

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA

FAKULTA STAVEBNÍ

INŽENÝRSKÉ STATICKÉ VÝPOČTY

Silová metoda, třímomentová rovnice

Jiří Brožovský

Kancelář: LP – H 406/3
Telefon: 597 321 321

E-mail: jiri.brozovsky@vsb.cz

Náplň předmětu – tematické okruhy

1. opakování potřebných vztahů (základy stavební mechaniky a pružnosti)
2. doplnění znalostí ze silové metody (metoda třímomentových rovnic)
3. složitější problémy v deformační metodě (různé typy zatížení aj.)
4. úvod do moderních numerických metod (MKP)
5. pohyblivé zatížení (příčinkové čáry, břemenová kritéria)
6. úvod do nelineární mechaniky
7. úvod do stavební dynamiky

Poznámka: Prezentace jsou nové, připravované speciálně pro Váš ročník. Pokud zjistíte jakékoli překlepy, nejasnosti nebo jiné nedostatky, pište prosím na jiri.brozovsky@vsb.cz.

Vždy, prosím, uveďte číslo prezentace a číslo snímku.

Doporučená literatura

- Teplý, B. – Šmiřák, S.: Pružnost a plasticita 2., VUT v Brně, Brno, 1992 (skriptum)
- Kolář, V., Kratochvíl, J., Leitner, F., Ženíšek, A. Výpočet plošných a prostorových konstrukcí metodou konečných prvků, SNTL, Praha, 1979
- Kolář V., Němec I., Kanický V. FEM Principy a praxe metody konečných prvků, Computer Press, Praha, 1997

Doplňková literatura

- Šmiřák, S.: Energetické principy a variační metody v teorii pružnosti, VUT v Brně, Brno, 1998 (skriptum)
- Dický, J., Mistríková, Z., Sumeč, J.: Pružnost a plasticita v stavebnictve 2, STU, Bratislava, 2005
- Ravinger, J., Koleková, Y.: Pružnosť II., STU, Bratislava, 2002
- Servít a kol.: Teorie pružnosti a plasticity II., SNTL, Praha, 1984 (celostátní učebnice)
- Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E., Witt, R. J.: Concepts and Applications of Finite Element Analysis, John Wiley and Sons, 1995

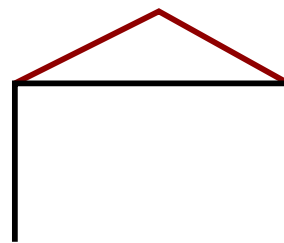
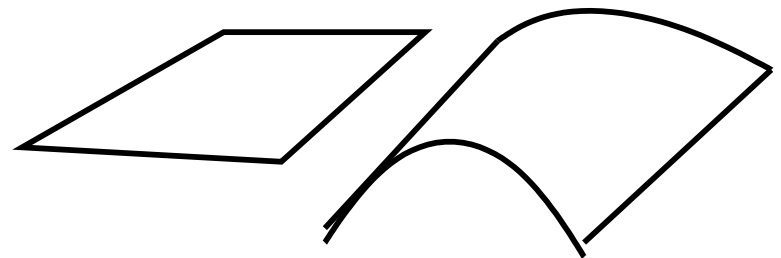
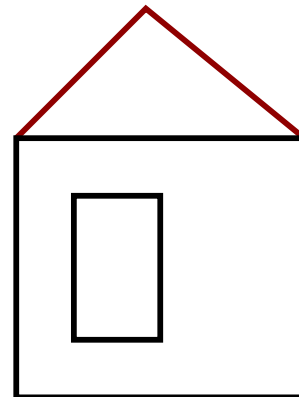
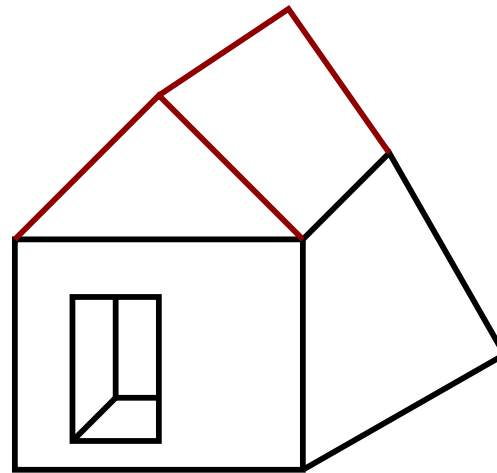
Zkouška

- Výpočetní a teoretická část.
- Ruční výpočty v rozsahu zvládnutelném za 2 hodiny: např. výpočet stupně statické a přetvárné neurčitosti, vykreslení příčinkových čar na staticky určitých konstrukcích, stanovení vnitřních sil na prostém nebo spojitém nosníku a podobně.
- Teoretická část: znalosti z přednášek i ze cvičení (např. otázky „jak a proč jste byste počítali zadanou úlohu“,...).

Otázky v teoretické části budou mnohem zvládnutelnější a rozmanitější než byly např. v Základech stavební mechaniky!

Idealizace geometrie konstrukce

- tělesa
- plošné konstrukce
 - stěny (rovinný problém)
 - desky
 - skořepiny
- pruty



Opakování: základní předpoklady v lineární mechanice

- látka studovaného tělesa je **spojitá**
- látka je **homogenní** (ve všech místech stejné vlastnosti)
- látka je **isotropní** (ve všech směrech stejné vlastnosti)
- látka se chová **lineárně pružně** (tzv. Hookeův zákon)
- těleso je vystaveno jen **malým deformacím**
- zatížení jsou přikládána jen **velmi pomalu** („statická zatížení“)

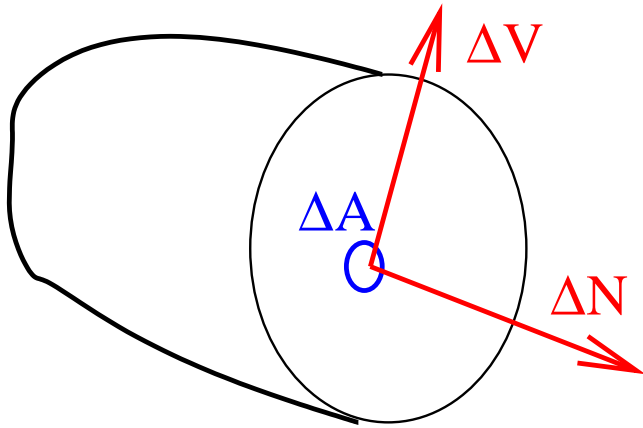
Pak lze použít:

- princip superpozice
- princip úměrnosti

Isotropní a anisotropní materiál

- **isotropní:** ve všech směrech stejné vlastnosti
- **anisotropní:** v různých směrech různé vlastnosti
- **ortotropní:** různé vlastnosti ve vzájemně kolmých směrech

Napětí - intenzita vnitřních sil



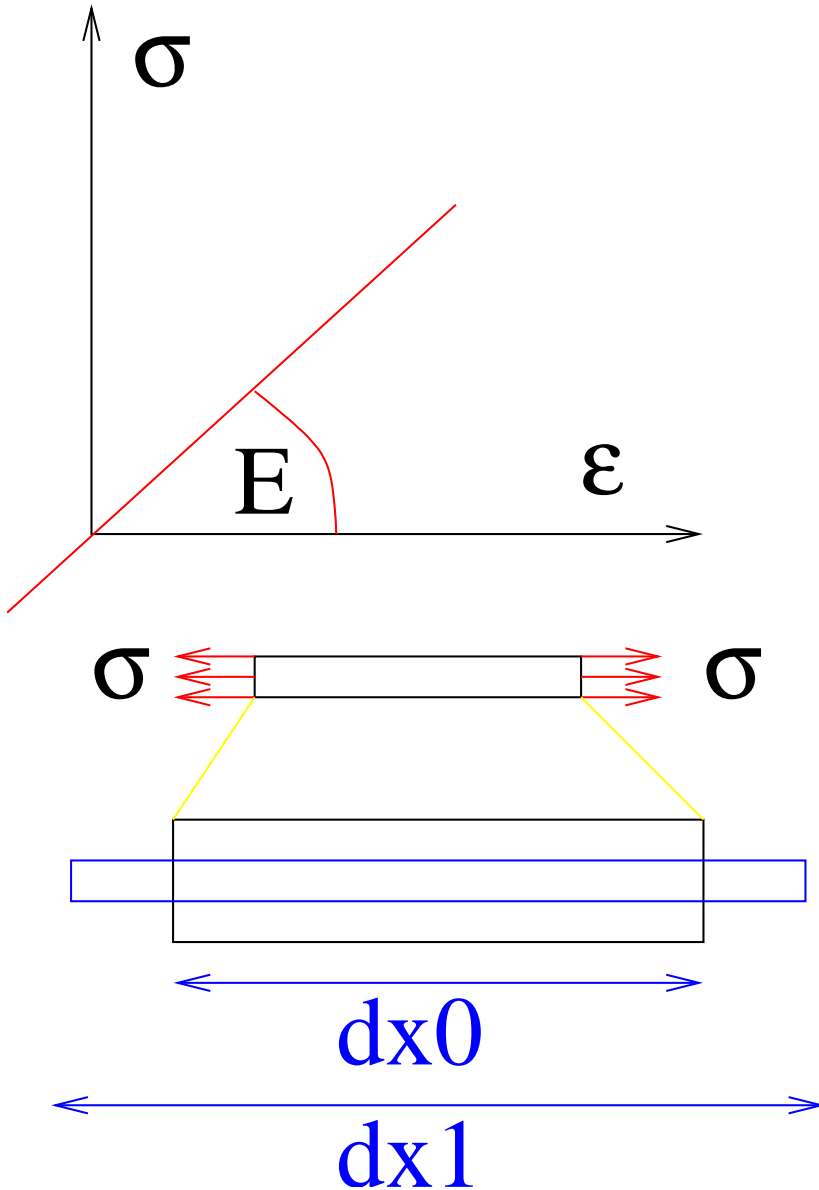
$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta A}$$

$$\tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta A}$$

Jednotka **Pascal**: $Pa = \frac{N}{m^2}$

Doporučeno: $MPa = \frac{N}{mm^2}$

Fyzikální vztahy – lineární pružnost (1)



Vztah přímé úměrnosti „Hookeův zákon“:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

přitom platí:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = \mu \varepsilon_x$$

Analogicky pro smyk:

$$\tau = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

Fyzikální vztahy – lineární pružnost (2)

E ... modul pružnosti v tahu a tlaku (Youngův)

G ... modul pružnosti ve smyku

μ, ν ... součinitel příčné kontrakce (Poissonův)

Platí také:

$$\frac{E}{G} = 2(1 + \mu)$$

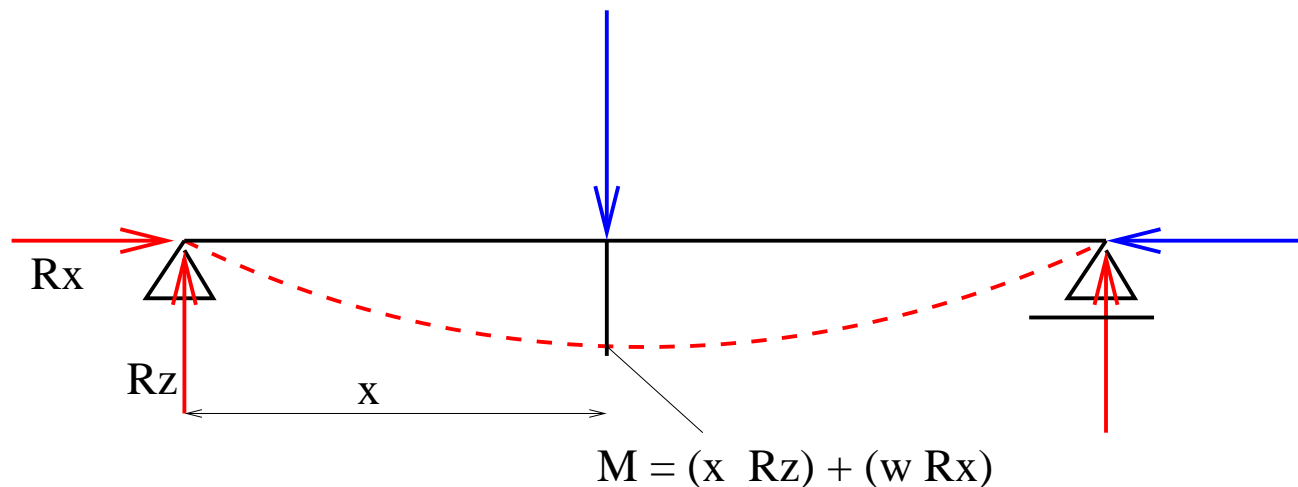
Nelineární mechanika

Pokud neplatí některé z výše uvedených předpokladů...

- **fyzikální linearita** – mezi napětím a deformací je vztah přímé úměrnosti a látka je schopna se vrátet po odstranění zatížení
- **geometrická linearita** – deformace konstrukce jsou malé, a proto je možné geometrické vztahy zjednodušit na lineární závislosti

Nelineární chování – teorie 2. řádu

Teorie 2. řádu: předpokládáme platnost předpokladů pružnosti (malé deformace, lineární pružnost atd.), ale při výpočtu sestavujeme podmínky rovnováhy na **deformované konstrukci** – vede na nelineární vztahy. Využívá se např. při posudku **stability konstrukcí**.



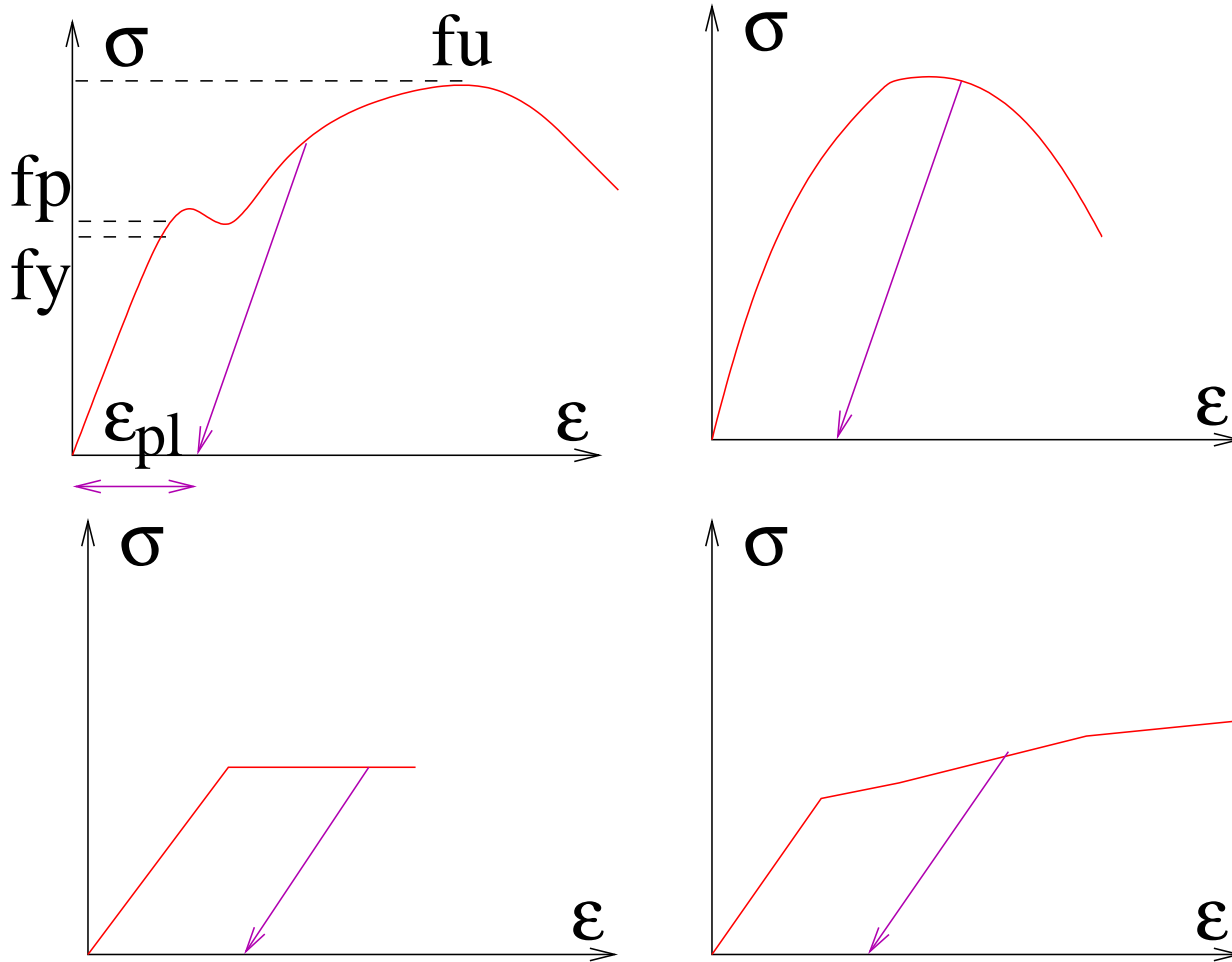
Jde o nejjednodušší případ *geometrické nelinearity*, kdy deformace jsou stále velmi malé, ale jejich vliv nelze zanedbat.

Plasticita

Při deformaci látky vznikají **nevratné** (plastické) deformace, které v látce zůstávají i po případném odlehčení.

Vztah mezi zatížením a deformací **není lineární**, ostatní předpoklady pružnosti jsou zachovány.

