9. NÁHODNÉ PROCESY II

Čas ke studiu: 90 minut

Cíl: Naučíme se určovat pravděpodobnosti výskytu systému v jednotlivých stavech v daném čase t a seznámíme se s kongruentní metodou generování náhodných čísel.

VÝKLAD

9.1. Spojitý parametr Markovovských řetězců

Nechť

$$\{X_t : t \geq 0\}$$

reprezentuje spojitý náhodný parametr Markovova řetězce s m diskrétními stavy. Pro $t > s > 0$ a stavy i a j nechť

$$P\{X_t = j\} = p_j(t),$$

což je pravděpodobnost, že proces je ve stavu j v čase t, a

$$P\{X_t = j | X_s = i\} = p_{ij}(s,t),$$

což je pravděpodobnost, že proces je ve stavu j v čase t a byl dán procesem, který byl ve stavu i v čase s.

Pravděpodobnost $p_{ij}(s,t)$ je nazývána **přechodovou pravděpodobnostní funkcí Markovova řetězce**. Markovův řetězec je homogenní nebo stacionární (v souvislosti s časem), jestliže $p_{ij}(s,t)$ závisí pouze na časovém intervalu $t' = t - s$. To vyhovuje Chapman-Kolmogorově rovnici, která je dána

$$p_{ij}(s,t) = \sum_{stavy\ k} p_{ik}(s,u)p_{kj}(u,t)$$

pro jakýkoliv čas $t > u > s \geq 0$ a stavy i a j. Po úpravě spočívající v nahrazení $t - s$ jako t' a $u - s$ jako u' se rovnice redukuje na

$$p_{ij}(t') = \sum_{stavy\ k} p_{ik}(u')p_{kj}(t' - u'),$$

dokud je proces homogenní.

Zde $p_{ij}(t)$ může být interpretována jako pravděpodobnost, že proces přejde ze stavu i do stavu j v časovém intervalu t. Jestliže

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \begin{cases} 1, & pro\ \ j = i \\ 0, & pro\ \ j \neq i \end{cases},$$

říkáme, že Markovův řetězec je spojitý v $t = 0$. Budeme brát v úvahu pouze homogenní Markovovy řetězce.

Definujme dva přechody intenzit z hlediska derivací v $t = 0$, které hrají stejnou roli jako jeden krok přechodu pravděpodobností v diskrétním parametru Markovova řetězce.

Pro každý stav i předpokládáme

$$\frac{d}{dt} p_{ii}(t)\Big|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{1 - p_{ii}(t)}{0 - t},$$

která existuje a je konečná.

Pro všechna i a j, kde $i \neq j$, předpokládáme

$$\frac{d}{dt} p_{ij}(t)\Big|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{0 - p_{ij}(t)}{0 - t},$$

která existuje a je konečná.

Nechť

$$d_{ii} = \frac{-d}{dt} p_{ii}(t)\Big|_{t=0}$$

a pro $i \neq j$

$$d_{ij} = \frac{d}{dt} p_{ij}(t)\Big|_{t=0}.$$

Úpravami předchozích vztahů dostaneme

$$\frac{1 - p_{ii}(t)\big|_{t=0}}{t} = d_{ii} + r_i(t),$$

kde $r_i(t) \to 0$ a $t \to 0$. Potom

$$1 - p_{ii}(t) = d_{ii}t + tr_i(t) = d_{ii}t + 0(t).$$

Tato rovnice může být interpretována jako: pravděpodobnost přechodu ze stavu *i* do nějakého jiného stavu během časového intervalu *t* a je rovna $d_{ii}t + 0(t)$.

Podobně můžeme psát

$$p_{ij}(t) = d_{ij}t + 0(t).$$

Tento vztah může být interpretován jako pravděpodobnost přechodu ze stavu *i* do stavu *j* v časovém intervalu *t*, která je rovna $d_{ij}t + 0(t)$. Jako výsledek máme pro libovolné $t \geq 0$ a $h > 0$

$$p_{ij}(t+h) = p_{ij}(t)\{1 - (d_{jj}h + 0(h))\} + \sum_{k \neq j} p_{ik}(t) d_{kj} h + 0(h)$$

nebo

$$\frac{p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)}{h} = -d_{jj} p_{ij}(t) + \sum_{k \neq j} p_{ik}(t) d_{kj} + \frac{0(h)}{h}.$$

Předpokládáme, že $p'_{ij}(t)$ existuje a $h \to 0$, pak obdržíme

$$p'_{ij}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)}{h} = -d_{jj} p_{ij}(t) + \sum_{k \neq j} p_{ik}(t) d_{kj}.$$

Pro všechny stavy *i* a *j* tato rovnice dává systém diferenciálních rovnic, jejichž řešením získáme pravděpodobnosti přechodu.

