ZÁKLADY BAYESOVY INDUKCE

Cíl:

- Metodu maximální věrohodnosti – opakování
- Základy Bayesovy indukce
- Apriorní a aposteriorní rozdělení
- Bayesův bodový a intervalový odhad

Metoda maximální věrohodnosti - opakování

Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení s distribuční funkci $F(x;\Theta)$, kde tvar distribuční funkce je znám a Θ je neznámý parametr. Obecně může distribuční funkce obsahovat více neznámých parametrů, které můžeme označit vektorově jako $\underline{\Theta}$. Problém bodového odhadu nyní spočívá v nalezení statistiky $\hat{\Theta}(X)$, jakožto funkce $X_1, X_2, \ldots, X_n$, která by mohla být použita jako odhad $\underline{\Theta}$. Tato statistika bývá často označována jako **estimátor** a její realizace, řekněme $\hat{\Theta}(x)$, jako odhad. Nechť $f(\underline{x};\underline{\Theta})$ je hustota pravděpodobnosti nebo pravděpodobnostní funkce náhodného výběru $\underline{X}$ $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Definice:

Pokud je hustota pravděpodobnosti nebo pravděpodobnostní funkce $f(\underline{x};\underline{\Theta})$ vyšetřovaná jako funkce $\underline{\Theta}$, nazveme ji **věrohodnostní funkcí** založenou na $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ a označíme ji jako $L(\underline{\Theta};\underline{x})$.

Jestliže $X_1, X_2, \ldots, X_n$ je množina nezávislých náhodných pozorování z rozdělení s hustotami $f_i(x_i;\underline{\Theta})$, $i = 1, \ldots, n$, pak věrohodnostní funkce může být získána jako:

$$L(\underline{\Theta}; x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1;\underline{\Theta}) \cdot \ldots \cdot f_n(x_n;\underline{\Theta})$$

Definice:

Nechť $L(\underline{\Theta};\underline{X})$ je věrohodnostní funkce založena na náhodném výběru $\underline{X}$ **=** *(X₁, X₂, …, Xₙ)* z rozdělení $F(\underline{x};\underline{\Theta})$, kde $\underline{\boldsymbol{\Theta}}$ je vektor neznámých parametrů, který nabývá hodnot z nějakého parametrického prostoru **Θ**. Pokud $\hat{\Theta} = \hat{\Theta}(\underline{X})$ je náhodný vektor, který maximalizuje $L(\underline{\Theta};\underline{X})$ vzhledem k $\hat{\Theta} \in \Theta$, potom $\hat{\Theta}(\underline{X})$ budeme nazývat **maximálně věrohodný estimátor** Θ.

Pro konkrétní realizaci náhodného výběru $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ budeme $\hat{\Theta}(\underline{x})$ nazývat jako **maximálně věrohodný odhad Θ**. Pro tento odhad budeme používat zkratku MLE.

Řešený příklad

MLE pro parametr exponenciálního rozdělení

Nechť $\underline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ je náhodný výběr z exponenciálního rozdělení pravděpodobnosti.

Víme, že hustota pravděpodobnosti exponenciální náhodné veličiny má tvar:

$$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}, \qquad x > 0,$$

kde $\lambda>0$ je neznámý parametr.

Věrohodnostní funkce:

$$L(\lambda; \mathrm{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Logaritmická věrohodnostní funkce:

$$L^*(\lambda; \mathrm{x}) = \ln L(\lambda; \mathrm{x}) = \ln\left(\lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i}\right) = \ln(\lambda^n) + \ln\left(e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i}\right) = n \cdot \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Nalezení maxima $L^*(\lambda; \mathrm{x})$:

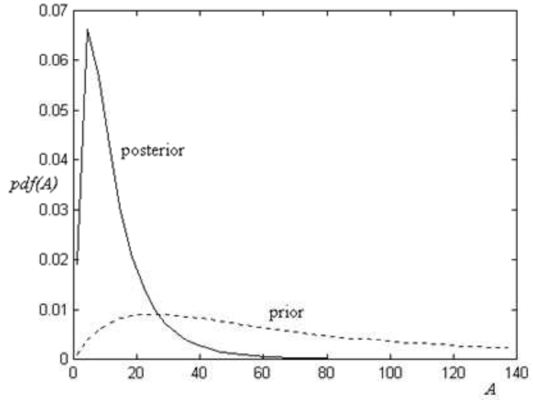
$$\frac{dL^*(\lambda;\mathrm{x})}{d\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{1}{\overline{x}}$$

MLE očekávané hodnoty exponenciálního rozdělení EX, označený jako $\mu = \frac{1}{\lambda}$*, může být odvozen pomocí vlastnosti* ***invariance maximálně věrohodných odhadů****. Tato vlastnost říká [Nguyen H. T., Rogers G. S., 1989], že:*

Pokud $\hat{\Theta}$ *je MLE parametru Θ, pak* $g(\hat{\Theta})$ *je MLE funkce parametru* $g(\Theta)$ *za předpokladu, že* $g(.)$ *je prostá funkce.*

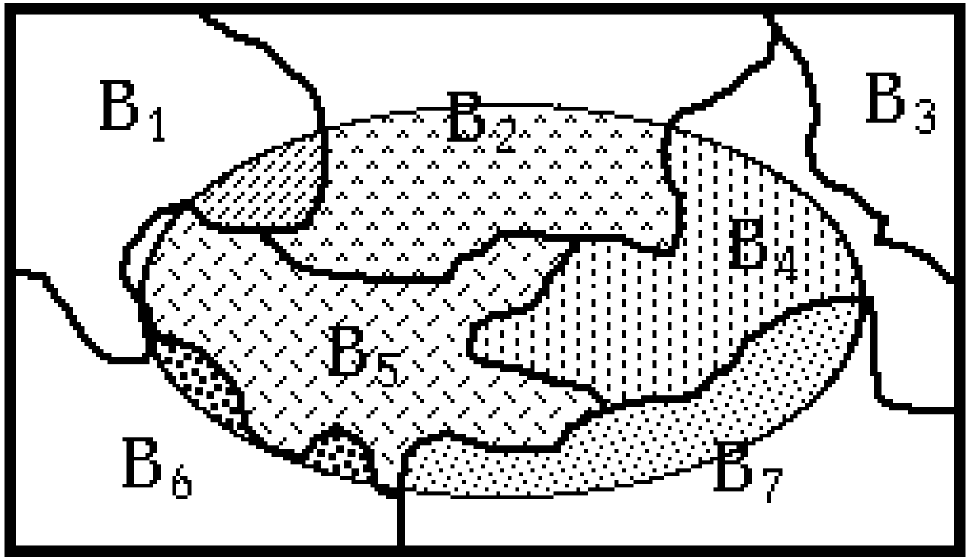
Nyní je jasné, že MLE očekávané hodnoty exponenciálního rozdělení je $\hat{\mu} = \overline{x}$.

Úvod do Bayesovy indukce



Reverend Thomas Bayes v roce 1761 jistě netušil, že jeho teorém najde uplatnění v moderní matematice 21. století

VĚTA BAYESOVA



$$P\{B_k|A\} = \frac{P\{A|B_k\}\,P\{B_k\}}{\sum_{i=1}^{n} P\{A|B_i\}\,P\{B_i\}}$$

$$P\{B_k|A\} = \frac{P\{B_k \cap A\}}{P\{A\}}$$

Tedy srovnej:

$$P\{B_k | A\} = \frac{P\{A | B_k\} P\{B_k\}}{\sum_{i=1}^{n} P\{A | B_i\} P\{B_i\}} \quad \textbf{versus} \quad \pi(\Theta | \underline{x}) = \frac{f(\underline{x}|\Theta) \cdot \pi(\Theta)}{\int_{\Theta} f(\underline{x}|\Theta) \cdot \pi(\Theta) d\Theta} \qquad pro\ \Theta \in \Omega$$

V tomto přístupu se provádí statistická indukce o neznámém parametru podmíněně vzhledem k pozorovaným datům. Aby to bylo možné provést, je nezbytné udělit parametru Θ status náhodné veličiny. Klíčová charakteristika v Bayesově přístupu spočívá v tom, že je nezbytné specifikovat pravděpodobnostní rozdělení Θ ještě před pozorováním náhodného výběru. Toto rozdělení se nazývá **apriorní rozdělení pravděpodobnosti**.

