3. FUNKCE NÁHODNÉ VELIČINY

Čas ke studiu: 40 minut

Cíl: Po prostudování této kapitoly budete umět transformovat náhodnou veličinu X na náhodnou veličinu Y, je –li mezi těmito náhodnými veličinami vzájemně jednoznačný vztah

VÝKLAD

3.1. Funkce náhodné veličiny

V mnoha případech, kdy známe rozdělení náhodné veličiny X, potřebujeme určit rozdělení náhodné veličiny Y, která je funkcí X, tzn. $Y = h(X)$.

Je-li funkce $\boldsymbol{h(x)}$ v oboru možných hodnot veličiny X **monotónní,** pak existuje inverzní funkce $\mathrm{h}^{-1}(y)$, a jde o **vzájemně jednoznačný vztah mezi *X* a *Y*.**

Je-li v takovém případě $\boldsymbol{h(x)}$ **rostoucí**, pak pro všechna $x_2 > x_1$ je $y_2 > y_1$, a distribuční funkci veličiny Y lze psát jako:

$$G(y) = P(Y < y) = P[X < \mathrm{h}^{-1}(y)] = F[\mathrm{h}^{-1}(y)]$$

Pro **klesající funkci** $\boldsymbol{h(x)}$, tzn. pro všechna $x_2 > x_1$ platí $y_1 > y_2$, je distribuční funkce:

$$G(y) = P(Y < y) = P[X > \mathrm{h}^{-1}(y)] = 1 - F[\mathrm{h}^{-1}(y)]$$

Pro diskrétní náhodnou veličinu X je pravděpodobnostní funkce dána jako:

$$p_Y(y_i) = p_X\left(h^{-1}(y_i)\right)$$

Je-li X spojitá náhodná veličina s hustotou pravděpodobnosti $f(x)$, přičemž $h^{-1}(y)$ má pro všechna y spojitou derivaci, pak pro rostoucí funkci $h(x)$ dostaneme hustotu pravděpodobnosti $g(y)$ veličiny Y jako:

$$g(y) = \frac{dG(y)}{dy} = f\left(h^{-1}(y)\right) \cdot \frac{dh^{-1}}{dy} = f\left(h^{-1}(y)\right) \cdot \frac{dx}{dy}$$

Podobně pro klesající funkci $h(x)$ dostaneme:

$$g(y)=\frac{dG(y)}{dy}=-f\left(h^{-1}(y)\right)\cdot\frac{dh^{-1}}{dy}=-f\left(h^{-1}(y)\right)\cdot\frac{dx}{dy}$$

Vzhledem k tomu, že v případě rostoucí funkce *h(x)* je $\left(\frac{dx}{dy}>0\right)$, zatímco v případě klesající funkce je $\left(\frac{dx}{dy}<0\right)$, lze oba předchozí vztahy spojit do jednoho:

$$g(y)=\frac{dG(y)}{dy}=f\left(h^{-1}(y)\right)\cdot\left|\frac{dh^{-1}}{dy}\right|=f\left(h^{-1}(y)\right)\cdot\left|\frac{dx}{dy}\right|$$

Není-li *h*(*x*) monotónní funkcí, pak mezi *X* a *Y* neexistuje vzájemně jednoznačný vztah a tedy ani inverzní funkce k *h*(*x*). Distribuční funkce *G*(*y*) = *P*(*Y* < *y*) je v takovém případě dána pravděpodobností, že náhodná veličina nabude hodnoty z kteréhokoliv intervalu, pro který *Y* < *y*.

Pak platí:

Pro diskrétní náhodnou veličinu X: $G(y)=\sum_{i:h(x_i)\le y} p_i$

Pro spojitou náhodnou veličinu X: $G(y)=\int_{h(x)\le y} f(x)dx$

Pro případ diskrétní náhodné veličiny X je pravděpodobnostní funkce p_Y veličiny Y dána vztahem:

$$p_Y(y)=\sum_{i:h(x_i)=y} p_X(x_i)$$

Nechť existuje konečný počet x_i takových, že $h(x_i)=y$. Nechť pro každé x_i existuje derivace $\frac{dh}{dx}\neq 0$. Pak existuje hustota pravděpodobnosti $g(y)$ náhodné veličiny Y:

$$g(y)=\sum_{i:h(x_i)=y} f(x_i)\left|\frac{dh}{dx}\right|_{x=x_i}^{-1}$$

Řešený příklad

Nechť veličina X má rovnoměrné rozdělení v intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\rangle$. Jaké rozdělení má veličina $y=tg\,x$?

