

### 3 NÁHODNÁ VELIČINA



**Čas ke studiu kapitoly: 80 minut**



**Cíl:** Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- obecně popsat náhodnou veličinu pomocí distribuční funkce
- charakterizovat diskrétní i spojitou náhodnou veličinu
- porozumět funkci intenzity potuch
- určovat číselné charakteristiky náhodné veličiny
- transformovat náhodnou veličinu



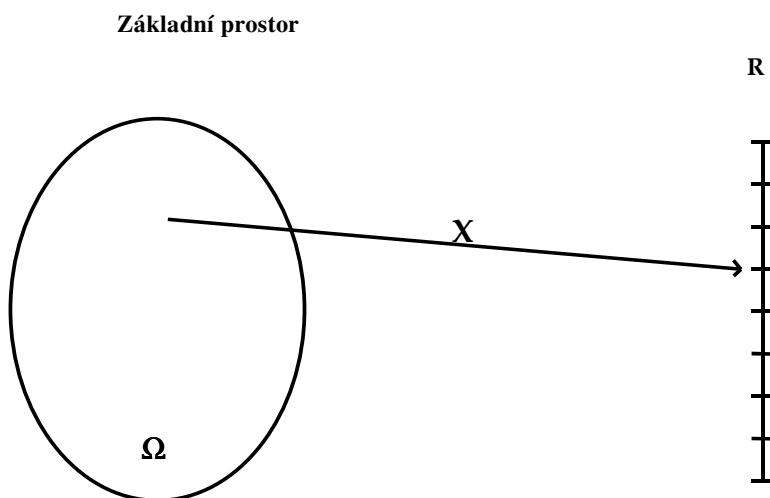
## Výklad:

### 3.1 Definice náhodné veličiny

Mějme pravděpodobnostní prostor  $(\Omega, S, P)$ . **Náhodná veličina X** je reálná funkce  $X(\omega)$  prvků  $\omega \in \Omega$  ze základního prostoru, taková, že pro každé reálné  $x$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) je množina  $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x\} \in S$ , tj. náhodným jevem. Tedy náhodná veličina je zobrazení  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  takové, že pro každé  $x \in \mathbb{R}$  platí:

$$X^{-1}((-\infty, x)) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x\} \in S$$

Z definice plyne, že pro libovolné  $x \in \mathbb{R}$  můžeme určit pravděpodobnost toho, že  $X(\omega) < x$ .



Množina všech hodnot  $\{x = X(\omega), \omega \in \Omega\}$  se nazývá **základní soubor**.



## Průvodce studiem:

Pro ty z Vás, kteří nemají rádi matematické definice, zkusíme vysvětlit pojem náhodná veličina ještě jiným způsobem. Výsledkem náhodného pokusu je v mnoha případech reálné číslo (doba do poruchy, příjem státního zaměstnance, počet žáků v 1. třídě ...). Pak je možno říci, že **náhodnou veličinou** nazveme takový výsledek náhodného pokusu, který je dán reálným číslem.

Náhodné veličiny (NV) budeme označovat velkými písmeny z konce abecedy (např. X, Y, Z nebo  $X_1, X_2, \dots$ ). Jejich konkrétní realizace pak malými písmeny ( $x, y, z$  nebo  $x_1, x_2, \dots$ ).

### Příklad:

Náhodná veličina $X$	...	Počet dětí ženy starší 18-ti let (obecně)
$x = 2$	...	Počet dětí jedné konkrétní ženy (konkrétní realizace NV $X$ )



### Výklad:

Jedním z úkolů teorie pravděpodobnosti je vybudovat matematický aparát, který přiřadí všem zajímavým podmnožinám množiny reálných čísel  $\mathbf{R}$  příslušné pravděpodobnosti.

## 3.2 Distribuční funkce

### Definice:

Nechť  $X$  je náhodná veličina. Reálnou funkci  $F(t)$  definovanou pro všechna reálná  $t$ ,  $t \in \mathbf{R}$  vztahem:

$$F(t) = P\{X \in (-\infty, t)\} = P(X < t)$$

nazveme **distribuční funkcí** náhodné veličiny  $X$ .

**Distribuční funkce** je tedy funkce, která každému reálnému číslu přiřazuje pravděpodobnost, že náhodná veličina nabude hodnoty menší než toto reálné číslo.

