VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA

FAKULTA STAVEBNÍ

INŽENÝRSKÉ STATICKÉ VÝPOČTY

Úvod do základů stavební dynamiky

Jiří Brožovský

Kancelář: LP – H 406/3
Telefon: 597 321 321

E-mail: jiri.brozovsky@vsb.cz

Základní předpoklady (1)

Problematika stavební dynamiky je velmi komplikovaná,* proto v této části stručně uvedeme jen některé základní vztahy, a základní principy dynamických výpočtů pomocí metody konečných prvků.

Ve statice stavebních konstrukcí jsme předpokládali, že zatížení jsou:

- *nepohyblivá*
- *zvolna* se měnící nebo pohybující

Tato nevyvolávají v konstrukcích *dynamické účinky* jako je chvění nebo kmitání.

V těchto úlohách se proto pro potřeby výpočtů předpokládalo, že účinky zatížení a odezva konstrukce jsou *nezávislé na čase*.

*Velkým problémem je zejména tlumení, ale i výstižný popis tuhostních charakteristik stavebních konstrukcí na podloží.

Základní předpoklady (2)

V dynamice předpokládáme, že:

- zatížení jsou pohyblivá nebo měnící se,
- konstrukce se mohou pohybovat (např. během zemětřesení)
- účinky zatížení jsou závislé na čase.

U stavebních konstrukcí se jako účinek dynamického zatížení zpravidla vyšetřuje (a připouští) jen jejich *kmitání*, jiné druhy pohybu nejsou přípustné.*

*Ani v dynamice stavebních konstrukcí nepřipouštíme mechanismy.

Dynamická zatížení

Zatíženími vyvolávajícími na konstrukcích dynamické účinky mohou být:

- vozidla (zejména na mostech),
- rotující nebo pohyblivá zařízení (průmyslová zařízení, turbíny a generátory v elektrárnách, jeřáby),
- důlní a průmyslové otřesy (technická seismicita),
- účinky větru,
- účinky zemětřesení.

D'Alembertův princip

K nejdůležitějším rovnicím v dynamice patří *D'Alembertův princip*:

Součet všech setrvačných (inerciálních) sil F_{in} *and sil vyvolávající zrychlení* F *je nula.*

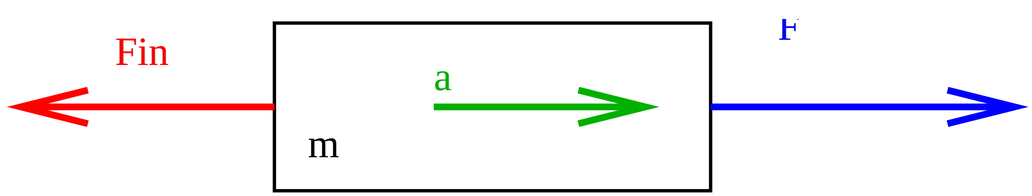
To je možné zapsat:

$$F_{in} + F = 0, \tag{1}$$

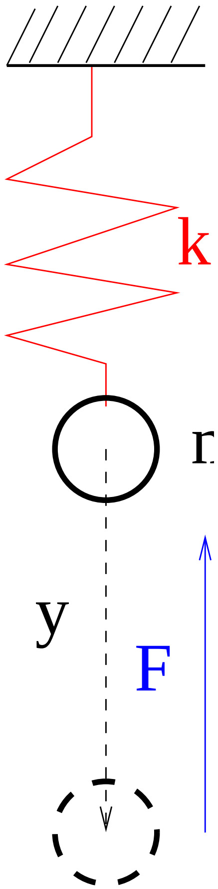
Setrvačná síla ve vztahu () se stanoví:

$$F_{in} = m\, a, \tag{2}$$

kde m je hmotnost a a je zrychlení.