Fyzikální vztahy – plasticita



f_y ... mez kluzu, f_p ... mez pružnosti, f_u ... mez pevnosti

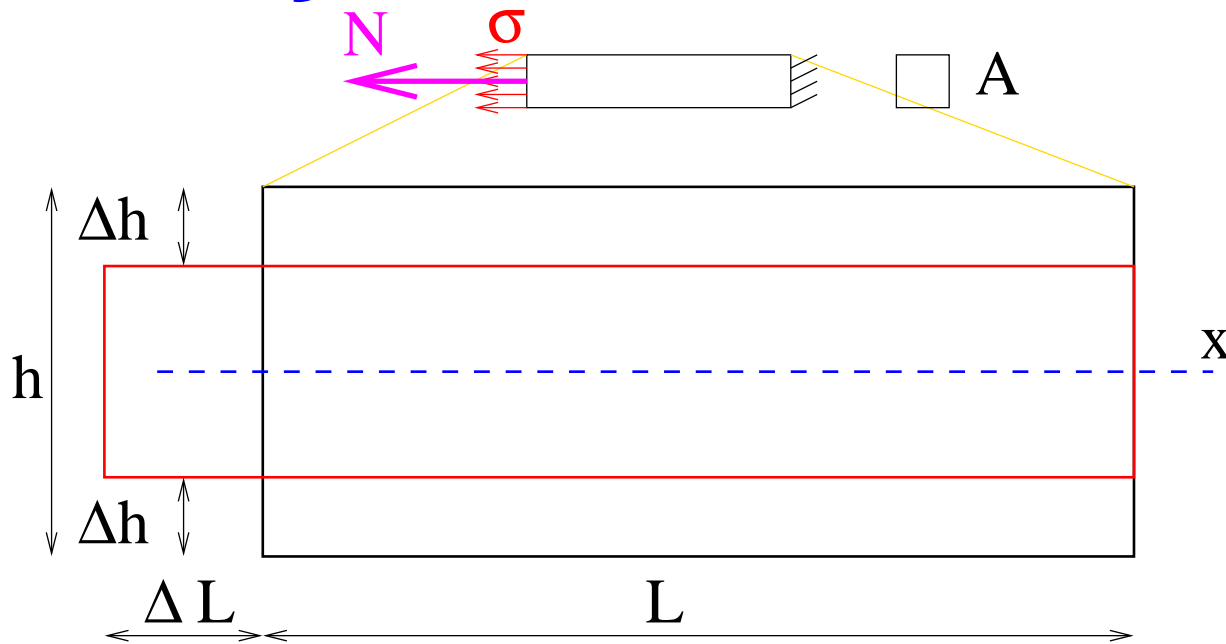
Lineární mechanika

V dalším budeme (až do odvolání) předkládat, že uvedené nelineární jevy nenastávají, a že platí předpoklady lineární stavební mechaniky.

K nelineárním úlohám se dostaneme až později, vždy bude uvedeno upozornění, jak ovlivňují naše úvahy a výpočty.

Osový tah a tlak

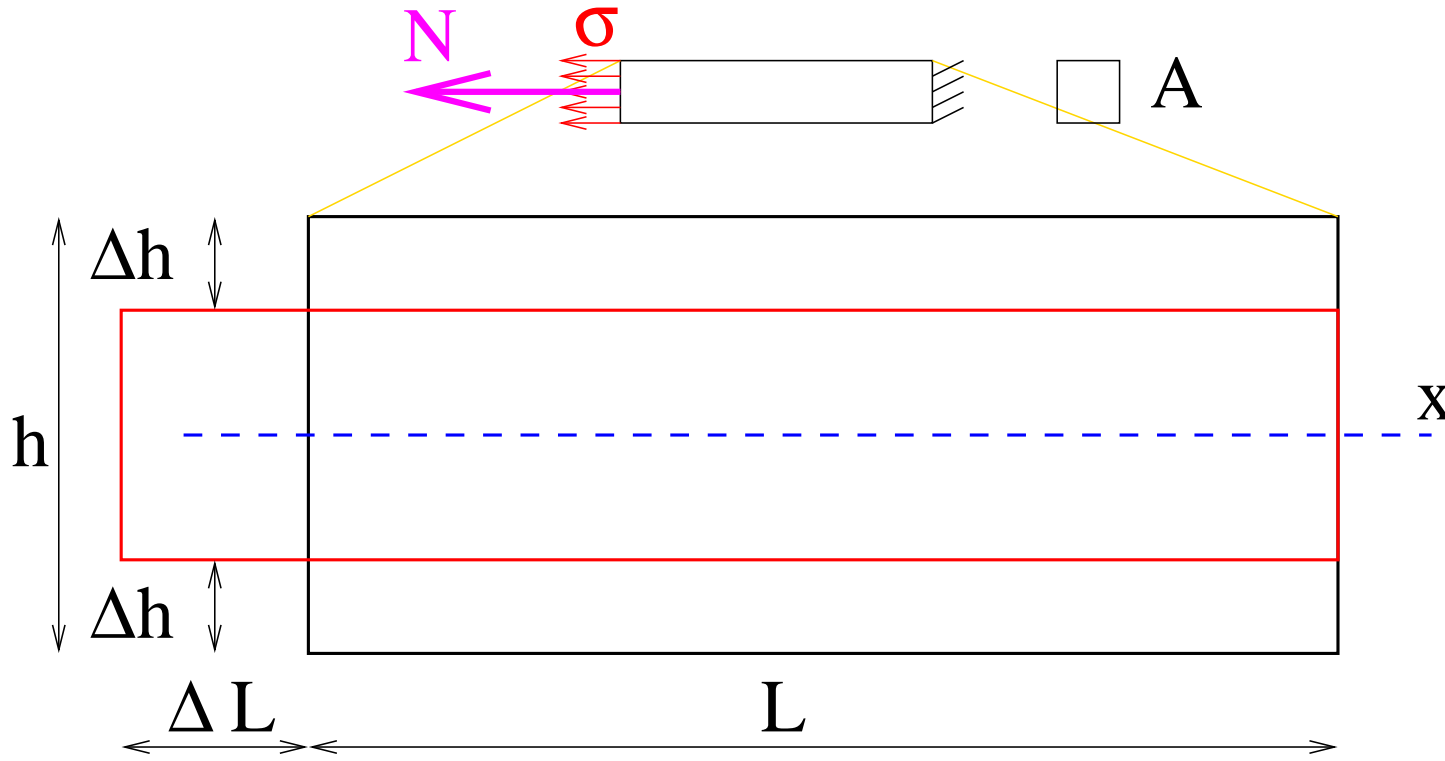
(1)



- průřezy prutu zůstávají rovinnými a kolnými k ose prutu i po deformaci (Bernoulliho–Naviérova hypotéza)
- podélná vlákna na sebe vzájemně netlačí

Osový tah a tlak

(2)



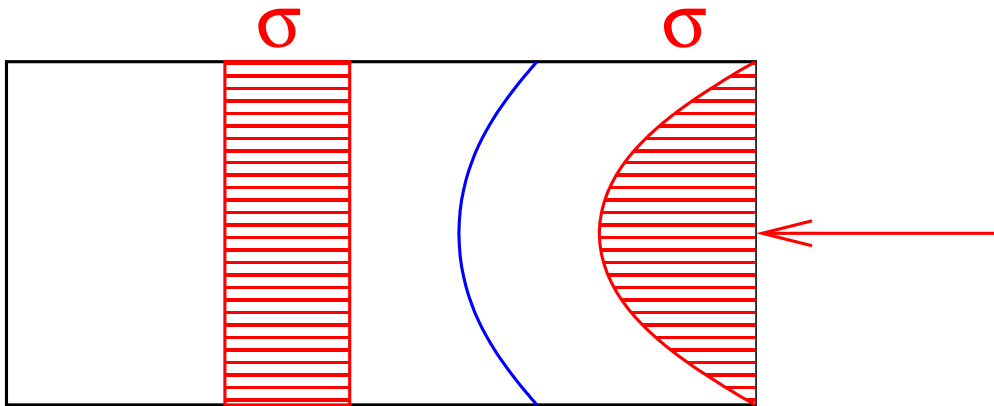
$$\sigma_x = \frac{N}{A}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L}, \quad \sigma_x = E \varepsilon_x$$

Osový tah a tlak

(3)

Soustředěné zatížení na prutu:

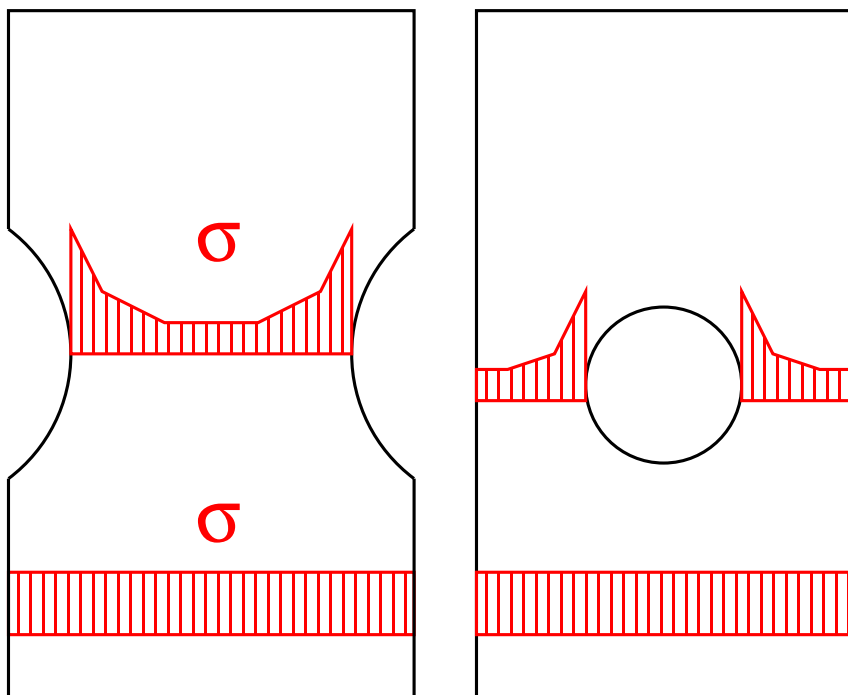


Saint-Venantův princip lokálnosti.

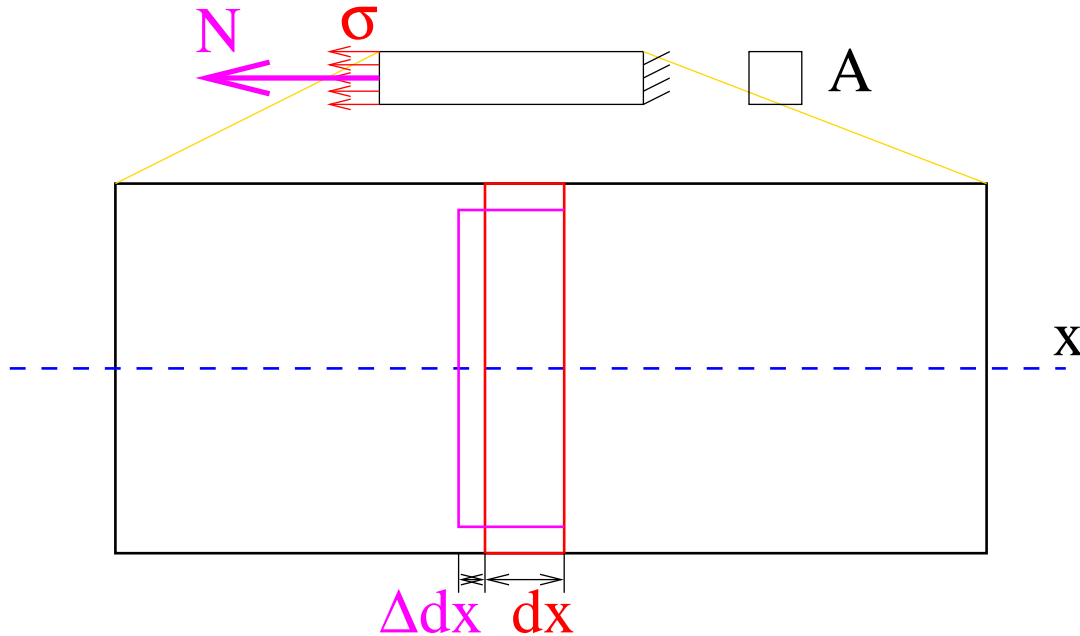
Osový tah a tlak

(4)

Koncentrace napětí při změně průřezu.



Osový tah a tlak – přetvoření



$$\Delta L = \int_0^L \Delta dx = \int_0^L \varepsilon_x dx = \int_0^L \frac{\sigma_x}{E} = \frac{N}{E A} \int_0^L dx = \frac{N L}{E A}$$

$$N = \frac{E A}{L} \Delta L = k \Delta L$$

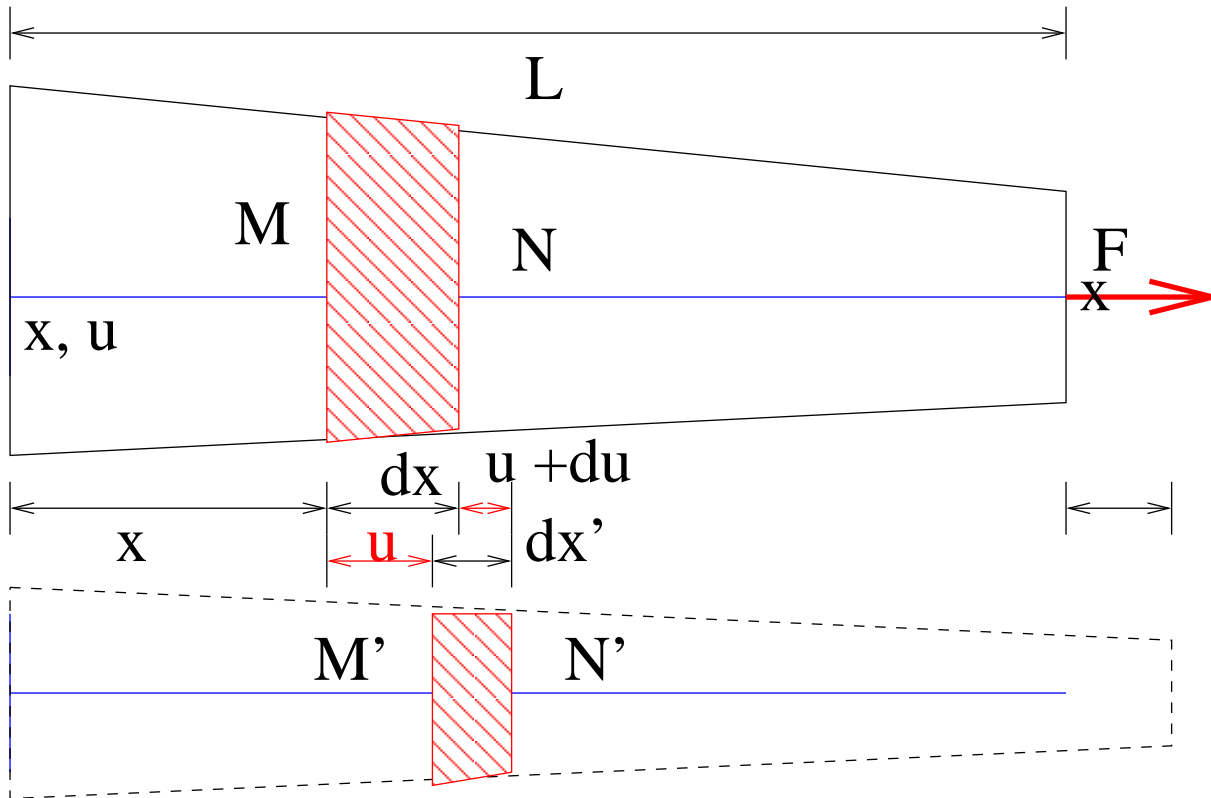
kde $k = \frac{E A}{L}$... tuhost prutu

Osový tah a tlak – přetvoření od teploty

$$\Delta L_T = \int_0^L \varepsilon_{xT} dx = \int_0^L \Delta T D x = \alpha_t L,$$

kde α_T ... součinitel tepelné roztažnosti [$^{\circ}C^{-1}$]

Osový tah a tlak – přetvoření obecně



$$dx' = dx + (u + du) - u = dx + du$$

Osový tah a tlak – přetvoření obecně

$$\varepsilon_x = \frac{dx' - dx}{dx} = \frac{(dx + du) - dx}{dx} = \frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} = \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{N(x)}{EA(x)}$$

Po zintegrování rovnice (protože $\varepsilon_x = \frac{du}{dx}$):

$$u = \int_a^b \frac{N(x)}{EA(x)} dx + C$$

C určíme z podmínky $u(n) = 0$, je-li n místo vodorovného podepření.

Hlavní napětí (1)

Jsou to:

- normálová napětí v takovém směru, ve kterém jsou všechna **smyková** napětí **nulová**
- extrémní (největší, nejmenší) normálová napětí v daném místě

Značíme a řadíme:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad (1)$$

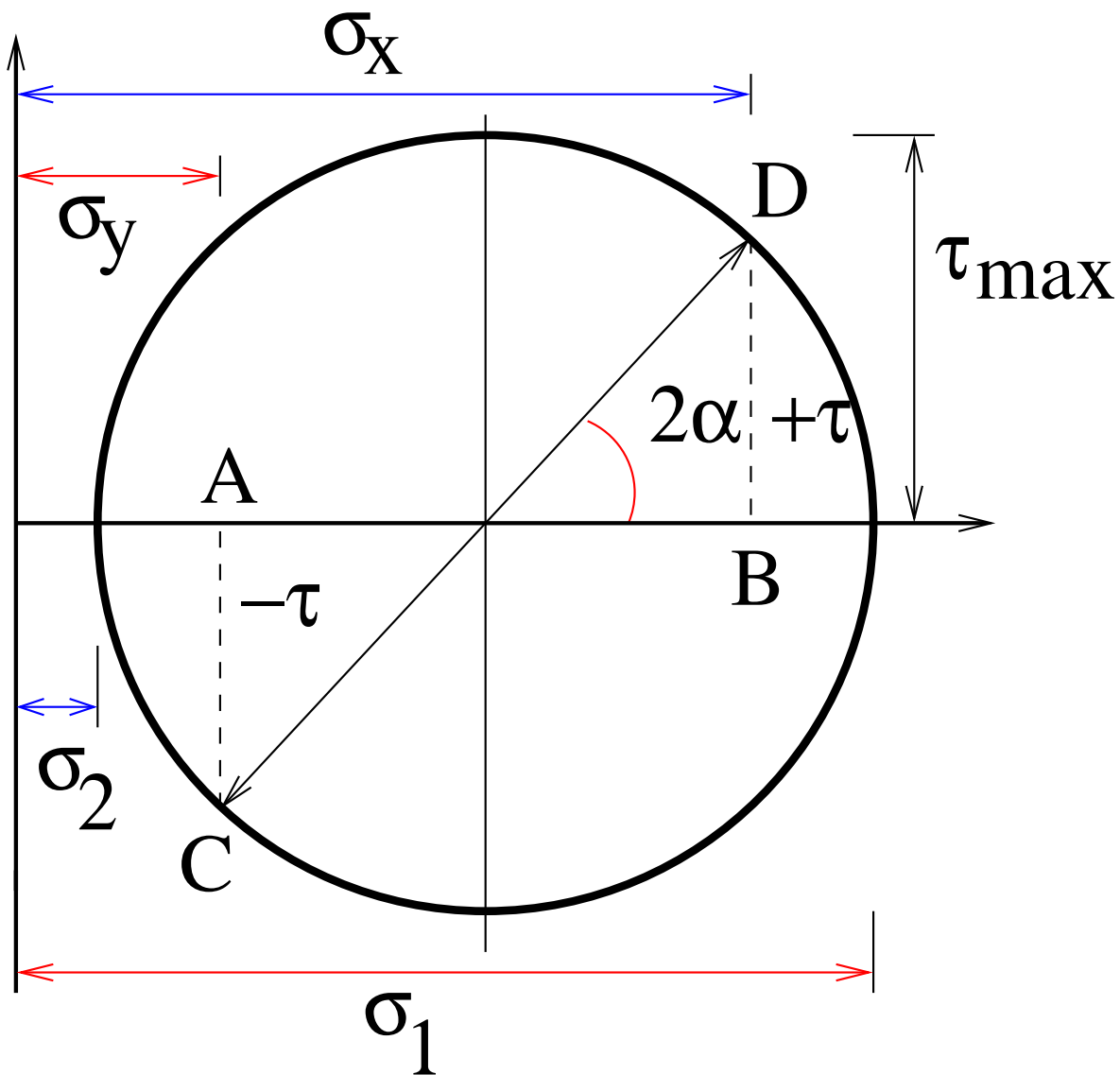
Hlavní napětí (2) – v rovině

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \quad (2)$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2} \left[(\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau_{xy}^2} \right] \quad (3)$$

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (4)$$

III. napětí (3) – Mohrova kružnice



Invarianty napjatosti

Jsou to **skalární veličiny**, stanovené z napětí v bodě, které **nezávisí** na orientaci systému souřadnic.