$$g(y) = f\left(h^{-1}(y)\right) \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right|$$

Hustota pravděpodobnosti rovnoměrného rozdělení: $f(x) = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \dfrac{1}{\pi}$

$$h(x) = y = tg\,x \quad \Rightarrow \quad h^{-1}(y) = x = arctg\,y$$

$$\left|\frac{dx}{dy}\right| = \left|\frac{d(arctg\,y)}{dy}\right| = \left|\frac{1}{1+y^2}\right| = \frac{1}{1+y^2}$$

Hustota pravděpodobnosti veličiny Y je tedy:

$$g(y) = f\left(h^{-1}(y)\right) \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right| = \frac{1}{\pi\left(1+y^2\right)}, \qquad y \in R$$

*Uvedené **rozdělení** se nazývá **Cauchyho**. Je příkladem rozdělení, které nemá konečný rozptyl:*

$$DY = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \cdot g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \cdot \frac{1}{\pi\left(1+y^2\right)}dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \cdot \frac{y^2+1-1}{\left(1+y^2\right)}dy =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \cdot 1dy - \int_{-\infty}^{\infty} \cdot \frac{1}{\left(1+y^2\right)}dy\right] = \frac{1}{\pi}[\infty - \pi] = \infty$$

Řešený příklad

Nechť veličina X má normální rozdělení N(0;1). Jaké rozdělení má veličina $y = x^2$?

Pro nezáporná y existuje inverzní funkce $h^{-1}(y)$: $x = \pm\sqrt{y}$.

$$x = \pm\sqrt{y} \qquad \Rightarrow \qquad \left|\frac{dx}{dy}\right| = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Pak hustota pravděpodobnosti nezáporné náhodné veličiny Y je:

$y \geq 0$:

$$g(y) = f\left(\pm\sqrt{y}\right) \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right| = \left(f\left(\sqrt{y}\right) + f\left(-\sqrt{y}\right)\right) \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right| = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y}{2}}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} \cdot e^{-\frac{y}{2}}$$

Jde o hustotu ***rozdělení*** χ^2 ***s jedním stupněm volnosti****.*

3.2. Přibližné stanovení charakteristik funkce náhodné veličiny

V praxi je někdy k dispozici pouze jediná změřená hodnota veličiny X (odhad její střední hodnoty) a směrodatná odchylka měření σ_X (daná například udanou chybou měřícího přístroje). Pokud je variační koeficient mnohem menší než jedna $\left(\frac{\sigma_X}{\mu} <<< 1\right)$, lze přibližně odhadnout charakteristiky veličiny $y = h(x)$.

Předpokládejme, že náhodná veličina X je spojitá.

Střední hodnotu náhodné veličiny Y odhadneme na základě vztahu:

$$EY = \int h(x) f(x) dx = \int \left[h(EX) + h'(EX) \cdot (x - EX) + \frac{h''(EX)}{2} \cdot (x - EX)^2 + \dots \right] f(x) dx \cong$$
$$\cong h(EX) + \frac{h''(EX)}{2} \cdot DX \cong h(EX)$$

Rozptyl DY lze pak vyjádřit přibližně z lineárního členu Taylorova rozvoje:

$$DY = \int (h(x) - EY)^2 f(x) dx \cong \int (h(x) - h(EX))^2 f(x) dx \cong \left(\frac{dh}{dx}\right)^2_{x=EX} \cdot DX$$

? Otázky 3.

1. Nechť Y=h(X). h(x) je monotónní funkce. Nalezněte vztah mezi hustotou pravděpodobnosti náhodné veličiny Y a hustotou pravděpodobnosti náhodné veličiny X.

Úlohy k řešení 3.

1. F je distribuční funkce náhodné veličiny X, je spojitá a rostoucí. Náhodná veličina Y je definována vztahem: $Y = F(X)$. Určete rozdělení náhodné veličiny Y (hustotu pravděpodobnosti).

2. Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení na intervalu $\langle 0;3 \rangle$. Určete rozdělení náhodné veličiny Y, Y=2X+1.

3. Náhodná veličina X má normální rozdělení $N(\mu;\sigma^2)$. Určete rozdělení náhodné veličiny Y, $Y = e^X$.

4. Náhodná veličina X má hustotu pravděpodobnosti: $f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$. Určete rozdělení náhodné veličiny Y, $Y = -\ln X$.