2 VYBRANÉ PRAVDĚPODOBNOSTNÍ MODELY

Čas ke studiu: 60 minut

Cíl: Po prostudování této kapitoly budete umět popsat a použít pro popis technických procesů:

- Erlangovo rozdělení
- Weibullovo rozdělení
- Logaritmicko – normální rozdělení
- Vícerozměrné normální rozdělení

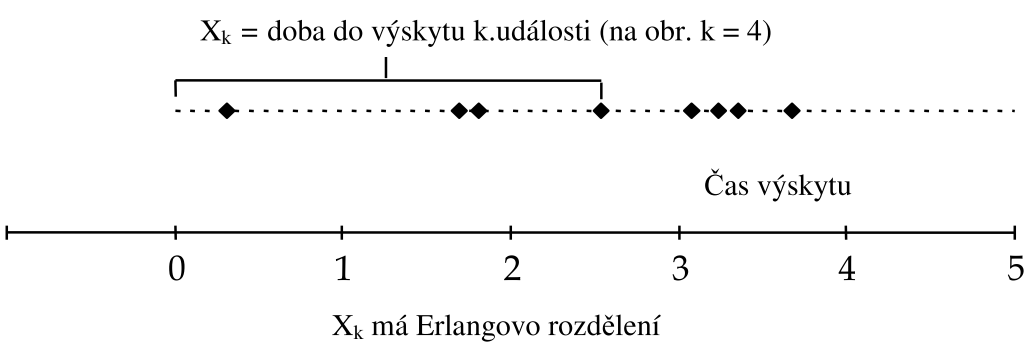
VÝKLAD

2.1 Erlangovo rozdělení

Určitým zobecněním exponenciální náhodné veličiny (doba do (první) poruchy) je náhodná veličina s Erlangovým rozdělením, která **popisuje dobu do výskytu k-té události v Poissonově procesu**.

Erlangovo rozdělení je **speciálním typem tzv. Gamma rozdělení pro k z množiny celých čísel**. (Tento vztah je vhodné znát, chceme-li k nalezení distribuční funkce, popř. hustoty pravděpodobnosti použít statistický software – některé statistické pakety mají implementováno pouze Gamma rozdělení a hodnoty Erlangova rozdělení pak získáme dosazením příslušných parametrů).

Erlangovo rozdělení má dva parametry: **k** – počet událostí (parametr tvaru, shape, α – v Gamma rozdělení), k nimž má dojít a rychlost výskytu těchto událostí $\boldsymbol{\lambda}$ (parametr měřítka, scale, β v Gamma rozdělení).



Má-li náhodná veličina X Erlangovo rozdělení, značíme to takto:

$$X_k \rightarrow Erlang\,(k, \lambda)$$

Náhodnou veličinu s Erlangovým rozdělením si můžeme představit jako součet k nezávislých exponenciálních náhodných veličin (doba do výskytu k-té události je součtem dob mezi 0-tou a 1. událostí, 1. a 2. událostí, ..., (k-1). a k. událostí).

Pro Erlangovo rozdělení s parametry k a λ platí tyto vztahy:

Hustota pravděpodobnosti:

$$f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}; \qquad t > 0$$

Distribuční funkce:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^j}{j!}$$

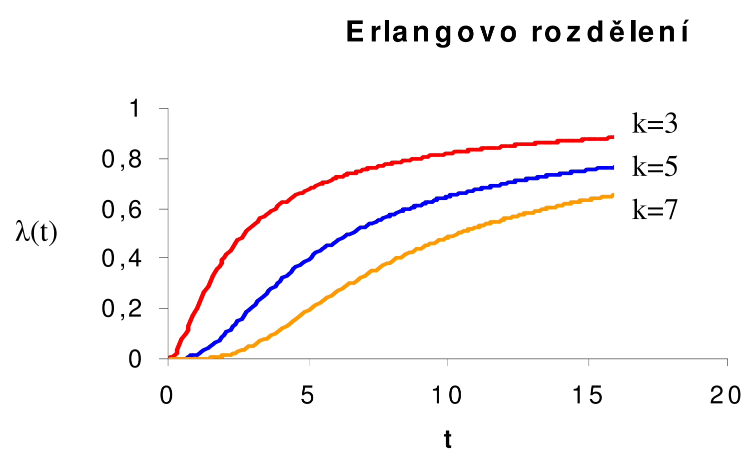
Intenzita poruch:

$$\lambda(t) = \frac{\lambda}{(k-1)!\sum_{j=0}^{k-1} \dfrac{1}{(k-1-j)!(\lambda t)^j}}$$