Tedy parametr $\underline{\Theta}$, který je předmětem našeho zájmu, je v Bayesově přístupu vyšetřován jako náhodná veličina. Jde-li o parametr náhodné veličiny *X* s distribuční funkci $F(x;\underline{\Theta})$, pak vždy, když pracujeme s touto funkcí, musíme mít na mysli podmíněnou distribuční funkci $F(x|\underline{\Theta})$.

Apriorní rozdělení

Uvažujme parametr Θ náhodné veličiny X s distribuční funkci $F(x|\Theta)$. Nechť doposud není k dispozici žádné pozorování této náhodné veličiny. Nechť je k dispozici jakási předběžná zkušenost, či apriorní znalost o této populaci nebo jiná informace, která umožní zkonstruovat subjektivní pravděpodobnostní rozdělení pro parametr Θ. Takové rozdělení, které reflektuje nejistotu o hodnotě parametru z hlediska experimentátora ještě před pozorováním aktuálního výběru, se nazývá **apriorní rozdělení** parametru Θ. Dále jej budeme označovat $\pi(\Theta)$.

Úloha najít apriorní rozdělení pro zkoumaný parametr je všeobecně velmi obtížná. V některých případech bývá dokonce velmi výhodné zvolit jako apriorní hustotu takovou funkci, která nemusí být ani integrovatelná, a přesto po implementaci Bayesových metod dává rozumné výsledky (někdy však také vede k nesmyslným výsledkům). Taková hustota bývá označována jako tzv. **nevlastní apriorní hustota**. Bayesovy metody lze použít i v případě, že není dostupná žádná informace o vyšetřovaném parametru. Taková apriorní rozdělení, označována jako **neurčitá**, byla velmi intenzivně studována [Jeffreys, 1961] a jsou základem Bayesových metod vyvinutých autory [Box and Tiao, 1973].

Neexistuje žádný obecný návod, jak by měla být specifikována neurčitá apriorní hustota. Jelikož jsou pod tíhou různých argumentů použity různé definice neurčitých apriorních rozdělení, setkáme se často s různými nevlastními apriorními rozděleními [Zellner, 1977]. Pro účely nalezení neurčitého apriorního rozdělení použijeme jednu z nejpopulárnějších metod, navrženou v [Jeffreys, 1961].

Nechť $f(x|\Theta)$ je hustota pravděpodobnosti nebo pravděpodobnostní funkce pozorované náhodné veličiny X, kde vektor $\underline{\Theta}$ je vektor neznámých parametrů. Za neurčité apriorní rozdělení $\underline{\Theta}$ lze vzít:

$$\pi(\Theta) = \left[|I(\Theta)|\right]^{1/2} = \sqrt{\det I(\Theta)} \, ,$$

Kde $I(\Theta)$ je Fisherova informační matice (regulární rozdělení pro vektorový parametr).

$$I(\Theta) = -E\left(\frac{\partial^2}{\partial\Theta_i \partial\Theta_j} \ln f(X|\Theta)\right) = E\left(\frac{\partial \ln f(X|\Theta)}{\partial\Theta_i} \times \frac{\partial \ln f(X|\Theta)}{\partial\Theta_j}\right) = E(Z_i \times Z_j)$$

Víme, že pro jednoparametrické rozdělení je: $I(\Theta) = E(Z^2)$, kde $Z = \dfrac{\partial \ln f(X|\Theta)}{\partial\Theta}$

Řešený příklad

Uvažujme exponenciální rozdělení s hustotou $f(x|\lambda) = \lambda \cdot e^{-\lambda x},\ x > 0$**, kde** $\lambda > 0$ **je parametr, pro který je nutno zkonstruovat apriorní hustotu. Úkolem je nalézt neurčitou apriorní hustotu pro parametr λ a pro jeho převrácenou hodnotu μ** $\left(\mu = \frac{1}{\lambda}\right)$**.**

$$I(\lambda) = -E\left(\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\ln\left(\lambda \cdot e^{-\lambda x}\right)\right) = -E\left(\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\left[\ln(\lambda) - \lambda x\right]\right) = -E\left(-\frac{1}{\lambda^2}\right) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Odtud vyplývá, že neurčitá (Jeffreysova) apriorní hustota pravděpodobnosti pro λ je nevlastní apriorní hustota, úměrná $\frac{1}{\lambda}\left(=\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)^{1/2}\right)$*:*

$$\pi(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$$

Pokud nás bude zajímat apriorní rozdělení pro převrácenou hodnotu λ, tj. μ, pak Fischerova matice bude:

$$I(\mu) = -E\left(\frac{\partial^2}{\partial\mu^2} ln\left(\frac{1}{\mu}\cdot e^{-\frac{1}{\mu}X}\right)\right) = -E\left(\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}\left[ln\left(\frac{1}{\mu}\right) - \frac{1}{\mu}X\right]\right) =$$

$$= -E\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\left(-\mu\frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{\mu^2}X\right)\right) = -E\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\left(-\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu^2}X\right)\right) = -E\left(\frac{1}{\mu^2} - 2\frac{1}{\mu^3}X\right) =$$

$$= -\frac{1}{\mu^2} + \frac{2}{\mu^3}\cdot EX = -\frac{1}{\mu^2} + \frac{2}{\mu^3}\cdot\mu = \frac{1}{\mu^2}$$

Tedy neurčitá apriorní hustota pro očekávanou hodnotu exponenciálního rozdělení μ je:

$$\pi(\mu) = \left(\frac{1}{\mu^2}\right)^{1/2} = \frac{1}{\mu}$$

Aposteriorní rozdělení

Nechť $\underline{X}$ je náhodný vektor se sdruženou hustotou pravděpodobnosti nebo pravděpodobnostní funkcí $f\left(\underline{x}|\Theta\right)$. Nechť $\pi\left(\underline{\Theta}\right)$ je apriorní rozdělení náhodného vektoru $\underline{\Theta}$. Potom sdružené rozdělení $\underline{X}$ a $\underline{\Theta}$ může být nalezeno jako:

$$h\left(\underline{x},\underline{\Theta}\right) = f\left(\underline{x}|\underline{\Theta}\right)\cdot\pi\left(\underline{\Theta}\right)$$

Za předpokladu, že $\underline{\Theta}$ je spojitý náhodný vektor, marginální rozdělení $\underline{\boldsymbol{X}}$ může být nalezeno jako:

$$g\left(\underline{x}\right) = \int_{\Theta} h\left(\underline{x};\underline{\Theta}\right) d\underline{\Theta}$$

A konečně podmíněné rozdělení $\underline{\Theta}$ při realizaci $\underline{\mathrm{X}} = \underline{\mathrm{x}}$ je:

$$\pi\left(\underline{\Theta}|\underline{x}\right) = \frac{h\left(\underline{x};\underline{\Theta}\right)}{\mathrm{g}\left(\underline{\mathrm{x}}\right)} \qquad pro\ \Theta \in \Omega$$

Toto pravděpodobnostní rozdělení $\underline{\Theta}$ se nazývá **aposteriorní rozdělení $\underline{\boldsymbol{\Theta}}$**. Toto podmíněné rozdělení parametru při daných datech $\underline{x}$ je takto nazváno zejména proto, že odráží představu experimentátora o zkoumaném parametru poté, co byl pozorován náhodný výběr z příslušné populace. Tedy aposteriorní rozdělení kombinuje předběžnou informaci obsaženou v apriorním rozdělení s informací o $\underline{\Theta}$ (obsaženou v datech – věrohodnostní funkce). Pokud budeme ignorovat konstantu úměrnosti, pak aposteriorní rozdělení může být zapsáno následovně:

$$\pi(\Theta|x) \propto f(x|\Theta) \cdot \pi(\Theta) \qquad pro\ \Theta \in \Omega\ ,$$

kde konstanta úměrnosti k může být nalezena tak, aby byla splněna normovací podmínka aposteriorní hustoty.