K získání bezpodmínečných stavových pravděpodobností $p'_i(t)$ pro každý stav i přijmeme stejný důvod, který byl již použit v odvození předcházejících rovnic. Takže máme

$$p_i(t+h) = p_i(t)(1 - d_{ii}h) + \sum_{j \neq i} p_j(t) d_{ji} h + 0(h),$$

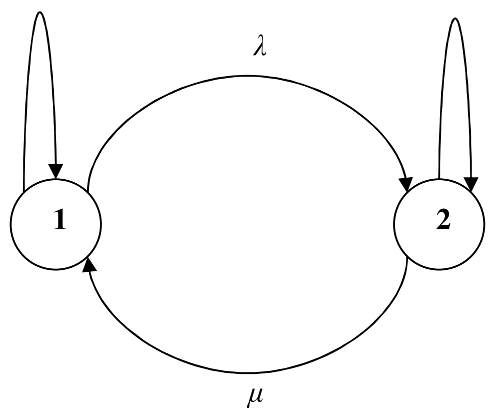
ze které získáme

$$p'_i(t) = -d_{ii} p_i(t) + \sum_{j \neq i} p_j(t) d_{ji}.$$

Tento výraz definuje systém rovnic, který je lineární z hlediska Laplaceovy transformace proměnných a může být řešen standardními technikami.

9.2. Ilustrace

Uvažujme systém zobrazený na obrázku, jenž se pohybuje mezi stavy 1 a 2. Rozložení přechodu v čase ze stavu 1 do stavu 2 je $\lambda e^{-\lambda t}$ a ze stavu 2 do stavu 1 $\mu e^{-\mu t}$. Úkolem bude určit pravděpodobnost, že systém bude ve stavu 1, popř. 2 v jakémkoliv daném čase *t*.



Z předchozího textu víme, že

$$d_{ii} = \frac{-d}{dt} p_{ii}(t)\Big|_{t=0}.$$

Výraz $p_{11}(t)$ je pro nás neznámý. Avšak může být určen z ekvivalentních relací.

Pravděpodobnost, že systém zůstane ve stavu i v $t = 0^+$, je dána tím, že systém je ve stavu i v $t = 0$

$$d_{ii} = -\frac{d}{dt}.$$

Podobně pravděpodobnost, že systém přejde ze stavu i do stavu j v $t = 0^+$ je dána tím, že je systém ve stavu i v $t = 0$

$$d_{ij} = \frac{d}{dt}.$$

Dále

$$d_{11} = -\frac{d}{dt}\left(e^{-\lambda t}\right)\Big|_{t=0} = \lambda$$
$$d_{12} = -\frac{d}{dt}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)\Big|_{t=0} = \lambda$$

a podobně

$$d_{22} = \mu$$
$$d_{21} = \mu.$$

Dále můžeme psát

$$p'_{ij}(t) = -d_{jj} p_{ij}(t) + \sum_{k \neq j} p_{ik}(t) d_{kj} \ ,$$

použitím Laplaceovy transformace obdržíme

$$sP_{ij}(s) - P_{ij}(0) = -d_{jj} P_{ij}(s) + \sum_{k \neq j} P_{ik}(s) d_{kj} \ ,$$

kde

$$P_{ij}(0) = 1 \text{ pro } i = j \text{ a } P_{ij}(0) = 0 \text{ pro } i \neq j \ .$$

Potom

$$\begin{aligned} sP_{11}(s) - 1 &= -\lambda P_{11}(s) + \mu P_{12}(s) \\ sP_{12}(s) &= -\mu P_{12}(s) + \lambda P_{11}(s) \\ sP_{22}(s) - 1 &= -\mu P_{22}(s) + \lambda P_{21}(s) \\ sP_{21}(s) &= -\lambda P_{21}(s) + \mu P_{22}(s). \end{aligned}$$