Distribuční funkce má řadu vlastností, které vyplývají přímo z její definice:

1. Distribuční funkce je nezáporné číslo menší nebo rovno jedné:  $0 \leq F(x) \leq 1$
2. Distribuční funkce je neklesající, tj.  $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}: x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$ ,
3. Distribuční funkce  $F(x)$  je zleva spojitá
4.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$
5.  $\forall a, b \in \mathbf{R}; a < b: P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$
6.  $P(X = x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x) - F(x_0)$

Rozlišujeme dva základní druhy náhodné veličiny - **spojitou** (může nabývat hodnot z nějakého intervalu) a **diskrétní** (může nabývat pouze konečně nebo spočetně mnoha hodnot), přesněji řečeno náhodnou veličinu se spojitým a diskrétním rozdělením.

## 3.3 Diskrétní náhodná veličina

O diskrétní náhodné veličině hovoříme tehdy, jestliže náhodná veličina nabývá pouze hodnot z nějaké konečné či spočetně množiny. Jedná se nejčastěji o celočíselné náhodné veličiny, např. počet studentů, kteří vstoupili do hlavní budovy VŠB TUO během dopoledne (0,1,2,...), počet členů domácnosti (1,2,3,...), počet dopravních nehod za jeden den na dálnici z Prahy do Brna (0,1,2,...), součet ok při hodu třemi kostkami (3,4,...,18) apod.

### Definice:

Budeme říkat, že náhodná veličina **X má diskrétní rozdělení pravděpodobnosti** právě tehdy, když:

1.  $\exists$  konečná nebo spočetná množina reálných čísel  $M = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$  takových, že  $P(X = x_i) > 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$
2.  $\sum_i P(X = x_i) = 1$

Funkce  $P(X = x_i) = P(x_i)$  se nazývá **pravděpodobnostní funkcí** náhodné veličiny **X**

**Distribuční funkce** takového rozdělení je schodovitá se skoky v bodech  $x_1, \dots, x_n, \dots$

Pro distribuční funkci diskrétní náhodné veličiny platí:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i)$$



### Řešený příklad:

Mějme náhodnou veličinu **X** definovanou jako výsledek hodu klasickou pravidelnou kostkou. Určete typ NV, její pravděpodobnostní a distribuční funkci (zakreslete).

### Řešení:

**X** ... výsledek hodu kostkou

**Základní soubor NV X** (množina všech možných výsledků):  $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Vzhledem k tomu, že základní soubor je tvořen konečně mnoha (šesti) hodnotami, jedná se o **diskrétní NV**

Pravděpodobnostní funkce této NV je uvedena v následující tabulce:

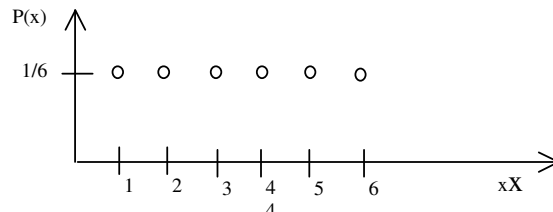
$x_i$	$P(X = x_i)$
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6

(např.  $P(X=1)$  čteme: pravděpodobnost, že výsledek hodu kostkou je 1). V tabulce jsou přitom uvedeny pouze **nenulové** hodnoty pravděpodobnostní funkce. Je zřejmé, že platí:

$$\forall x_i \in \mathbb{R} \setminus \Omega : P(X = x_i) = 0$$

(např.  $P(X=1,5)=P(X=-3)= \dots = 0$ ). Všimněte si zároveň, že je splněna 2. část definice diskrétní NV :  $\sum_{(i)} P(X = x_i) = 1$

Na následujícím obrázku pak vidíme grafickou podobu pravděpodobnostní funkce (izolované body).



Dále se pokusíme na základě definice určit distribuční funkci. Z vlastností distribuční funkce vyplývá, že body nespojitosti této funkce jsou ty body, v nichž je pravděpodobnostní funkce nenulová ( $P(x = x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x) - F(x_0)$ ). Proto si určíme hodnoty distribuční funkce na všech intervalech vymezených body nespojitosti.

např.:

$\forall x \in (-\infty; 1) : F(x) = P(X < x) = 0$  (pravděpodobnost, že na kostce padne číslo menší než 1)

$\forall x \in (1; 2) : F(x) = P(X < x) = 1/6$  (pravděpodobnost, že na kostce padne číslo menší než 2)

$\forall x \in (2; 3) : F(x) = P(X < x) = 2/6$  (pravděpodobnost, že na kostce padne číslo menší než 3)

.....