Invarianty napjatosti:

1. $I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$
2. $I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2$
3. $I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + \dots$ (lépe vyjádříme v hlavních napětích)

Invarianty napjatosti vyjádřené pomocí **hlavních napětí:**

1. $I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$
2. $I_2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3$
3. $I_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$

Hydrostatické a deviatorické napětí

Jsou využívána ke snazšímu zápisu např. vztahů pro plasticitu nebo kritéria porušení.

Hydrostatické napětí (střední napětí):

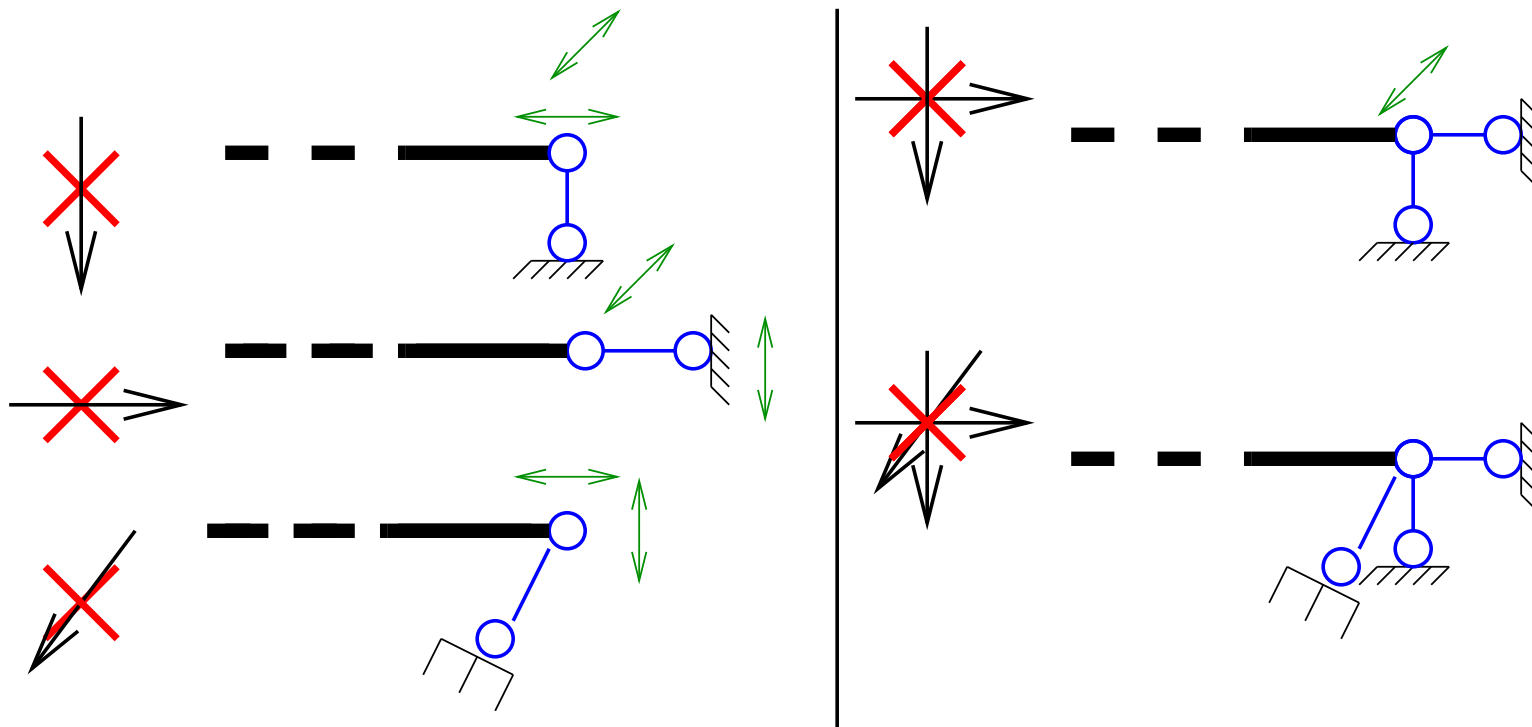
$$\sigma_{hyd} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (5)$$

Deviatorické napětí:

$$\sigma_{dev} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} \quad (6)$$

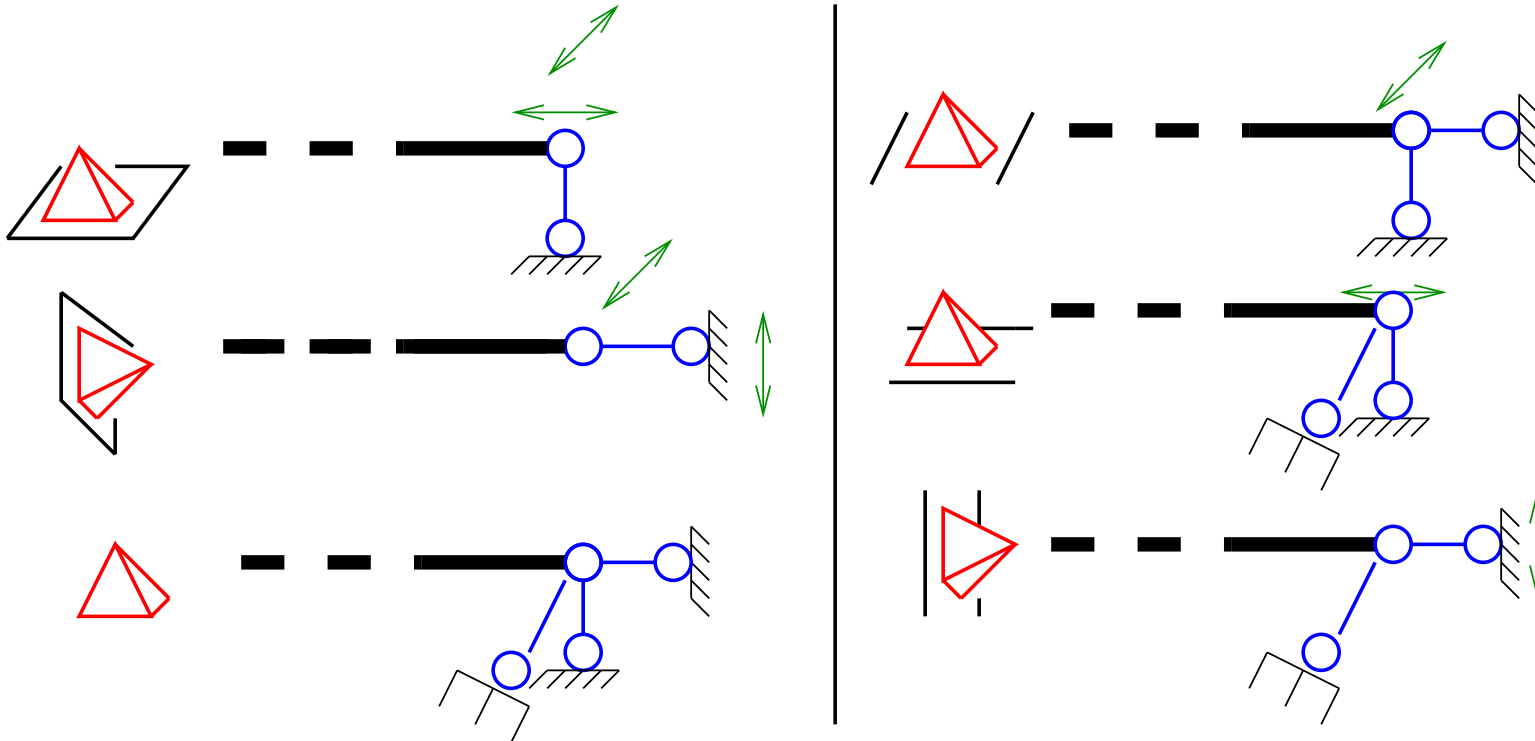
Vnější vazby

Vazba proti **posunu** v daném směru:



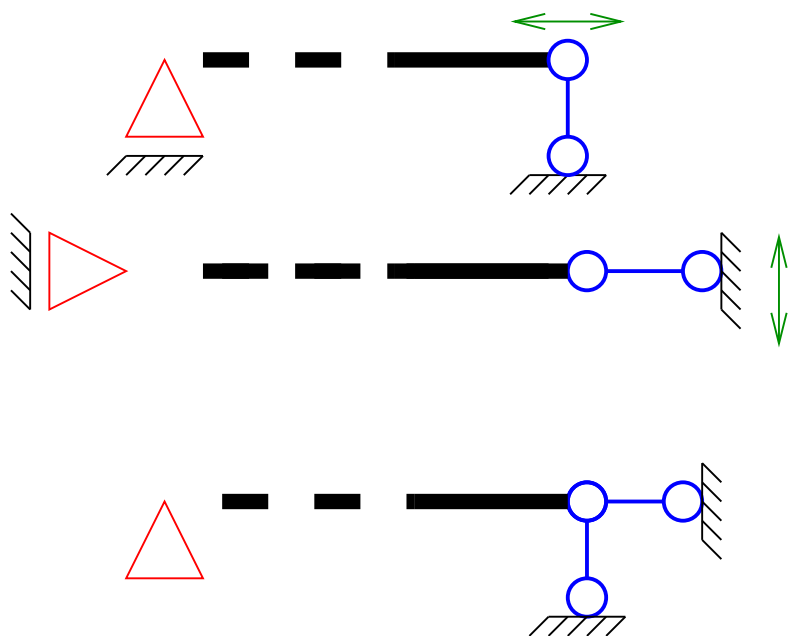
Vnější vazby: alternativní znázornění pro 3D

Vazba proti **posunu** v daném směru (posuvné a pevné klouby):



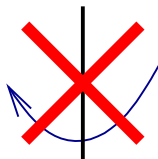
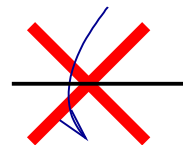
Vnější vazby: alternativní znázornění pro 2D

Vazba proti **posunu** v daném směru (posuvné a pevné klouby):



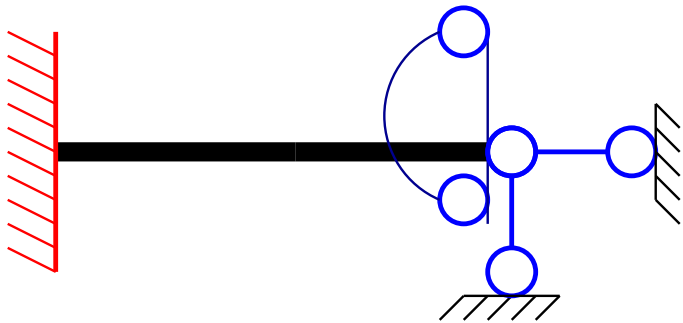
Vnější vazby – pootočení

Vazba proti **pootočení** v daném směru:



Vnější vazby – vetknutí ve 2D

Je zabráněno všem posunům a pootočením daného bodu prutu v rovině:



Zajištění nehybnosti prutu

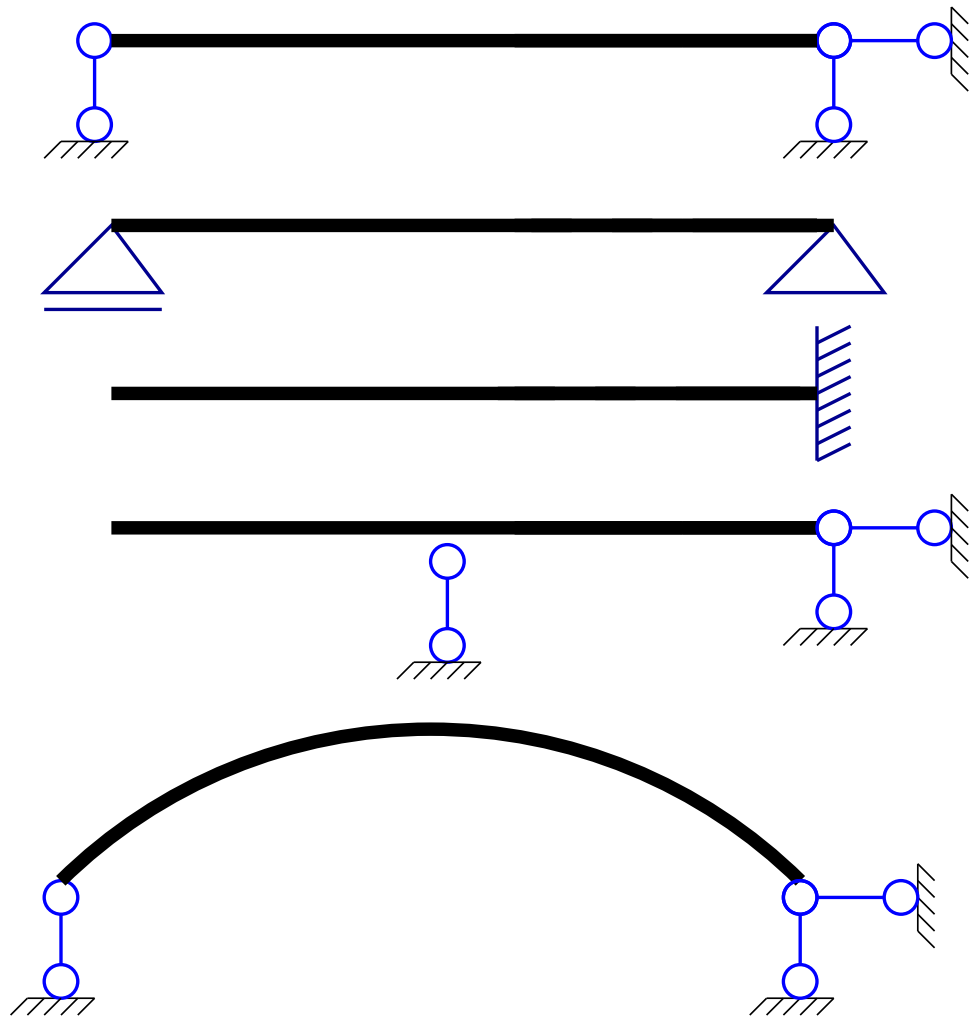
Kinematicky **určitá** konstrukce:

- v rovině: jsou odebrány právě 3 stupně volnosti
- v prostoru: je odebráno právě 6 stupňů volnosti

Kinematicky **přeurčitá** konstrukce:

- v rovině: jsou odebrány více než 3 (6) stupně volnosti

Kinematicky určité konstrukce



Prut bez zajištěné nehybnosti

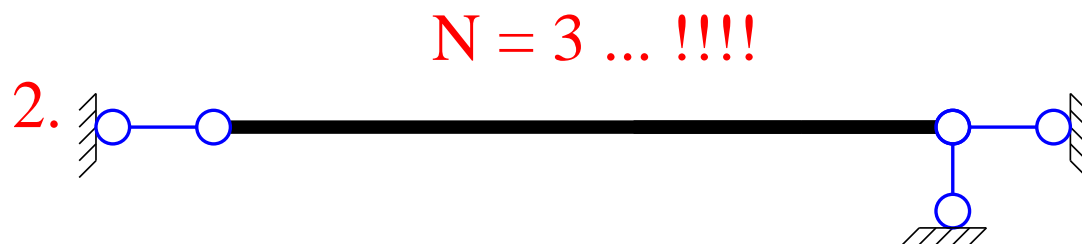
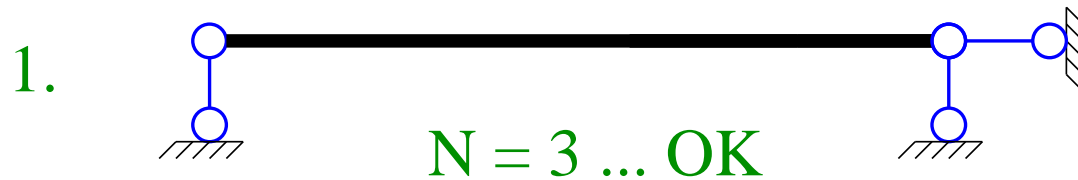
Kinematicky **neurčitá** konstrukce:

- v rovině: jsou odebrány méně než 3 stupně volnosti
- v prostoru: je odebráno méně než 6 stupňů volnosti

Výjimkový případ:

- je odebrán potřebný počet stupňů volnosti, ale vazby jsou **nevhodně upořádány**

Prut bez zajištění nehybnosti



1. nehybný prut (kinematically určitý)

2. výjimečný případ

Stupeň statické neurčitosti (1)

V rovině:

$$s = v + 3 \times z - k - 3$$

kde:

- s ... stupeň statické neurčitosti
- c ... počet stupňů volnosti odebraných vnějšími vazbami
- z ... počet uzavřených částí
- k ... počet jednonásobných kloubových připojení prutů
- 3 ... počet podmínek rovnováhy v rovině

Stupeň statické neurčitosti (2)

