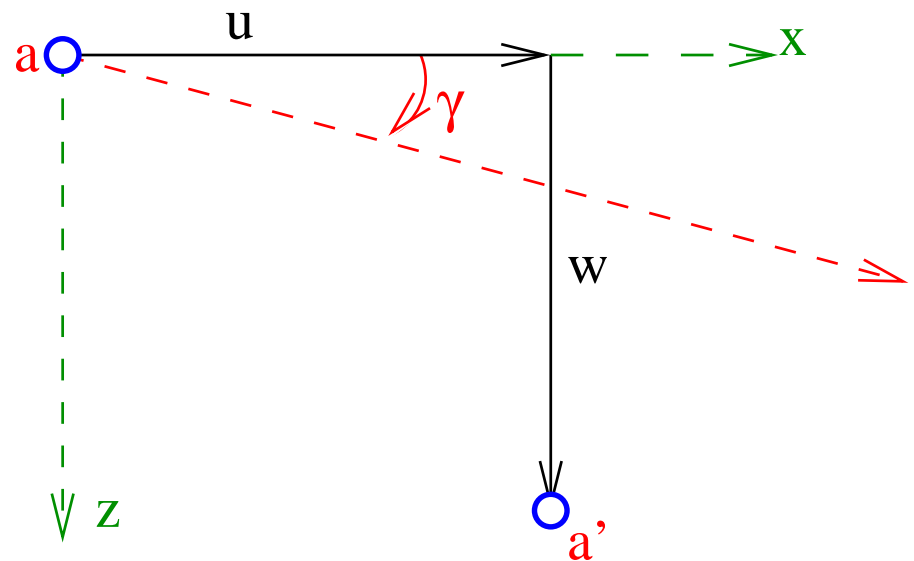
Transformace veličin

- Pruty mohou být obecně libovolně pootočené a posunuté (nemusí ležet v ose x).
- Pracujeme se souřadnicovými rozdíly (např. $L = x_b - x_a$), tedy posunutí řešite nemusíme. 1
- Je nutné pracovat s pootočením prutu o úhel γ : 2
 1. Výpočty provádíme (a vše jsme dosud odvozovali) na prutu v **lokální** ose x^* - viz silná čára v obrázcích 1 a 2 s červenou osou x .
 2. Ve skutečnosti je prut pootočen – hodnoty musíme převést do tohoto (globálního) systému (modré osy).



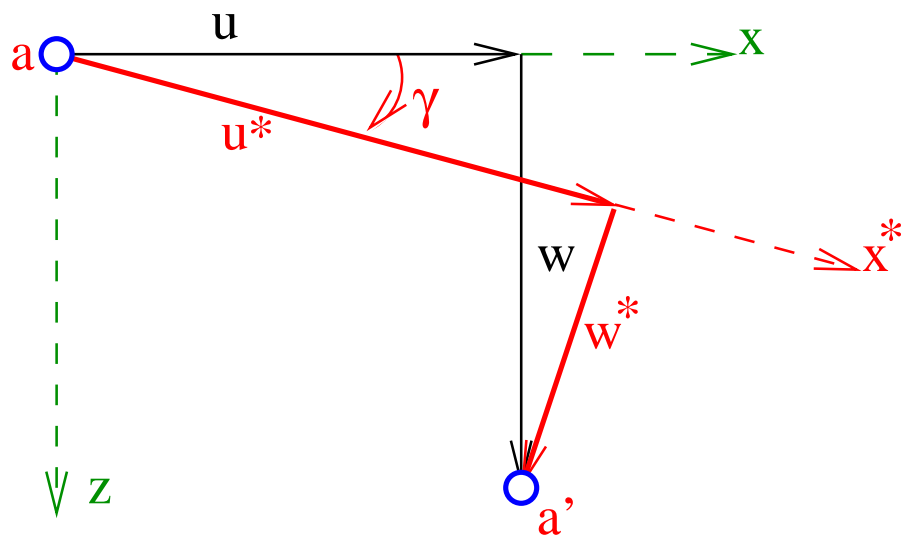
Transformace posunutí (1)

- Vyšetříme posunutí koncového bodu prutu.
- Důsledkem zatížení se bod a přesune do bodu a' .
- V **globálních souřadnicích** můžeme popsat posuny ve směru globálních os x a z (posuny u, w).
- Pro jednodušší výpočet potřebujeme převést do **lokálních souřadnic** procházejících osou prutu x^* .



Transformace posunutí (2)

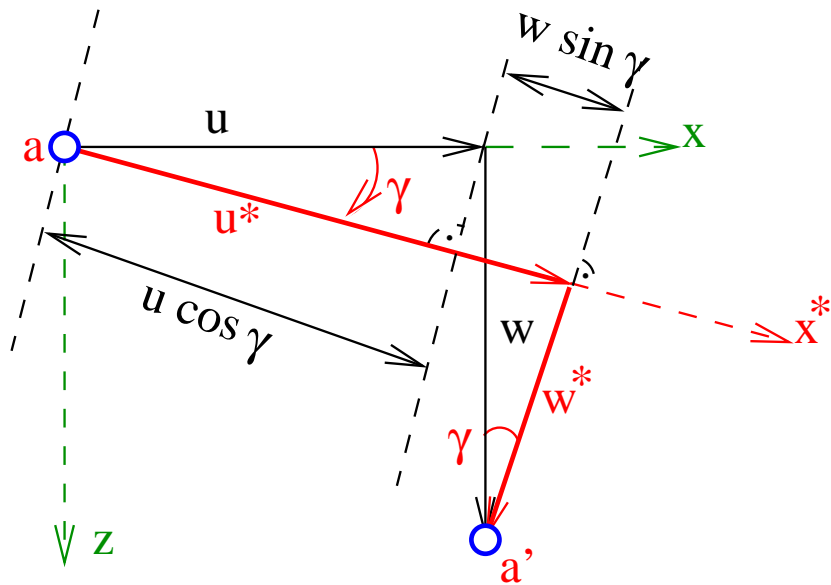
- Posunutí v lokálních souřadnicích (X^*, z^*) označíme u^*, w^* .
- Budeme hledat vztahy mezi u, w a u^*, w^* .



Transformace posunutí (3)

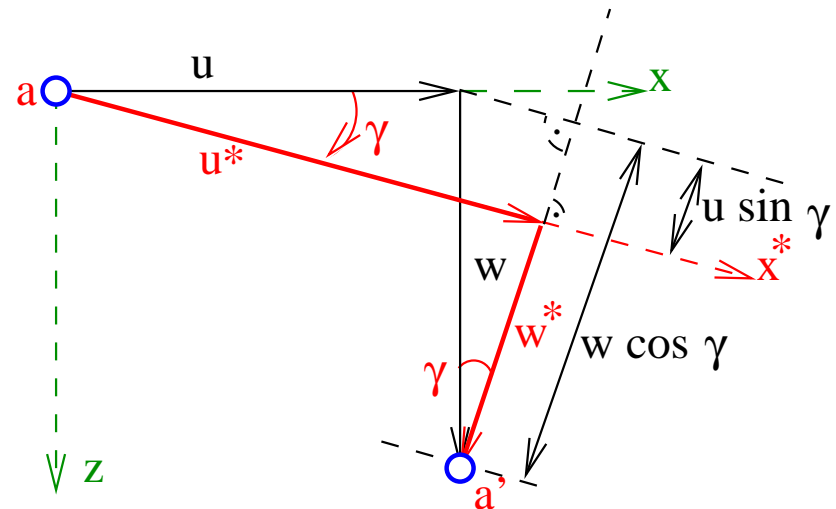
Výpočet u^* :

$$u^* = u \cos \gamma + w \sin \gamma$$



Výpočet w^* :

$$w^* = -u \sin \gamma + w \cos \gamma$$



Transformace posunutí (4)

Shrnutí transformačních vztahů:

$$u^* = u \cos \gamma + w \sin \gamma$$

$$w^* = -u \sin \gamma + w \cos \gamma$$

Maticově pro bod a ($\mathbf{u}_a^* = \mathbf{t}_a \times \mathbf{u}_a$):

$$\begin{Bmatrix} u_a^* \\ w_a^* \\ \varphi_a^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} u_a \\ w_a \\ \varphi_a \end{Bmatrix}$$

Poznámka: pootočení není třeba transformovat. Aby nechybělo v rovnicích, je zavedeno do matice ($\varphi_a^* = 1 \times \varphi_a = \varphi_a$)

Transformace posunutí (5)

