MARKOVOVY PROCESY JAKO APARÁT PRO ŘEŠENÍ SPOLEHLIVOSTI VÍCESTAVOVÝCH SYSTÉMŮ

Náhodné procesy

Náhodným (stochastickým) procesem nazveme zobrazení, které každé hodnotě $t \in T$ přiřadí náhodnou veličinu $X(t)$. Proměnná t má ve většině případů význam času.

Realizací náhodného procesu rozumíme konkrétní pozorování náhodného procesu, tj. již nenáhodnou funkci, a značíme ji $x(t)$.

Dle povahy množiny T rozlišujeme:

- **náhodné procesy se spojitým časem** (náhodné funkce) – T je reálný interval,
- **náhodné procesy s diskrétním časem** (náhodné posloupnosti) – T je reálná diskrétní množina.

Hodnota $X(t)$ vyjadřuje stav pozorovaného objektu v čase t.

Dle povahy náhodné veličiny $X(t)$ rozlišujeme:

- **náhodné procesy se spojitými stavy -** $X(t)$ je spojitá,
- **náhodné procesy s diskrétními stavy -** $X(t)$ je diskrétní.

Náhodný proces $\{X(t): t \geq 0\}$ se spojitým časem a s diskrétními stavy $0,1,2,\ldots$ obvykle nazýváme **čítací proces**, protože zaznamenává počet nějakých událostí v čase. Hodnota $X(t)$ pak představuje počet daných událostí v intervalu $\langle 0,t \rangle$ a vzdálenosti jednotlivých okamžiků událostí od počátku $t = 0$ jsou náhodné veličiny.

Markovovy řetězce

Obdobou Markovových procesů v diskrétním čase jsou Markovovy řetězce.

Nechť I označuje množinu $\{0,1,2,...\}$. Náhodná posloupnost $\{X_n : n = 0,1,2,...\}$ se nazývá **Markovův řetězec (**nebo **posloupnost)**, pokud platí

$$P\left(X_{n+1} = j \middle| X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0\right) = P\left(X_{n+1} = j \middle| X_n = i\right)$$

pro libovolná $i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, i, j \in I$ (Markovská vlastnost).

Pokud pravděpodobnosti přechodu nezávisejí na *n*, nazveme Markovův řetězec **homogenním** a píšeme

$$p_{ij} = P\left(X_{n+1} = j \middle| X_n = i\right).$$

Pravděpodobnostmi přechodu vyšších řádů v homogenním Markovově řetězci rozumíme

$$p_{ij}(k) = P\left(X_{n+k} = j \middle| X_n = i\right),\quad k = 0,1,2,\ldots\,.$$

V homogenním Markovově řetězci platí (tzv. Chapmanovy-Kolmogorovovy rovnice)

$$p_{ij}(k_1 + k_2) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}(k_1) p_{kj}(k_2).$$

Tedy pravděpodobnost, že systém přešel ze stavu i do nějakého mezistavu k přes r přechodů a z mezistavu k se dostal do koncového stavu j v $(n - r)$ přechodech mezi stavy, je vyjádřena vztahem

$$p_{ij}(n) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}(r) p_{kj}(n-r).$$

Speciálně pro $n = 0$ platí

$$p_{kj}(0) = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & jinak \end{cases},$$

a pro $n = 1$ platí

$$p_{ij}(1) = p_{ij}.$$

Mějme Markovův řetězec s m možnými stavy. Matici $\mathbf{P} \overset{def}{=} \{p_{ij}\}_{i,j=1}^{m}$ nazveme **maticí pravděpodobností přechodu**.

Vlastnosti matice **P**:

- **P** je čtvercová matice $m \times m$,
- $p_{ij} \in \langle 0,1 \rangle$,
- součet prvků v každém řádku matice je jednotkový.

Protože (při $r = 1$) platí

$$p_{ij}(2) = \sum_k p_{ik} p_{kj} = \quad (i, j)\text{-tý prvek matice } \mathbf{P}^2,$$

$$p_{ij}(3) = \sum_k p_{ik} p_{kj}(2) = (i, j)\text{-tý prvek matice } \mathbf{P} \times \mathbf{P}^2 = \mathbf{P}^3,$$

objasnili jsme následující tvrzení: V homogenním Markovově řetězci platí

$$\mathbf{P}(\mathbf{k}) = \mathbf{P}^{\mathbf{k}}, \quad k = 0,1,2,\ldots .$$

Je přitom zvykem dodefinovat: $\mathbf{P}(0) = \mathbf{P}^0 = \mathbf{I}$

Matici $\mathbf{P}^n$ můžeme spočítat řadou způsobů:

- Postupným umocňováním.
- Pomocí tzv. Perronova vzorce využívajícího znalosti vlastních čísel **P**.

Definice:

Nechť S označuje množinu stavů $\{s_1, s_2, s_{3,} \ldots\}$. Nechť $\{X_n : n = 0,1,2,\ldots\}$ je Markovův řetězec (nebo posloupnost). Rozdělení náhodné veličiny X_n nazveme **rozdělením Markovovy posloupnosti** v čase n a označujeme

$P(X_n = s_i) = p_i(n) \qquad \mathbf{p(n)} = (p_1(n), p_2(n), \ldots)$

Rozdělení Markovovy posloupnosti v čase 0 nazveme **počátečním rozdělením**,

$\mathbf{p(0)} = (p_1(0), p_2(0), \ldots)$

$P(X_0 = s_i) = p_i(0)$

Pozn:

K popisu MŘ tedy potřebujeme znát (abychom mohli určit konečněrozměrné rozdělení vektoru $\{X_1, \ldots X_n\}$):

$\mathbf{p(0)} = (p_1(0), p_2(0), \ldots)$ a pravděpodobnosti přechodu:

$\mathbf{P} \equiv \{p_{jk}\}$. Všimněme si, že $\sum_j p_{ij} = 1 \ \ \forall i \in \mathbb{N}$.

Příklady:

(ii) Uvažujme částici, která se pohybuje v celočíselných bodech na přímce tak, že se v každém kroku posune o jednotku vpravo s pravděpodobností $p \in (0,1)$ nebo vlevo s pravděpodobností $q = 1 - p$, a to nezávisle na předchozích krocích. Toto je MŘ a je určen pravděpodobnostmi přechodu $p_{ij} = p$ pro $j = i+1$ a $p_{ij} = q$ pro $j = i-1$, $p_{ij} = 0$ jinak (pro všechna $n \in$ N). Tento proces se nazývá *náhodná procházka.*

(iii) Uvažujme obdobný proces jako v bodě (ii). Částice se ale tentokrát pohybuje pouze mezi body 0 a $\alpha \in N$. Pokud dosáhne těchto bodů, již je neopustí. Tento MŘ se nazývá *náhodná procházka s pohlcujícími stěnami* a její pravděpodobnosti přechodu jsou:

$p_{ij} = p$ **pro** $i = 1, 2, \ldots \alpha - 1$ **a** $j = i + 1$

$p_{ij} = q$ **pro** $i = 1, 2, \ldots \alpha - 1$ **a** $j = i - 1$

$p_{00} = p_{\alpha\alpha} = 1$

$p_{ij} = 0$ **ve všech ostatních případech**

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Matice pravděpodobností přechodu pro (iii):

Příklad 2:

(iv) Pozměníme nyní chování částice z příkladu (iii). Částice, která se vydá z bodu 1 do bodu 0, bude vrácena do bodu 1, a částice, která se vydá z bodu α-1 do bodu α, bude vrácena do bodu α-1. Dostáváme *náhodnou procházku s odrážejícími stěnami*:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Definice: Stav s_j Markovova řetězce je **dosažitelný** ze stavu s_i, pokud je nenulová pravděpodobnost, že se Markovova posloupnost během konečného počtu kroků dostane ze stavu s_i do stavu s_j.

Věta: Stav s_j Markovova řetězce je dosažitelný ze stavu s_i,
pokud pro nějaké $n \in N \cup \{0\}$ platí

$$p_{ij}(n) > 0 .$$

Dk: Triviální, sporem.

Je-li každý stav řetězce dosažitelný z každého stavu, nazveme řetězec **neredukovatelným (příp. nerozložitelný, irreducible)**.
Stavy s_i a s_j **spolu komunikují** (nebo jsou navzájem dosažitelné), pokud s_i je dosažitelný z s_j a naopak s_j je dosažitelný z s_i. Píšeme $s_i \leftrightarrow s_i$ ve smyslu ekvivalence s těmito vlastnostmi (**Věta 5.4.3**.):

1. $s_i \leftrightarrow s_i$ pro každý stav s_i,
2. $(s_i \leftrightarrow s_j) \Rightarrow (s_j \leftrightarrow s_i)$,

3. $\left[\left(s_i \leftrightarrow s_j\right)\ a\ \left(s_j \leftrightarrow s_k\right)\right] \Rightarrow \left(s_i \leftrightarrow s_k\right)$

Důkaz. Nechť $n_1, n_2, n_3, n_4 \in$ N takové, že $p_{ij}(n_1) > 0$, $p_{ji}(n_2) > 0$, $p_{jk}(n_3) > 0$ a $p_{kj}(n_4) > 0$. Tato čísla podle předchozí věty existují. Pak

$$p_{ik}\left(n_1 + n_3\right) = \sum_{s_m \in S} p_{im}\left(n_1\right) p_{mk}\left(n_3\right) \geq p_{ij}\left(n_1\right) p_{jk}\left(n_3\right) \succ 0$$

Obdobně se ukáže, $p_{ki}\left(n_2 + n_4\right) \succ 0$, což stačí k důkazu, že $s_i \leftrightarrow s_k$

Definice: Nechť $C \subset S$

(i) Množina stavů C se nazývá ***stochasticky uzavřená***, jestliže $\boldsymbol{p_{ij}}$ **= 0** pro každý $s_i \in C$ a každý $s_j \notin C$,

(ii) Uzavřená množina C se nazývá *nerozložitelná*, jestliže $s_i \leftrightarrow s_j$ pro každé dva stavy $s_i, s_j \in C$,

(iii) ***MŘ*** se nazývá ***nerozložitelný***, jestliže množina jeho stavů S je stochasticky uzavřená a nerozložitelná

(iv) Jestliže C je nerozložitelná množina stavů a každá větší množina C_1:

$$C_1 \, (C_1 \subset S, C_1 \supset C, C_1 \neq C)$$

již není nerozložitelná, budeme C nazývat ***třídou*** *(souslednosti)* stavů daného MŘ.

Poznámka:
Třída souslednosti pro daný MŘ je tedy **maximální** množina stavů MŘ splňujících podmínku nerozložitelnosti.

Příklad: MŔ je zadán maticí pravděpodobnosti přechodu:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Třídy souslednosti:
$C_1 = \{s_1, s_2, s_3\}$ a $C_2 = \{ s_4, s_5\}$

Příklad:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0.2 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}$$

Množina $C = \{s_1, s_2,s_3\}$ je třída souslednosti.
Množina $A=\{s_4\}$ není třída souslednosti, protože není uzavřená. ($p_{43} > 0$)

Příklad: Náhodná procházka s pohlcujícími stěnami:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Dvě třídy souslednosti: množiny $C_1 = \{0\}$ $C_2 = \{\alpha\}$. Množina $A = \{1,2, \ldots, \alpha-1\}$ není třída souslednosti, protože není uzavřená.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Náhodná procházka s odrážejícími stěnami má jedinou třídu souslednosti rovnou množině všech stavů:
$\{1,2, \ldots, \alpha-1\}$

Podstatné (popř. rekurentní**) a nepodstatné (**přechodné, transientní**) stavy MŘ**

5.5.1 Definice. Stav s_i MŘ se nazývá **podstatný**, jestliže existuje třída souslednosti C taková, $s_i \in C$. V opačném případě se s_i nazývá nepodstatný.

5.5.2 Věta. Každý podstatný stav leží přesně v jedné třídě souslednosti.

Důkaz: Podle definice leží každý podstatný stav v nějaké třídě. Předpokládejme, že stav s leží ve dvou třídách C_1 a C_2. Podle Věty 5.4.3 platí pro každý stav $s_1 \in C_1$ a pro každý stav $s_2 \in C_2$:

$$\left[(s_1 \leftrightarrow s) \; a \; (s \leftrightarrow s_2)\right] \Rightarrow (s_1 \leftrightarrow s_2)$$

$$\left[(s_2 \leftrightarrow s) \; a \; (s \leftrightarrow s_1)\right] \Rightarrow (s_2 \leftrightarrow s_1)$$

Tedy $s_1 \leftrightarrow s_2$, a protože s_1 byl libovolný stav z C_1, platí $s_2 \in C_1$. Protože s_2 byl libovolný stav z C_2, platí $C_2 \subseteq C_1$. Konečně každá třída musí být uzavřená, platí tedy $C_2 = C_1$. Tedy s leží v jediné třídě $C = C_1 = C_2$.

Množina všech stavů MŘ se tedy rozpadá na navzájem disjunktní třídy souslednosti, které obsahují podstatné stavy, a na nejvýše jednu množinu nepodstatných stavů (obvykle označujeme A)

5.5.4 Věta. Nechť množina S všech stavů MŘ je konečná $\Rightarrow$ z každého stavu je dosažitelný nějaký podstatný stav.

Důkaz. Indukcí podle počtu stavů. Nechť $S = \{s_1\}$. Pak je zřejmě tento stav podstatný a je dosažitelný sám ze sebe. Budeme dále předpokládat, že pokud je počet stavů menší nebo roven $n \in \mathrm{N}$, potom je z každého stavu dosažitelný podstatný stav. Nechť má MŘ $n+1$ stavů. Jestliže nějaký stav $s_0 \in S$ je podstatný, pak z něho jsou dosažitelné všechny (podstatné) stavy příslušné třídy. Jestliže je stav s_0 nepodstatný, pak existuje stav s_1 takový, že

$$s_0 \to s_1,$$

ale s_0 není dosažitelný z s_1.

(Kdyby $s_0 \to s_1$ implikovalo $s_1 \to s_0$, pak by s_0 ležel v nějaké třídě podstatných stavů.)

Nechť S' je množina všech stavů dosažitelných ze stavu s_1. Těchto stavů je nejvýše n, protože $s_0 \notin S'$. Od chvíle, kdy se MŘ dostal do stavu s_1, se bude pohybovat pouze uvnitř stavů z S'. Podle indukčního kroku musí existovat cesta z s_1 do nějakého podstatného stavu v S'. Tím je důkaz dokončen.

5.5.5 Věta. Nechť je MŘ v čase n v podstatném stavu $s \in C$. Potom s pravděpodobností 1 nabývá dále už pouze stavy z této třídy C.

Důkaz. Indukcí podle počtu kroků: Pro každý stav $s_i \in C$ a každý stav $s_j \notin C$ platí $p_{ij} = 0$, tedy v následujícím kroku zůstává MŘ ve třídě C. Nechť MŘ zůstane v této třídě po n kroků. Po tomto n-tém kroku je tedy ve stavu $s_k \in C$. Protože $p_{kj} = 0$ pro každý stav $s_j \notin C$, bude MŘ ve třídě C i po (n+1)-ním kroku.

Klasifikace stavů Markovova řetězce

5.6.2 Nechť je MŘ na počátku ve stavu s_i. Potom pravděpodobnost, že tento MŘ bude po n krocích opět ve stavu s_i, je rovna $p_{ii}(n)$, a pravděpodobnost, že bude po n krocích v jiném stavu s_j, je rovna $p_{ij}(n)$. Označme $q_{ii}(n)$, resp $q_{ij}(n)$, pravděpodobnost, že tento MŘ přejde během n kroků ze stavu s_i opět do stavu s_i, resp. do stavu s_j, přičemž procházel pouze jinými stavy než s_i, resp. s_j. Počet kroků do „**prvního návratu**“ do stavu s_i je náhodná veličina, kterou označíme T_i. Jestliže je s_i podstatný stav potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_{ii}(n) = 1$$

a tedy $q_{ii}(n)$ je rozdělení náhodné veličiny T_i. Na rozdíl od toho $p_{ii}(n)$ není nikdy rozdělení pravděpodobnosti, může totiž být i

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) = +\infty.$$

Označíme dále μ_i střední hodnotu náhodné veličiny T_i, $\mu_i = ET_i = \sum_{n=1}^{\infty} n q_{ii}(n)$. tedy

Definice:

Podstatný stav s_i se nazývá **nenulový**, jestliže $\mu_i = ET_i \prec +\infty$ a **nulový**, jestliže $\mu_i = +\infty$

Definice

Podstatný stav s_i se nazývá **periodický**, pokud existuje přirozené číslo λ > 1 takové, že $p_{ii}(n) = 0$ pro všechna $n \in N$, která nejsou dělitelná číslem λ. Největší číslo λ s touto vlastností se nazývá **perioda** stavu s_i. Jestliže takové číslo neexistuje, je stav ne**periodický**.

5.6.5 Věta (i) Stav s_i je nepodstatný ⇔

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) \prec +\infty$$

V tomto případě platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ji}(n) \prec +\infty$$

pro každý stav $s_j \in S$

(ii) Stav s_i je podstatný nulový $\Leftrightarrow$ když $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) = +\infty$

avšak

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}(n) = 0$$

V tomto případě

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ji}(n) = +\infty$$

a dále $$\lim_{n\to\infty} p_{ji}(n) = 0$$

pro každý $s_j \in S$

(iii) Je-li stav s_i podstatný nenulový neperiodický, potom

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}(n) = \frac{1}{\mu_i}$$

Důkaz: Dupač, Dupačová: *Markovovy procesy*, Skriptum MFF UK

Definice:

Stav s_i nazveme **absorbující (absorpční)**, pokud již MŘ (po vstoupení do tohoto stavu) v tomto stavu zůstane až do konce, tj. $p_{ii} = 1$. Absorbující stav je ekvivalentní (ve výše uvedeném smyslu) pouze sám se sebou a je a je jediným prvkem nějaké třídy souslednosti $C = \{s_i\}$.

Definice:

Podstatný nenulový neperiodický stav se nazývá **ergodický**.

5.6.8 Věta. Je-li stav s_i dosažitelný ze stavu s_j a je-li také stav s_j dosažitelný ze stavu s_i $\Rightarrow$ oba stavy jsou téhož typu

DK - níže

(Tím, že dva stavy jsou stejného typu, rozumíme, že jsou buď oba podstatné nebo oba nepodstatné, oba nulové nebo oba nenulové, pokud je jeden z nich periodický, pak je periodický i ten druhý, a to se stejnou periodou, a (což plyne z předchozího) buď jsou oba ergodické nebo není ergodický ani jeden.)

Z této věty ihned vyplývá:
Věta 5.6.9 Odtud vyplývá **věta o solidaritě**:
Ve třídě souslednosti jsou všechny stavy téhož typu.

Důkaz V.5.6.8:
Z předpokladů věty plyne, že existují n, $m \in$ N takové, že $p_{ij}(m) = \beta \succ 0$ a $p_{ji}(n) = \alpha \succ 0$.
Pro libovolné $k \in$ N nyní platí

$$p_{jj}(k+m+n) \geq p_{ji}(n).p_{ii}(k).p_{ij}(m) = \alpha.\beta.p_{ii}(k)$$

a také

$$p_{ii}(k+m+n) \geq p_{ij}(m).p_{jj}(k).p_{ji}(n) = \alpha.\beta.p_{jj}(k)$$

Je-li nyní

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{jj}(k) \prec +\infty$$, pak z první nerovnosti vyplývá $$\sum_{k=1}^{\infty} p_{ii}(k) \prec +\infty$$

Je-li tedy s_j přechodný, pak je také s_i přechodný (viz Věta 5.6.5). Opačná implikace plyne z druhé nerovnosti.

Pro podstatné stavy podobně…, s rovností místo nerovnosti, atd.

5.6.10 Věta.
V MŘ s konečně mnoha stavy neexistují nulové (podstatné) stavy a není možné, aby všechny stavy byly nepodstatné.

Důkaz. Druhá část věty již byla dokázána ve Větě 5.5.4. První část dokážeme sporem. Nechť $s_k \in S$ je nulový stav. Označme C množinu všech stavů dosažitelných ze stavu s_k. Podle definice 5.4.4 je C třídou. Podle Věty 5.5.5 se můžeme na C dívat jako na samostatný MŘ (jestliže se MŘ dostane do C, potom C obsahuje všechny stavy, které MŘ v budoucnu může nabýt). Označme $\mathbf{P}^C$ matici pravděpodobnosti přechodu pro MŘ – třídu C. Je jasné, že

$$\sum_{s_i \in C} p_{ji}^C = 1$$ a pro každé $n \in$ N také $$\sum_{s_i \in C} p_{ji}^C(n) = 1$$

oba vztahy platí pro každý $s_j \in C$.
Platí tedy

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{s_i \in C} p_{ji}^C(n) = 1$$ pro každé $s_j \in C$, tedy i pro s_k: $$\lim_{n\to\infty} \sum_{s_i \in C} p_{ki}^C(n) = 1$$

Protože je s_k nulový stav, platí podle Věty 5.6.5

$$\lim_{n\to\infty} p_{ik}^C(n) = 0$$

pro každý stav $s_i \in C$. Protože C obsahuje konečný počet stavů, plyne odtud

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{s_i\in C} p_{ik}^C(n) = \sum_{s_i\in C} \lim_{n\to\infty} p_{ik}^C(n) = 0.,$$

což platí pro všechny sloupce matice $\mathbf{P}^C$ neboť všechny stavy jsou nulové. Tedy

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{s_i\in C} p_{ik}^C(n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{s_k\in C} \sum_{s_i\in C} p_{ik}^C(n) = 0 \geq \lim_{n\to\infty} \sum_{s_i\in C} p_{ki}^C(n) = 1, \mathit{spor}$$

neboť

$$\sum_{s_k\in C} \sum_{s_i\in C} p_{ik}^C(n) \geq \sum_{s_i\in C} p_{ki}^C(n).$$

Příklady:

Příklad 1.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Náhodná procházka s odrážejícími stěnami má jedinou třídu stavů rovnou množině všech stavů:
$\{1,2, \ldots, \alpha - 1\}$
V této třídě jsou všechny stavy stejného typu (Věta o solidaritě). Stačí tedy popsat jeden stav. Podle Věty 5.5.4 budou tyto stavy podstatné. Podle Věty 5.6.10 budou nenulové.
Protože například stav s=1 může nastat ve dvou po sobě následujících krocích ($p_{11} > 0$), je tento stav neperiodický, a tedy všechny stavy jsou neperiodické. Náhodná procházka s odrážejícími stěnami má tedy jednu třídu ergodických stavů.

Ještě další příklady…viz dokument **Příklady: Klasifikace stavů**

Stacionární a finální pravděpodobnosti

MŘ začíná v nějakém libovolném stavu $s \in S$. Při studiu dalšího vývoje nás bude zvláště zajímat, co můžeme říct o jeho stavech po uplynutí velmi dlouhé doby, tj po velkém počtu kroků. Ve fyzikálním smyslu se ptáme na asymptotickou stabilitu systému, chceme tedy najít limitní pevné rozdělení pravděpodobnosti stavů systému, které by platilo bez ohledu na počáteční stav.

5.7.2 **Definice.** Rozdělení $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3 ....)$ pravděpodobnosti MŘ se nazývá ***stacionární***, jestliže je splněna následující podmínka: jestliže má MŘ rozdělení **p** v čase t = n, pak má stejné rozdělení pro všechny časy $t \geq n$. (Často mluvíme o ***stacionárních pravděpodobnostech***.)

Věta 5.7.3: Rozdělení **p** (jako řádek) MŘ s maticí pravděpodobností přechodu **P** je stacionární

$$\Leftrightarrow \mathbf{p} \bullet \mathbf{P} = \mathbf{p}$$

Důkaz: jednoduchý, stačí podle definice rozepsat $p_i(t+1)$ při znalosti $p_i(t)$

$$p_i(t+1) = \sum_{s_j \in S} p_j(t).p_{ji}$$

5.7.4 Věta. Nechť s_i je nepodstatný stav nebo podstatný nulový stav
$\Rightarrow$ pro každé stacionární rozdělení platí $p_i = 0$

Důkaz. Jestliže je s_i nepodstatný nebo podstatný nulový stav, platí
$\lim_{n\to\infty} p_i(n) = 0.$

5.7.5 Věta. Nechť $\mathbf{p}^{(1)}$ a $\mathbf{p}^{(2)}$ jsou dvě stacionární rozdělení téhož MŘ. Potom také
$\mathbf{p} = \alpha\, \mathbf{p}^{(1)} + (1 - \alpha)\, \mathbf{p}^{(2)}$
je stacionární rozdělení pro každé $\alpha \in (0,1)$

Důkaz. Podle V 5.7.3
$\mathbf{p} \bullet \mathbf{P} = (\alpha\, \mathbf{p}^{(1)} + (1 - \alpha)\, \mathbf{p}^{(2)}) \,.\, \mathbf{P} = \alpha\, \mathbf{p}^{(1)} \,.\, \mathbf{P} + (1 - \alpha)\, \mathbf{p}^{(2)} \,.\, \mathbf{P} = \alpha\, \mathbf{p}^{(1)} + (1 - \alpha)\, \mathbf{p}^{(2)} = \mathbf{p}$

5.7.6. Věta. Nechť MŘ má jedinou třídu podstatných stavů, a nechť je tato třída ergodická.
Potom pro tento MŘ existuje **právě jedno stacionární rozdělení pravděpodobnosti**.
Důkaz: … Dupač, Dupačová, MFF

Věta 5.7.7 Na každou třídu podstatných stavů se můžeme dívat jako na samostatný MŘ (Věta 5.5.5). Jestliže je taková třída *C* ergodická, existuje pro ni stacionární rozdělení.

$$q = (q_i)_{s_i \in C}$$

Definujme rozdělení **p** celého MŘ takto

$$p_i = q_i \quad pro \quad s_i \in C \qquad\qquad p_i = 0 \quad pro \quad s_i \notin C$$

Pak **p** je stacionární rozdělení celého MŘ (Věta 5.5.5). Pro každou ergodickou třídu tedy existuje přesně jedno stacionární rozdělení MŘ, které je nulové mimo tuto třídu. Tato rozdělení nazveme *čistá*. Existují-li alespoň dvě čistá stacionární rozdělení, pak má příslušný MŘ podle Věty 5.7.5 nekonečně mnoho stacionárních rozdělení. (Dokonce víc: lze dokázat, že všechna stacionární rozdělení získáme jako konvexní kombinace čistých rozdělení.). Dokázali jsme vlastně následující větu:

5.7.8 Věta. (i) MŘ nemá žádné stacionární rozdělení $\Leftrightarrow$ když nemá žádnou třídu ergodických stavů
(ii) MŘ má jediné stacionární rozdělení pravděpodobnosti $\Leftrightarrow$ když má jedinou třídu ergodických stavů.
(iii) MŘ má nekonečně mnoho stacionárních rozdělení $\Leftrightarrow$ když má alespoň dvě třídy ergodických stavů

Definice:

Rozdělení pravděpodobnosti $\mathbf{p} = (p_i)_{s_i \in S}$ MŘ se nazývá **finální**, jestliže platí:

$$\lim_{n \to \infty} p_i(n) = p_i$$

při libovolném počátečním rozdělení $\mathbf{p(0)} = (p_i(0))_{s_i \in S}$

Finální rozdělení budeme značit: $\boldsymbol{\pi} = (\pi_i)_{s_i \in S}$

5.7.10 Věta. Nechť MŘ má alespoň dvě třídy podstatných stavů $\Rightarrow$ nemá finální rozdělení

Důkaz. (*Sporem*) Za uvedeného předpokladu existují stavy $s_i \in C_1$ a $s_j \in C_2$. Jestliže je počáteční rozdělení rovno $p_i(0)=1$, $p_k(0)=0$ pro pro $k \neq i$, pak $p_l(n)=0$ pro každé $s_l \notin C_1$, speciálně tedy pro každé $s_l \in C_2$, a pro každé $n \in$ N. Tedy

$$\sum_{s_l \in C_2} p_l(n) = 0.$$

pro každé $n \in$ N. Jestliže je počáteční rozdělení rovno $p_j(0)=1$, $p_k(0)=0$ pro $k \neq j$ pak podle Věty 5.5.5 zůstává MŘ již trvale ve třídě C_2 a platí tedy

$$\sum_{s_l \in C_2} p_l(n) = 1.$$

Tím jsme dostali spor. Věta je dokázána.

Věta 5.7.11 Nechť MŘ má finální rozdělení $\Rightarrow$ toto rozdělení je také stacionární.
Bez Dk. [Kannan: An Introduction to Stochastic Processess]

5.7.12. Věta. MŘ má finální rozdělení $\Leftrightarrow$ má **jedinou třídu podstatných stavů a tato je ergodická**.
Důkaz: Důsledek předchozích dvou vět.

5.7.13 Věta. Rozdělení pravděpodobnosti MŘ **π** je finální $\Leftrightarrow$ když

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}^n = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \cdots \\ \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \cdots \\ \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \cdots \\ \cdots & & & \end{bmatrix}.$$

Důkaz. Protože $\mathbf{P}^n = \mathbf{P}(n)$, máme vlastně dokázat, že

$$\pi_i = \lim_{n \to \infty} p_{ji}(n)$$

(pro každý stav $s_j \in S$)

Nechť je počáteční stav $s_0 \in S$ libovolný. Počáteční rozdělení je tedy $q_0(0)=1$, $q_i(0)=0$ pro $S_i \neq S_0$. Rozdělení je finální $\Leftrightarrow$

$$\pi_i = \lim_{n\to\infty} p_i(n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{s_j \in S} p_j(0)\, p_{ji}(n)$$

pro libovolné počáteční rozdělení $\mathbf{p}(0)$. Položíme $\mathbf{p}(0)= \mathbf{q}(0)$. Potom

$$\sum_{s_j \in S} p_j(0)\, p_{ji}(n) = q_0(0)\, p_{0i}(n)$$

Dokázali jsme tedy, že π bude finální $\Leftrightarrow$

$\pi_i = \lim_{n\to\infty} p_{ji}(n)$ pro každý stav $s_j \in S$, c.b.d., neboť stav s_0 zvolen libovolně.

Diskuse k hledání stacionárního rozdělení:

Máme-li najít stacionární (finální) rozdělení MŘ, máme nyní k dispozici dva možné postupy. Vždy se omezíme na jednu třídu ergodických stavů. Pro ni existuje právě jedno stacionární rozdělení, které je pro ni také současně finálním. Buďto můžeme postupovat podle Věty 5.7.3, nebo podle Věty 5.7.13. V prvním případě dostáváme stacionární rozdělení jako řešení soustavy lineárních rovnic, v druhém jako řádek v limitní matici.
Příklady: …

Závěr:
Zatím víme, jak se budou z dlouhodobého hlediska chovat ergodické stavy. (Věty 5.7.8 a 5.7.12) a také nepodstatné a nulové stavy (Věta 5.7.4). Vůbec jsme zatím nevyšetřovali periodické stavy, pro které také existuje jakýsi postup, jak popsat „průměrné„ chování během jedné periody po velmi dlouhé době.

Ještě další příklady**…**viz dokument

Příklady: Stacionární a finální pravděpodobnosti