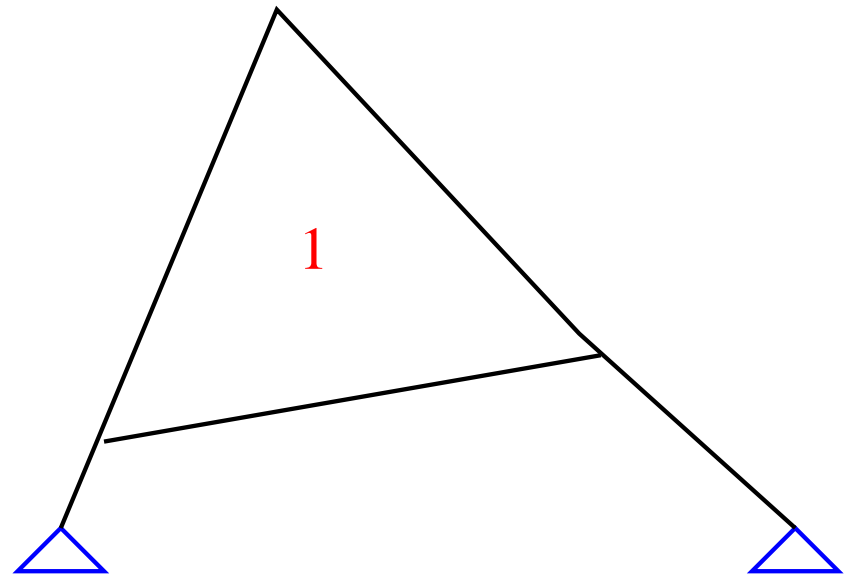
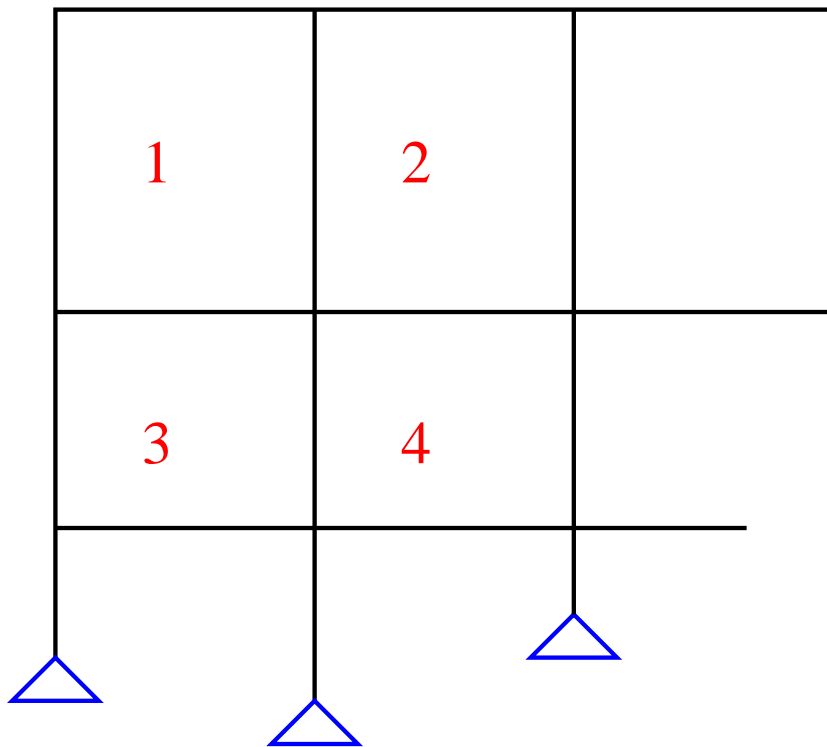
V rovině:

$$s = v + 3 \times z - k - 3$$

- $s = 0$... konstrukce staticky **určitá**
- $s > 0$... konstrukce staticky **neurčitá**
- $s < 0$... konstrukce staticky **přeurčitá** (kinematicky neurčitá – mechanismus)

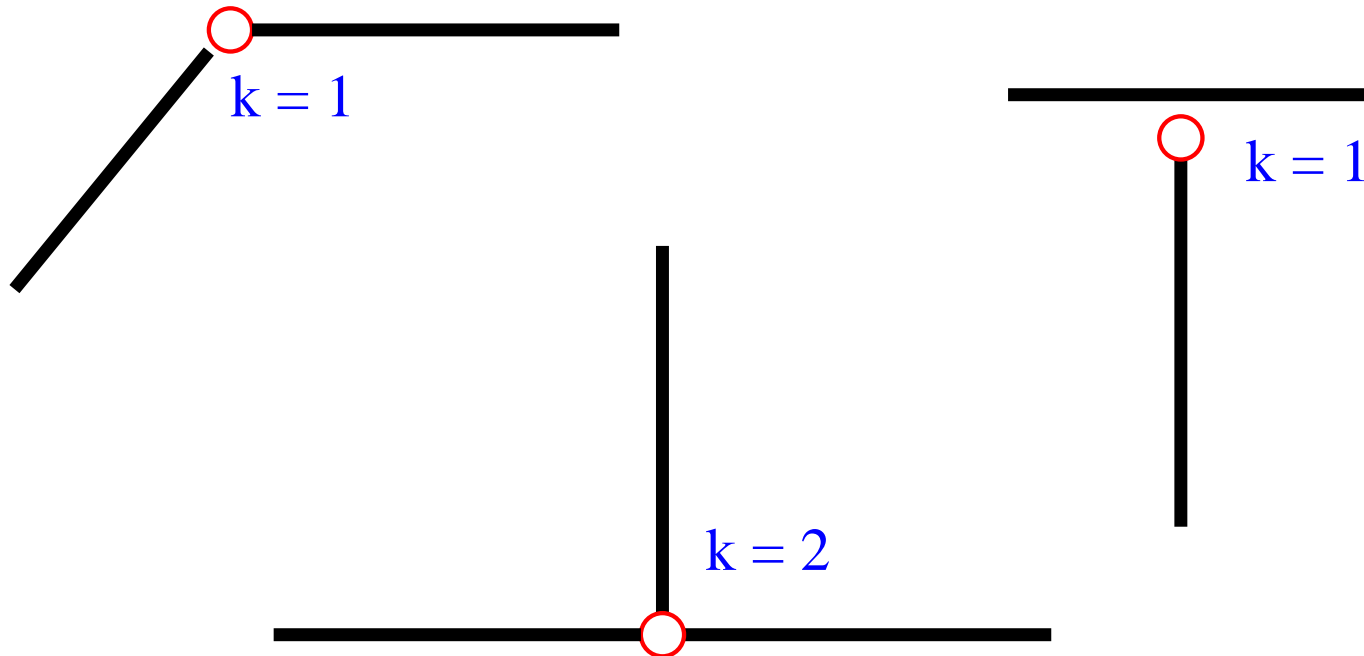
Stupeň statické neurčitosti (3)

Uzavřené části:

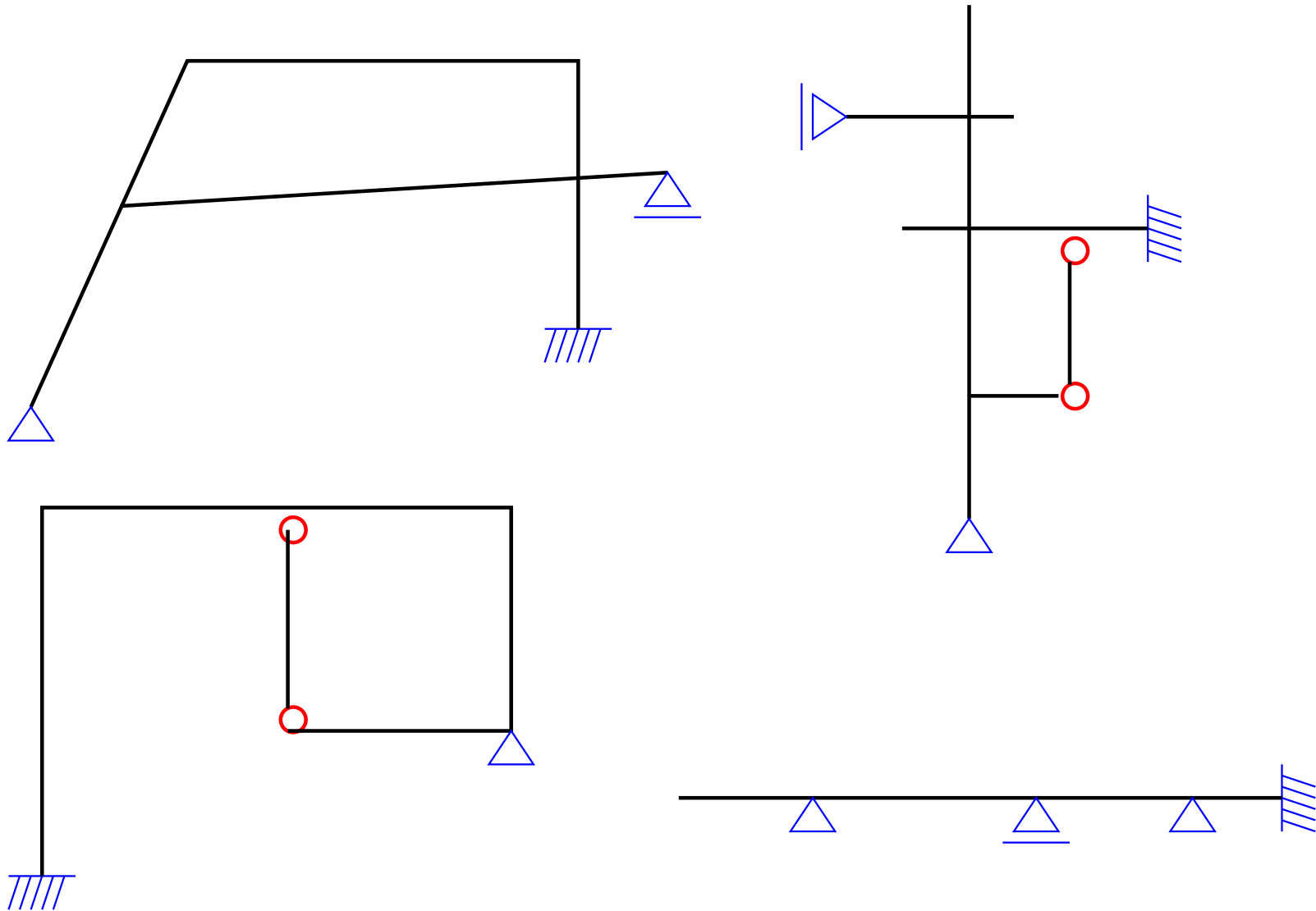


Stupeň statické neurčitosti (4)

Klouby:



Stupeň statické neurčitosti? (5)



Opakování: výpočet deformací staticky určitých konstrukcí

- **lineární mechanika** (viz předchozí předpoklady):
- malé deformace (mnohem menší než rozměry konstrukce)
- platí principy superpozice a úměrnosti
- podmínky rovnováhy stanovujeme na nedeformované konstrukci (**teorie 1. řádu**)

Kladný směr deformačních veličin: ve směru příslušné kladné souřadnicové poloosy, u pootočení proti směru hodinových ručiček (při pohledu proti kladné poloose).

Princip virtuálních prací (1)

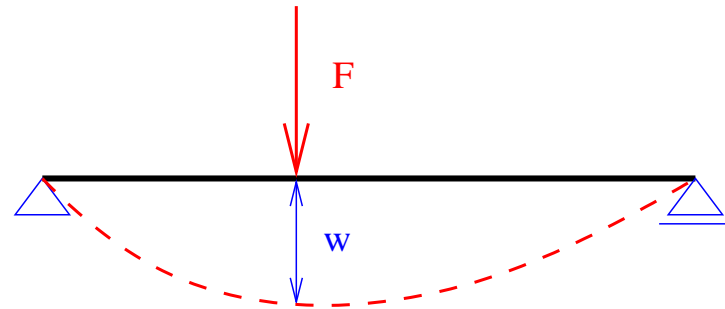
Virtuální veličina: myšlená, avšak možná (síla, deformace).

Práce: součin síly a dráhy, na které působí.

Práce vnějších sil:

$$L_e = F w, [N m] = [J] \text{ (Joule)}$$

$$L_e = \int_a^b q(x)w(x) dx$$



Virtuální práce: práce virtuálních sil na skutečných deformacích (*silová virtuální práce*) nebo práce skutečných sil na virtuálních deformacích (*deformační virtuální práce*).

Princip virtuálních prací (2)

Virtuální práce vnitřních sil:

$$L_i = - \left\{ \int_l N du + \int_l M_y d\varphi_y + \int_l M_z d\varphi_z + \int_l T d\varphi_x + \int_l V_y dv + \int_l V_z dw \right\}$$

Vnitřní síly brání deformacím, jsou proto do vztahu zavedeny jako záporné (znaménko mínus před složenou závorkou).

Princip virtuálních prací (3)

Princip virtuálních prací (J. L. Lagrange):

Celková virtuální práce na vyšetřované konstrukci je rovna **nule**.

$$L_e + L_i = 0$$

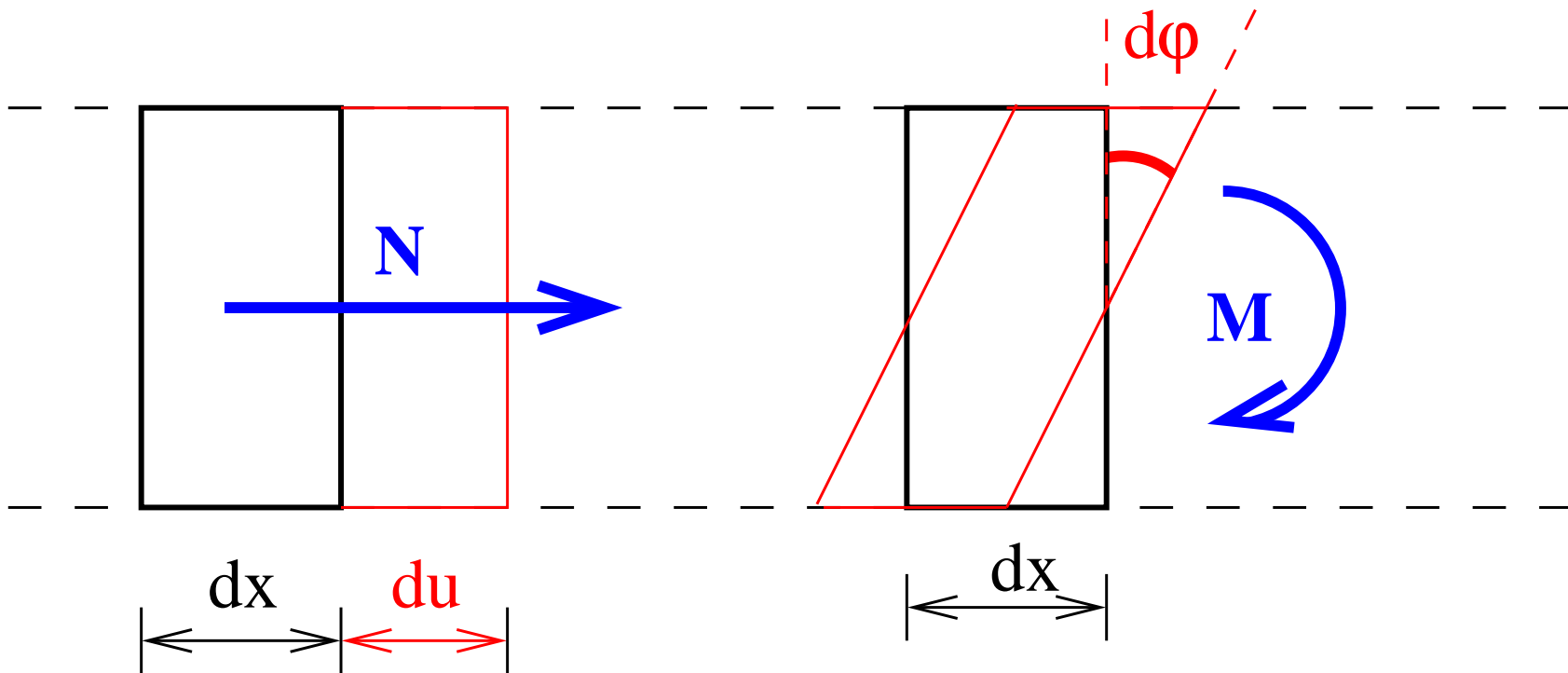
tedy:

$$L_e = -L_i$$

Princip virtuálních prací (4)

Deformace elementárních vrstviček materiálu:

$$du = \frac{N}{EA} dx, \dots, d\varphi_y = \frac{M_y}{EI_y} dx, \dots, dv = \frac{V_z}{GA_z^*} dx$$



Princip virtuálních prací (5)

Deformace elementárních vrstviček materiálu:

$$du = \frac{N}{EA}dx, \dots, d\varphi_y = \frac{M_y}{EI_y}dx, \dots, dv = \frac{V_z}{GA_z^*}dx$$

Z $L_e = -L_i$ a z:

$$L_i = - \left\{ \int_l N du + \int_l M_y d\varphi_y + \int_l M_z d\varphi_z + \int_l T d\varphi_x + \int_l V_y dv + \int_l V_z dw \right\}$$

plyne:

$$L_e = \int_0^l \left\{ \frac{N\bar{N}}{EA} + \frac{M_y\bar{M}_y}{EI_y} + \frac{M_z\bar{M}_z}{EI_z} + \frac{T\bar{T}}{EI_t} + \frac{V_y\bar{V}_y}{GA_y^*} + \frac{V_z\bar{V}_z}{GA_z^*} \right\} dx$$

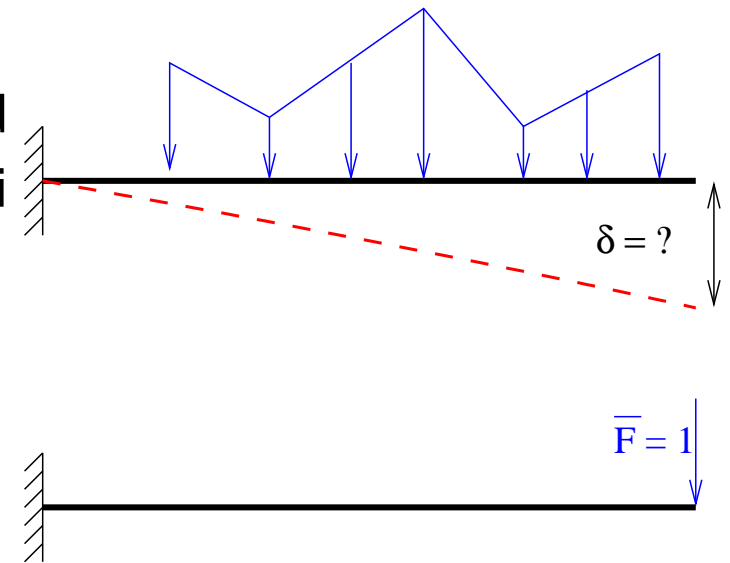
Veličiny označené *pruhem* jsou **virtuální**.