Pozn.: $\propto$ *označuje přímou úměrnost, tzn.* $\pi(\Theta|x) \propto f(x|\Theta) \cdot \pi(\Theta)$ *je zkráceným zápisem rovnice:* $\pi(\Theta|x) = k \cdot f(x|\Theta) \cdot \pi(\Theta), \qquad k \in R$

Tedy:

aposteriorní rozdělení $\propto$ (věrohodnostní funkce × apriorní rozdělení)

Pokud aposteriorní rozdělení pravděpodobnosti patří do téže třídy rozdělení jako apriorní rozdělení, potom tuto třídu rozdělení nazýváme **přirozený konjugovaný systém rozdělení** pro rozdělení *X*. To znamená, že pokud apriorní rozdělení je konjugované vzhledem k apriornímu rozdělení, pak pro nalezení aposteriorního rozdělení potřebujeme aktualizovat pouze parametry apriorního rozdělení.

Řešený příklad

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z exponenciálního rozdělení s parametrem λ. Úkolem je nalézt aposteriorní rozdělení pro λ za předpokladu, že apriorní rozdělení je:

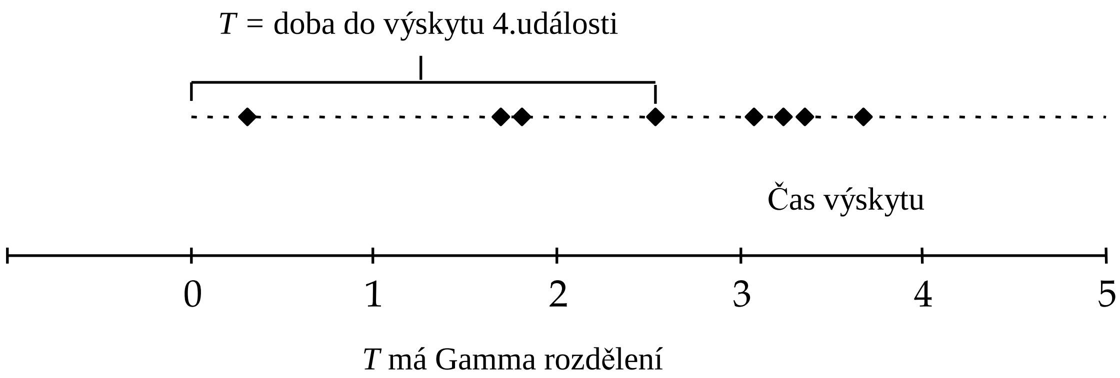
a) $\lambda \to Gamma(a;\mathrm{b})$**, tj.**

$$\pi(\lambda)=\frac{\left(\frac{1}{b}\right)^a}{\Gamma(a)}\cdot\lambda^{a-1}\cdot e^{-\frac{\lambda}{b}} \quad , \quad kde\ \Gamma(a)=\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx, \quad E\lambda=ab$$

b) $\pi(\lambda)=\frac{1}{\lambda}$

Poznámka – opakování Gamma rozdělení: Ga(k,λ)

- Náhodnou veličinu s Gamma rozdělením si můžeme představit jako součet *k* nezávislých exponenciálních náhodných veličin ... pomůcka pro výpočet $E(X)$ a $D(X)$.



Distribuční funkce: $F(t) = P(T_k < t) =$

$$P\left(\sum_{i=1}^{k} X_i < t\right) = 1 - P(N_t < k) = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^j}{j!} \quad = 1 - e^{-\lambda t}\left[\sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^j}{j!}\right]$$

Derivací $F(t)$ dostaneme funkci hustoty pravděpodobnosti:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}\left[\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(\lambda t)^j}{j!}\right] - e^{-\lambda t}\left[\sum_{j=1}^{k-1}\frac{\lambda(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!}\right]$$

$$= \lambda^k e^{-\lambda t}\left[\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\right]; \quad t > 0$$

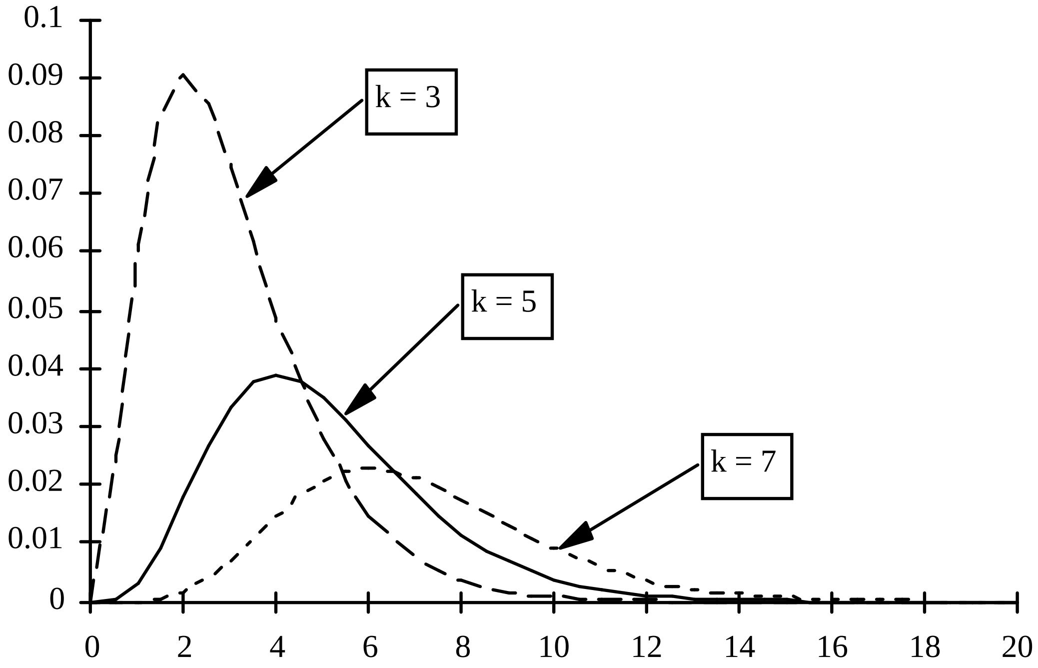
$$T_k = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_k$$

$$X_i \rightarrow E(\lambda)$$

$ET_k = EX_1 + \dots + EX_k = \frac{1}{\lambda} + \dots + \frac{1}{\lambda} = \frac{k}{\lambda}$ ... střední (očekávaná) hodnota

$DT_k = ... = \frac{k}{\lambda^2}$ .... rozptyl T_k

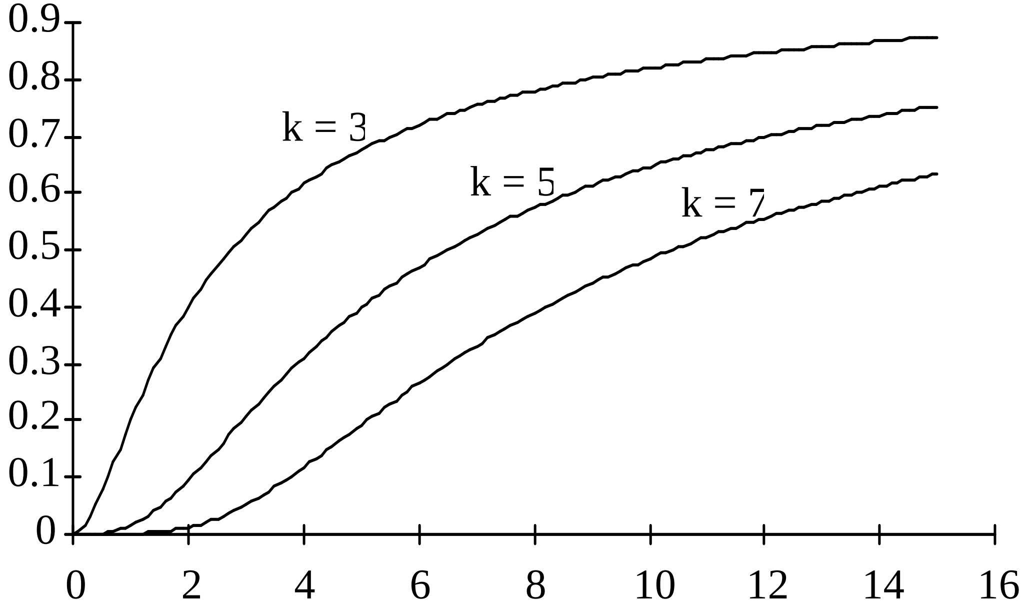
Pokud *k* je celočíselné, toto rozdělení mívá označení jako Erlangovo.



Hustota pravděpodobnosti pro Gamma rozdělení, Ga(k,λ).