Kmitání tělesa na pružině



Předpokládejme, že tuhost pružiny je $k = \frac{F_p}{y}$, síla v pružině je $F_p = k\,y$ a setrvačnou sílu můžeme stanovit podle vztahu (2).
D'Alembertův princip:

$$k\,y + m\,a = 0. \tag{3}$$

Zrychlení, které je možné rozepsat jako:

$$a = \frac{d^2\,y}{d\,t^2}, \tag{4}$$

může být dosazeno do (3). Tím vznikne vztah:

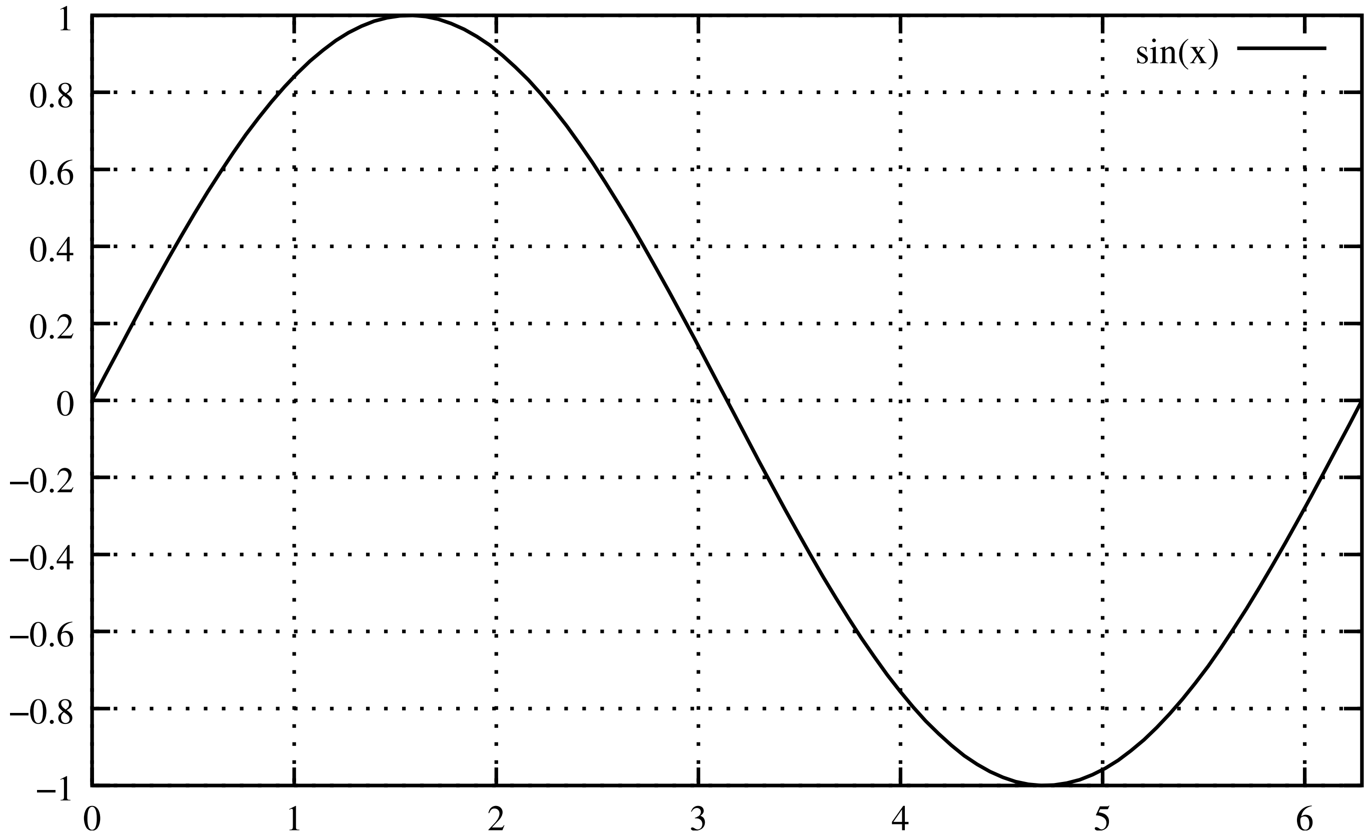
$$\frac{d^2\,y}{d\,t^2}\,m + k\,y = 0. \tag{5}$$

Po úpravě je možné získat *rovnici kmitání soustavy s jedním stupněm volnosti*:

$$\frac{k}{m}\,y + \frac{d^2\,y}{d\,t^2} = 0 \tag{6}$$

Harmonické zatížení

Jako *harmonické* označujeme takové zatížení („buzení“), které je možné popsat goniometrickou funkcí *sinus* nebo *kosinus*.



To může být vyvoláno například stroji s rotujícími částmi (například soustruhy a jinými obráběcími stroji, turbínami a generátory a podobně).

Harmonické kmitání

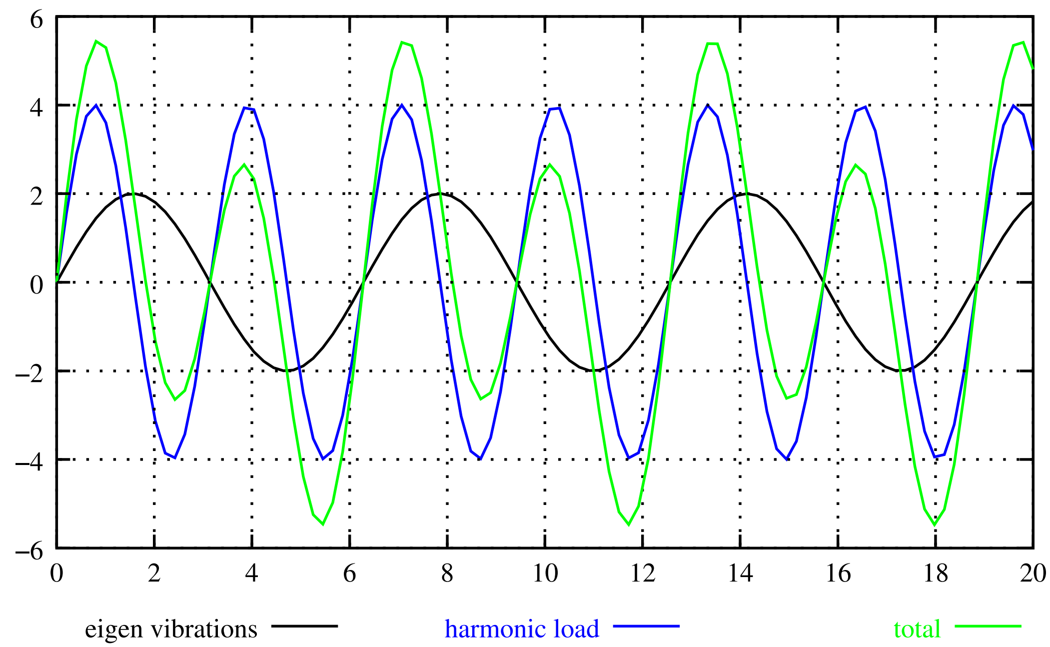
Rovnice harmonického kmitání se od vztahu (6) bude lišit doplněním členu odpovídajícího harmonickému zatížení:

$$\frac{d^2\, y}{d\, t^2}\, m + k\, y = P \sin(\omega t), \quad (7)$$

kde P je maximální hodnota harmonického zatížení a ω je frekvence zatížení (tedy úhlová frekvence rotujícího zařízení).

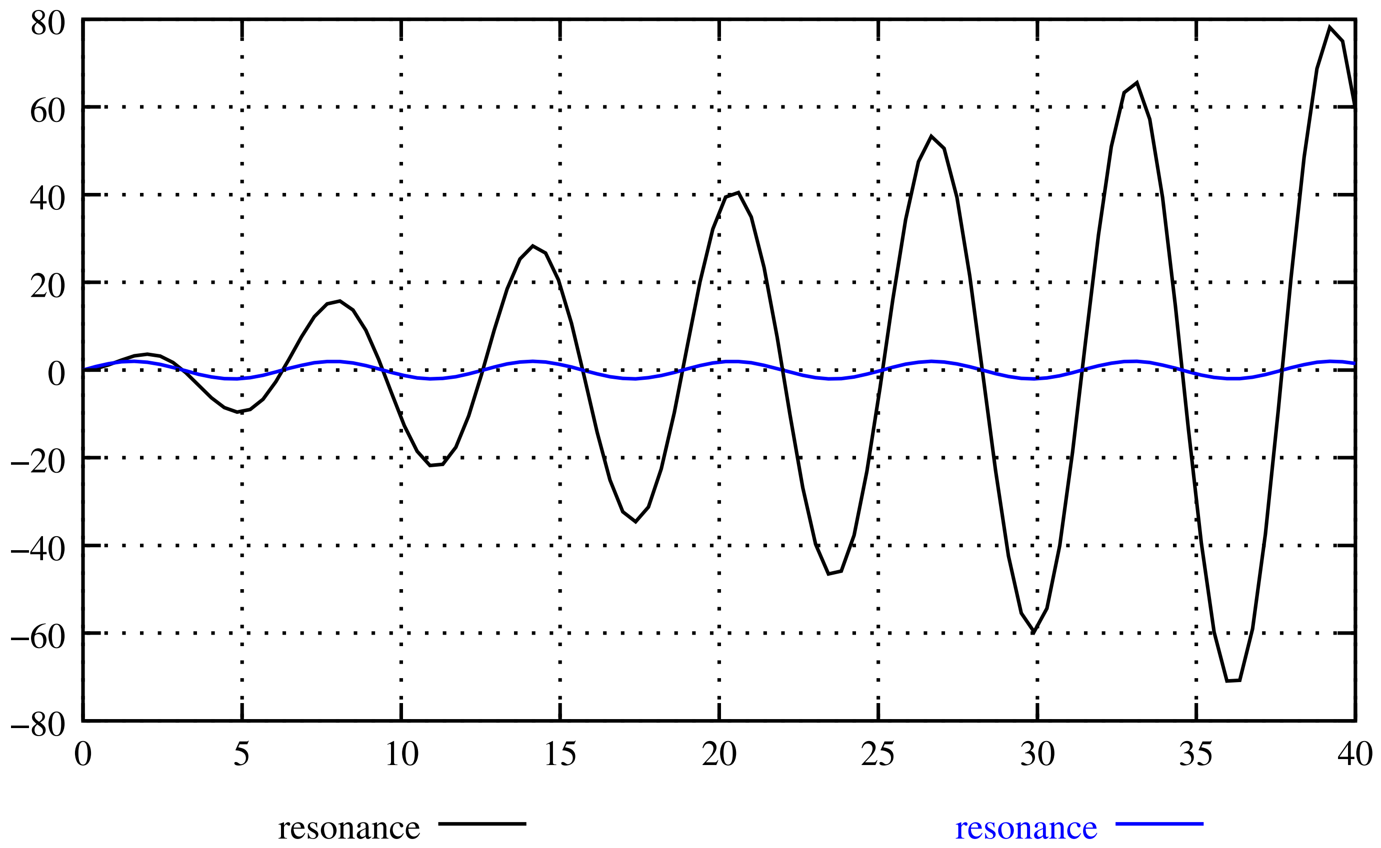
Pro rovnici (7) je možné získat řešení ve tvaru:

$$y(t) = P(\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_o} \sin(\omega_o t)). \quad (8)$$



Rezonance (1)

Nejen u harmonického zatížení, ale i u dále uvedeného obecně proměnného zatížení se setkáváme s potřebou vyhnout se problému *rezonance* zatížení („buzení“) a kmitání konstrukce.



Rezonance (2)

- Pojem rezonance je vysvětlován už v základních kurzech fyziky. Jeho praktickým projevem u stavebních konstrukcí je růst výchylek rezonující konstrukce až do té míry, že může dojít k jejímu poškození nebo zřícení.

- Rezonance nastane pokud je frekvence kmitání konstrukce – *vlastní frekvence*, kterou je možné stanovit například z rovnice (6) – blízká frekvenci zatížení uvedeného na pravé straně rovnice (7).

- Je zřejmé, že stavební konstrukce musí být navržena tak, aby k rezonanci se zatížením nedocházelo. To nemusí být nijak snadné, protože rovnice (6) bude sice mít jen jedno řešení (a kulička na pružině má tedy jen jednu vlastní frekvenci), ale u skutečných konstrukcí s mnoha stupni volnosti je počet vlastních frekvencí samozřejmě mnohem vyšší.

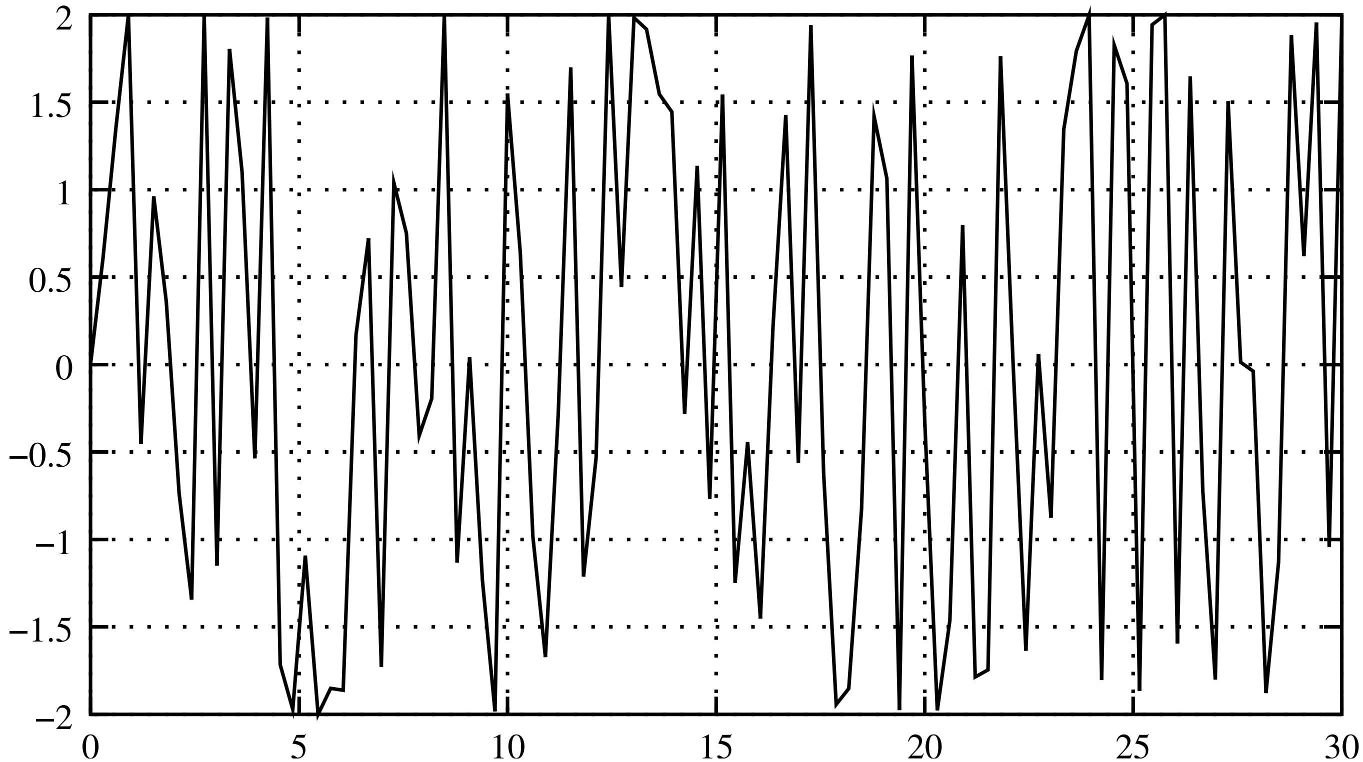
Rezonance (3)

- V praktických úlohách je samozřejmé, že zdroj harmonického buzení, kterým je strojní zařízení po spuštění svoji frekvenci zvyšuje postupně od nuly až po pracovní frekvenci. Jím ovlivňovaná **stavební konstrukce musí tedy být navržena tak, aby nedocházelo k rezonanci** při **pracovní frekvenci** strojního zařízení.

- Protože při rozběhu stroje dochází ke stavům, kdy jeho aktuální frekvence je blízká některé vlastní frekvenci stavební konstrukce, je potřebné zkracovat tyto stavy na minimum.*

*Tyto údaje by měly být součástí provozní dokumentace objektu a musí být v souladu s provozními předpisy daného strojního zařízení.

Obecné časově proměnné zatížení (1)



V praktických úlohách se často vyskytují **obecná** zatížení, která není možné jednoduše popsat pomocí goniometrických nebo jiných jednoduchých funkcí.