Střední hodnota: $EX_k = \dfrac{k}{\lambda}$

Rozptyl: $DX_k = \dfrac{k}{\lambda^2}$

Graf intenzity poruch Erlangova rozdělení pro λ = 1; k = 3; 5; 7



Intenzita poruch $\lambda(t)$ je v případě Erlangova rozdělení rostoucí funkce a proto je toto **rozdělení vhodné pro modelování procesů stárnutí**.

Průvodce studiem

Následující pasáž je určena pro zájemce o matematické pozadí používaných vztahů.

- **Odvození distribuční funkce Erlangova rozdělení**

Mějme:

X_k ... doba do výskytu k-té události v Poissonově procesu, $X_k \rightarrow Erlang\,(k;\lambda)$
N_t ... počet výskytu události v časovém intervalu (0;t), $N_t \rightarrow Po\,(\lambda t)$

Platí, že v časovém intervalu (0;t) nastane alespoň k událostí, právě když doba do výskytu k-té události je menší než t.

$$(N_t \geq k) \Leftrightarrow (X_k < t)$$

Z této ekvivalence lze odvodit distribuční funkci Erlangova rozdělení.

$$F(t) = P(X_k < t) = P(N_t \geq k) = 1 - P(N_t < k) = 1 - \sum_{j=0}^{k-1}\left(e^{-\lambda t}\cdot\frac{(\lambda t)^j}{j!}\right) = 1 - e^{-\lambda t}\cdot\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(\lambda t)^j}{j!}$$

- **Odvození hustoty pravděpodobnosti**

Hustotu pravděpodobnosti získáme derivací distribuční funkce:

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \lambda\cdot e^{-\lambda t}\cdot\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(\lambda t)^j}{j!} + \left(-e^{-\lambda t}\right)\cdot\sum_{j=0}^{k-1}\frac{j\cdot(\lambda t)^{j-1}\cdot\lambda}{j!} =$$

$$= \lambda\cdot e^{-\lambda t}\cdot\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(\lambda t)^j}{j!} - \lambda\cdot e^{-\lambda t}\cdot\sum_{j=1}^{k-1}\frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!} =$$

$$= \lambda\cdot e^{-\lambda t}\cdot\left(\sum_{j=0}^{k-2}\frac{(\lambda t)^j}{j!} + \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}\right) - \lambda\cdot e^{-\lambda t}\cdot\sum_{j=0}^{k-2}\frac{(\lambda t)^j}{j!} =$$

$$= \lambda\cdot e^{-\lambda t}\cdot\sum_{j=0}^{k-2}\frac{(\lambda t)^j}{j!} + \lambda\cdot e^{-\lambda t}\cdot\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} - \lambda\cdot e^{-\lambda t}\cdot\sum_{j=0}^{k-2}\frac{(\lambda t)^j}{j!} = \lambda\cdot e^{-\lambda t}\cdot\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}$$

- **Odvození intenzity poruch**

$$\lambda(t)=\frac{f(t)}{1-F(t)}=\frac{\lambda\cdot e^{-\lambda t}\cdot\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}}{e^{-\lambda t}\cdot\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(\lambda t)^j}{j!}}=\frac{\lambda}{(k-1)!\cdot\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(\lambda t)^j}{(\lambda t)^{k-1}\cdot j!}}=\frac{\lambda}{(k-1)!\cdot\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(\lambda t)^{j-k+1}}{j!}}=$$

$$=\frac{\lambda}{(k-1)!\cdot\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{(\lambda t)^{k-1-j}\cdot j!}}=\frac{\lambda}{(k-1)!\cdot\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{(\lambda t)^{j}\cdot (k-1-j)!}}$$