Metoda jednotkových sil (1)

Hledáme neznámou deformaci (přetvoření) δ od skutečného zatížení. Aplikujeme na konstrukci virtuální sílu $\bar{F} = 1$.

Virtuální práce síly \bar{F} na deformaci δ :

$$L_e = 1 \delta = \delta$$



Tedy zřejmě:

$$\delta = \int_0^l \left\{ \frac{N\bar{N}}{EA} + \frac{M_y\bar{M}_y}{EI_y} + \frac{M_z\bar{M}_z}{EI_z} + \frac{T\bar{T}}{EI_t} + \frac{V_y\bar{V}_y}{GA_y^*} + \frac{V_z\bar{V}_z}{GA_z^*} \right\} dx$$

Metoda jednotkových sil (2)

1. stanovíme průběhy M , N , V od skutečného zatížení
2. zavedeme jednotkovou (a bezrozměrnou) virtuální sílu v místě hledaného posunutí (v případě pootočení zavedeme moment)
3. určíme průběhy \bar{M} , \bar{N} , \bar{V} od virtuální veličiny
4. vypočítáme hledanou veličinu pomocí vzorce (v rovině):

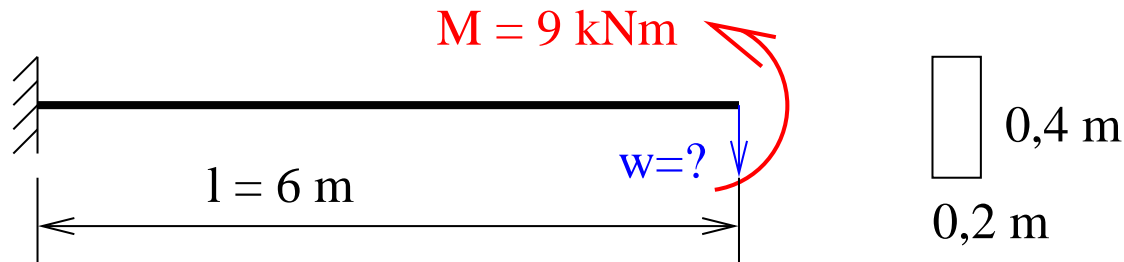
$$\delta = \int_0^l \frac{N\bar{N}}{EA} dx + \int_0^l \frac{M\bar{M}}{EI} dx + \int_0^l \frac{V\bar{V}}{GA^*} dx$$

U nosníkových úloh obvykle zanedbáváme člen $\int_0^l \frac{V\bar{V}}{GA^*} dx$.

Úlohy kde nelze zanedbat práci posouvajících sil – viz Pružnost a plasticita.

Příklad 1 (1)

Stanovte průhyb na volném konci konzoly, $E = 20GPa$.

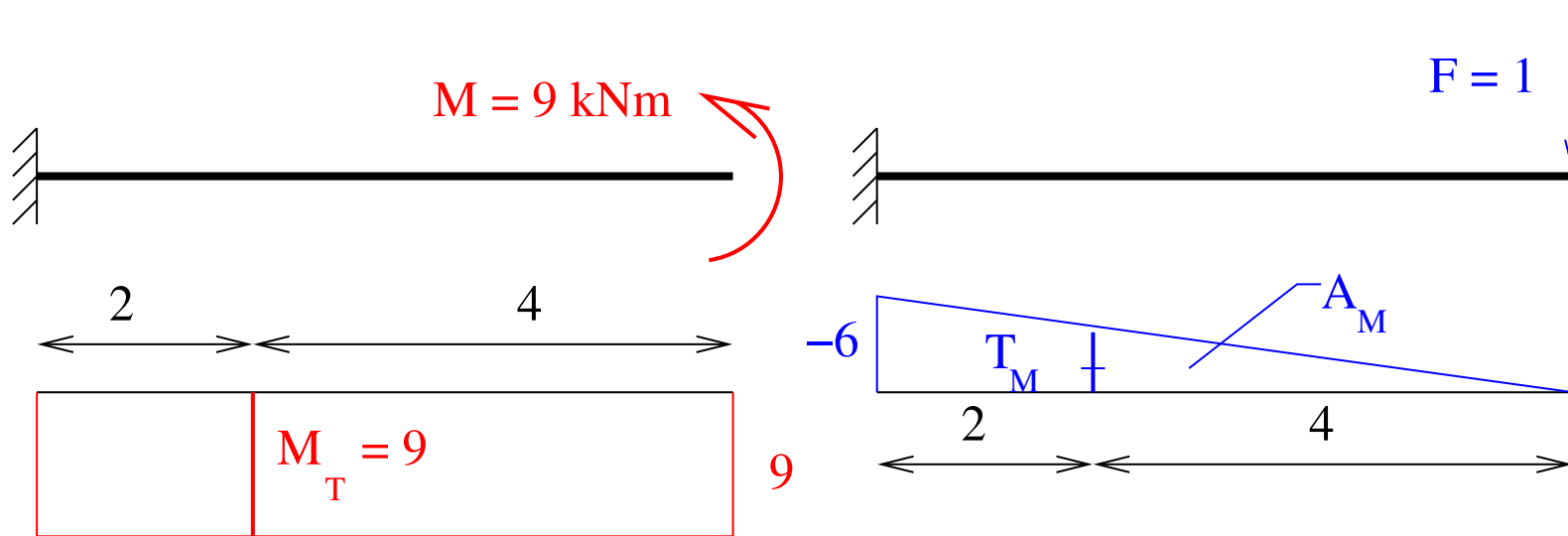


Tedy:

$$I = \frac{1}{12} \times b \times h^3 = \frac{1}{12} \times 0,2 \times 0,4^3 = 0,00106667 \text{ m}^4$$

$$EI = E \times I = 20 \times 10^9 \times 0,00106667 = 21333333,333 \text{ N m}^2$$

Příklad 1 (2)



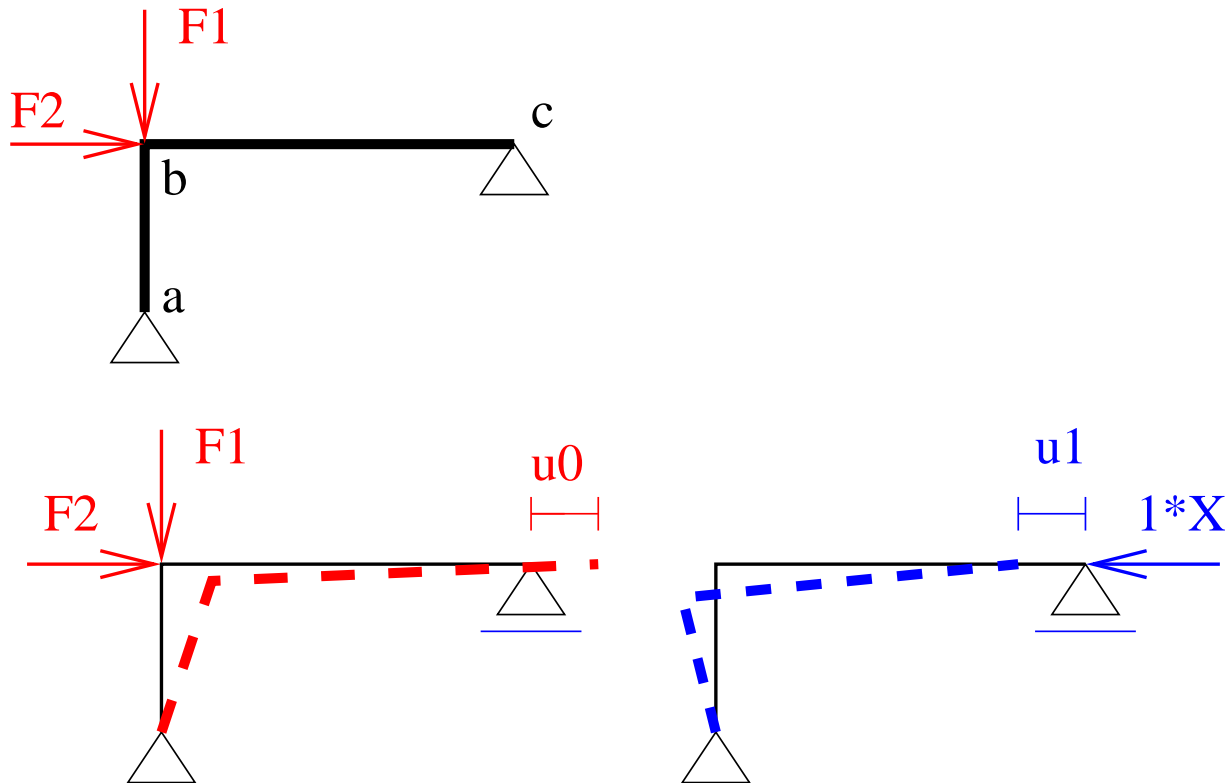
$$\int_0^l M \bar{M} dx = A_M \times \bar{M}_T = \frac{1}{2} \times 6 \times (-6) \times 9 = -162$$

$$w = \frac{1}{EI} \int_0^l M \bar{M} dx = \frac{162 \times 10^3}{21333333,333} = -0,007594 \text{ m } (\uparrow)$$

Opakování: Silová metoda

- řešení staticky neurčitých konstrukcí
- využívá principu virtuálních prací
- využívá také: podmínky rovnováhy, princip superpozice, princip úměrnosti

Silová metoda – princip



Výsledný deformační stav (červený + modrý) musí být ve shodě s původní konstrukcí, a proto musí platit (v místě c): $u_0 + u_1 \times X = 0$

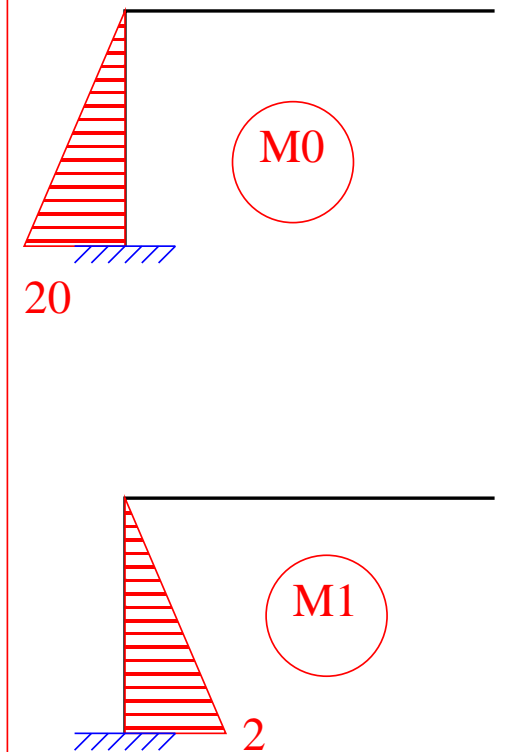
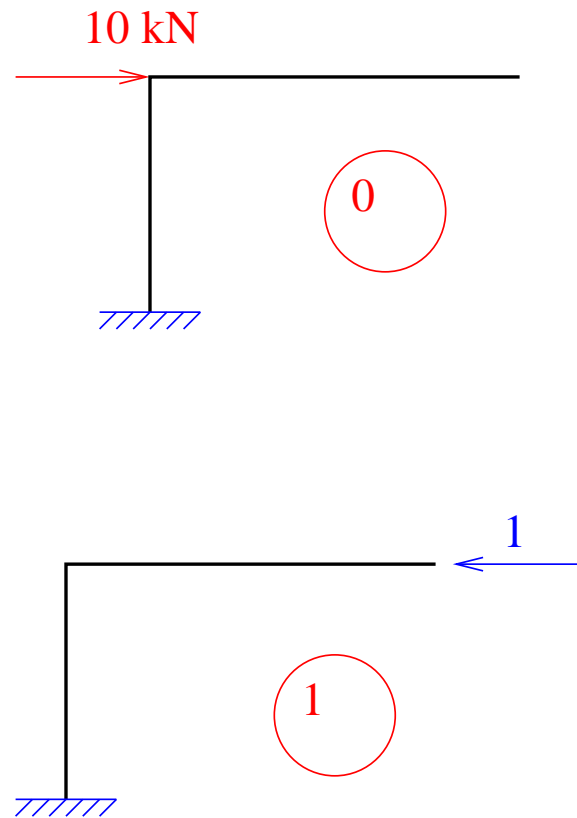
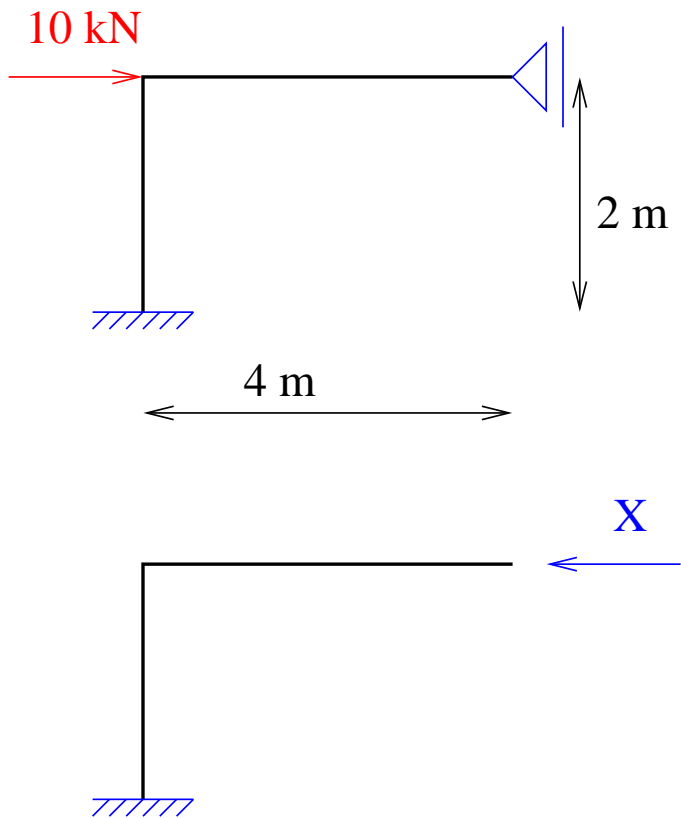
Silová metoda – postup

1. určení stupně statické neurčitosti s
2. odebrání s vazeb: vznikne **základní staticky určitá soustava** (pozor na výjimečné případy!)
3. vložení síly neznámé síly X_i v místě každé odebrané vazby
4. určení deformací $\delta_{i,j}$ (místo X_i zavedeme jednotkovou sílu – princip superpozice)
5. sestavení s deformačních podmínek pro posunutí ve směrech všech s odebraných vazeb:

$$\delta_{0,1} + \delta_{1,1} \times X_1 + \delta_{1,2} \times X_2 + \dots = 0$$

$$\delta_{0,2} + \delta_{2,1} \times X_1 + \delta_{2,2} \times X_2 + \dots = 0$$

Příklad 2 (1)

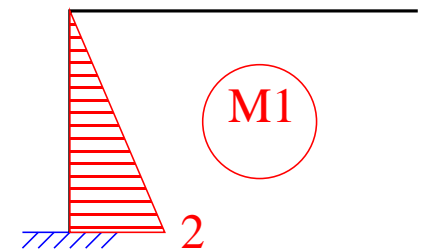
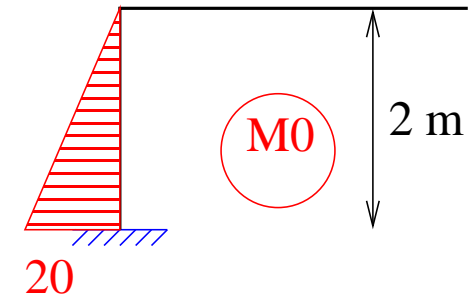


Příklad 2 (2)

$$\delta_{1,1} = \int \frac{M_1 \overline{M}_1}{EI} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{2}{3} \times 2 = \frac{2,667}{EI}$$

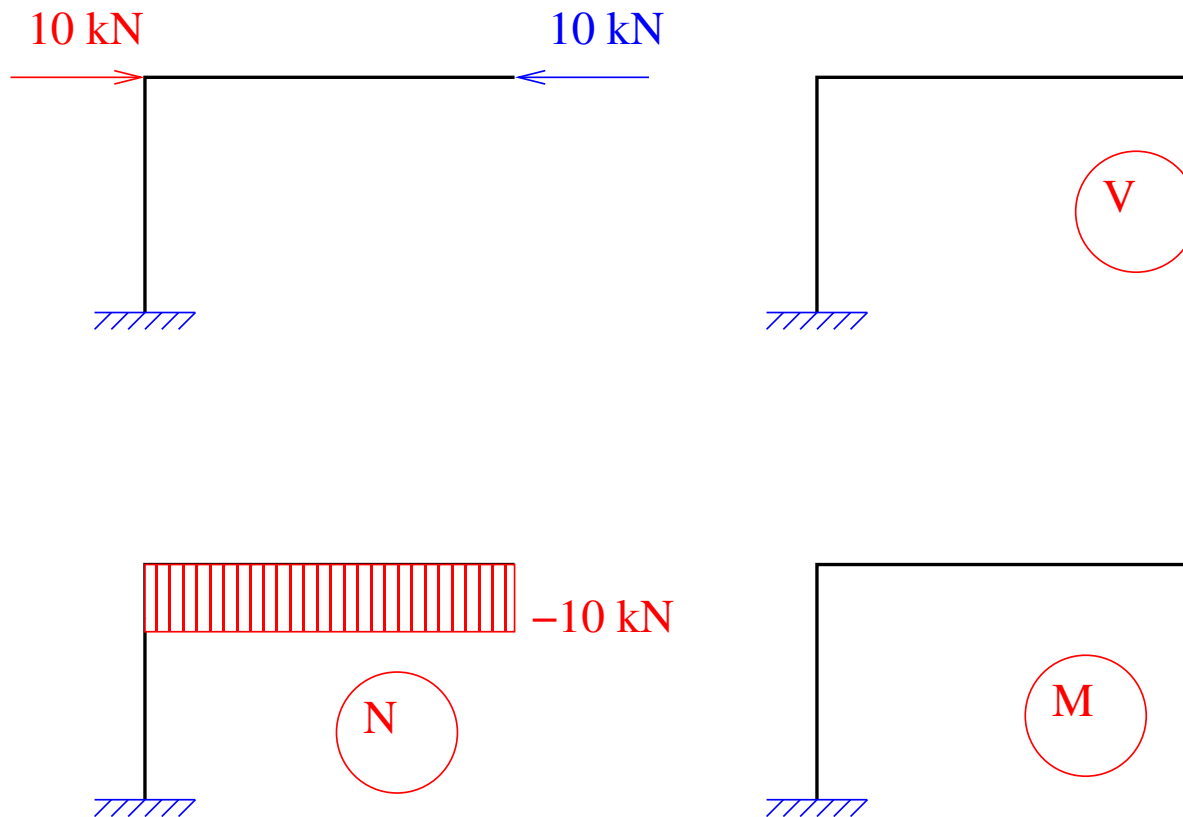
$$\delta_{1,0} = \int \frac{M_o \overline{M}_1}{EI} = -\frac{1}{2} \times 20 \times 2 \times \frac{2}{3} \times 2 = -\frac{26,667}{EI}$$

$$\delta_{1,0} + \delta_{1,1} \times X_1 = 0 \quad \dots \quad X_1 = -\frac{\delta_{1,0}}{\delta_{1,1}}$$