Zapsáno v maticové formě

$$\begin{vmatrix} s+\lambda & -\mu & 0 & 0 \\ -\lambda & s+\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s+\mu & -\lambda \\ 0 & 0 & -\mu & s+\lambda \end{vmatrix} \begin{vmatrix} P_{11}(s) \\ P_{12}(s) \\ P_{22}(s) \\ P_{21}(s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Po vyřešení a provedení inverzní transformace získáme

$$\begin{aligned} p_{11}(t) &= \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t} \\ p_{12}(t) &= \frac{\lambda}{\lambda+\mu} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t} \\ p_{22}(t) &= \frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t} \\ p_{21}(t) &= \frac{\mu}{\lambda+\mu} - \frac{\mu}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t} \end{aligned} .$$

Nyní najdeme bezpodmínečné stavy pravděpodobností $p_i(t)$ pro každý stav i. Můžeme tedy psát

$$p'_j(t) = -d_{jj} p_j(t) + \sum_{j \neq i} p_i(t) d_{ij} \ .$$

Po použití Laplaceovy transformace na obou stranách rovnice získáme

$$sP_j(s) - p_j(0) = -d_{jj}P_j(s) + \sum_{i \neq j} d_{ij}P_i(s),$$

tj.

$$P_j(s) = \frac{1}{s + d_j}\left[p_j(0) + \sum_{i \neq j} P_i(s)d_{ij}\right].$$

Vezmeme $p_1 = 0$ a $p_2 = q = 1 - p$. Máme

$$\begin{aligned} d_{11} &= \lambda \\ d_{12} &= \lambda \\ d_{22} &= \mu \\ d_{21} &= \mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_1(s) &= \frac{1}{s+\lambda}\left[p + \mu P_2(s)\right] \\ P_2(s) &= \frac{1}{s+\mu}\left[q + \lambda P_1(s)\right] \end{aligned}$$

na řešení,

$$\begin{aligned} P_1(s) &= \frac{(s+\mu)p + \mu q}{s(s+\mu+\lambda)} \\ P_2(s) &= \frac{q(s+\lambda) + \lambda p}{s(s+\mu+\lambda)} \end{aligned}$$

po inverzní transformaci získáme

$$\begin{aligned} p_1(t) &= \frac{1}{\lambda+\mu}\left[\mu - \left(\mu - (\mu+\lambda)pe^{-(\mu+\lambda)t}\right)\right] \\ p_2(t) &= \frac{1}{\lambda+\mu}\left[\lambda + \left(\mu - (\mu+\lambda)pe^{-(\mu+\lambda)t}\right)\right]. \end{aligned}$$

9.3. Matice hustoty přechodu

Matice $A = \|d_{ij}\|$ se nazývá **matice hustoty přechodu** nebo **matice míry přechodu procesu**. Tato matice má následující vlastnosti:

1. její nediagonální prvky jsou nezáporné a diagonální prvky jsou záporné,
2. suma prvků v každém řádku je rovna nule, suma nediagonálních prvků je rovna sumě diagonálních prvků s opačným znaménkem.

Pro systém uvažovaný v předchozí ilustraci bude systém diferenciálních rovnic v maticové formě vypadat následovně:

$$\left|p_{11}'(t), p_{12}'(t), p_{22}'(t), p_{21}'(t)\right| = \left|p_{11}(t), p_{12}(t), p_{22}(t), p_{21}(t)\right| \begin{vmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ \mu & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & \mu \\ 0 & 0 & \lambda & -\lambda \end{vmatrix},$$

kde

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ \mu & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & \mu \\ 0 & 0 & \lambda & -\lambda \end{vmatrix}$$

je matice hustoty přechodu A.

Také pro bezpodmínečný stav pravděpodobností máme

$$\left|p_1'(t), p_2'(t)\right| = \left|p_1(t), p_2(t)\right| \begin{vmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{vmatrix}.$$

Zde je matice míry přechodu A

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{vmatrix}.$$

Matice $P = I + A$ hraje stejnou úlohu jako jeden krok v matici přechodu pravděpodobnosti u diskrétního parametru Markovových řetězců. Jestliže prvky matice A jsou konstanty, pak věty zmíněné v poslední části diskrétního parametru Markovova řetězce jsou také aplikovatelné na spojitý parametr Markovova řetězce s tou změnou, že počet návštěv daného stavu se stane celkovým časem, který byl ve stavu stráven.