- **Odvození střední hodnoty a rozptylu**

Mějme:

X_k ... doba do výskytu k-té události v Poissonově procesu, $X_k \rightarrow Erlang\,(k;\lambda)$
X ... doba do výskytu události v Poissonově procesu, $X \rightarrow E(\lambda)$

Je zřejmé, že Erlangova náhodná veličina (s parametry k; λ) je součtem k exponenciálních veličin (s parametrem λ):

$$X_k=\sum_{i=1}^{k}X_i$$

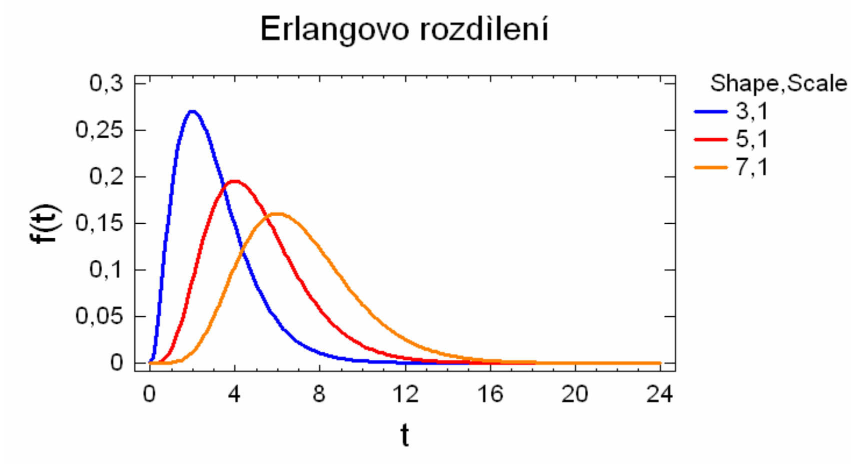
Z vlastností střední hodnoty víme, že střední hodnota součtu náhodných veličin je rovna součtu jejich středních hodnot:

$$EX_k=\sum_{i=1}^{k}EX_i=\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}+\ldots+\frac{1}{\lambda}=\frac{k}{\lambda}$$

Jednotlivé exponenciální náhodné veličiny jsou nezávislé a proto taktéž rozptyl součtu náhodných veličin je roven součtu jejich rozptylů:

$$DX_k=\sum_{i=1}^{k}DX_i=\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2}+\ldots+\frac{1}{\lambda^2}=\frac{k}{\lambda^2}$$

Na následujícím obrázku jsou **příklady hustoty Gamma rozdělení pro λ = 1 a různé hodnoty k**. Poznamenejme, že s rostoucím k roste rozptyl tohoto rozdělení a koeficient šikmosti se přibližuje nule (rozdělení je více symetrické).



2.2 Weibullovo rozdělení

Weibullovo rozdělení je velmi flexibilní (díky parametru β) a proto se jím zejména v teorii spolehlivosti popisují spojité náhodné veličiny definované jako **doba do poruchy** (doba bezporuchovosti). Používá se zejména při popisu komponent, které jsou **v období ranných poruch nebo v období stárnutí** (tj. tam kde se projevuje mechanické opotřebení nebo únava materiálu).

Weibullovo rozdělení má dva parametry: **Θ** – parametr měřítka (scale, Θ > 0, závisí na materiálu, namáhání a podmínkách užívání) a **β** – parametr tvaru (shape, β > 0, na jeho hodnotě závisí tvar intenzity poruch a tím i vhodnost použití pro určité období doby života).

Má-li náhodná veličina X Weibullovo rozdělení, značíme to takto:

$$X \rightarrow W(\Theta, \beta)$$

Distribuční funkce:

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\Theta}\right)^{\beta}}; \qquad t > 0; \Theta > 0; \beta > 0$$

Hustota pravděpodobnosti:

$$f(t) = \frac{\beta}{\Theta}\left(\frac{t}{\Theta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\Theta}\right)^{\beta}}; \qquad t > 0; \Theta > 0; \beta > 0$$

Intenzita poruch:

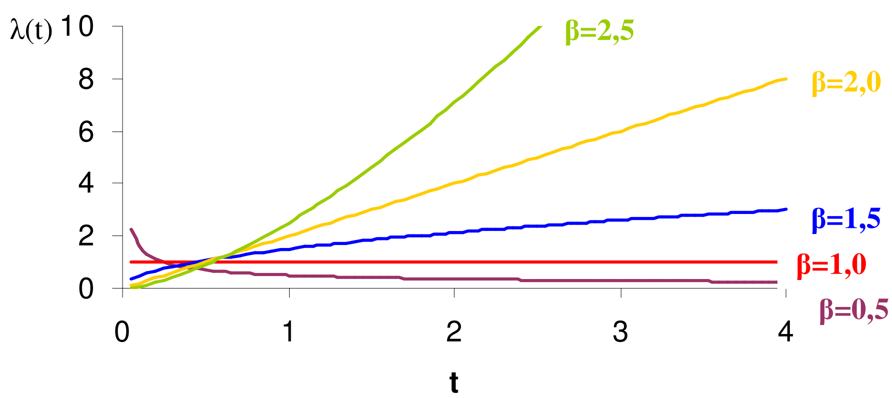
$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\Theta}.\left(\frac{t}{\Theta}\right)^{\beta-1}; \qquad t > 0; \Theta > 0; \beta > 0$$

Ze vztahu pro intenzitu poruch Weibullova rozdělení je zřejmé, že:

$$\lambda(t) = konst. \cdot t^{\beta-1}$$

a proto tvar intenzity poruch závisí na volbě parametru β.

Některé příklady intenzity poruch Weibullova rozdělení (Θ=1):



Všimněme si, že pro β=1, přejde Weibullovo rozdělení v rozdělení exponenciální (konstantní intenzita poruch) s parametrem $\lambda = \dfrac{1}{\Theta}$.

$$\beta = 1 \quad \Rightarrow \quad W(\Theta;1) \to E\left(\frac{1}{\Theta}\right)$$

Z výše uvedeného grafu je rovněž zřejmé použití Weibullova rozdělení v závislosti na parametru β:

$0 < \beta < 1$	období dětských nemocí	λ(t) ... klesající funkce
$\beta = 1$	období stabilního života	$\lambda(t) = konst. = \dfrac{1}{\Theta} = \lambda$ (exp. rozdělení)
$1 < \beta < 2$	období stárnutí	λ(t) ... konkávní, rostoucí funkce
$\beta = 2$	období stárnutí	λ(t) ... lineárně rostoucí funkce
$\beta > 2$	období stárnutí	λ(t) ... konvexní, rostoucí funkce

CD-ROM

Na přiloženém CD-ROMu si můžete prohlédnout animace zobrazující vliv parametru tvaru Weibullova rozdělení na charakteristiky tohoto rozdělení.

2.3 Logaritmicko-normální rozdělení

Jestliže má náhodná veličina Y, Y = ln X, normální rozdělení s parametry μ a σ^2, pak náhodná veličina X má logaritmicko-normální rozdělení se stejnými parametry, což zapisujeme:

$$X \to LN\left(\mu;\sigma^2\right)$$

Z definice je zřejmé, že náhodná veličina s logaritmicko-normálním rozdělením může nabývat pouze kladných hodnot (definiční obor ln x). Proto nachází uplatnění při **popisu náhodných veličin nabývajících pouze kladných hodnot a to zejména v případech, kdy hustota pravděpodobnosti je asymetrická** (šikmost není nulová) s jedním vrcholem. Značný význam tohoto rozdělení tedy nacházíme v teorii spolehlivosti (různé parametry součástek nabývají pouze kladných hodnot – životnost, rozměry, tažnost, …) a v ekonomii při popisu příjmů (příjmová rozdělení).

Hustota pravděpodobnosti:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}; & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{pro } x \le 0 \end{cases}$$

Distribuční funkce:

Distribuční funkci log.-normálního rozdělení nalezneme prostřednictvím distribuční funkce normovaného normálního rozdělení.

$$F(x) = \begin{cases} \Phi\left(\dfrac{\ln x - \mu}{\sigma}\right); & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{pro } x \le 0 \end{cases}$$

Střední hodnota: $EX = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$

Rozptyl: $DX = e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2}-1\right)$

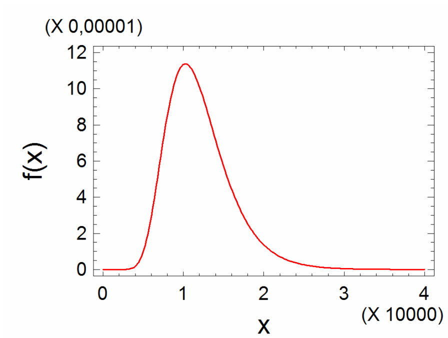
100p%-ní kvantil: $x_p = e^{\mu+\sigma\cdot z_p}$,

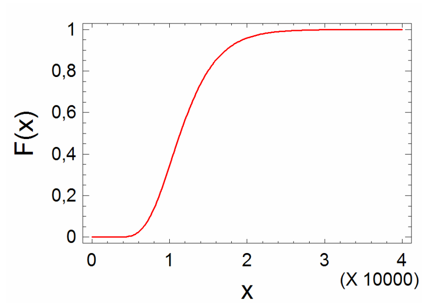
kde z_p je 100p%-ní kvantil normovaného normálního rozdělení

Grafické znázornění hustoty pravděpodobnosti a distribuční funkce:

X … příjem zaměstnanců jisté firmy

$$X \to LN\left(12.000;4.000^2\right)$$





Při praktickém používání tohoto rozdělení postupujeme tak, že náhodnou veličinu X nejdříve převedeme na Y = ln X a potom již postupujeme stejně jako u normálního rozdělení.

Průvodce studiem

A opět zde máme pasáž pro zájemce:

- **Odvození distribuční funkce logaritmicko-normálního rozdělení:**

Nechť:

$$Y = \ln X$$
$$X \to LN\left(\mu;\sigma^2\right) \quad \Leftrightarrow \quad Y \to N\left(\mu;\sigma^2\right)$$

$F_X(x)$ (resp. $F_Y(y)$) je distribuční funkce náhodné veličiny X (resp. Y)

$$\forall x > 0: \quad F_X(x) = P(X < x) = P\left(e^Y < x\right) = P(Y < \ln x) = F_Y(\ln x) = \Phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)$$

$$\forall x \leq 0: \quad F_X(x) = 0$$

- **Odvození hustoty pravděpodobnosti logaritmicko-normálního rozdělení:**

$f_X(x)$ … hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny X

$$\forall x > 0: \quad f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \frac{d\Phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)}{dx} = \varphi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)\cdot\frac{1}{x\cdot\sigma} = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right)^2}{2}} =$$

$$= \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$\forall x \leq 0: \quad f_X(x) = 0$

- **Odvození vztahu pro výpočet 100p%-ního kvantilu:**

$$
\begin{aligned}
P(X < x_p) &= p \\
F(x_p) &= p \\
\Phi\left(\frac{\ln x_p - \mu}{\sigma}\right) &= p \\
\frac{\ln x_p - \mu}{\sigma} &= z_p \qquad (\Phi(z_p) = p) \\
\ln x_p &= \sigma \cdot z_p + \mu \\
x_p &= e^{(\mu + \sigma \cdot z_p)}
\end{aligned}
$$

Řešený příklad

Nechť X je náhodná veličina s logaritmicko-normálním rozdělením s parametry: μ=2; σ^2=9. Určete:

a) pravděpodobnost, že náhodná veličina X je z intervalu (0;30)
b) medián daného rozdělení
c) střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X

$$X \to LN(2;9)$$

ada) Pravděpodobnost, že náhodná veličina X je z intervalu (0;30), můžeme určovat rovněž jako pravděpodobnost, že náhodná veličina X je menší než 30, neboť log.-normální náhodná veličina může nabývat pouze kladných hodnot.