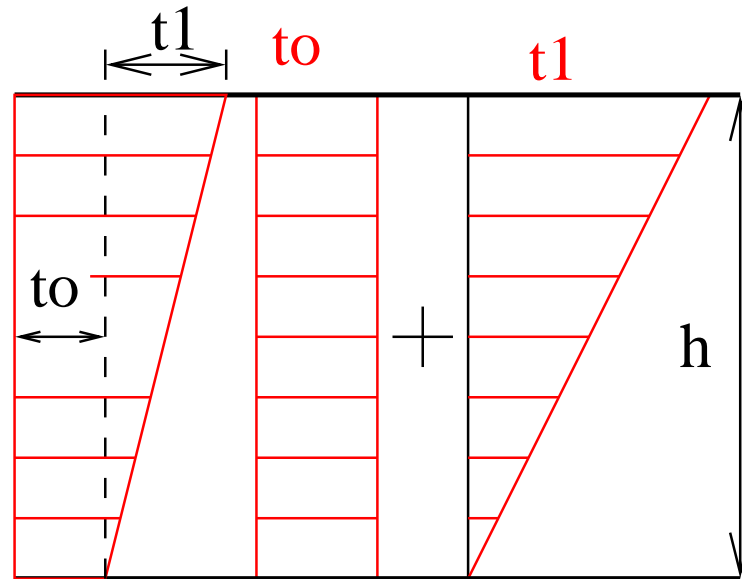


Příklad 2 (3)

$$X_1 = -\frac{\delta_{1,0}}{\delta_{1,1}} = -\frac{-26,667}{2,667} = 10 \text{ kN}$$



Nerovnoměrná změna teploty v silové metodě

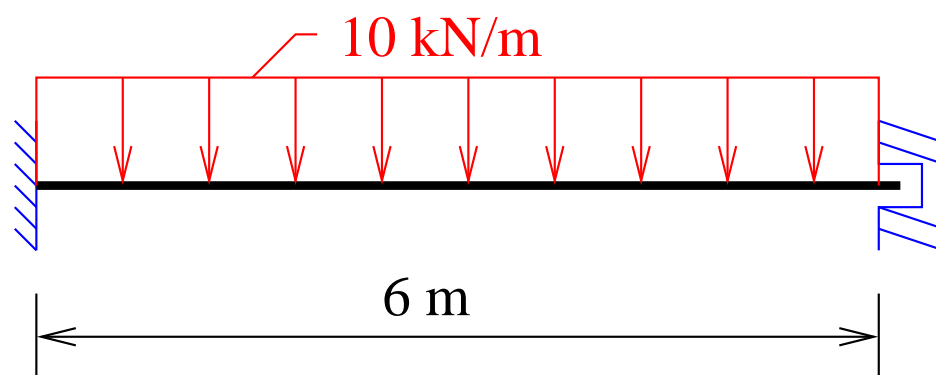


$$\delta_{i,0} = \alpha_t \times \Delta t_0 \int_0^l N_i dx + \alpha_t \times \frac{\Delta t_1}{h} \int_0^l M_i dx$$

Hodnoty t_0 a t_1 značí vždy **změnu teploty**, ať již rovnoměrnou (0), nebo nerovnoměrnou (1) po výšce průřezu.

Příklad 3 (1)

Stanovte průběhy vnitřních sil na zadaném nosníku, pokud $EI = konst.$

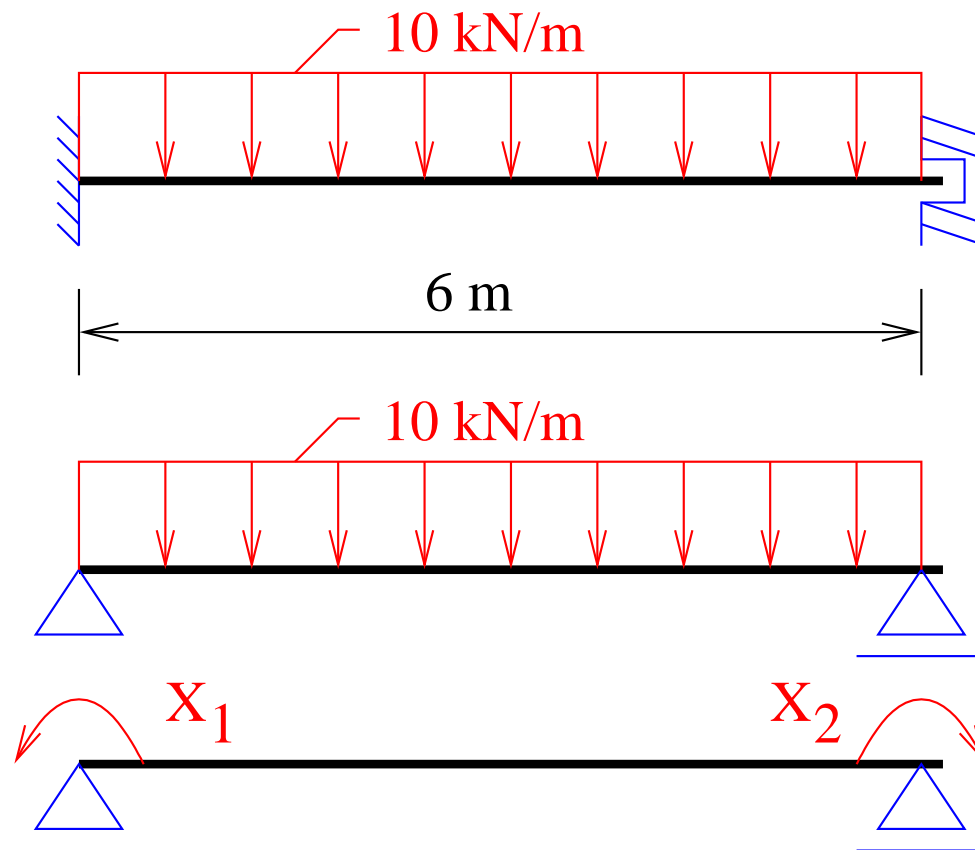


Stupeň statické neurčitosti:

$$s_n = v - 3 = (3 + 2) - 3 = 2$$

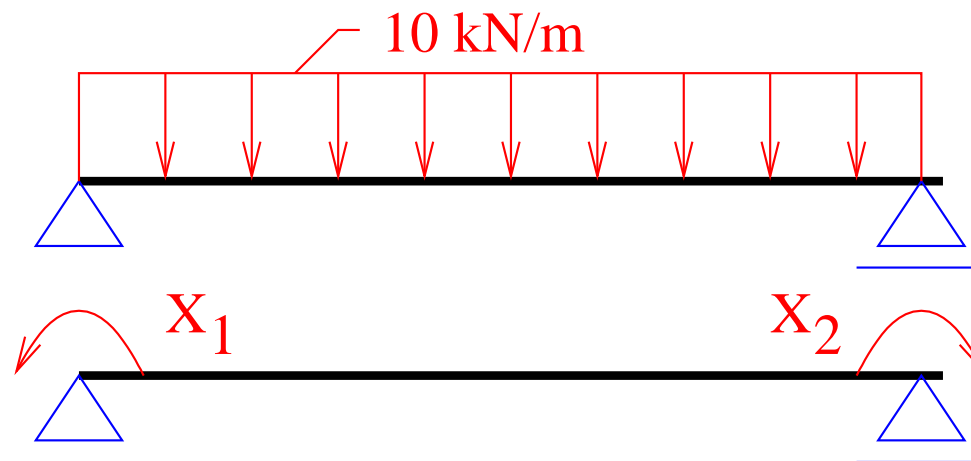
Příklad 3 (2)

Volba základní staticky určité soustavy:



Příklad 3 (3)

Deformační podmínky:

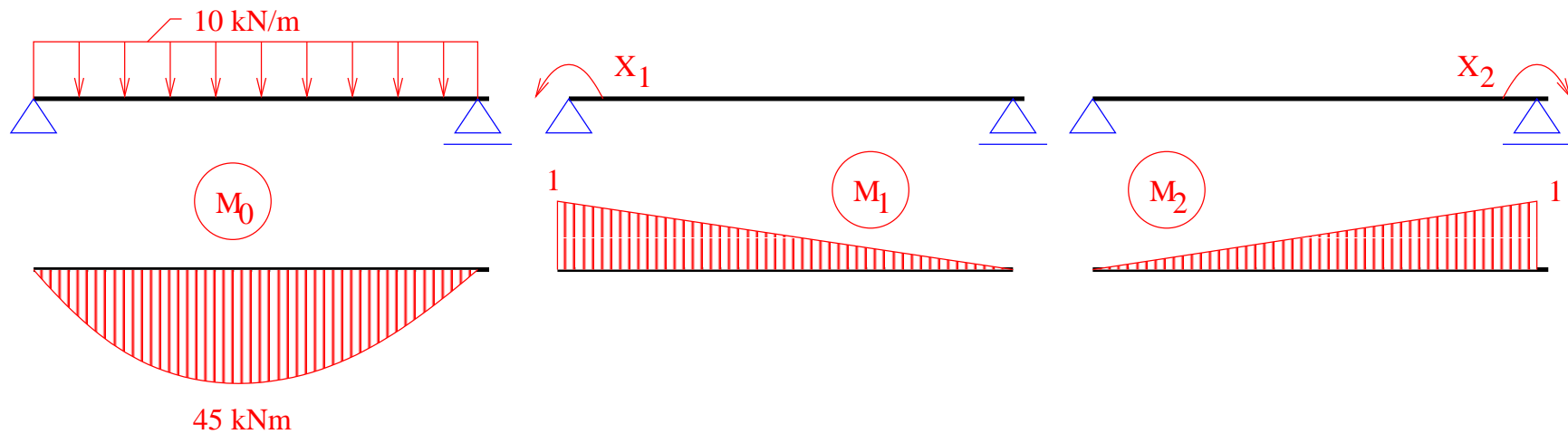


$$\delta_{1,1} \times X_1 + \delta_{1,2} \times X_2 + \delta_{1,0} = 0$$

$$\delta_{2,1} \times X_1 + \delta_{2,2} \times X_2 + \delta_{2,0} = 0$$

Příklad 3 (4)

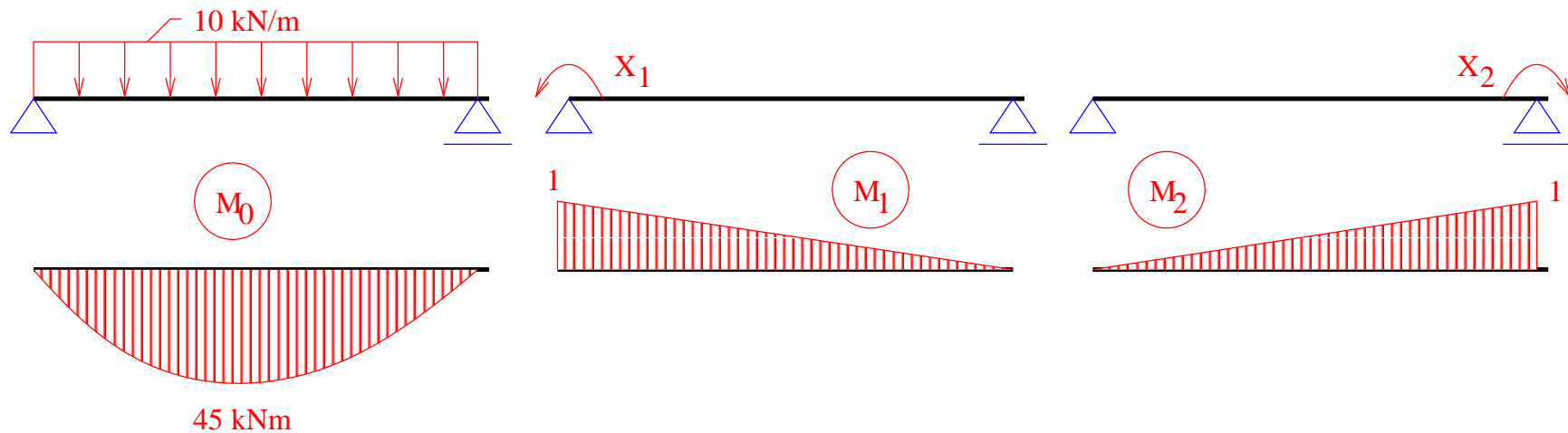
Momenty (normálové síly zde jsou = 0):



$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \int_0^6 M_1 \overline{M}_1 = \frac{1}{2} (1 \times 6) \times \frac{2}{3} 1 = 2$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \int_0^6 M_2 \overline{M}_2 = \frac{1}{2} (1 \times 6) \times \frac{2}{3} 1 = 2$$

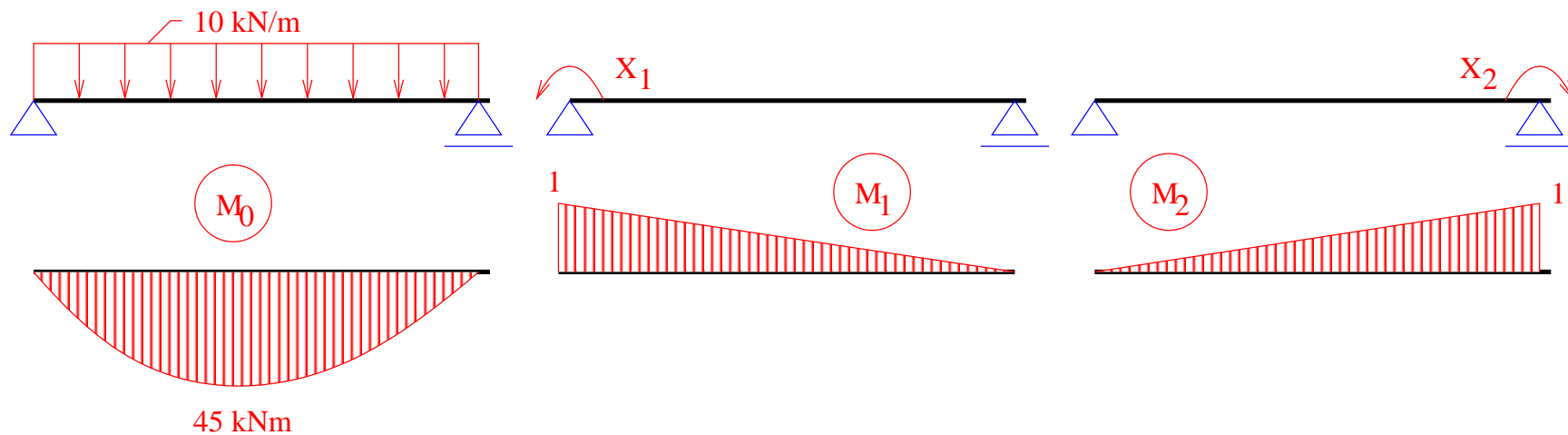
Příklad 3 (5)



$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI} \int_0^6 M_1 \overline{M}_2 = \frac{1}{2}(1 \times 6) \times \frac{1}{3}1 = 1$$

Poznámka: je jedno, který moment je při výpočtu považován za „skutečný“ a který za „virtuální“.