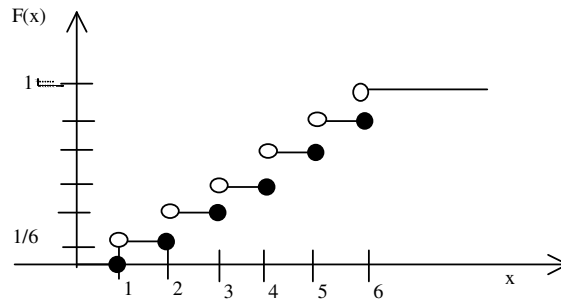
Hodnoty distribuční funkce na celém definičním oboru ( $\mathbb{R}$ ) jsou uvedeny v následující tabulce.

$x_i$	$F(x_i)$
$(-\infty; 1)$	0
$(1; 2)$	1/6
$(2; 3)$	2/6
$(3; 4)$	3/6
$(4; 5)$	4/6
$(5; 6)$	5/6
$(6; \infty)$	1

Na grafu distribuční funkce si všimněte jejich vlastností:

- neklesající
- zleva spojitá
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$

- $P(X = x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x) - F(x_0)$ , tj.:
  - distribuční funkce je nespojitá v bodech, v nichž je pravděpodobnostní funkce nenulová
  - velikost „skoku“ v bodech nespojitosti je rovna příslušné pravděpodobnosti



### 3.4 Spojitá náhodná veličina

Jestliže náhodná veličina může nabýt jakékoliv hodnoty z určitého intervalu, hovoříme o náhodné veličině se spojitým rozdělením. Jako příklad lze uvést: životnost výrobku  $(0, \infty)$ , délku určitého předmětu  $(0, \infty)$ , náhodně vybrané reálné číslo  $(-\infty, \infty)$  apod. V takovém případě nelze jednotlivým realizacím náhodné veličiny přiřazovat pravděpodobnostní funkci, poněvadž tato pravděpodobnost je nulová.



#### Řešený příklad:

Určete jaká je pravděpodobnost, že životnost žárovky bude přesně 253 hodin.

**Řešení:**

Zkusme hledanou pravděpodobnost najít na základě klasické pravděpodobnosti, tj. jako poměr počtu příznivých možností a počtu všech možností.

X ... životnost žárovky

Počet příznivých možností: 1

Počet všech možností:  $\infty$

$$P(X = 253) = \frac{1}{\infty} = 0$$

Pravděpodobnost, že životnost žárovky bude přesně 253 hodin je nulová.

*Už je Vám jasné proč je pravděpodobnost toho, že nastane libovolná realizace spojitě náhodné veličiny, nulová?*



## Výklad:

Můžeme však stanovit pravděpodobnost výskytu náhodné veličiny v libovolném intervalu. To znamená, že pro její popis můžeme použít distribuční funkci.

- **Distribuční funkce spojitě náhodné veličiny**

je definována takto:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt \quad \text{pro } -\infty < x < \infty,$$

kde reálnou nezápornou funkci  $f(x)$  nazveme hustotou pravděpodobnosti.

- **Hustota pravděpodobnosti**

je definována jako:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x},$$

tj. jako limita pravděpodobnosti, že veličina  $X$  padne do intervalu  $(x; x + \Delta x)$ , vydělená délkou tohoto intervalu v případě, že se tato délka blíží nule.

Pro hustotu pravděpodobnosti platí:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

**Důkaz:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^t f(x)dx = \lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1$$

Dá se ukázat, že ve všech bodech, kde existuje derivace distribuční funkce, platí:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Známe-li tedy distribuční funkci, můžeme lehce určit hustotu pravděpodobnosti a naopak, známe-li hustotu pravděpodobnosti, snadno většinou spočítáme distribuční funkci.

### 3.4.1 Pravděpodobnost výskytu spojitě NV v nějakém intervalu

Jaký je tedy vztah mezi pravděpodobností výskytu spojitě NV v nějakém intervalu a distribuční funkcí (popř. hustotou pravděpodobnosti)?