Intenzita poruch (hazardní funkce):

$$h(x) = \frac{\mathrm{f(x)}}{\mathrm{1\text{-}F(x)}} = \frac{\lambda}{(k-1)!\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{(k-1-j)!(\lambda x)^j}}$$



Intenzita poruch Gamma rozdělení, λ=1, Ga(k,1).

Ga(k,λ)

$$f(x)=\frac{\lambda^k}{\Gamma(k)}\cdot x^{k-1}e^{-\lambda.x}., \quad \lambda>0$$

reparametrizace: $a=k, \quad b=\frac{1}{\lambda}$

$$f(x)=\frac{\left(\frac{1}{b}\right)^a}{\Gamma(a)}\cdot x^{a-1}e^{-\frac{x}{b}}., \quad \lambda>0$$

je rozdělení $\longrightarrow$ ***Ga(a,b)*** $\quad a\in R$

A parametr λ bude v pozici náhodné veličiny, tedy jeho apriorní rozdělení bude:

$$f(\lambda)=\frac{\left(\frac{1}{b}\right)^a}{\Gamma(a)}\cdot \lambda^{a-1}e^{-\frac{\lambda}{b}}\propto \lambda^{a-1}e^{-\frac{\lambda}{b}} \quad \lambda>0$$

A budeme ho označovat nejčastěji jako: $\pi(\lambda)\propto \lambda^{a-1}e^{-\frac{\lambda}{b}} \quad \lambda>0$

Řešený příklad

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z exponenciálního rozdělení s parametrem λ. Úkolem je nalézt aposteriorní rozdělení pro λ za předpokladu, že apriorní rozdělení je:

a) $\lambda \to Gamma(a;\mathrm{b})$**, tj.**

$$\pi(\lambda) = \frac{\left(\frac{1}{b}\right)^a}{\Gamma(a)} \cdot \lambda^{a-1} \cdot e^{-\frac{\lambda}{b}} \quad , \quad kde\ \Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx, \quad E\lambda = ab$$

b) $$\pi(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$$

****

Víme, že hustota pravděpodobnosti exponenciální náhodné veličiny má tvar:

$$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}, \qquad x > 0,$$

kde $\lambda>0$ je neznámý parametr.

Zkonstruujeme nejdříve věrohodnostní funkci:

$$L(\lambda;\mathrm{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i} = \lambda^n e^{-\lambda n \bar{x}},$$

kde $\bar{x}$ *je výběrový průměr.*

ada) *Pokud ignorujeme konstantu úměrnosti, apriorní rozdělení*

$$\pi(\lambda) \propto \lambda^{a-1} \cdot e^{-\frac{\lambda}{b}}$$

aposteriorní rozdělení $\propto$ *(apriorní rozdělení × věrohodnostní funkce):*

$$\pi(\lambda) \propto \lambda^{a-1} \cdot e^{-\frac{\lambda}{b}} \cdot \lambda^n e^{-\lambda n \bar{x}} \Rightarrow \pi(\lambda|x) \propto \lambda^{n+a-1} \cdot e^{-\lambda\left(\frac{1}{b}+n\bar{x}\right)}$$

Lze snadno rozeznat, že se jedná o Gamma rozdělení:

$$(\lambda|x) \to Gamma\left(n+a;\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{nb}\bar{\mathrm{x}}+1}\right)$$

Protože apriorní i aposteriorní rozdělení patří do téže třídy rozdělení, je evidentní, že tato třída (Gamma rozdělení) slouží jako přirozený konjugovaný systém pro parametr exponenciálního rozdělení.

adb) *nevlastní apriorní rozdělení:* $\pi(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda}$

aposteriorní rozdělení $\propto \dfrac{1}{\lambda} \cdot \lambda^n e^{-\lambda n \bar{x}} \Rightarrow \pi(\lambda | x) \propto \lambda^{n-1} \cdot e^{-\lambda n \bar{x}}$,

takže:

$$(\lambda | x) \to Gamma\left(n; \frac{1}{n\bar{x}} \right)$$

a skutečnost, že apriorní rozdělení je nevlastní, zde nehraje významnou roli.

Řešený příklad, námět na projekt

Nechť náhodná veličina *X* má Poissonovo rozdělení $Po(\lambda)$**.**

$$f(k,\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \qquad\qquad k = 0,1,\ldots, \quad \lambda > 0$$

$$EX = DX = \lambda$$

$$\underline{\underline{I(\lambda)}} = E\left\{\left(\frac{\partial \ln f(k,\lambda)}{\partial \lambda}\right)^2\right\} = E\left\{\frac{(k-\lambda)^2}{\lambda^2}\right\} = \frac{1}{\lambda^2} \cdot E\left\{(k-\lambda)^2\right\} = \frac{1}{\lambda^2} \cdot DX = \frac{1}{\lambda^2} \cdot \lambda = \underline{\underline{\frac{1}{\lambda}}}$$

Jeffreysova apriorní hustota je:

$$\pi(\lambda) = \left[\left|I(\lambda)\right|\right]^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \lambda^{-\frac{1}{2}}$$

Pro nějaký náhodný výběr X_1, …, X_n aplikuji známou věrohodnostní funkci pro Poissonovo rozdělení:

$$f\left(\underline{x},\lambda\right)=P\left(X_1=x_1,X_2=x_2,\ldots,X_n=x_n\right)=\prod_{i=1}^{n}P\left(X_i=x_i\right)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}\cdot e^{-\lambda}=$$

$$=e^{-n\cdot\lambda}\cdot\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{\prod_{i=1}^{n}x_i!}$$

a aposteriorní hustota tedy bude:

$$f\left(\underline{x},\lambda\right)\times\pi\left(\lambda\right)=e^{-n\cdot\lambda}\cdot\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{\prod_{i=1}^{n}x_i!}\times\lambda^{-\frac{1}{2}}\propto e^{-n\cdot\lambda}.\lambda^{-\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{n}x_i}=\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i+\frac{1}{2}-1}.e^{-\frac{\lambda}{1/n}}$$

což je Gamma rozdělení: $Ga(\sum_{1}^{n}x_i+\frac{1}{2},\frac{1}{n})$

Námět na projekt: Pokud apriorní je Gamma, jaká je aposteriorní hustota? Tvoří Gamma rozdělení přirozený konjugovaný systém? Porovnejte obě aposteriorní hustoty. Vypočtěte střední hodnoty a rozptyly.

Konjugované apriorní hustoty vybraných jednoparametrických modelů:

Neznámý parametr: θ, ostatní parametry jsou známé

Model	Rozdělení x	Konjug. rozdělení θ
Normální	$\mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$	$\mathcal{N}(\mu, \xi^2)$
Normální	$\mathcal{N}(\mu, \frac{1}{\theta})$	$\mathcal{G}(\alpha, \beta)$
Poissonovo	$\mathcal{P}(\theta)$	$\mathcal{G}(\alpha, \beta)$
Gama	$\mathcal{G}(\nu, \theta)$	$\mathcal{G}(\alpha, \beta)$
Binomické	$\mathcal{B}i(n, \theta)$	$\mathcal{B}e(\alpha, \beta)$

Bayesovy estimátory

Nechť $\pi(\Theta|x)$ je aposteriorní rozdělení pro parametr $\underline{\Theta}$, založeno na pozorováních $\underline{x}$ náhodného vektoru $\underline{X}$, který má distribuční funkci $F(\underline{x}|\underline{\Theta})$. Cílem bude získat bodové a intervalové odhady pro $\underline{\Theta}$. Nejdříve uvažujme problém bodového odhadu.

Bayesův bodový odhad

Aposteriorní rozdělení v Bayesově přístupu hraje podobnou roli jako věrohodnostní funkce – výraz něčeho, s čím přichází veškerá informace o parametru $\underline{\Theta}$. Na rozdíl od věrohodnostní funkce však aposteriorní rozdělení obsahuje informaci jak v podobě apriorního rozdělení, tak i ve výběru samotném. Bodový odhad parametru může být získán obdobně jako v definici maximálně věrohodného estimátoru. Jestliže MLE pro parametr $\underline{\Theta}$ byl dán nalezením modu věrohodnostní funkce, pak obdobně můžeme definovat **zobecněný maximálně věrohodný estimátor** jako modus aposteriorního rozdělení $\pi(\Theta|x)$.