Příklad 3 (6)



$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \int_0^6 M_1 \overline{M}_0 = -\frac{2}{3}(45 \times 6) \times \frac{1}{2} \times 1 = -90$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{EI} \int_0^6 M_2 \overline{M}_0 = -\frac{2}{3}(45 \times 6) \times \frac{1}{2} \times 1 = -90$$

Příklad 3 (7)

Soustava rovnic:

$$\delta_{1,1} \times X_1 + \delta_{1,2} \times X_2 + \delta_{1,0} = 0$$

$$\delta_{2,1} \times X_1 + \delta_{2,2} \times X_2 + \delta_{2,0} = 0$$

Po dosazení:

$$2 \times X_1 + 1 \times X_2 + (-90) = 0$$

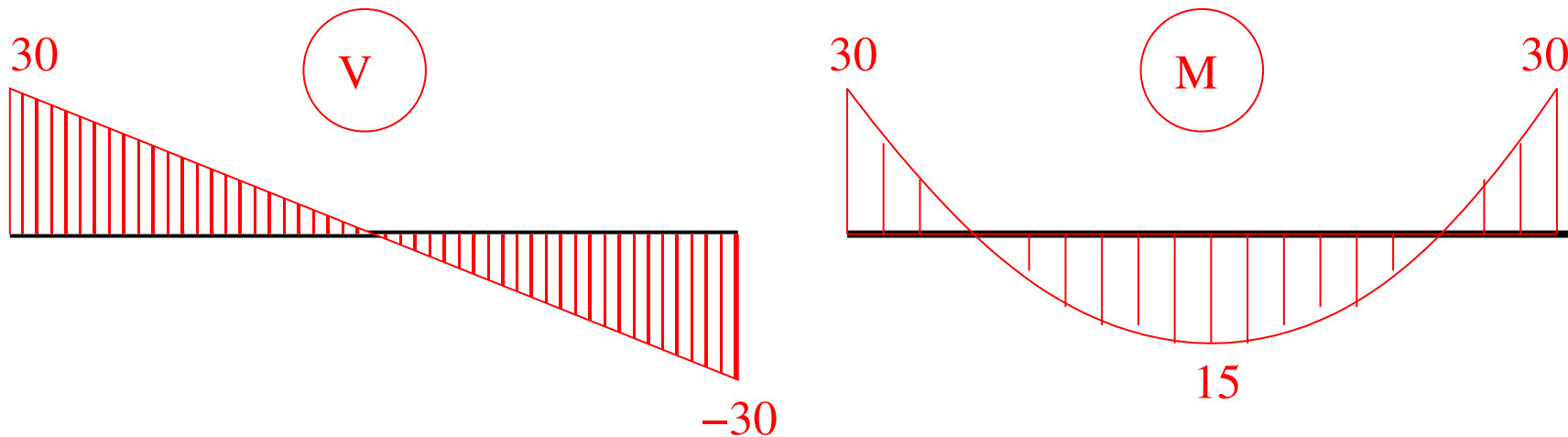
$$1 \times X_1 + 2 \times X_2 + (-90) = 0$$

Snadno nahlédneme, že:

$$X_1 = 30 \text{ kN}, \quad X_2 = 30 \text{ kNm}$$

Příklad 3 (8)

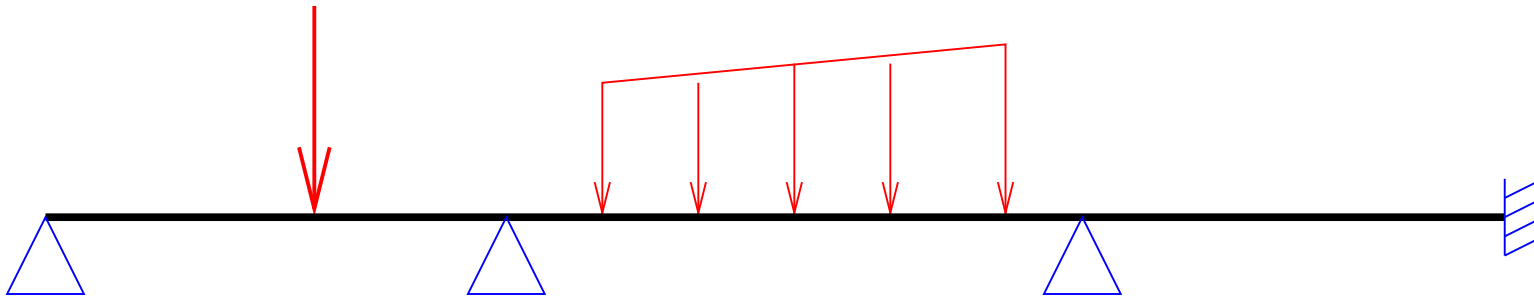
Vnitřní síly:



Kontrola:

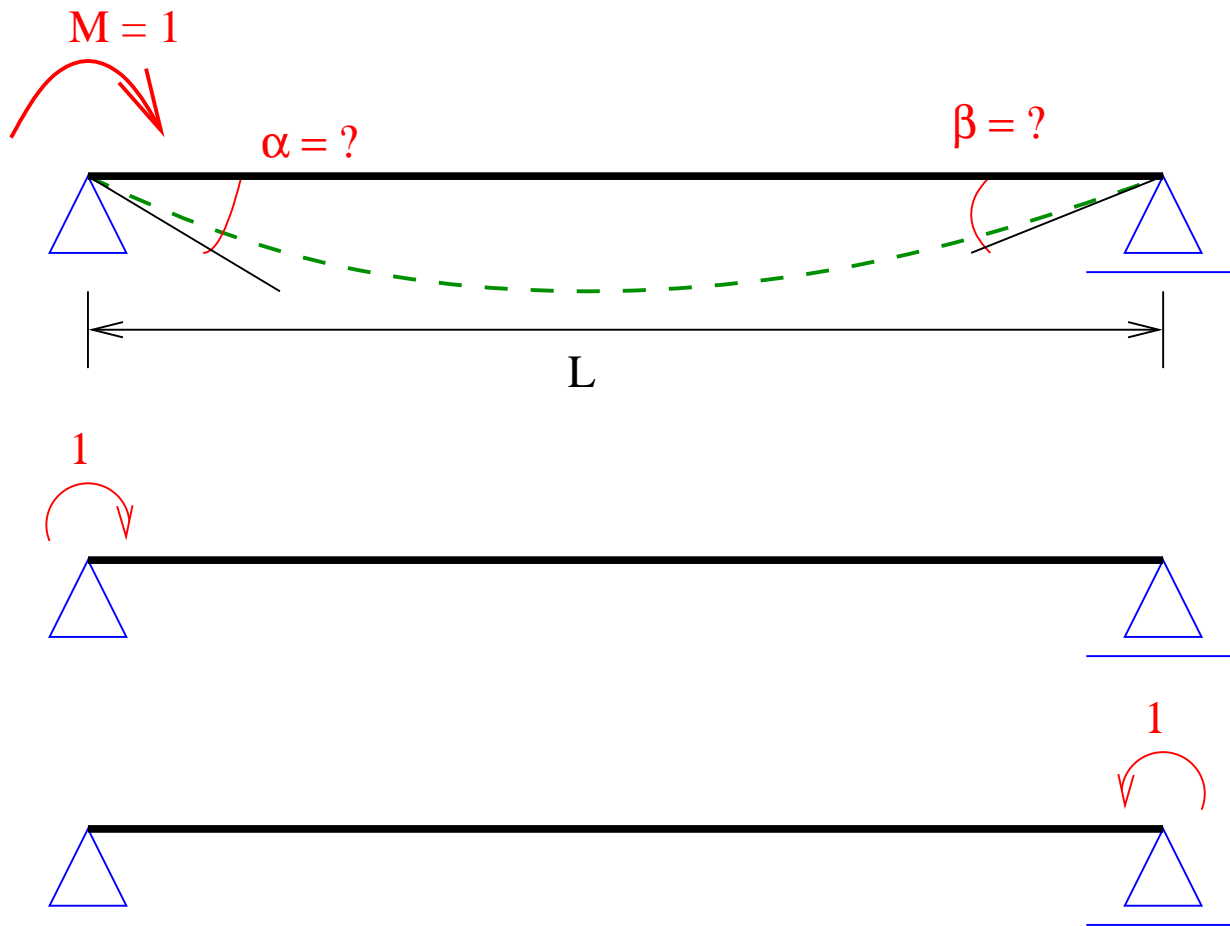
$$M_a = M_b = 30 \text{ kNm} \dots \frac{1}{12} q \times l^2 = \frac{1}{12} 10 \times 6^2 = 30 \text{ kNm}$$

Spojité nosník

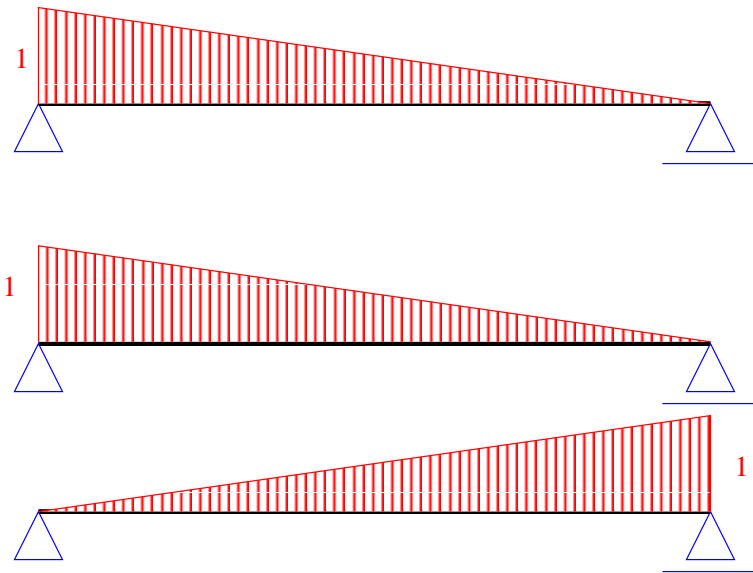
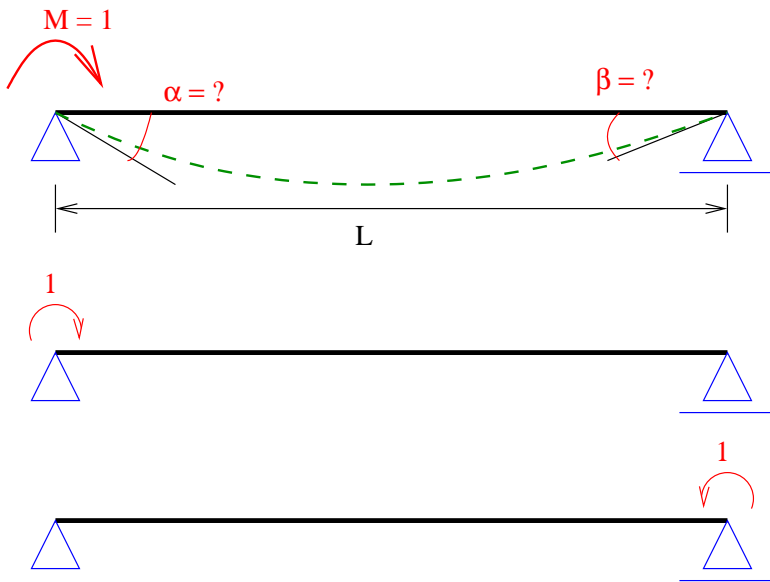


- staticky neurčitá konstrukce
- lze řešit silovou metodou
- možnost speciální volby neznámých (vlození kloubů nad podpory, volba M_i za neznámé) \Rightarrow **třímomentová rovnice**

Deformační úhly prostého nosníku (1)



Deformační úhly prostého nosníku (2)



0

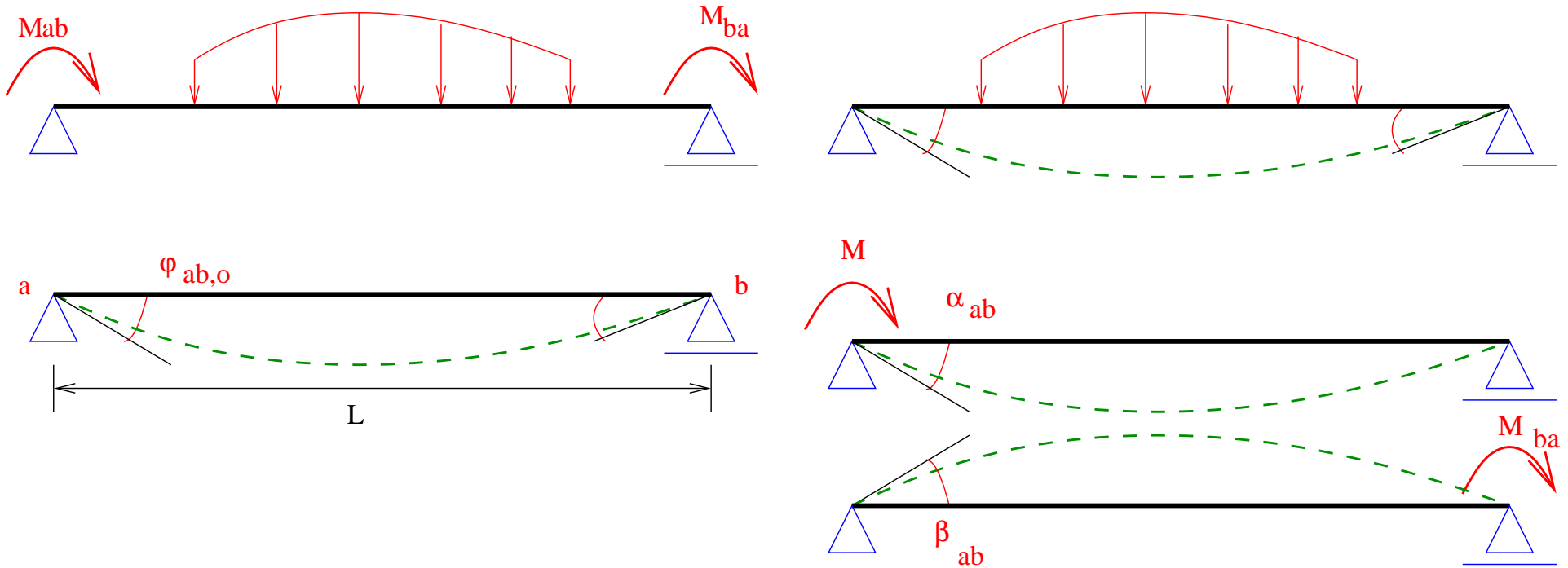
1

2

$$\alpha = \frac{1}{EI} \int_0^L \overline{M}_1 \times M_0 dx = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \times 1 \times L \times \frac{2}{3} = \frac{L}{3 \times EI}$$

$$\beta = \frac{1}{EI} \int_0^L \overline{M}_1 \times M_0 dx = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \times 1 \times L \times \frac{1}{3} = \frac{L}{6 \times EI}$$

Deformační úhly prostého nosníku (3)

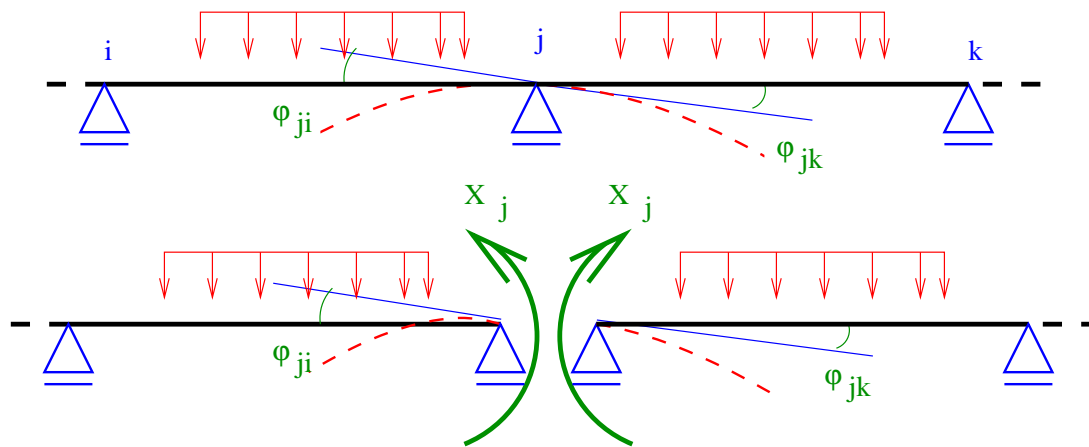


Při využití principu superpozice:

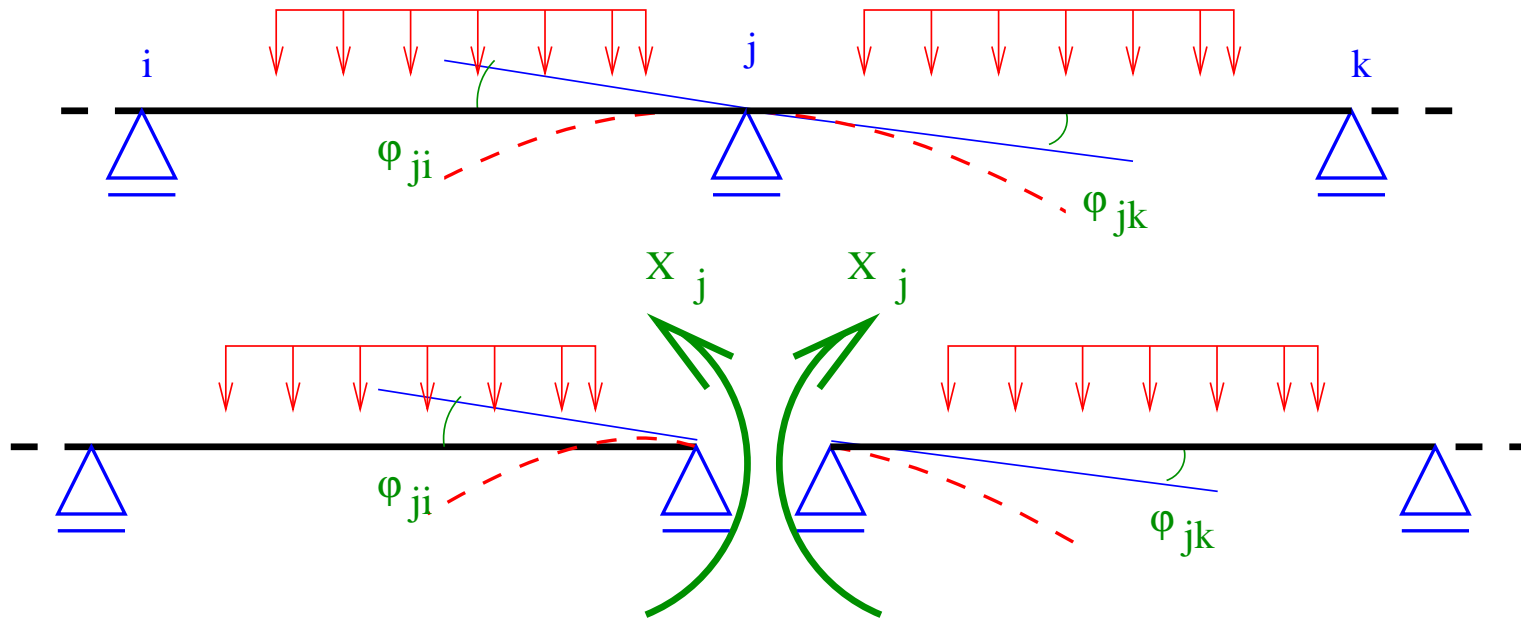
$$\varphi_{ab} = \varphi_{ab,o} + M_{ab} \times \alpha_{ab} - M_{ba} \times \beta_{ba}$$

Třímomentová rovnice (1)

- vztah pro rychlejší výpočet spojitého nosníku
- použití silové metody s vhodnou volbou neznámých
- rozdělení na nosníky \Rightarrow deformační rovnice pro zajištění spojitého po-otočení



Třímomentová rovnice (2)