Připomeňme si postup při určování distribuční funkce log.-normální náhodné veličiny:

$$
F(x) = \begin{cases} \Phi\left(\dfrac{\ln x - \mu}{\sigma}\right); & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{pro } x \leq 0 \end{cases}
$$

A nyní již přejděme k určení hledané pravděpodobnosti:

$$\underline{\underline{P(0 < X < 30)}} = F(30) - F(0) = \Phi\left(\frac{\ln 30 - 2}{\sqrt{9}}\right) - 0 = \Phi(0{,}47) \underline{\underline{= 0{,}681}}$$

nebo

$$\underline{\underline{P(0 < X < 30)}} = P(X < 30) = F(30) = \Phi\left(\frac{\ln 30 - 2}{\sqrt{9}}\right) = \Phi(0{,}47) \underline{\underline{= 0{,}681}}$$

adb) *Pro určení mediánu můžeme použít vztah pro 100p%-ní kvantil, který byl odvozen v Průvodci studiem:*

$$x_p = e^{\mu + \sigma \cdot z_p}$$

$$z_{0,5} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{x_{0,5}}} = e^{2 + \sqrt{9} \cdot 0} = \underline{\underline{e^2 \cong 7{,}4}}$$

adc) *Střední hodnotu a rozptyl určíme na základě výše uvedených vztahů:*

$$EX = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \Rightarrow \underline{\underline{EX}} = e^{2 + \frac{9}{2}} = \underline{\underline{e^{\frac{13}{2}} \cong 665{,}1}}$$

$$DX = e^{2\mu + \sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right) \Rightarrow \underline{\underline{DX}} = e^{2 \cdot 2 + 9}\left(e^9 - 1\right) \underline{\underline{\cong 3{,}6 \cdot 10^9}}$$

2.4 Vícerozměrné normální rozdělení

Uvažujme náhodný vektor $\underline{X}$. $\left(\underline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^T\right)$. Vektor $\underline{X}$ má n-rozměrné normální rozdělení pravděpodobnosti s parametry μ a ∑, jestliže jeho hustota pravděpodobnosti je:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Sigma|^{1/2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\underline{x} - \underline{\mu})^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot (\underline{x} - \underline{\mu})}$$

$$-\infty < x_j < \infty,\ j = 1, \ldots, \mathrm{n}\,,$$

kde: $\underline{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n)^T$ je vektor n reálných čísel

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \ldots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \ldots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$$ je kovarianční matice $\left(\sigma_{ij} = \operatorname{cov}(X_i, X_j)\right)$

(symetrická pozitivně definitní matice typu (n;n))

$|\Sigma|$ je determinant kovarianční matice Σ, $|\Sigma| \neq 0$

Σ^{-1} je inverzní matici k matici Σ

(protože matice Σ je pozitivně definitní, je $|\Sigma| > 0$ a inverzní matice Σ^{-1} existuje)

Má-li náhodná veličina n-rozměrné normální rozdělení pravděpodobnosti s parametry μ a ∑, značíme to takto:

$$X \rightarrow N_n(\mu, \Sigma)$$

Dvourozměrné normální rozdělení

Speciálním případem n-rozměrného normálního rozdělení je dvourozměrné normální rozdělení. Kovarianční matice Σ má v tomto případě tvar:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

Všimněte si, že podmínka nenulového determinantu kovarianční matice ($|\Sigma| \neq 0$) je splněna pro $|\rho| < 1$.

Hustota pravděpodobnosti náhodného vektoru X (X=(X$_1$,X$_2$)^T s dvourozměrným normálním rozdělením je dána vztahem:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}$$

Věta:

Nechť f(x$_1$, x$_2$) je hustota náhodného vektoru **X**=(X$_1$,X$_2$)^T s dvourozměrným normálním rozdělením $N_2(\mu, \Sigma)$, kde μ = (μ$_1$, μ$_2$) je vektor středních hodnot a Σ je kovarianční matice náhodného vektoru **X.** Pak náhodné veličiny X$_1$ a X$_2$ mají normální rozdělení $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ a $N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Hustoty f_{X_1}, f_{X_2} nezávisí na korelačním koeficientu ρ.