Odhad $\underline{\Theta}$ získaný touto metodou bude posuzován jako **odhad aposteriorním modem**.

Poznámka: aposteriorní rozdělení je pravděpodobnostním rozdělením, zatímco věrohodnostní funkce, jako funkce $\underline{\Theta}$**,** nemusí nutně být pravděpodobnostním rozdělením. Modus aposteriorního rozdělení je speciální mírou polohy tohoto rozdělení. Lze zavést i další míry polohy aposteriorního rozdělení, které mohou odhadnout $\underline{\Theta}$ stejně dobře.
Tyto odhady budou posuzovány jako: **odhad aposteriorní očekávanou hodnotou**, resp. **odhad aposteriorním mediánem**. Z teoretického hlediska mohou být tyto alternativní odhady v jistém smyslu optimální, pokud je zadána jistá **ztrátová funkce odhadu**. Například aposteriorní očekávaná hodnota, resp. aposteriorní medián jsou Bayesovy odhady parametru $\underline{\Theta}$ za předpokladu **kvadratické ztrátové funkce**

$$L\left(\underline{\Theta};\underline{\hat{\Theta}}\right) = \left(\underline{\Theta} - \underline{\hat{\Theta}}\right)^2 ,$$

resp. ztrátové funkce ve tvaru: $L\left(\underline{\Theta};\underline{\hat{\Theta}}\right) = \left|\underline{\Theta} - \underline{\hat{\Theta}}\right|$, kde $\underline{\hat{\Theta}}$ je odhad parametru $\underline{\Theta}$.

Abychom krátce popsali myšlenku Bayesových estimátorů, uvažujme obecnou ztrátovou funkci

$$L\left(\underline{\Theta};\underline{\hat{\Theta}}\right),$$

pro níž existuje očekávaná hodnota vzhledem k aposteriornímu rozdělení

$$\pi\left(\Theta|x\right)$$

Definice:

Potom estimátor $\underline{\hat{\Theta}}$ nazveme **Bayesovým estimátorem** $\underline{\boldsymbol{\Theta}}$ při uvažované ztrátové funkci $L\left(\underline{\Theta};\underline{\hat{\Theta}}\right)$, pokud $\underline{\hat{\Theta}}$ minimalizuje **aposteriorní očekávanou ztrátu**

$$E\left[L\left(\underline{\Theta};\underline{\hat{\Theta}}\right)\middle|x\right]=\int_{\Theta}L\left(\underline{\Theta};\underline{\hat{\Theta}}\right)\cdot\pi\left(\underline{\Theta}|x\right)d\underline{\Theta}$$

Např. nechť kvadratická ztrátová funkce je: $L\left(\underline{\Theta};\underline{\hat{\Theta}}\right)=\left(\underline{\Theta}-\underline{\hat{\Theta}}\right)^2$

Pro kvadratickou ztrátovou funkci vyjádříme aposteriorní očekávanou ztrátu jako:

$$E\left[L\left(\underline{\Theta};\underline{\hat{\Theta}}\right)\,|x\right]=E\left[\left(\underline{\Theta}-\underline{\hat{\Theta}}\right)^2|x\right]=E\left[\left(\left(\underline{\Theta}-E\left(\underline{\Theta}|x\right)\right)+\left(E\left(\underline{\Theta}|x\right)-\underline{\hat{\Theta}}\right)\right)^2|x\right]=$$

$$D\left(\underline{\Theta}|x\right)+\left[\mathrm{E}\left(\underline{\Theta}|x\right)-\underline{\hat{\Theta}}\right]^2\geq D\left(\underline{\Theta}|x\right)$$

Z poslední nerovnosti dále plyne, že pokud $\underline{\hat{\Theta}}=E\left(\underline{\Theta}|x\right)$, což je aposteriorní očekávaná hodnota $\underline{\Theta}$**,** pak aposteriorní očekávaná ztráta je rovna $D\left(\underline{\Theta}|x\right)$. Nyní je jasné, že aposteriorní očekávaná hodnota, jakožto odhad $\underline{\Theta}$, minimalizuje aposteriorní očekávanou ztrátu.

Jinými slovy – **aposteriorní očekávaná hodnota je Bayesův estimátor při uvažované kvadratické ztrátové funkci.**

Řešený příklad

Uvažujme aposteriorní rozdělení dané $(\lambda|x) \to Gamma\left(n+a;\dfrac{\mathrm{b}}{\mathrm{nb\overline{x}}+1}\right)$ **pro parametr λ exponenciálního rozdělení. Z vlastnosti Gamma rozdělení bezprostředně plyne, že**

$$\hat{\lambda} = \frac{b(n+\mathrm{a})}{1+\mathrm{nb\overline{x}}}$$

je odhadem λ pomocí aposteriorní očekávané hodnoty. Všimněme si obzvláště, že pokud $a \to 0$ **a** $b \to \infty$**, tedy při nevlastním apriorním rozdělení, Bayesův esimátor (při uvažované kvadratické ztrátové funkci) se redukuje na**

$\hat{\lambda} = \dfrac{1}{\overline{x}}$**, což je totéž jako MLE pro λ.**

Nalezněte zobecněný maximálně věrohodný odhad λ (zobecněný MLE), založený na výběru $X_1, \ldots, X_n$ **a při předpokladu apriorního rozdělení Gamma G(a;b).**

Je samozřejmé, že modus aposteriorního rozdělení bude ve stejném bodě jako maximum logaritmu aposteriorního rozdělení

$$g(\lambda) = (n + a - 1)\cdot \ln(\lambda) - \frac{\lambda(1 + \mathrm{nb}\overline{\mathrm{x}})}{b},$$

Protože až na konstantu nezávislou na λ je g(λ) totéž jako logaritmus aposteriorního rozdělení. Derivováním dostaneme:

$$\frac{dg}{d\lambda} = \frac{n + \mathrm{a} - 1}{\lambda} - \frac{1 + \mathrm{nb}\overline{\mathrm{x}}}{b} \quad a \quad \frac{d^2 g}{d\lambda^2} = -\frac{n + \mathrm{a} - 1}{\lambda^2}$$

Jelikož druhá derivace je záporná pro všechna n+a > 1, maximum g(λ) může být nalezeno z 1. rovnice, kterou položíme rovnu 0. Odtud zobecněný MLE parametru λ je

$$\hat{\lambda} = \frac{b\cdot(n + \mathrm{a} - 1)}{1 + \mathrm{nb}\overline{\mathrm{x}}}$$ *což porovnáme s předchozím výsledkem:* $$\hat{\lambda} = \frac{b(n + \mathrm{a})}{1 + \mathrm{nb}\overline{\mathrm{x}}}$$

Bayesův intervalový odhad

Předpokládejme, že pro $\underline{\Theta}$ je nyní požadována konfidenční množina. Připomeňme, že na rozdíl od klasického přístupu, $\underline{\Theta}$ je nyní náhodný vektor. Proto, na rozdíl od klasického přístupu, který vydává pravděpodobnostní výpověď o podmnožině základního prostoru s cílem nalezení konfidenční oblasti, zde provedeme pravděpodobnostní výpovědi týkající se přímo podmnožin parametrického prostoru. Konfidenční množiny, které získáme pomocí Bayesova přístupu, mají přímou pravděpodobnostní interpretaci. Bayesův analog vůči konfidenčnímu intervalu je přisuzován **Bayesově konfidenčním intervalu** nebo také pravděpodobnostnímu intervalu.

Definice:

Nechť C(x) je podmnožina parametrického prostoru **Ω** taková, že

$$P\left(\underline{\Theta} \in C(x) \middle| x\right) = \int_{C(x)} \pi\left(\Theta \middle| x\right) d\Theta = \alpha$$

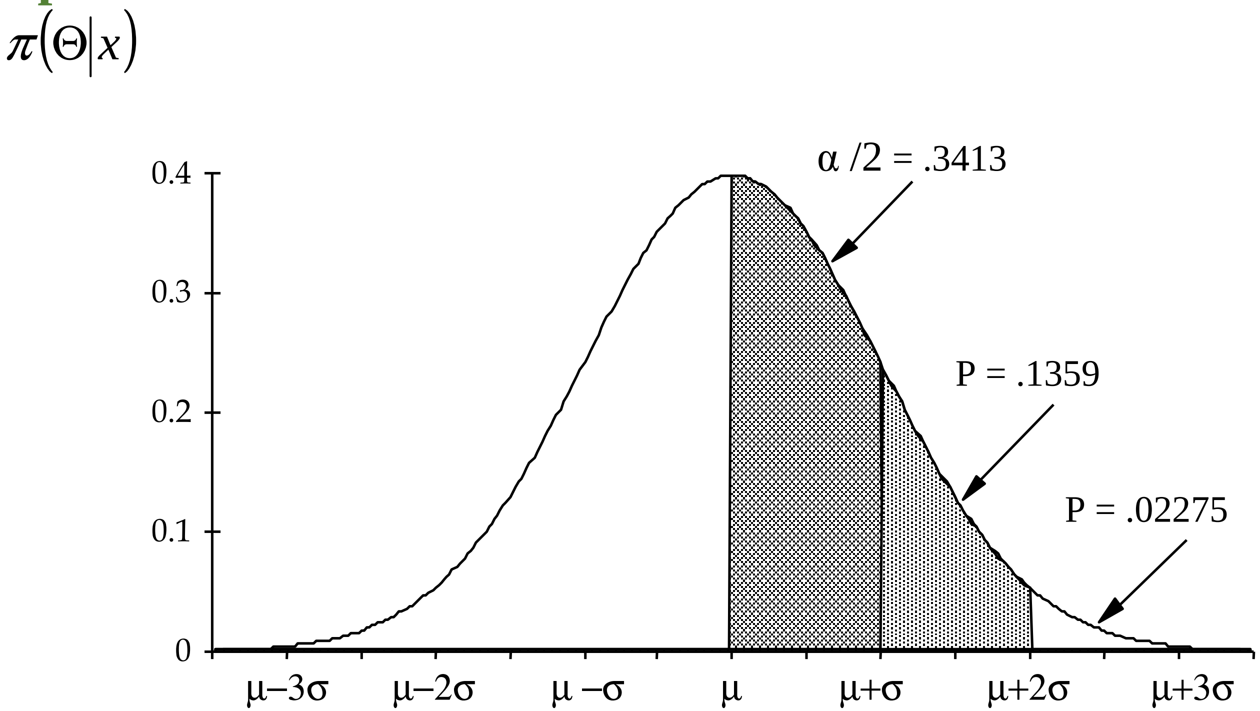
Potom **C(x)** se nazývá **100α % ní pravdivostní množina pro $\underline{\Theta}$**, kde $\pi\left(\Theta \middle| x\right)$ je aposteriorní rozdělení pro $\underline{\Theta}$.

HPD pravdivostní množina (Highest Posterior Density): HPD(α)= $\mathbf{C_{min}}$(x)
$\mathbf{C_{min}}$(x) = min C(x) **{**tj. C(x) se specifikací α, mající minimální objem**}**

Poznámka:
Pokud aposteriorní rozdělení je symetrické (např. normální), **HPD(α)** lze snadno najít. V jiných situacích mohou být nalezeny pomocí numerických metod.

Příklad: symetrické aposteriorní rozdělení

HPD(68%)
$= \langle \mu - \sigma, \mu + \sigma \rangle$



Námět na projekt:
Nechť $\sigma^2=1$.
$X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z N(μ,1). Zvolte apriorní hustotu pro μ jako $f(\mu) = N(0,100)$.
Vypočtěte aposteriorní hustotu pro μ (bez normovací konstanty), její střední hodnotu a rozptyl, formulujte 100α % Bayesův konfidenční interval C(μ) s minimálním objemem, tj. najděte HPD(α).

****

Σ Shrnutí

Parametr Θ, který je předmětem našeho zájmu, je v Bayesově přístupu vyšetřován jako náhodná veličina. Jde-li o parametr náhodné veličiny X s distribuční funkci F(x; Θ), pak vždy, když pracujeme s touto funkcí, musíme mít na mysli podmíněnou distribuční funkci $F(x|\Theta)$.

Rozdělení, které reflektuje nejistotu o hodnotě parametru z hlediska experimentátora ještě před pozorováním aktuálního výběru, se nazývá **apriorní rozdělení** parametru Θ. Označujeme jej $\pi(\Theta)$.

Nechť $f(x|\underline{\Theta})$ je hustota pravděpodobnosti nebo pravděpodobnostní funkce pozorované náhodné veličiny X, kde vektor $\underline{\Theta}$ je vektor neznámých parametrů. Za neurčité apriorní rozdělení $\underline{\Theta}$ lze vzít:

$$\pi(\Theta) = \left[\left|I(\Theta)\right|\right]^{1/2},$$

kde $I(\Theta)$ **je Fischerova informační matice** (definována pomocí druhé derivace logaritmické věrohodnostní funkce).

$$I(\Theta) = -E\left(\frac{\partial^2}{\partial\Theta_i \partial\Theta_j} \ln f(X|\Theta)\right) = E\left(\frac{\partial \ln f(X|\Theta)}{\partial\Theta_i} \times \frac{\partial \ln f(X|\Theta)}{\partial\Theta_j}\right) = E(Z_i \times Z_j)$$

Sdružené rozdělení $\underline{X}$ a $\underline{\Theta}$ může být nalezeno jako:

$$h(x,\Theta) = f\left(x\middle|\Theta\right)\cdot\pi(\Theta)$$

Za předpokladu, že $\underline{\Theta}$ je absolutně spojitý náhodný vektor, marginální rozdělení $\underline{X}$ může být nalezeno jako:

$$g(x) = \int_{\Theta} h(x;\Theta)\,d\Theta$$

A konečně podmíněné rozdělení $\underline{\Theta}$ při realizaci $\underline{X} = \underline{x}$ je:

$$\pi(\Theta|x) = \frac{h(x;\Theta)}{\mathrm{g(x)}} \qquad pro\ \Theta \in \Omega$$

Toto pravděpodobnostní rozdělení $\underline{\Theta}$ se nazývá **aposteriorní rozdělení $\underline{\Theta}$**. Toto podmíněné rozdělení parametru při daných datech x je takto nazváno zejména proto, že odráží představu experimentátora o zkoumaném parametru poté, co byl pozorován náhodný výběr z příslušné populace.

aposteriorní rozdělení $\propto$ (apriorní rozdělení × věrohodnostní funkce)

Pokud aposteriorní rozdělení pravděpodobnosti patří do téže třídy rozdělení jako apriorní rozdělení, potom tuto třídu rozdělení nazýváme **přirozený konjugovaný systém rozdělení** pro rozdělení X.

Abychom krátce popsali myšlenku Bayesových estimátorů, uvažujme obecnou ztrátovou funkci $L(\underline{\Theta};\hat{\underline{\Theta}})$, pro níž existuje očekávaná hodnota vzhledem k aposteriornímu rozdělení $\pi(\Theta|x)$.

Potom estimátor $\hat{\underline{\Theta}}$ nazveme **Bayesovým estimátorem $\underline{\Theta}$** při uvažované ztrátové funkci $L(\underline{\Theta};\hat{\underline{\Theta}})$, pokud $\hat{\underline{\Theta}}$ minimalizuje **aposteriorní očekávanou ztrátu**

$$E\left[L(\underline{\Theta};\hat{\underline{\Theta}})\middle|x\right]=\int_{\Theta} L(\underline{\Theta};\hat{\underline{\Theta}})\cdot\pi(\Theta|x)\,d\Theta$$