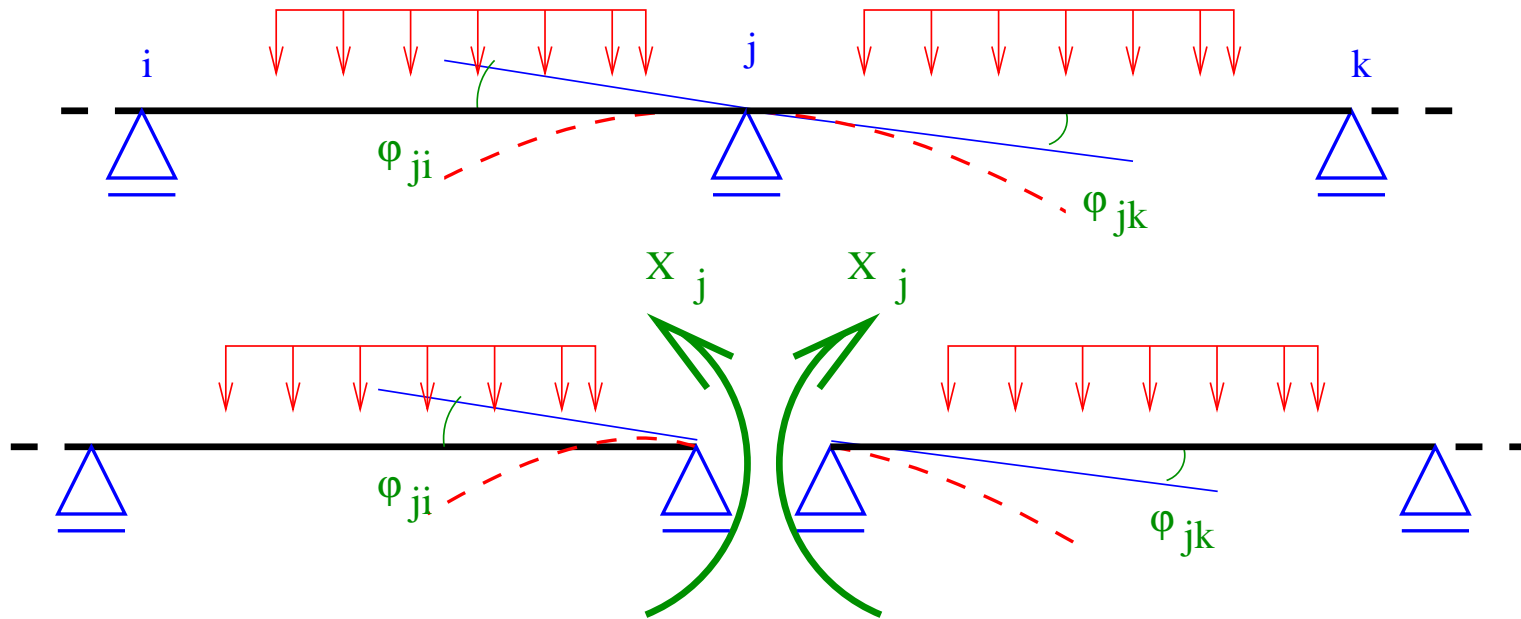
Musí platit:

$$\varphi_{ji} = \varphi_{jk},$$

po dosazení rovnic pro φ :

$$\varphi_{ji,0} + M_{ji} \times \alpha_{ji} - M_{ij} \times \beta_{ij} = \varphi_{kj,0} + M_{kj} \times \alpha_{kj} - M_{jk} \times \beta_{kj}$$

Třímomentová rovnice (3)



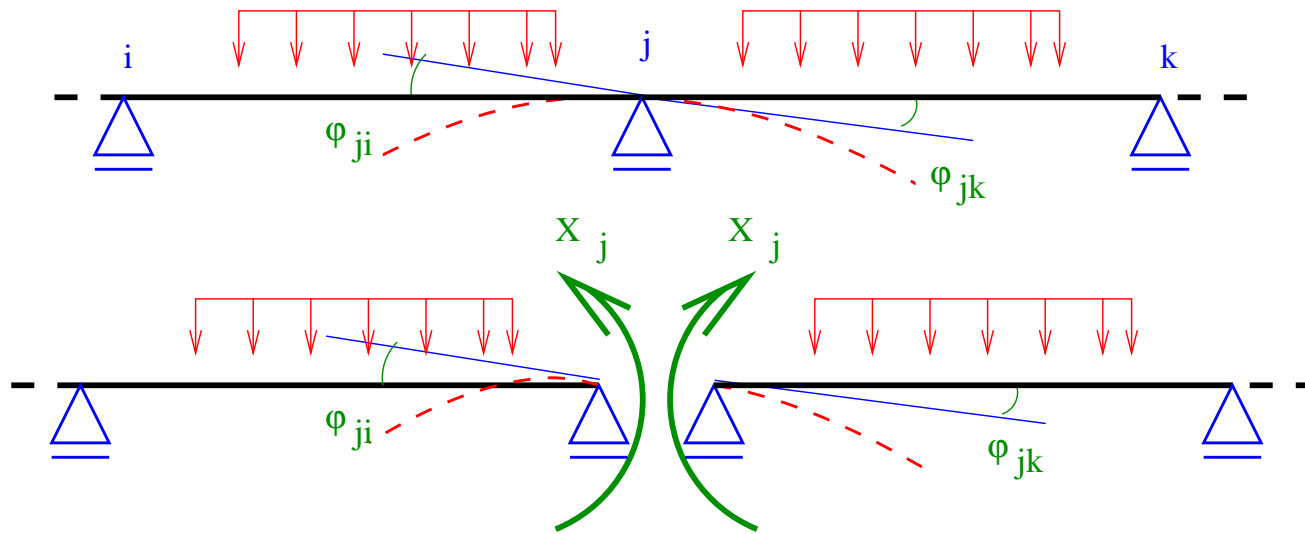
Označíme-li:

$$j = r, \quad i = r - 1, \quad k = r + 1,$$

můžeme psát:

$$\varphi_{r,r-1,0} + M_r \times \alpha_{r,r-1} - M_{r-1} \times \beta_{r,r-1} = \varphi_{r,r+1,0} + M_{r+1} \times \alpha_{r,r+1} - M_r \times \beta_{r,r+1}$$

Třímomentová rovnice (4)



Po úpravě:

$$M_{r-1} \times \beta_{r,r-1} + M_r (\alpha_{r,r-1} + \alpha_{r,r+1}) + M_{r+1} \times \beta_{r,r+1} = \varphi_{r,r-1,o} - \varphi_{r,r+1,o}$$

což je **třímomentová rovnice** pro výpočet spojitého nosníku.

Třímomentová rovnice (5)

V rovnici

$$M_{r-1} \times \beta_{r,r-1} + M_r (\alpha_{r,r-1} + \alpha_{r,r+1}) + M_{r+1} \times \beta_{r,r+1} = \varphi_{r,r-1,o} - \varphi_{r,r+1,o}$$

dosadíme

$$\alpha = \frac{L}{3 \times EI}, \quad \beta = \frac{L}{6 \times EI},$$

a získáme:

$$\begin{aligned} M_{r-1} \frac{L_{r,r-1}}{6E_{r,r-1}I_{r,r-1}} + M_r \left(\frac{L_{r,r-1}}{3E_{r,r-1}I_{r,r-1}} + \frac{L_{r,r+1}}{3E_{r,r+1}I_{r,r+1}} \right) + M_{r+1} \frac{L_{r,r+1}}{6E_{r,r+1}I_{r,r+1}} = \\ = \varphi_{r,r-1,o} - \varphi_{r,r+1,o} \end{aligned}$$

Třímomentová rovnice (6)

Pro $EI = konst.$:

$$M_{r-1}L_{r,r-1} + 2M_r (L_{r,r-1} + L_{r,r+1}) + M_{r+1}L_{r,r+1} = -Z_{r,r-1}L_{r,r-1} - Z_{r,r+1}L_{r,r+1}$$

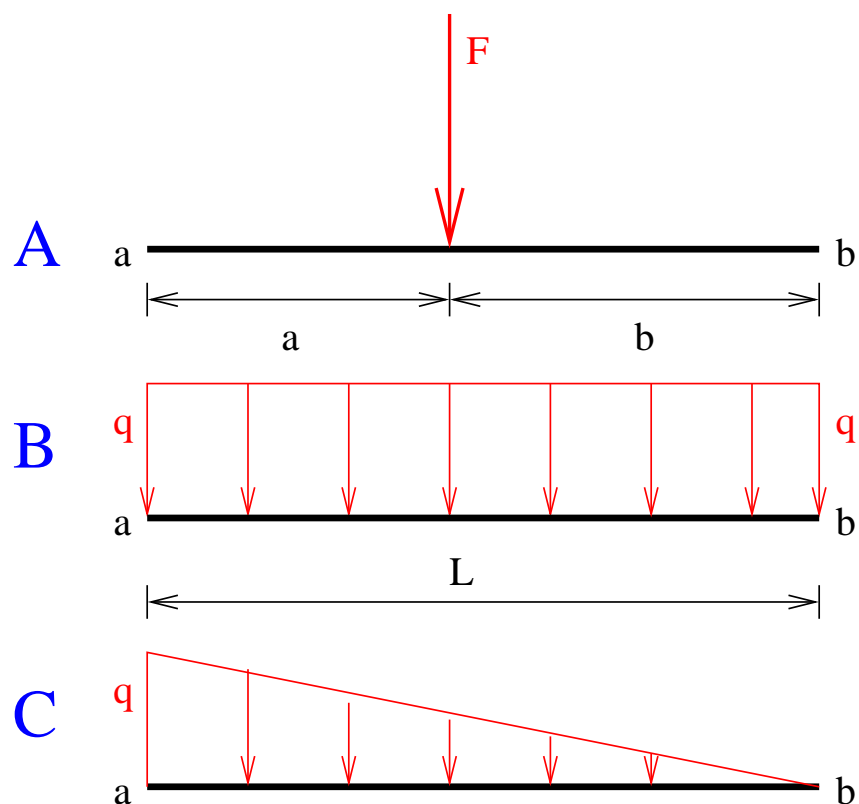
kde „zatěžovací členy“ Z jsou:

$$= \varphi_{r,r-1,o} \times \frac{6 \times E_{r,r-1} \times I_{r,r-1}}{L_{r,r-1}}, \quad \varphi_{r,r+1,o} \times \frac{6 \times E_{r,r+1} \times I_{r,r+1}}{L_{r,r+1}}.$$

Pro typická zatížení jsou Z k dispozici v tabulkách.

Třímomentová rovnice (7)

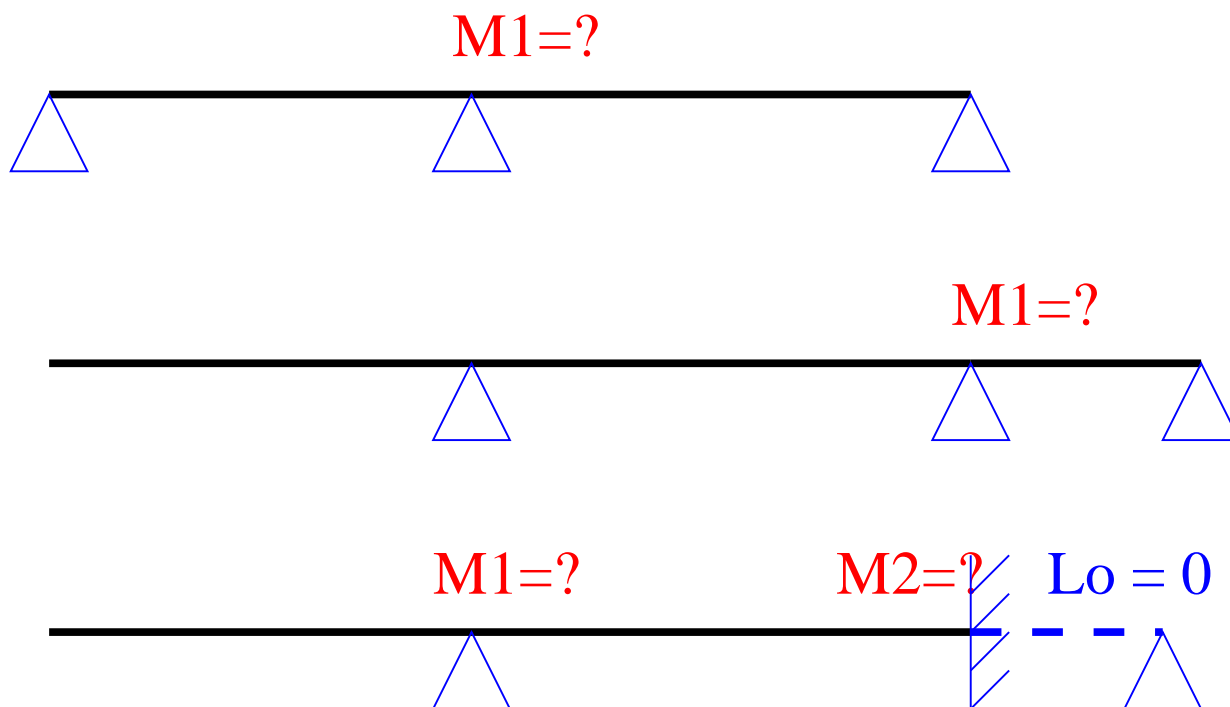
Zatěžovací členy



	Z_{ab}	Z_{ba}
A	$P \times \frac{ab(L+b)}{L^2}$	$P \times \frac{ab(L+a)}{L^2}$
B	$\frac{1}{4}q \times L^2$	$\frac{1}{4}q \times L^2$
C	$\frac{1}{15}q \times L^2$	$\frac{7}{60}q \times L^2$

Třímomentová rovnice (8)

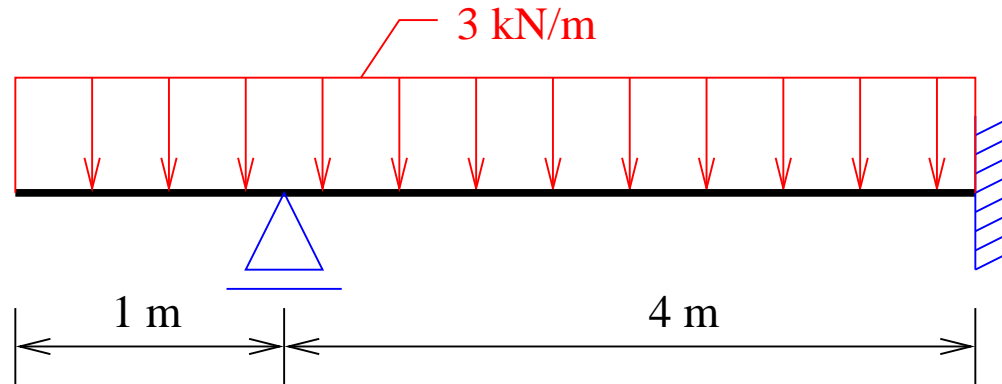
Jak volit neznámé:



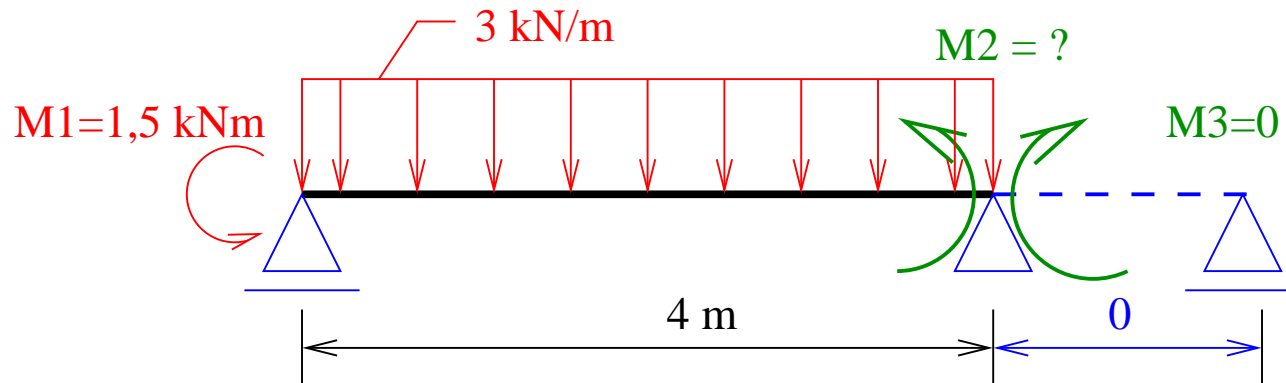
Pozn: v případě volného konce stanovíme moment nad přilehlou podporou stejně jako u prostého nosníku s převislým koncem.

Příklad 1 (1)

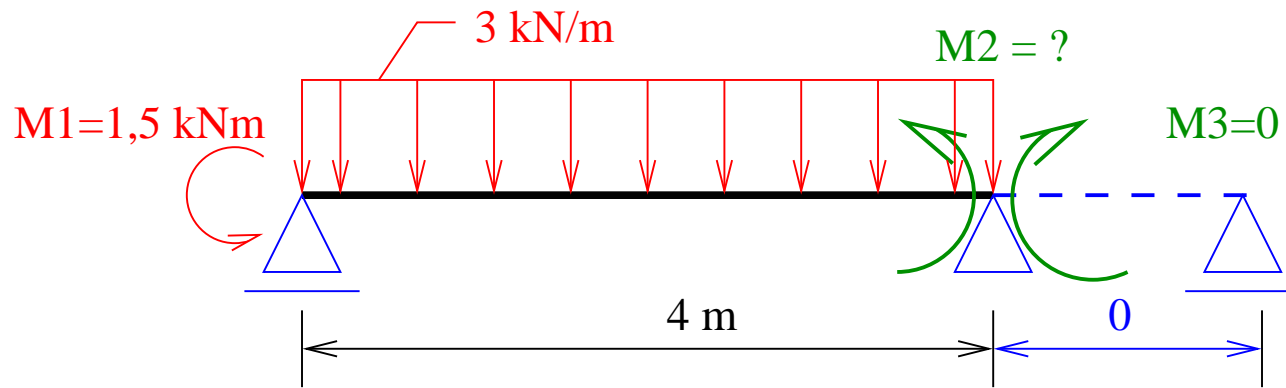
Stanovte vnitřní síly na zadaném spojitém nosníku:



Nosník je $1 \times$ staticky neurčitý:



Příklad 1 (2)



Třímomentová rovnice:

$$M_{r-1}L_{r,r-1} + 2M_r (L_{r,r-1} + L_{r,r+1}) + M_{r+1}L_{r,r+1} = -Z_{r,r-1}L_{r,r-1} - Z_{r,r+1}L_{r,r+1}$$

po dosazení:

$$-1,5 \times 4 + 2 \times M_2 \times (4 + 0) + 0 \times 0 = \left(-\frac{1}{4} \times 3 \times 4^2 \times 4\right) - (0 \times 0)$$

$$M_2 = -5,25 \text{ kNm}$$

Příklad 1 (3)

Průběhy vnitřních sil:

