Příklady: Klasifikace stavů

Příklad 5.6.11

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Náhodná procházka s odrážejícími stěnami má jedinou třídu souslednosti stavů rovnou množině všech stavů: $\{1,2,\ldots,\alpha-1\}$
V této třídě jsou všechny stavy stejného typu (Věta o solidaritě). Stačí tedy popsat jeden stav. Podle Věty 5.5.4 budou tyto stavy podstatné. Podle Věty 5.6.10 budou nenulové.

Protože například stav s=1 může nastat ve dvou po sobě následujících krocích ($p_{11} > 0$), je tento stav neperiodický, a tedy všechny stavy jsou neperiodické. Náhodná procházka s odrážejícími stěnami má tedy jednu třídu ergodických stavů.

Příklad 5.6.12

MŘ má dvě třídy souslednosti stavů. Obě tyto třídy obsahují ergodické stavy: lehce jde zjistit, že všechny stavy jsou podstatné: podle Věty 5.6.10 jsou nenulové. Protože p_{11} =0.2 a p_{44} =0.4, jsou obě třídy neperiodické.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{C_1 = \{s_1, s_2, s_3\} \quad \text{a} \quad C_2 = \{s_4, s_5\}}$$

Příklad 5.6.13
MŘ

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0.2 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}$$

Množina $C = \{s_1, s_2, s_3\}$ je třída souslednosti, ergodických stavů.
Množina $A = \{s_4\}$ není třída souslednosti, protože není uzavřená. ($p_{43} > 0$)

Příklad 5.6.14

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Náhodná procházka s pohlcujícími stěnami:
Množina $A = \{1, 2, \ldots, \alpha - 1\}$ není třída souslednosti, protože není uzavřená.
Dvě třídy souslednosti: množiny $C_1 = \{0\}$ $C_2 = \{\alpha\}$ (2 třídy absorpčních, ergodických stavů). Absorpční stav je vždy ergodický a vždy tvoří jednoprvkovou třídu souslednosti.

Příklad 5.6.15
MŘ má matici pravděpodobností přechodu:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Nepodstatný stav: s_1
Podstatné stavy tvoří 2 třídy: $C_1 = \{s_2, s_3, s_4\}$ $C_2 = \{s_5, s_6, s_7\}$
Třída C_1 obsahuje nenulové periodické stavy s periodou $\lambda=3$, třída C_2 obsahuje ergodické stavy.

Příklady: Stacionární a finální pravděpodobnosti

Příklad 5.7.15

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0.2 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}$$

Mějme MŘ:
Množina $A = \{s_4\}$ není třída souslednosti, protože není uzavřená. ($p_{43} > 0$), nepodstatný stav, tedy $\pi_4 = 0$ (Věta 5.7.4)
Množina $C = \{s_1, s_2, s_3\}$ je třída souslednosti (ergodické stavy). Proto má finální pravděpodobnosti a ty se rovnají jedinému stacionárnímu rozdělení. Výpočet π_1, π_2 a π_3 můžeme oběma způsoby. Protože třída C obsahuje pouze stavy s_1, s_2, s_3, můžeme najít finální pravděpodobnosti pouze pro tuto třídu (využijeme výsledky z 5.7.7). Matice pravděpodobností přechodu pro tuto třídu má tvar:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.0 \\ 1.0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0 \end{bmatrix}$$

První metodou sestavíme soustavu rovnic:

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} \, . \, \mathbf{P}$$

Dostáváme soustavu lineárních rovnic:

$$1{,}0\pi_2 + 0{,}3\pi_3 = \pi_1$$

$$0{,}7\pi_3 = \pi_2$$

$$0{,}3\pi_1 + 0{,}7\pi_2 = \pi_3$$

Řešením dostáváme:

$$\pi_1 = \pi_3$$

$$\pi_2 = 0{,}7\pi_3$$

Doplníme podmínku, že součet musí dát 1:

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

odtud

$$\pi_1 = \frac{10}{27}\ \pi_2 = \frac{7}{27}\ \pi_3 = \frac{10}{27}$$

Při druhé metodě spočteme matici $\mathbf{P}^n$ a najdeme její limitu pro $n \to \infty$. Použijeme Perronova vzorce. Matice $\mathbf{P}$ má charakteristická čísla

$$\lambda_1 = 1\,, \quad \lambda_2 = -0.5 + j\sqrt{0.35}\,, \quad \lambda_3 = -0.5 - j\sqrt{0.35}\,.$$

Adjungovaná matice k matici $\lambda\mathbf{E} - \mathbf{P}$ je

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 & 0.7 & \lambda \\ \lambda & \lambda^2 - 0.3 & 1 \\ 0.3\lambda + 0.7 & 0.7\lambda & \lambda^2 \end{bmatrix}\,.$$

Po dosazení do Perronova vzorce dostaneme

$$\mathbf{P}^n = \frac{1}{2.7}\begin{bmatrix} 1 & 0.7 & 1 \\ 1 & 0.7 & 1 \\ 1 & 0.7 & 1 \end{bmatrix} -$$

$$-\frac{(-0.5+j\sqrt{0.35})^n}{0.7+j\sqrt{3.15}}\begin{bmatrix} -0.1-j\sqrt{0.35} & 0.7 & -0.5+j\sqrt{0.35} \\ -0.5+j\sqrt{0.35} & -0.4-j\sqrt{0.35} & 1 \\ 0.55+0.3j\sqrt{0.35} & -0.35+0.7j\sqrt{0.35} & -0.1-j\sqrt{0.35} \end{bmatrix}+$$

$$+\frac{(-0.5-j\sqrt{0.35})^n}{0.7-j\sqrt{3.15}}\begin{bmatrix} 0.1-j\sqrt{0.35} & -0.7 & 0.5-j\sqrt{0.35} \\ 0.5+j\sqrt{0.35} & 0.4-j\sqrt{0.35} & -1 \\ -0.55+0.3j\sqrt{0.35} & 0.35+0.7j\sqrt{0.35} & 0.1-j\sqrt{0.35} \end{bmatrix}.$$

Dále platí

$$\lim_{n\to\infty}(-0.5+j\sqrt{0.35})^n = 0 = \lim_{n\to\infty}(-0.5-j\sqrt{0.35})^n .$$

a tedy

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}^n = \frac{1}{2.7}\begin{bmatrix} 1 & 0.7 & 1 \\ 1 & 0.7 & 1 \\ 1 & 0.7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10/27 & 7/27 & 10/27 \\ 10/27 & 7/27 & 10/27 \\ 10/27 & 7/27 & 10/27 \end{bmatrix} .$$

Oběma metodami jsme dostali stejné finální rozdělení pravděpodobnosti zadané Markovovy posloupnosti ve tvaru

$$\pi = (\frac{10}{27}, \frac{7}{27}, \frac{10}{27}, 0) .$$

Příklad 5.7.16

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Náhodná procházka s pohlcujícími stěnami:

Množina $A = \{1,2, \ldots, \alpha - 1\}$ není třída souslednosti, protože není uzavřená.

Dvě třídy souslednosti: množiny $C_1 = \{0\}$ $C_2 = \{\alpha\}$ (2 třídy absorpčních, ergodických stavů). Nemá tedy finální rozdělení pravděpodobnosti. Má dvě čistá stacionární rozdělení: **p, q** odpovídající třídám C_1, C_2, a tedy nekonečně mnoho stacionárních rozdělení. Podle Věty 5.7.4 je

$$p_1 = q_1 = p_2 = q_2 = \ldots = p_{\alpha-1} = q_{\alpha-1} = 0$$

Dále

$$p_0 = 1, \quad p_\alpha = 0 \quad q_0 = 0 \quad q_\alpha = 1$$

Dvě čistá stacionární rozdělení pravděpodobnosti jsou tedy

p = (1,0,0,…,0,0) a **q** = (0,0,0,…,0,1)

Každé stacionární rozdělení tohoto MŘ můžeme dostat jako kombinaci **p** a **q**, tj.

$\alpha\mathbf{p} + (1 - \alpha)\mathbf{q} \quad \alpha \in (0,1)$

Všechna stacionární rozdělení tvoří množinu

$M = \{(\alpha,0,0,\ldots,0,1 - \alpha) \mid \alpha \in (0,1)\}$

Ověřte podle Věty 5.7.3, že všechna rozdělení z množiny M jsou opravdu stacionární.