Pro řetězec, který byl uvažován v ilustraci, máme

$$P = I + A = I + \begin{vmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & \lambda \\ \mu & 1-\mu \end{vmatrix}.$$

Povšimněte si, že suma řádkových prvků v matici P je rovna 1 jako u matice přechodu pravděpodobnosti diskrétního parametru Markovova řetězce. Avšak zde P není matice pravděpodobnosti.

Řešený příklad

Mějme systém dán maticí *P*

$$P = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \left| \begin{array}{ccc} 1-2\lambda & 2\lambda & 0 \\ \mu & 1-(\mu+\lambda) & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

Nalezněte:

- **průměrný čas za který se systém dostane do konečného stavu, je-li počáteční stav 1,**
- **průměrný čas strávený ve stavu 2 předtím, než se dostane systém do konečného stavu (počáteční stav je 1).**

Máme

$$Q = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \left| \begin{array}{cc} 1-2\lambda & 2\lambda \\ \mu & 1-\lambda-\mu \end{array} \right| \end{array}$$

$$I - Q = \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right| - \left| \begin{array}{cc} 1-2\lambda & 2\lambda \\ \mu & 1-\lambda-\mu \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} 2\lambda & -2\lambda \\ -\mu & \lambda+\mu \end{array} \right|$$

$$M = \left\| \mu_{ij} \right\| = [I - O]^{-1} = \frac{1}{2\lambda^2} \left| \begin{array}{cc} \lambda+\mu & 2\lambda \\ \mu & 2\lambda \end{array} \right|$$

a

$$M_\rho = \frac{1}{2\lambda^2} \left| \begin{array}{c} 3\lambda+\mu \\ 2\lambda+\mu \end{array} \right|$$

A proto průměrný čas strávený před dostáním se do koncového stavu, začínáme-li stavem 1, je

$$\frac{3\lambda+\mu}{2\lambda^2}$$

a čas strávený ve stavu 2, než se systém dostane do koncového stavu začínajícího ze stavu 1, je

$$\mu_{12} = \frac{2\lambda}{2\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}$$

9.4. Generování náhodných čísel

Náhodná čísla jsou požadována ve všech simulacích nebo ve studiích Monte Carlo. Přestože slova **simulace** a **Monte Carlo** jsou velmi často zaměnitelně používaná, někteří výzkumníci mezi nimi rozeznávají rozdíly. Slovo simulace je používáno lidmi, kteří mluví o experimentálním modelu měnícím se v čase. Ve shodě s ostatními je termín Monte Carlo omezený na uměle vytvořené výběrové procedury, které využívají techniky redukující rozptyl. Ačkoliv je zde rozdíl mezi použitím těchto dvou termínů, náhodná čísla jsou v obou těchto metodách stále používána a je požadován mechanismus generování náhodných čísel. Toto bylo v úmyslu prezentovat v této části.

Skutečná sekvence náhodných čísel je ta, která se **nikdy** neopakuje a není zde žádný speciální předsudek v jejím znovu užití. Metoda generování těchto čísel nebo proces mající skutečnou náhodnost vnitřních elementů by byl skutečný jev (úkaz). Techniky, které jsou používány na počítači, používají deterministické algoritmy, a proto je tzv. pseudostochastické (pseudo = nepravý, stochastic = náhodný) generování to nejlepší generování, které jsme schopni získat. Ke zdůraznění tohoto aspektu jsou náhodná čísla, která jsou generována na počítači, nazývána jako pseudonáhodná a jsou charakterizována délkou sekvence, po které je daná sekvence opakována.

Hodnota náhodné veličiny je závislá na výsledku náhodné události. Náhodná veličina X je dána vztahem

$$P\{X < x\} = F(x),$$

kde $x \in R$ a $F(x)$ je distribuční funkce. Hodnoty náhodné veličiny jsou známy jako **pseudonáhodná čísla**.

Dobrý generátor pseudonáhodných čísel by měl být schopen generovat náhodná čísla, která splňují následující vlastnosti:

1. čísla by měla být stejnoměrně rozložená,
2. statisticky nezávislá,
3. reprodukovatelná,
4. neopakující se do požadované délky,
5. vysoko-rychlostní generace,

Zároveň by generátor měl mít co nejmenší požadavky na paměť.

Jestliže náhodná veličina má stejnoměrné rozložení, pak také generovaná náhodná čísla jsou nazývána jako **stejnoměrně rozložená náhodná čísla**.