Obecné časově proměnné zatížení (2)

Obecné časově proměnné zatížení může být vyvoláno řadou jevů, například:

- zemětřeseními,
- technickou seismicitou (dopravou, průmyslovou výrobou, stavebními pracemi, důlními otřesy),
- nárazy těles (auta, letadla), poruchami, výbuchy,
- pohybem osob po stavebních konstrukcích (pohyb pěších účastníků dopravy na na mostech a lávkách, ,,mexické vlny“ diváků na stadionech, pohyb účastníků při hudebních produkcích, diskotékách a podobně),
- působením větru.

Obecné časově proměnné zatížení (3)

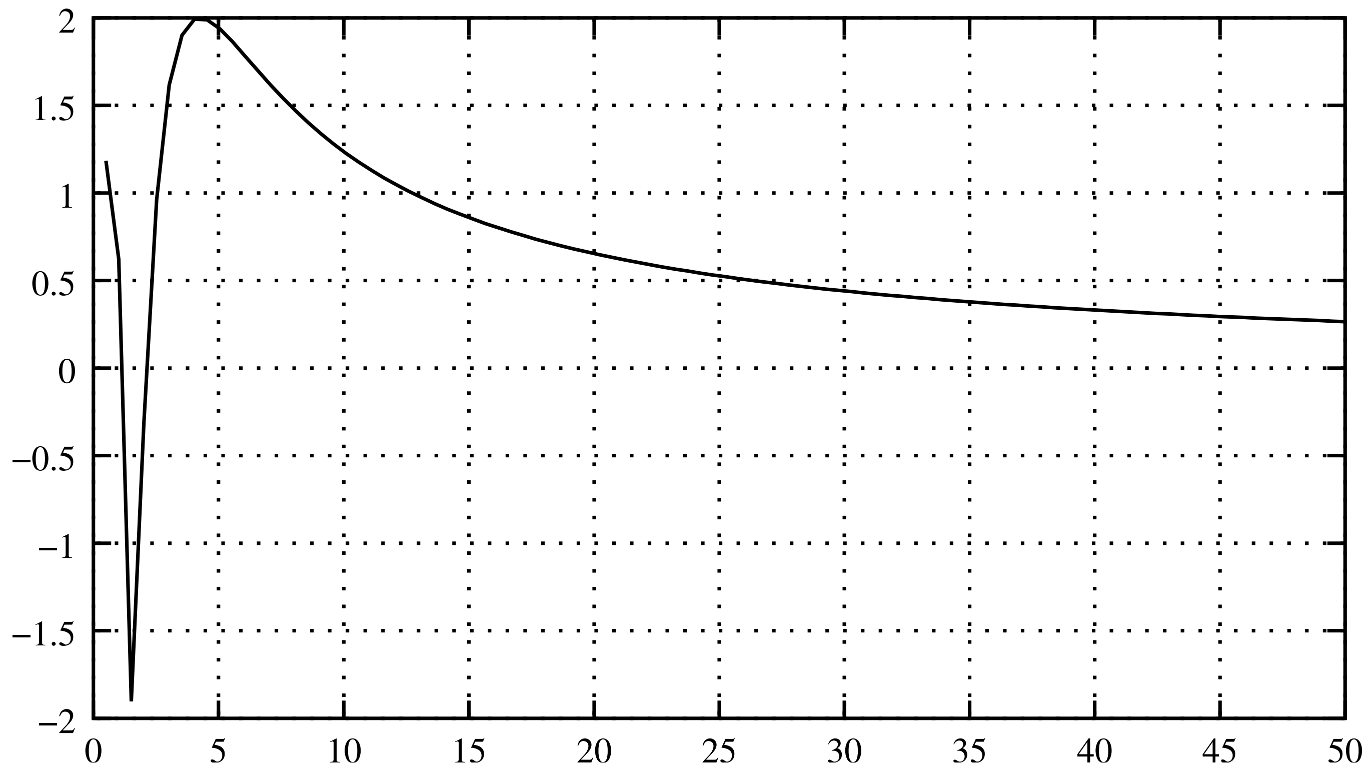
K řešení kmitání konstrukcí vystavených obecnému časově proměnnému zatížení je možné použít rovnici:

$$\frac{d^2\,y}{d\,t^2} m + k\,y = P(t), \tag{9}$$

kde $P(t)$ je v čase proměnné zatížení.