Distribuční funkce v bodě  $x$  je definována jako pravděpodobnost, že náhodná veličina nabývá hodnot menších než  $x$  (že náhodná veličina leží v intervalu  $(-\infty; x)$ ).

$$F(x) = P(X < x) = P\{X \in (-\infty; x)\}$$

Z této definice plyne, že  $\forall a, b \in R$ :

$$1. \quad P(X < a) = F(a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx$$

$$2. \quad P(X \geq a) = 1 - F(a) = \int_a^{\infty} f(x) dx$$

$$3. \quad P(a \leq X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$$

Jelikož pro spojitou náhodnou veličinu platí, že  $P(X = x) = 0$ , můžeme dále tvrdit, že:

$$4. \quad P(X = x) = 0$$

$$5. \quad P(X \leq a) = P(X < a)$$

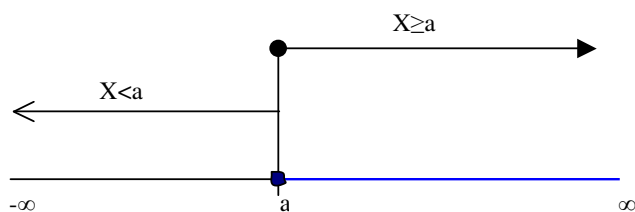
$$6. \quad P(X \geq a) = P(X > a)$$

$$7. \quad P(a \leq X < b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b)$$

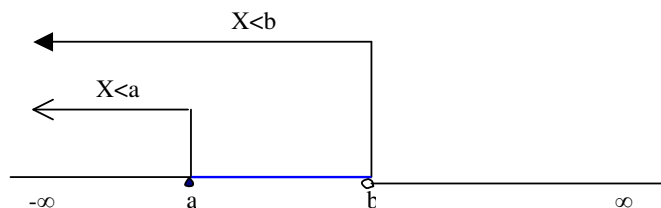
### Důkazy:

1. plyne z definice distribuční funkce (obecně a speciálně pro spojitou NV)

2.  $P(X \geq a) = 1 - P(X < a) = 1 - F(a)$  (jev  $(X < a)$  je negací jevu  $(X \geq a)$ )



$$3. \quad P(a \leq X < b) = P(X < b) - P(X < a) = F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^b f(x) dx - \int_{-\infty}^a f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$





4. plyne z definice spojité NV – distribuční funkce spojité NV je spojitá funkce a proto  

$$P(x = x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x) - F(x_0) = 0$$

5.  $P(x = a) = 0$ ,  $P(X \leq a) = P(X = a) + P(X < a) = P(X < a)$

6.  $P(x = a) = 0$ ,  $P(X \geq a) = P(X = a) + P(X > a) = P(X > a)$

7.  $P(x = a) = 0$ ,  $P(X = b) = 0$ ,  
 $P(a \leq X < b) = P(X = a) + P(X = b) + P(a < X < b) = P(a < X < b) = P(a < X \leq b)$

### 3.4.2 Geometrická interpretace vztahu mezi pravděpodobností a hustotou pravděpodobnosti

Připomeňme si (viz. geometrická interpretace integrálu), že integrál z křivky je vlastně velikost plochy pod touto křivkou. Víme že pro hustotu pravděpodobnosti platí, že:

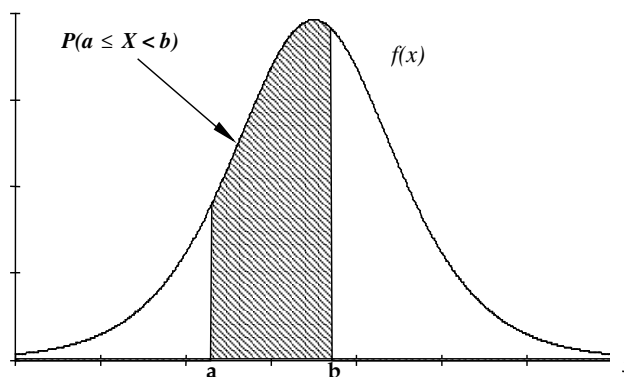
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

Je tedy zřejmé, že obsah celé plochy pod křivkou  $f(x)$  dává dohromady jedničku. To je analogické situaci u diskrétní náhodné veličiny, kde součet pravděpodobností všech možných výsledků rovněž dával jedničku.

Zároveň jsme si ukázali, že:

$$P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x) dx$$

A proto můžeme říci, že obsah plochy pod křivkou  $f(x)$  pro  $x \in [a; b)$  je pravděpodobnost, že  $X$  nabude hodnoty z tohoto intervalu ( $\forall a, b \in R$ ).



Obdobně můžeme znázornit pravděpodobnosti:

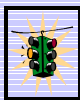
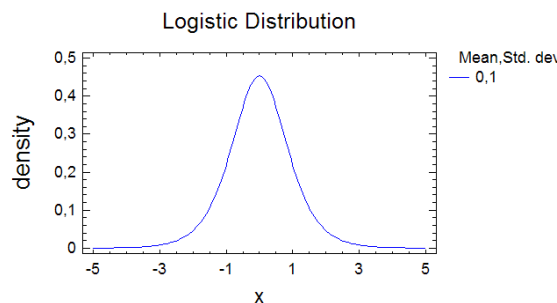
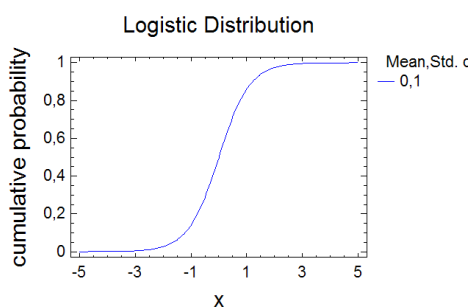
$$P(X < a) = \int_{-\infty}^a f(x)dx, \quad P(X \geq a) = \int_a^{\infty} f(x)dx$$

### Příklad

Logistické rozdělení pravděpodobnosti má následující distribuční funkci  $F(x)$  a hustotu pravděpodobnosti  $f(x)$ :

$$F(x) = \frac{1}{1 + e^{-(\beta_0 + \beta_1 x)}}$$

$$f(x) = \frac{\beta_1 e^{-(\beta_0 + \beta_1 x)}}{(1 + e^{-(\beta_0 + \beta_1 x)})^2}$$



### Řešený příklad:

Nechť  $Y$  je spojitá proměnná definována hustotou pravděpodobnosti:

$$f(y) = \begin{cases} c(1-y)(1+y) & -1 < y < 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

- nalezněte konstantu  $c$ ,
- zakreslete  $f(y)$
- nalezněte a zakreslete distribuční funkci  $F(y)$ ,
- určete:  $P(0 < Y < 1)$ ,  $P(Y > 0,5)$ ,  $P(Y = 0,3)$

### Řešení:

- a) pro nalezení konstanty  $c$  využijeme toho, že:  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{-1} 0 dt + \int_{-1}^1 c(1-t^2) dt + \int_1^{\infty} 0 dt = 1$$

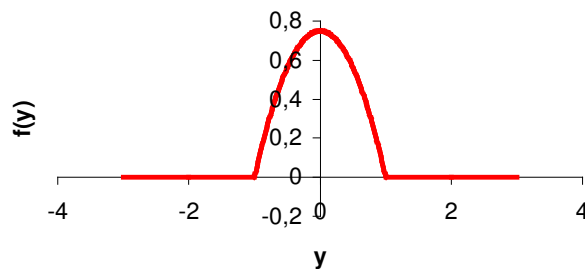
$$0 + c \left[ t - \frac{t^3}{3} \right]_{-1}^1 + 0 = 1$$

$$c \left[ \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 - \frac{(-1)}{3}\right) \right] = 1$$

$$c \cdot \frac{4}{3} = 1 \Rightarrow c = \frac{3}{4} = 0,75$$

b) 
$$f(y) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1-y)(1+y) & -1 < y < 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

### Hustota pravděpodobnosti

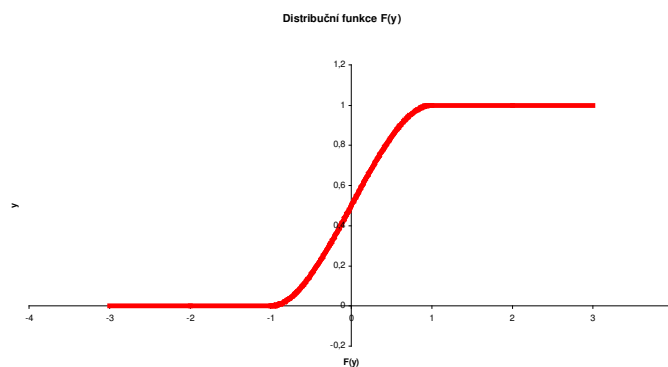


c) Distribuční funkci určíme z definice:  $F(y) = \int_{-\infty}^y f(t) dt$  pro  $-\infty < y < \infty$

Pro  $-\infty < y < -1$ : 
$$\underline{\underline{F(y) = \int_{-\infty}^y 0 dt = 0}}$$

Pro  $-1 \leq y < 1$ : 
$$\underline{\underline{F(y) = \int_{-\infty}^{-1} 0 dt + \int_{-1}^y \frac{3}{4}(1-t^2) dt = 0 + \frac{3}{4} \left[ t - \frac{t^3}{3} \right]_{-1}^y = \frac{1}{4}(-y^3 + 3y + 2)}}$$