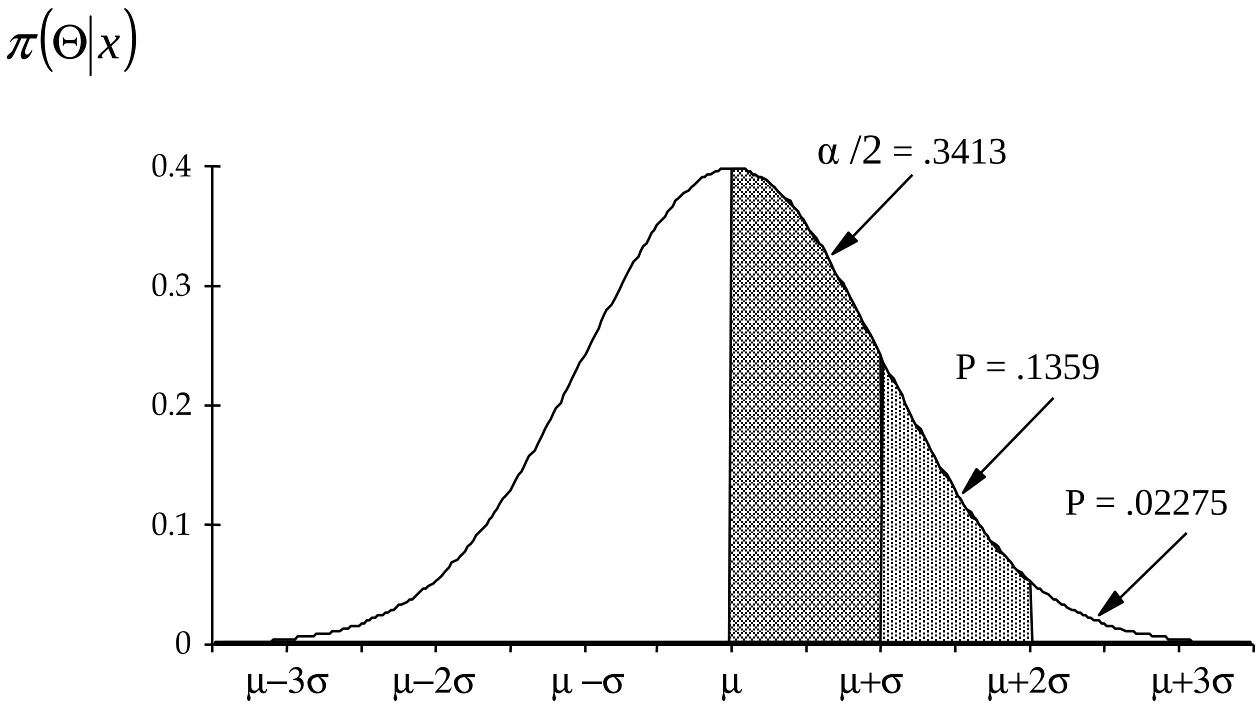
Konfidenční množiny, které získáme pomocí Bayesova přístupu, mají přímou pravděpodobnostní interpretaci. Bayesův analog vůči konfidenčnímu intervalu je přisuzován **Bayesově konfidenčnímu intervalu** nebo také pravděpodobnostnímu intervalu.

Definice:
Nechť C(x) je podmnožina parametrického prostoru **Ω** taková,že

$$P\left(\Theta \in C(x) \middle| x\right) = \int_{C(x)} \pi\left(\Theta \middle| x\right) d\Theta = \alpha$$

Potom C(x) se nazývá 100α % ní pravdivostní množina pro <u>Θ</u>, kde $\pi\left(\Theta \middle| x\right)$ je aposteriorní rozdělení pro <u>Θ</u>.

HPD(68%)
= $\langle \mu - \sigma, \mu + \sigma \rangle$



Náhodné procesy

Definice:

Náhodný proces je systém náhodných veličin $\{X_t\}_{t\in T}$, které jsou definovány na stejné množině elementárních jevů Ω (základní prostor). Množina *T* se nazývá **časová množina.**

Množina *T* může být libovolná. Často má *T* význam času; potom je to nějaká podmnožina reálných čísel **R** nebo $T = \langle 0, \infty)$ nebo $T = \langle a, b \rangle$ nebo $T = N$. Má-li *T* význam času, nazýváme někdy $\{X_t\}_{t\in T}$ místo náhodným procesem **časovou řadou**.

Příklady:

1. Náhodná veličina X_t popisuje počet impulsů (hovorů) registrovaných na telefonní ústředně (operátorem) za časový interval $\langle 0, t \rangle$. Pak $\{X_t\}_{t\in T}$ je náhodný proces a $T = \langle 0, +\infty)$.
2. $\{X_t\}_{t\in T}$ **,** $T = \langle 0, +\infty)$ je fluktuační složka napětí na výstupu rezistoru v elektrickém obvodu v čase $t \geq 0$. Fluktuace nastává v důsledku náhodného pohybu elektronů. Tento náhodný proces se nazývá ***termický šum***.
3. Uvažujme nějakou populaci (hmyzu, zvířat, lidí). Její velikost kolísá náhodně vzhledem k náhodnosti narození, úmrtí, emigrace, či imigrace. $\{X_t\}_{t\in T}$ označuje velikost populace v čase $t \in T$

Definice:

Prvky základního prostoru Ω, tj. hodnoty, kterých může NP nabýt, nazýváme **stavy** tohoto NP.

Náhodné procesy …budeme užívat značení buď'to $\{X_t\}_{t\in T}$ nebo $\{X(t): t\in T\}$

Náhodným (stochastickým) procesem nazveme zobrazení, které každé hodnotě $t \in T$ přiřadí náhodnou veličinu $X(t)$. Proměnná t má ve většině případů význam času (odtud časová množina).

Realizací náhodného procesu rozumíme konkrétní pozorování náhodného procesu, tj. již nenáhodnou funkci, a značíme ji $x(t)$. Tuto funkci nazýváme **trajektorií** NP $\{X(t): t\in T\}$.

Dle povahy množiny T rozlišujeme:

- **náhodné procesy se spojitým časem** (náhodné funkce) – T je reálný interval,
- **náhodné procesy s diskrétním časem** (náhodné posloupnosti) – T je reálná diskrétní množina.

Prvky základního prostoru Ω, tj. hodnoty, kterých může NP nabýt, jsme nazvali **stavy** tohoto NP. Hodnota $X(t)$ tedy vyjadřuje náhodný stav pozorovaného procesu v čase t.

Dle povahy základního prostoru Ω (stavů $X(t)$) rozlišujeme:

- **náhodné procesy s diskrétními stavy** $X(t)$ – množina Ω je spočetná, tj. proces může nabývat jen konečně nebo spočetně mnoha hodnot.
- **náhodné procesy se spojitými stavy** $X(t)$ **-** Ω je nějaký interval v **R**

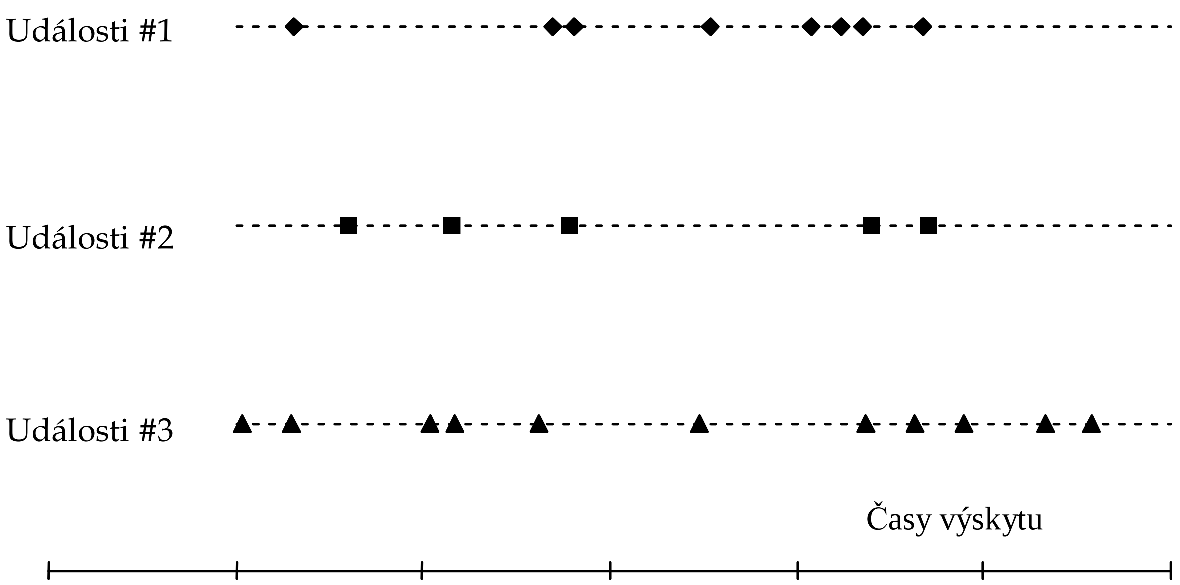
Náhodný proces $\{X(t): t \geq 0\}$ se spojitým časem a s diskrétními stavy 0,1,2,… obvykle nazýváme **čítací proces**, protože zaznamenává počet nějakých událostí v čase. Hodnota $X(t)$ pak představuje počet daných událostí v intervalu $\langle 0,t\rangle$ a vzdálenosti jednotlivých okamžiků událostí od počátku $t = 0$ jsou náhodné veličiny.
Příkladem čítacího procesu je **Poissonův proces.**

Než ho zadefinujeme, připomeneme znalosti ze Statistiky I:

Poissonova NV

Příklady:

- počet studentů vstupujících do budovy VŠB TUO od 8:00 do 9:00 hod.
- počet pacientů ošetřených během dopoledních ordinačních hodin
- počet mikrodefektů v zadaném vzorku materiálu, atd.