Řešení rovnice (9) zpravidla vyžaduje použití vhodné metody vyšetřující chování konstrukce v jednotlivých časových okamžicích (například Newmarkovy metody).

Tlumení (1)



Účinek tlumení.

Podle rovnice (6) by měla konstrukce, která v důsledku účinků zatížení kmitá, i po odeznění zřejmě pokračovat v kmitání (a to na svojí *vlastní frekvenci*). U skutečných konstrukcí tomu tak není a dochází k postupnému zmenšování výchylek v důsledku *tlumení*.

Tlumení (2)

Rovnici konstrukce zatížené obecně proměnným zatížením, ve které je zaveden i vliv tlumení, můžeme zapsat ve tvaru:

$$\frac{d^2\,y}{d\,t^2}\,m + \frac{d\,y}{d\,t}\,c + k\,y = P(t), \tag{10}$$

kde c vyjadřuje míru *tlumení*.

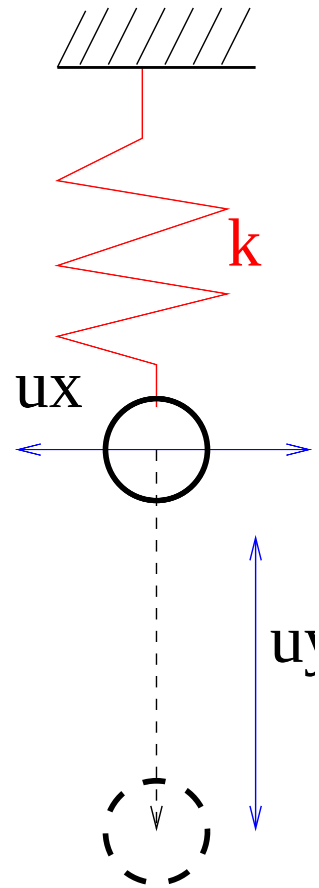
Tlumení může být vyvoláno mnoha faktory, zejména však *třením*. Tlumení se u stavebních konstrukcí stanovuje obtížně* nejpřesněji se určí měřeními na realizované konstrukci.

*Zejména kvůli charakteru řady použitých materiálů a konstrukčních prvků: zdivo, beton, množství otvorů, polotuhých spojů a podobně.

Soustavy s více stupni volnosti (1)

- V praktických úlohách je obvykle potřebné sestavovat výpočetní modely s více stupni volnosti.
- Například pružina na obrázku kromě pohybu u_y ve svislém směru (který jsme jako jediný předpokládali v předchozích snímcích) může pohybovat i ve směru vodorovném (u_x). [a]

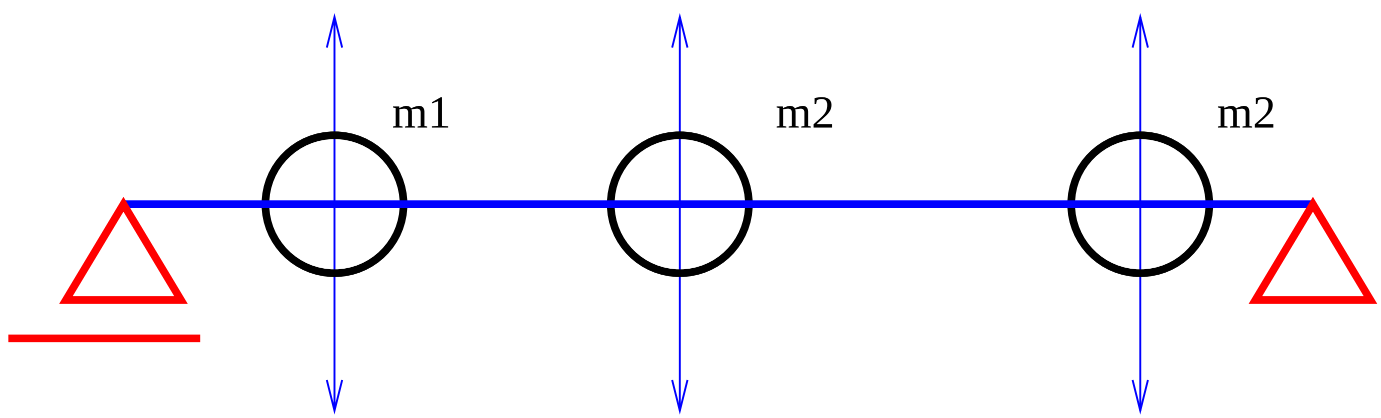
[a] A v prostoru bychom měli uvážit i pohyb ve třetím směru u_z.