Průvodce studiem

Pro zájemce o hlubší pochopení studované látky uvádíme důkaz předcházející věty:

Hustota pravděpodobnosti náhodného vektoru X (X=(X$_1$,X$_2$)^T s dvourozměrným normálním rozdělením je dána vztahem:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}$$

Marginální hustoty nalezneme takto:

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)dx_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]} dx_2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]} dx_2$$

Zavedeme si substituci: $y = \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)$

Pak: $dy = \frac{1}{\sigma_2} dx_2$

$$f_{X_1}(x_1) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_2 \cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)y + y^2\right]} dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)y + y^2\right]} dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)y + y^2 + \rho^2\cdot\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - \rho^2\cdot\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right]} dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\rho^2\cdot\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)y + y^2 + (1-\rho^2)\cdot\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right]} dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\rho^2\cdot\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)y + y^2\right]} \cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[(1-\rho^2)\cdot\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right]} dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[y-\rho\cdot\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\right]^2} \cdot dy =$$

Nyní zavedeme substituci: $z = y - \rho\left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)$

Pak: $dz = dy$

$$f_{X_1}(x_1) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[y-\rho\cdot\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\right]^2} \cdot dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}z^2} \cdot dz$$

A nakonec zavedeme ještě jednu substituci: $t = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} z$

Pak: $dt = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} dz$

$$f_{X_1}(x_1) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}z^2} \cdot dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{1-\rho^2} \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2} \cdot dt = \frac{1}{2\pi\sigma_1} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} \cdot dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2} \cdot \sqrt{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2}$$

Vidíme, že jde o hustotu náhodné veličiny s normálním rozdělením $N(\mu_1, \sigma_1^2)$. Obdobně bychom ukázali, že marginální hustota f_{X_2} náhodné veličiny X_2 odpovídá normálnímu rozdělení $N(\mu_2, \sigma_2^2)$.

Je-li $\rho = 0$, pak:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]} = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2} = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2)$$

a náhodné veličiny X_1, X_2 jsou tedy nezávislé.

Řešený příklad

Nechť náhodný vektor $\underline{X}=(X_1,X_2)^T$ má dvourozměrné normální rozdělení s parametry: $\mu_1 = 2,\ \mu_2 = (-1),\ \sigma_1^2 = 4,\ \sigma_2^2 = 16,\ \rho = (-0{,}8)$. **Stanovte pravděpodobnosti:**

a) $P(1 < X_1 < 4)$

b) $P(3 < X_2 < 6)$

Již výše jsme si ukázali, že náhodné veličiny X_1 a X_2 mají normální rozdělení $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ *a* $N(\mu_2, \sigma_2^2)$.

$X_1 \rightarrow N(2;4) \qquad X_2 \rightarrow N(-1;16)$

ada)

$$\underline{\underline{P(1 < X_1 < 4)}} = F(4) - F(1) = \Phi\left(\frac{4-2}{\sqrt{4}}\right) - \Phi\left(\frac{1-2}{\sqrt{4}}\right) = \Phi(1) - \Phi(-0{,}5) = \Phi(1) - (1 - \Phi(0{,}5$$

$$= 0{,}841 - (1 - 0{,}691) = \underline{\underline{0{,}532}}$$

adb)

$$\underline{\underline{P(3 < X_2 < 6)}} = F(6) - F(3) = \Phi\left(\frac{6-(-1)}{\sqrt{16}}\right) - \Phi\left(\frac{3-(-1)}{\sqrt{16}}\right) = \Phi(1{,}75) - \Phi(1) = 0{,}960 - 0{,}8$$

$$= \underline{\underline{0{,}119}}$$

$$DX = e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{DX}} = e^{2\cdot 2+9}\left(e^9 - 1\right) \underline{\underline{\cong 3{,}6 \cdot 10^9}}$$

Otázky 2.

1. Popište náhodnou veličinu mající Erlangovo rozdělení
2. Popište náhodnou veličinu mající Weibulovo rozdělení
3. V čem spočívá flexibilita Weibullova rozdělení? (užití pro různá období intenzity poruch)
4. Popište náhodnou veličinu mající Logaritmicko – normální rozdělení
5. Popište náhodný vektor mající Vícerozměrné normální rozdělení