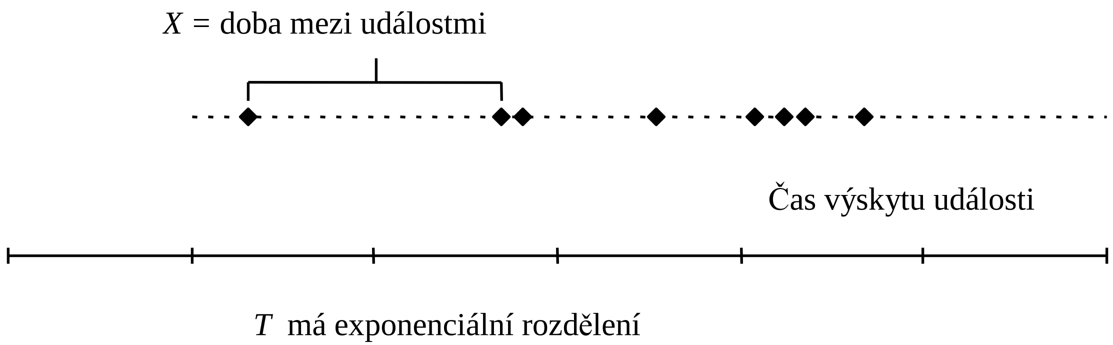


$$P(X = k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!};\ 0 \le k < \infty$$

$$E(X) = \lambda t \quad D(x) = \lambda t$$

NV s exponenciálním rozdělením

$$X \rightarrow E(\lambda)$$



$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}; x \geq 0$$

$$E(\mathrm{X}) = \int_{t=0}^{\infty} \lambda t \, e^{-\lambda t} \, dt = \frac{1}{\lambda}$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \ldots = \frac{1}{\lambda^2}$$

Poissonův proces

Přibližme si nyní **Poissonův proces** jako příklad čítacího procesu, který se velmi často vyskytuje v aplikacích (například v teorii hromadné obsluhy).

Nechť $\{X(t) : t \geq 0\}$ je čítací proces. Nechť navíc platí:

$$X(0) = 0,$$

délky intervalů mezi výskyty sledované události jsou nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & pro\ x > 0, \\ 0 & pro\ x \leq 0, \end{cases}$$

kde $\lambda > 0$ je parametr (tzv. intenzita homogenního Poissonova procesu).

Pak tento proces nazveme **homogenním Poissonovým procesem**, přičemž $X(t)$ má Poissonovo rozdělení s parametrem λt, tedy

$$P(X(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 0, 1, \ldots .$$

Střední počet výskytů události v intervalu $\langle 0,t \rangle$ je roven λt. Parametr λ tedy udává střední počet výskytů sledované události za jednotku času.

Protože intervaly mezi jednotlivými výskyty událostí jsou nezávislé, znalost okamžiků prvních n výskytů neovlivňuje předpověď doby čekání na další výskyt události. Také skutečnost, že sledovaná událost už po určitou dobu nenastala, nemění pravděpodobnost jejího výskytu v dalším intervalu.

Příkladem Poissonova procesu by mohl být proces $\{X(t): t \geq 0\}$, kde $X(t)$ udává počet poruch nějakého zařízení v časovém intervalu $\langle 0,t \rangle$.

Řešený příklad

Zdroj záření vysílá v průměru 1 impuls za 2 sekundy, přičemž impulsy tvoří Poissonův proces. Jaká je pravděpodobnost, že v každém z pěti intervalů o délce 5 sekund

(0s, 5s), (5s, 10s),…, (20s, 25s)

budou registrovány nejméně 4 impulsy?

Protože $EX(t) = \lambda t$ *, spočteme z rovnice* $1 = \lambda \cdot 2$ *parametr* $\lambda = 0{,}5$*. Pro t = 5 pak získáme* $EX(5) = 0{,}5 \cdot 5 = 2{,}5$*. Pro pravděpodobnost, že během jednoho intervalu dojde k registraci alespoň 4 impulsů, platí*

$$P(X(5) \geq 4) = \sum_{k=4}^{\infty} \frac{2{,}5^k}{k!} e^{-2{,}5}$$

a hledaná pravděpodobnost pro všech pět intervalů je tak rovna hodnotě

$$\left[\sum_{k=4}^{\infty} \frac{2{,}5^k}{k!} e^{-2{,}5} \right]^5 .$$

Markovův proces

Nebude-li uvedeno jinak, $\{X(t): t \geq 0\}$, popř. $\{X_t, t \geq 0\}$, bude označovat náhodný proces se spojitým časem a diskrétní množinou stavů $I = \{0,1,2,\ldots\}$ (stavy jsou pro jednoduchost označeny celými nezápornými čísly).

Proces $\{X(t): t \geq 0\}$ nazveme **Markovovým procesem**, splňuje-li tzv. markovskou vlastnost:

pro libovolná $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t \leq \tau$ a $i_1, \ldots, i_n, i, j \in I$ platí:

$$P\left(X(\tau) = j \middle| X(t) = i, X(t_n) = i_n, \ldots, X(t_1) = i_1\right) = P\left(X(\tau) = j \middle| X(t) = i\right).$$

Pravděpodobnost na pravé straně uvedené rovnosti nazýváme **pravděpodobnost přechodu**.

Je-li tedy t přítomný okamžik, potom chování Markova procesu v libovolném budoucím okamžiku $\tau \geq t$ závisí pouze na přítomném stavu a nikoli na stavech předchozích.

Markovův proces se nazývá **homogenní**, pokud pravděpodobnost přechodu z předchozího výkladu nezávisí na hodnotách *t* a *τ*, ale pouze na jejich rozdílu. Používáme pak značení

$$p_{ij}(\tau - t) \overset{ozn}{=} P\big(X(\tau) = j \,|\, X(t) = i\big).$$

Tedy v homogenním procesu závisejí pravděpodobnosti přechodu pouze na rozdílu časových okamžiků a jsou navíc invariantní vůči posunutí v čase. Pro $\tau = t$ pak dostaneme

$$p_{ij}(0) = \begin{cases} 0 & pro\ i \neq j, \\ 1 & pro\ i = j. \end{cases}$$

Pro popis rozdělení Markovova procesu v čase *t* budeme v dalším textu užívat

$$p_i(t) \overset{ozn}{=} P\big(X(t) = i\big),\ i = 0,1,2,\ldots\ .$$

Při pravděpodobnostech $p_i(0)$, $i = 0,1,2,\ldots$, se mluví o **počátečním rozdělení** Markovova procesu.

Při velkém t je obvykle Markovův proces stabilizovaný a řídí se **stacionárním rozdělením** se stacionárními pravděpodobnostmi

$$\pi_i = \lim_{t\to\infty} p_i(t),\ i = 0,1,2,\dots\ .$$

Jednoduchým příkladem homogenního Markovova procesu by mohl být homogenní Poissonův proces z předchozího příkladu. Počáteční rozdělení by mělo tvar $p_0(0)=1$, $p_n(0)=0$ pro n = 1,2,… a pro pravděpodobnosti přechodu by platilo $p_{ij}(h)=\frac{\lambda h^{j-i}}{(j-i)!}e^{-\lambda h}$ pro $i, j \in N \cup \{0\}, j \geq i$.

V homogenním Markovově procesu platí

- $p_{ij}(t_1+t_2)=\sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}(t_1)p_{kj}(t_2)$, $t_1,t_2 \geq 0,\ i, j = 0,1,2,\dots$,
- $p_i(t)=\sum_{j=0}^{\infty} p_j(0)p_{ji}(t)$, $t \geq 0,\ i = 0,1,2,\dots$.

První rovnice se nazývá **Chapmanova-Kolmogorovova rovnice**.