Soustavy s více stupni volnosti (2)

Možnosti pohybu konstrukce, a tedy ani počet stupňů volnosti, se oproti úlohám stavební statiky nijak nemění.

Zejména při předběžných zjednodušených výpočtech se však využívá možnosti pracovat jen s těmi stupni volnosti, které jsou pro danou úlohu významné, a ostatní stupně volnosti se zanedbávají, tak, jak je ukázáno na obrázku na nosníku, u kterého se očekává kmitání především ve svislém směru. *



*Tak jako u každého zjednodušení je i tady potřebné vždy uvážit, zda nemůže dojít k podstatnému zkreslení výsledků, například v důsledku vynechání některého významného stupně volnosti.

Soustavy s více stupni volnosti (3)

Rovnici (10) je pro n stupňů volnosti možné přepsat do maticového tvaru:

$$\mathbf{M}\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \mathbf{C}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{K}\,\mathbf{u} = \mathbf{F}(t), \tag{11}$$

kde

- $\mathbf{M}$ je *matice hmotnosti* konstrukce,
- $\mathbf{C}$ je *matice útlumu* (tlumení) konstrukce,
- $\mathbf{M}$ je *matice tuhosti* konstrukce, která je identická s maticí tuhosti v úlohách statiky stavebních konstrukcí.

Metoda konečných prvků v dynamice konstrukcí (1)

K řešení úloh stavební dynamiky je možné využít rovnici (11). Pro jednotlivé typy úloh je možné tuto rovnici zapsat:

- Pro konstrukce zatížené harmonickým zatížením:

$$\mathbf{M}\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \mathbf{C}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{K}\,\mathbf{u} = \mathbf{F} sin(\omega\; t), \tag{12}$$

  kde $\mathbf{F}$ je vektor maximálních hodnot harmonických zatížení,

- Pro konstrukce vystavené účinkům obecného časově proměnného zatížení:

$$\mathbf{M}\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \mathbf{C}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{K}\,\mathbf{u} = \mathbf{F}(t), \tag{13}$$

  kde $\mathbf{F}(t)$ je vektor časově proměnných zatížení.

Metoda konečných prvků v dynamice konstrukcí (2)

- Pro výpočet vlastních frekvencí (kmitání konstrukce bez zatížení; vliv tlumení se zde neuvažuje):

$$\mathbf{M}\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \mathbf{K}\,\mathbf{u} = \mathbf{0}. \tag{14}$$

Pokud ω je frekvence kmitání, pak je zřejmě možné psát:

$$\left(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}\right)\overline{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \tag{15}$$

což je *zobecněný problém vlastních čísel* svazku matic a ω^2 jsou vlastní čísla a $\overline{\mathbf{u}}$ jsou jim příslušné *vlastní vektory*. Představují-li vlastní uvedená čísla ω^2 kvadráty vlastních frekvencí, pak z jim příslušných vlastních vektorů je možné získat *tvary kmitu* odpovídající těmto frekvencím.[a]
Rovnici (15) je možné řešit například metodou iterace podprostoru, Lanczosovou metodou a dalšími.

[a]Podobně jako u úloh lineární stability je možné takto získat *tvar* kmitu, ale ne už konkrétní hodnoty výchylek v jednotlivých uzlech konstrukce.

Otázky k procvičení:

- Pružina se účinkem síly o velikosti $32\ kN$ protáhne o $40\ mm$. Určete její tuhost.

- Která rovnice popisuje vlastní netlumené kmitání soustavy o jednom stupni volnosti?

- Jakým výrazem je možné popsat harmonické zatížení soustavy o 1 stupni volnosti?