Předpokládejme, že čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou hodnoty náhodné veličiny X v nezávislém procesu. Pak se sekvence náhodných čísel $\{x_n\}$ nazývá **náhodná sekvence** a má stejnoměrné rozložení na jednotkovém intervalu $0 \le x \le 1$ za podmínky, že relativní frekvence sekvence $\{x_n\}$ na $\langle 0,1 \rangle$ má následující hodnotu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\nu_n(a,b)}{n} = b - a\,,$$

kde $\nu_n = \nu_n(a,b)$ je počet elementů v konečné subsekvenci $x_1, x_2, ..., x_n$ patřící do intervalu (a,b) vzaté z $\langle 0,1 \rangle$. To také znamená, že hodnota pro inteval $\langle 0,1 \rangle$ ve výše uvedeném vzorci může být 1. Nechť náhodný vzorek ze standardního stejnoměrného rozdělení je vyjádřen pomocí $U(0,1)$. Teď zvážíme generování nezávislých náhodných proměnných podle $U(0,1)$.

Existuje několik metod, které generují náhodná čísla. Některé z nich jsou:

1. Inner Product Method (Von Neumann),
2. Lehmerova metoda,
3. Fibonacciho série metod,
4. Kongruentní metody.

9.5. Kongruentní metoda

Tato metoda je naprosto reprodukovatelná a požaduje minimum počítačové paměti. Dvěma celým číslům *a* a *b* říkáme **kongruentní modulo *m***, jestliže jejich rozdíl je celé číslo a je násobkem *m*. Symbolicky můžeme psát $a = b(\mathrm{mod}\, m)$. Velmi užitečný zdroj generace pseudonáhodných čísel je lineární kongruentní sekvence typu

$$x_{i+1} = \alpha x_i + \beta(\mathrm{mod}\, m) \text{ pro } i = 1,2,3,...,$$

kde x_i, α, β jsou nezáporná celá čísla.

Pak

$$x_1 = \alpha x_0 + \beta(\mathrm{mod}\, m)$$
$$x_2 = \alpha x_1 + \beta(\mathrm{mod}\, m) = \alpha^2 x_0 + (\alpha+1)\beta(\mathrm{mod}\, m)\,,$$

podobně

$$x_3 = \alpha x_2 + \beta(\mathrm{mod}\, m) = \alpha^3 x_0 + (\alpha^2 + \alpha + 1)\beta(\mathrm{mod}\, m)\,.$$

Obecně

$$x_i = \alpha^i x_0 + \frac{(\alpha^i - 1)}{(\alpha - 1)}\beta(\mathrm{mod}\, m)\,.$$

Tedy známe x_0 (které je také nazýváno jako **počátek** náhodné sekvence čísel), α, β a *m*, můžeme tedy vyčíslit všechna čísla v sekvenci $x_1, x_2, ..., x_n$. Musí být zaručeno, že $0 \le x_i \le m$ pro všechna *i*. Dokud jsou čísla produkována pomocí výše uvedeného vzorce, pak by měla ležet v intervalu $\langle 0, m \rangle$, k získání náhodných čísel mezi 0 a 1 musí být x_i děleno *m*, takže

$$x_i \to \frac{x_i}{m}.$$

Pro daný generátor a dané x_0 (počátek) se délka nejkratší subsekvence, po které je sekvence opakována, nazývá **perioda počátku** pro daný generátor, zatímco největší perioda jakéhokoliv počátku x_0 se nazývá **perioda generátoru**.

Z tohoto důvodu je žádoucí volit α, β, m a x_0 tak, abychom maximalizovali periodu generovaných sekvencí. Pro $\beta = 0$ se tato metoda nazývá **Multiplikativní-kongruentní** metoda, jinak je známa jako **smíšená-kongruentní** metoda.

Pro jakékoliv programové simulace jsou z náhodných čísel obecně požadována velmi velká čísla. A proto je důležité mít velmi rychlé procedury generující náhodná čísla na počítačích. Toho může být dosaženo pouze tehdy, jestliže počítačový kód je napsán přímo ve strojovém jazyce. Avšak v roce 1979 Schrage ukázal, že kód pro pseudonáhodná čísla může být zapsán také v jazycích vyšší úrovně, které produkují stejné výsledky na jakémkoli počítači. Schrage použil multiplikativní kongruenční metodu ke generování náhodných čísel, která nebyla uspokojivě nalezena v extrémech rozložení.