Transformační vztahy pro oba konce nosníku (a i b):

$$u_a^* = u_a \cos \gamma + w_a \sin \gamma$$

$$w_a^* = -u_a \sin \gamma + w_a \cos \gamma$$

$$u_b^* = u_b \cos \gamma + w_b \sin \gamma$$

$$w_b^* = -u_b \sin \gamma + w_b \cos \gamma$$

Maticově pro ($\mathbf{u}_{ab}^* = \mathbf{T}_{ab} \times \mathbf{u}_{ab}$):

$$\begin{Bmatrix} u_a^* \\ w_a^* \\ \varphi_a^* \\ u_b^* \\ w_b^* \\ \varphi_b^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} u_a \\ w_a \\ \varphi_a \\ u_b \\ w_b \\ \varphi_b \end{Bmatrix}$$

Matice \mathbf{T}_{ab} se nazývá **transformační matice**.

Transformace posunutí (6)

Je možné provést transformaci i z globálních do lokálních souřadnic:

$$\mathbf{u}_{ab}^* = \mathbf{T}_{ab} \times \mathbf{u}_{ab} \Rightarrow \mathbf{u}_{ab} = \mathbf{T}_{ab}^{-1} \times \mathbf{u}_{ab}^*,$$

kde \mathbf{T}_{ab}^{-1} je matice inverzní k transformační matici \mathbf{T}_{ab} :

$$\begin{pmatrix} u_a \\ w_a \\ \varphi_a \\ u_b \\ w_b \\ \varphi_b \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} u_a^* \\ w_a^* \\ \varphi_a^* \\ u_b^* \\ w_b^* \\ \varphi_b^* \end{pmatrix}$$

Zřejmě \mathbf{T}_{ab}^{-1} má stejný obsah, jako by měla *transponovaná* matice \mathbf{T}_{ab}^T , proto lze psát:

$$\mathbf{u}_{ab} = \mathbf{T}_{ab}^T \times \mathbf{u}_{ab}^*.$$

Transformace vektorů sil

Analogické vztahy lze odvodit pro vektory koncových sil (jde o stejné geometrické závislosti).

Převod z globálních na lokální koncové síly:

$$\mathbf{F}_{ab}^* = \mathbf{T}_{ab} \times \mathbf{F}_{ab}.$$

Převod z lokálních na globální koncové síly:

$$\mathbf{F}_{ab} = \mathbf{T}_{ab}^T \times \mathbf{F}_{ab}^*.$$

Transformace matic tuhosti prutu

Z předchozích znalostí můžeme odvodit vztahy pro transformaci matice tuhosti prutu z lokálního do globálního systému:

Víme, že: $\mathbf{F}_{ab} = \mathbf{T}_{ab}^T \times \mathbf{F}_{ab}^*$ a $\mathbf{F}_{ab}^* = \mathbf{K}_{ab}^* \times \mathbf{u}_{ab}^*$,
tedy:

$$\mathbf{F}_{ab} = \mathbf{T}_{ab}^T \times \mathbf{F}_{ab}^* = \mathbf{T}_{ab}^T \times (\mathbf{K}_{ab}^* \times \mathbf{u}_{ab}^*)$$

a protože $\mathbf{u}_{ab}^* = \mathbf{T}_{ab} \times \mathbf{u}_{ab}$, můžeme napsat:

$$\mathbf{F}_{ab} = (\mathbf{T}_{ab}^T \times \mathbf{K}_{ab}^* \times \mathbf{T}_{ab}) \times \mathbf{u}_{ab}$$

Protože víme, že $\mathbf{F}_{ab} = \mathbf{K}_{ab} \times \mathbf{u}_{ab}$, vyjde nám vztah pro transformaci lokální matice tuhosti prutu na matici globální:

$$\mathbf{K}_{ab} = \mathbf{T}_{ab}^T \times \mathbf{K}_{ab}^* \times \mathbf{T}_{ab}$$

Inverzí získáme opačnou transformaci (z globální na lokální):

$$\mathbf{K}_{ab}^* = \mathbf{T}_{ab} \times \mathbf{K}_{ab} \times \mathbf{T}_{ab}^T$$

Transformace: přehled

Transformace lokální → globální:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{ab} &= \mathbf{T}_{ab}^T \times \mathbf{K}_{ab}^* \times \mathbf{T}_{ab} \\ \mathbf{F}_{ab} &= \mathbf{T}_{ab}^T \times \mathbf{F}_{ab}^* \\ \mathbf{u}_{ab} &= \mathbf{T}_{ab}^T \times \mathbf{u}_{ab}^*\end{aligned}$$

Transformace globální → lokální :

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{ab}^* &= \mathbf{T}_{ab} \times \mathbf{K}_{ab} \times \mathbf{T}_{ab}^T \\ \mathbf{F}_{ab}^* &= \mathbf{T}_{ab} \times \mathbf{F}_{ab} \\ \mathbf{u}_{ab}^* &= \mathbf{T}_{ab} \times \mathbf{u}_{ab}\end{aligned}$$

Matice a vektory konstrukce (1)

- Budeme vždy sestavovat v globálních souřadnicích.
- Potřebujeme vyřešit **vztah** mezi *zatížením konstrukce a deformacemi styčnicků* (posunutí, pootočení).
- Tyto vztahy jsou dány **tuhostí konstrukce**, která se skládá z tuhostí jednotlivých prutů.
- Tedy vyžijeme sestavené matice tuhosti prutů (transformované do globálních souřadnic!)

Zřejmě tedy můžeme psát:

$$\mathbf{K} \times \mathbf{u} = \mathbf{F},$$

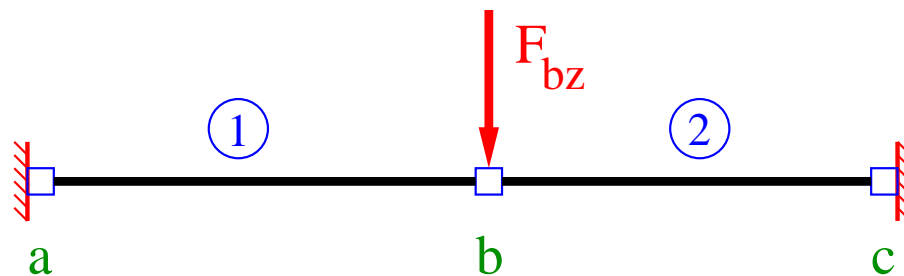
kde:

- \mathbf{K} ... matice tuhosti konstrukce $[n, n]$,
- \mathbf{u} ... vektor deformací styčnicků konstrukce $[n, 1]$,
- \mathbf{F} ... vektor sil ve styčnicích konstrukce $[n, 1]$,
- n ... *stupeň přetvárné neurčitosti*.

Matice a vektory konstrukce (2)

Budeme vysvětlovat na níže uvedené konstrukci:

- 3 styčnícíky (**a**, **b**, **c**), každý se 3 posunutími (u, w, φ),
- z toho 6 posunutí je známo (nulová pootočení v podporách – **a**, **b**),
- tedy stupeň přetvárné neurčitosti je 3,
- neznámé jsou u_b, w_b, φ_b .

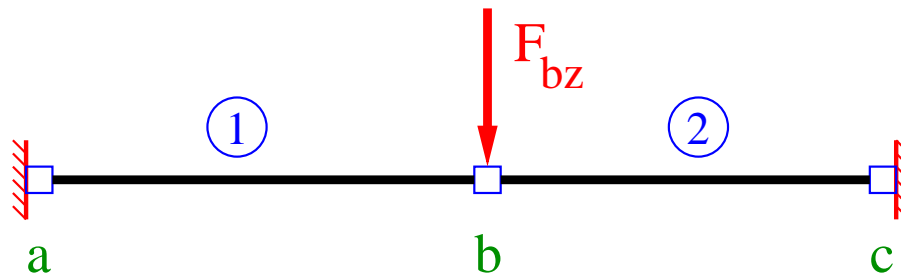


Matice a vektory konstrukce (3)

Úlohu tedy popíšeme soustavou 3 rovnic o 3 neznámých $\mathbf{K} \times \mathbf{u} = \mathbf{F}$:

$$\begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & k_{1,3} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & k_{2,3} \\ k_{3,1} & k_{3,2} & k_{3,3} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} u_b \\ w_b \\ \varphi_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{bx} \\ F_{bz} \\ M_b \end{Bmatrix}$$

Vektor \mathbf{F} naplníme podle zadání (síly a momenty ve styčnicích), vektor *neznámých* deformací \mathbf{u} budeme počítat a matici \mathbf{K} potřebujeme sestavit z matic tuhostí prutů.