Wichmann a Hill [Wichmann B.A. a I.D. Hill An Efficient and Portable Pseudo-random Number Generator in Applied Statistics Algorithms, pp. 238 – 142, vydáno Ellis Horwood Limited, Chichester, 1985] poskytuje účinné a statisticky spolehlivé multiplikativní kongruentní algoritmy generující pseudonáhodná čísla. Mají délku periody větší než $6{,}95 \cdot 10^{12}$, takže, i když budeme používat 1000 náhodných čísel za sekundu, sekvence se nebude opakovat dřív než za 200 let. Ve skutečnosti Weichmann a Hill používají tři jednoduché multiplikativní kongruentní generátory. Každý používá prvočísla pro svůj modul a základní kořen pro svůj násobitel, který garantuje kompletní cyklus. Poté jsou tyto tři výsledky sečteny a zanedbatelná část je odečtena. Před začátkem procedury jsou náhodně vybíraná 3 celá čísla mezi (1, 30000), která jsou požadována k dodání do počítače. Weichmann a Hill rovněž poskytli kód zapsaný v jazyce FORTRAN 77, který je rovněž dostupný v uvedené literatuře.

Také můžeme generovat pseudonáhodná čísla podléhající jiným rozdělením - normálnímu, exponenciálnímu, gamma, atd.

Shrnutí kapitoly 9.

Nechť

$$\{X_t : t \geq 0\}$$

reprezentuje spojitý náhodný parametr Markovova řetězce s m diskrétními stavy. Pro $t > s > 0$ a stavy i a j nechť

$$P\{X_t = j\} = p_j(t),$$

což je pravděpodobnost, že proces je ve stavu j v čase t, a

$$P\{X_t = j | X_s = i\} = p_{ij}(s,t),$$

což je pravděpodobnost, že proces je ve stavu j v čase t a byl dán procesem, který byl ve stavu i v čase s.

Pravděpodobnost $p_{ij}(s,t)$ je nazývána **přechodovou pravděpodobnostní funkcí Markovova řetězce**.

Předpokládáme, že $p'_{ij}(t)$ existuje a $h \to 0$, pak:

$$p'_{ij}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)}{h} = -d_{jj} p_{ij}(t) + \sum_{k \neq j} p_{ik}(t) d_{kj} .$$

Pro všechny stavy i a j tato rovnice dává systém diferenciálních rovnic, jejichž řešením získáme pravděpodobnosti přechodu.

K získání bezpodmínečných stavových pravděpodobností $p'_i(t)$ pro každý stav i přijmeme stejný důvod, který byl již použit v odvození předcházejících rovnic. Takže máme

$$p_i(t+h) = p_i(t)(1 - d_{ii}h) + \sum_{j \neq i} p_j(t) d_{ji} h + o(h),$$

ze které získáme

$$p'_i(t) = -d_{ii} p_i(t) + \sum_{j \neq i} p_j(t) d_{ji} .$$

Tento výraz definuje systém rovnic, který je lineární z hlediska Laplaceovy transformace proměnných, a může být řešen standardními technikami.

Skutečná sekvence náhodných čísel je ta, která se **nikdy** neopakuje a není zde žádný speciální předsudek v jejím znovu užití. Metoda generování těchto čísel nebo proces mající skutečnou náhodnost vnitřních elementů by byl skutečný jev (úkaz). Techniky, které jsou používány na počítači, používají deterministické algoritmy, a proto je tzv. pseudostochastické (pseudo = nepravý, stochastic = náhodný) generování to nejlepší generování, které jsme schopni získat.

Kongruentní metoda je naprosto reprodukovatelná a požaduje minimum počítačové paměti. Dvěma celým číslům *a* a *b* říkáme **kongruentní modulo *m***, jestliže jejich rozdíl je celé číslo a je násobkem *m*. Symbolicky můžeme psát $a = b(\bmod m)$. Velmi užitečný zdroj generace pseudonáhodných čísel je lineární kongruentní sekvence typu

$$x_{i+1} = \alpha x_i + \beta(\bmod m) \text{ pro } i = 1,2,3,...,$$

kde x_i, α, β jsou nezáporná celá čísla.

? Otázky 9.

1. Co je to přechodová pravděpodobnostní funkce Markovova řetězce?
2. Jaké vlastnosti má matice hustoty přechodu?
3. Popište kongruentní metodu generování náhodných čísel.