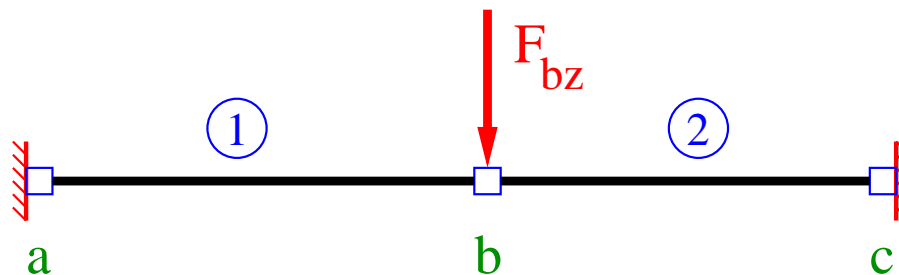


Matice a vektory konstrukce (4)

Matici \mathbf{K} můžeme popsat:

$$\mathbf{K} = \begin{array}{c|ccc} & u_b & w_b & \varphi_b \\ \hline u_b & k_{1,1} & k_{1,2} & k_{1,3} \\ w_b & k_{2,1} & k_{2,2} & k_{2,3} \\ \varphi_b & k_{3,1} & k_{3,2} & k_{3,3} \end{array}$$

Názvy příslušných deformací tedy použijeme jako „indexy členů matice“.



Dále sestavíme a stejným způsobem označíme matice tuhosti prutů 1 ($a - b$) a 2 ($b - c$).

Matice a vektory konstrukce (5)

Prut 1 ($a - b$) ... matice tuhosti pružně upnutého prutu:

$$\mathbf{K}_{ab} = \begin{bmatrix} & u_a & w_a & \varphi_a & u_b & w_b & \varphi_b \\ u_a & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ w_a & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \varphi_a & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ u_b & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ w_b & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \varphi_b & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Prut 2 ($b - c$) ... matice tuhosti pružně upnutého prutu:

$$\mathbf{K}_{bc} = \begin{bmatrix} & u_b & w_b & \varphi_b & u_c & w_c & \varphi_c \\ u_b & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ w_b & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \varphi_b & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ u_c & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ w_c & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \varphi_c & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Matice a vektory konstrukce (6)

Postup dosazení členů matic tuhostí prutů do matice tuhosti konstrukce („lokalizace členů matic tuhostí“):

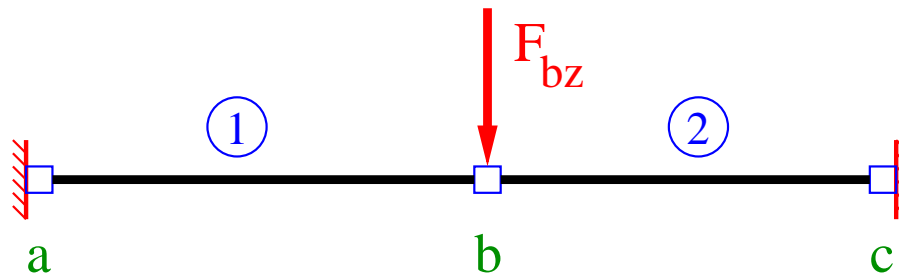
- Matici konstrukce \mathbf{K} naplníme nulami:

$$\mathbf{K} = \begin{array}{c|ccc} & u_b & w_b & \varphi_b \\ \hline u_b & 0 & 0 & 0 \\ w_b & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_b & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

- Projdeme všechny členy matice tuhosti prutu (\mathbf{K}_{ab}) a pokud se j indexy některého členu shodují s indexy v matici konstrukce \mathbf{K} , pak tam tento člen přidáme:

$$K[i, j] = K[i, j] + K_{ab}[i, j]$$

- tento postup opakujeme pro všechny pruty.



Matice a vektory konstrukce (7)

Konkrétně pro první prut ($a - b$):

$$\mathbf{K} = \begin{array}{c|ccc} & u_b & w_b & \varphi_b \\ \hline u_b & 0 & 0 & 0 \\ w_b & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_b & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\mathbf{K}_{ab} = \begin{array}{c|cccccc} & u_a & w_a & \varphi_a & u_b & w_b & \varphi_b \\ \hline u_a & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ w_a & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \varphi_a & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ u_b & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ w_b & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \varphi_b & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{array}$$

Matice a vektory konstrukce (8)

Konkrétně pro první prut ($a - b$) naplníme matici \mathbf{K} :

$$\mathbf{K} = \begin{array}{c|ccc} & u_b & w_b & \varphi_b \\ \hline u_b & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ w_b & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \varphi_b & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{array}$$

$$\mathbf{K}_{ab} = \left[\begin{array}{c|cccccc} & u_a & w_a & \varphi_a & u_b & w_b & \varphi_b \\ \hline u_a & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ w_a & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \varphi_a & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ u_b & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ w_b & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \varphi_b & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{array} \right]$$

Matice a vektory konstrukce (9)

Konkrétně pro první prut ($b - c$) přidáme do matice \mathbf{K} :

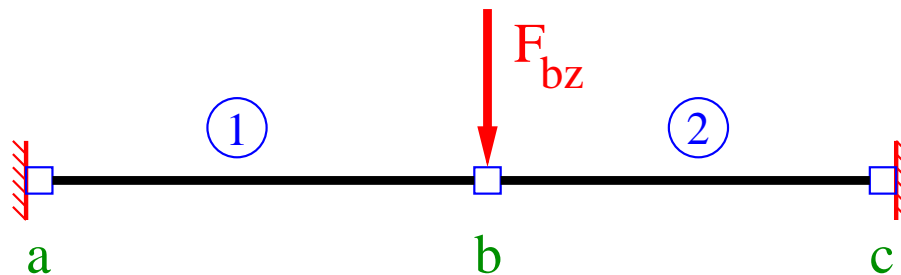
$$\mathbf{K} = \begin{array}{c|ccc} & u_b & w_b & \varphi_b \\ \hline u_b & \frac{EA}{L} + \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ w_b & 0 & \frac{12EI}{L^3} + \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} - \frac{6EI}{L^2} \\ \varphi_b & 0 & \frac{6EI}{L^2} - \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{L} \end{array}$$

$$\mathbf{K}_{bc} = \left[\begin{array}{c|cccccc} & u_b & w_b & \varphi_b & u_c & w_c & \varphi_c \\ \hline u_b & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ w_b & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \varphi_b & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ u_c & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ w_c & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \varphi_c & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{array} \right]$$

Matice a vektory konstrukce (10)

Matici \mathbf{K} zjednodušíme (sečteme a odečteme, co se dá) a dopíšeme zbytek soustavy rovnic $\mathbf{K} \times \mathbf{u} = \mathbf{F}$:

$$\begin{bmatrix} \frac{2EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{24EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8EI}{L} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} u_b \\ w_b \\ \varphi_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{bx} \\ F_{bz} \\ M_b \end{Bmatrix}$$

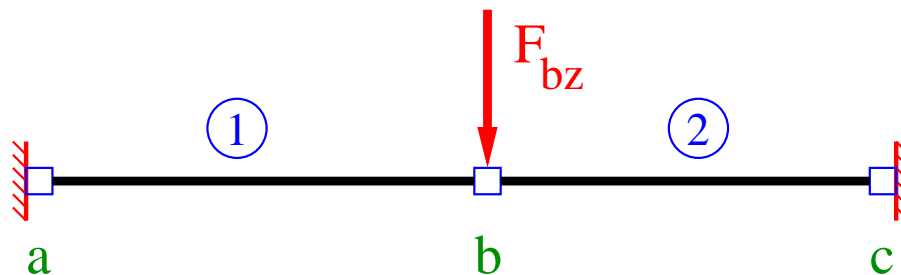


Dále musíme naplnit vektor zatížení („zatěžovací vektor“) \mathbf{F} .

Matice a vektory konstrukce (11)

Vektor F vyplníme nulami a pouze na místa zadaných uzlových zatížení (zde F_{bz}) přičteme příslušné hodnoty:

$$\begin{bmatrix} \frac{2EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{24EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8EI}{L} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} u_b \\ w_b \\ \varphi_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_{bz} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

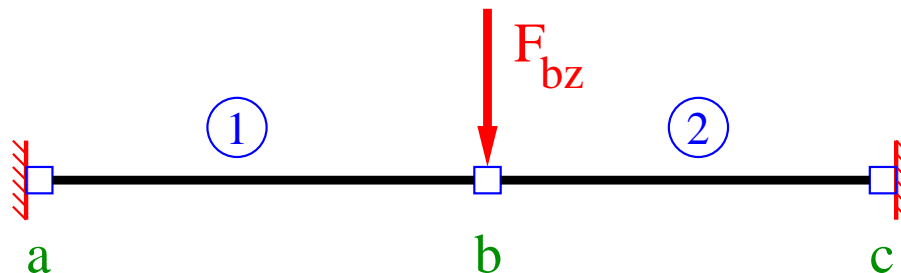


Poznámka: všimněte si, že F_{bz} odpovídá w_b , F_{bx} odpovídá u_a atd.

Výpočet neznámých deformací

Získanou soustavu $\mathbf{K} \times \mathbf{u} = \mathbf{F}$ vyřešíme vhodnou metodou (např. Gausova eliminační metoda – tu nejspíše používá i váš tabulkový kalkulátor).

$$\begin{aligned} u_b &= 0 \text{ m} \\ w_b &= \frac{F_{bz}}{24 \frac{EI}{L^3}} \text{ m} \\ \varphi_b &= 0 \text{ rad} \end{aligned} \tag{1}$$



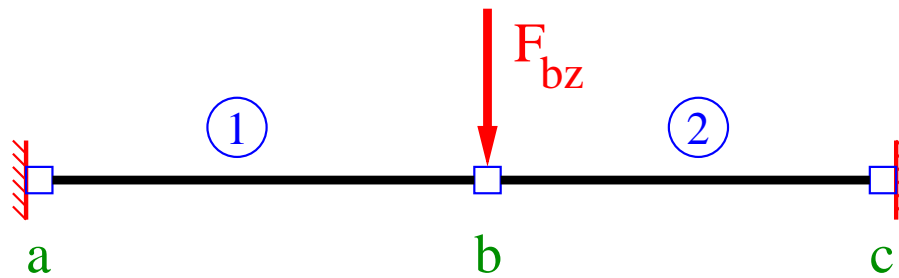
P.S. Tento konkrétní výsledek platí, jen pokud hodnoty E , A , I a L jsou shodné pro oba pruty, jak se to mlčky předpokládalo v tomto případě.

Výpočet deformací prutů (1)

Vypočtené globální deformace z vektoru \mathbf{u} převedeme do příslušných míst vektorů deformací jednotlivých prutů (\mathbf{u}_{ab} , \mathbf{u}_{bc})

Pro první prut ($a - b$):

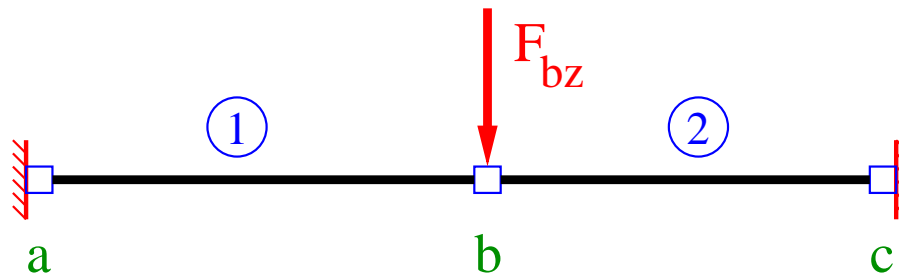
$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_b \\ w_b \\ \varphi_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{F_{bz}}{24 EI} L^3 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{u}_{ab} = \begin{Bmatrix} u_a \\ w_a \\ \varphi_a \\ u_b \\ w_b \\ \varphi_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{F_{bz}}{24 EI} L^3 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Výpočet deformací prutů (2)

Pro druhý prut ($b - c$):

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_b \\ w_b \\ \varphi_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{F_{bz}}{24 EI} \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{u}_{ab} = \begin{Bmatrix} u_b \\ w_b \\ \varphi_b \\ u_c \\ w_c \\ \varphi_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{F_{bz}}{24 EI} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

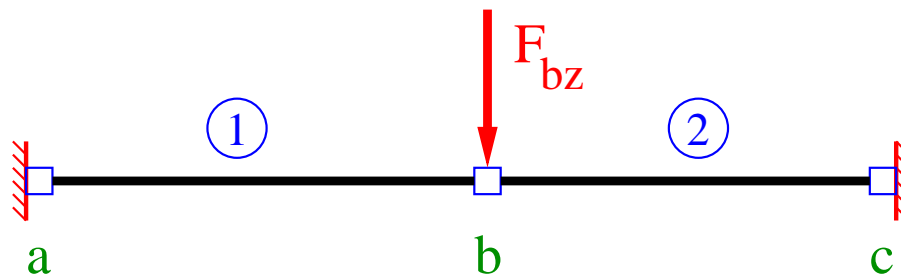


Výpočet koncových sil prutů (1)

Použijeme už sestavené matice tuhosti a vektory deformací:

Pro první prut $F_{ab} = K_{ab} \times u_{ab} =$

$$= \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{F_{bz}}{24EI} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{F_{bz}}{2} \\ -\frac{F_{bz}L}{4} \\ 0 \\ -\frac{F_{bz}}{2} \\ -\frac{F_{bz}L}{4} \end{pmatrix}$$

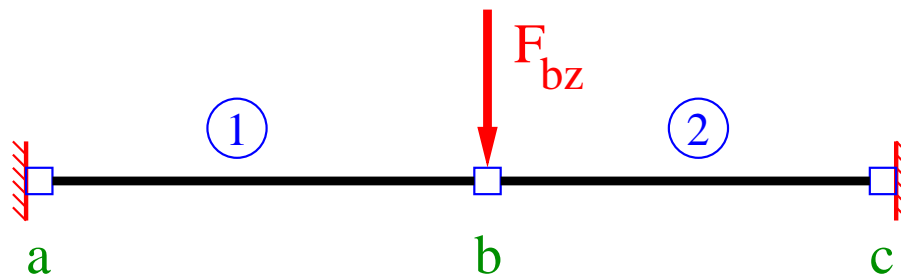


Výpočet koncových sil prutů (2)

Použijeme už sestavené matice tuhosti a vektory deformací:

Pro druhý prut $\mathbf{F}_{bc} = \mathbf{K}_{bc} \times \mathbf{u}_{bc} =$

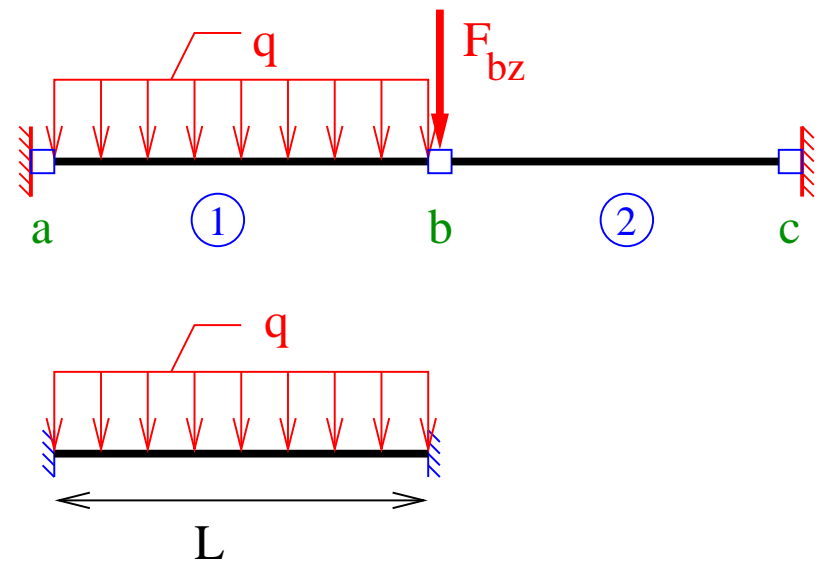
$$= \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{F_{bz}}{24EI} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{F_{bz}}{4} \\ \frac{F_{bz}L}{4} \\ 0 \\ \frac{F_{bz}}{4} \\ \frac{F_{bz}L}{4} \end{pmatrix}$$



Doplnění: zavedení účinků primárních zatížení

- Pro pruty (zde prut 1) stanovíme jejich reakce.
- V daném případě:

$$\mathbf{R}_{ab} = \begin{Bmatrix} N_a \\ V_a \\ M_a \\ N_b \\ V_b \\ M_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{qL}{2} \\ \frac{1}{12}qL^2 \\ 0 \\ -\frac{qL}{2} \\ -\frac{1}{12}qL^2 \end{Bmatrix}$$



- Členy vektoru přičteme na příslušná místa vektoru zatížení konstrukce \mathbf{F} .
- Dále počítáme normálně...