Pro  $1 \leq y < \infty$ : 
$$\underline{\underline{F(y) = \int_{-\infty}^{-1} 0 dt + \int_{-1}^1 \frac{3}{4}(1-t^2) dt + \int_1^y 0 dt = 0 + \frac{3}{4} \left[ t - \frac{t^3}{3} \right]_{-1}^1 + 0 = 1}}$$



d) Pravděpodobnosti výskytu náhodné veličiny Y na určitém intervalu určíme pomocí příslušných vztahů:

- $\underline{\underline{P(0 < Y < 1) = F(1) - F(0) = 1 - \frac{1}{4}(0 + 0 + 2) = \frac{1}{2} \sim 50\%}}$
- $\underline{\underline{P(Y > 0,5) = 1 - F(0,5) = 1 - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 3 \cdot \frac{1}{2} + 2 = 1 - \frac{27}{32} = \frac{5}{32} \sim 15,6\%}}$
- $\underline{\underline{P(Y = 0,3) = 0}}$



### Výklad:

## 3.5 Intenzita poruch

Pro nezápornou náhodnou veličinu X se spojitým rozdělením definujeme pro  $F(t) \neq 1$  (tj.  $F(t) < 1$ ) **intenzitu poruch  $\lambda(t)$**  :

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$$

Představuje-li náhodná veličina X **dobu do poruchy** nějakého zařízení, pak intenzita poruch vyjadřuje, že pokud do času  $t$  nedošlo k žádné poruše, tak pravděpodobnost, že k ní dojde v následujícím okamžiku malé délky  $\Delta t$ , je přibližně  $\lambda(t) \cdot \Delta t$  :

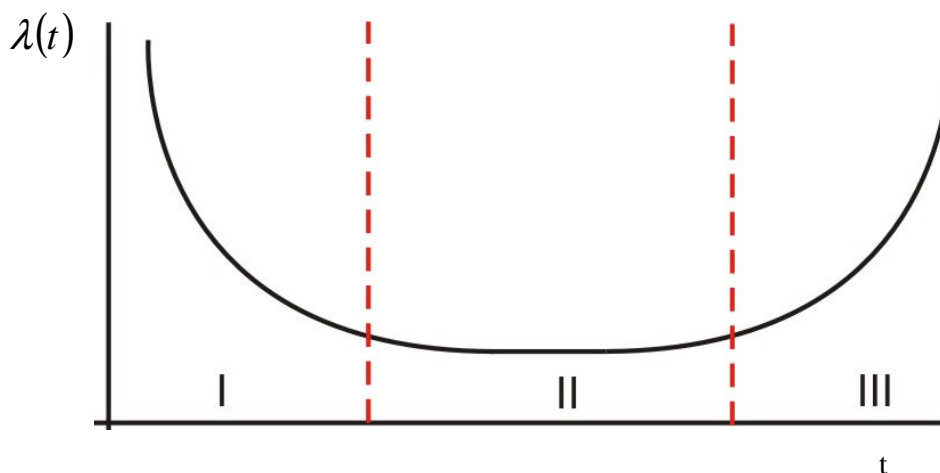
$$P(t < X \leq t + \Delta t | X > t) \approx \frac{f(t)}{1 - F(t)} \Delta t = \lambda(t) \cdot \Delta t$$

Vzájemné převody mezi  $f(t)$ ,  $F(t)$ ,  $\lambda(t)$  udává následující tabulka:

	$F(t)$	$f(t)$	$\lambda(t)$
$F(t)$	$F(t)$	$\int_0^t f(x) dx$	$1 - \exp\left[-\int_0^t \lambda(x) dx\right]$
$f(t)$	$\frac{dF(t)}{dt}$	$f(t)$	$\lambda(t) \cdot \exp\left[-\int_0^t \lambda(x) dx\right]$
$\lambda(t)$	$\frac{\frac{dF(t)}{dt}}{1 - F(t)}$	$\frac{f(t)}{1 - \int_0^t f(x) dx}$	$\lambda(t)$

### 3.5.1 Jak vypadá nejčastější grafická interpretace intenzity poruch ?

Pokud zůstaneme u představy, že náhodná veličina  $X$  popisuje **dobu do poruchy** nějakého zařízení, pak typický tvar intenzity poruch je zobrazen na následujícím obrázku.



Křivka na tomto obrázku se nazývá **vanová křivka** a obvykle se dělí na tři úseky (I, II, III).

- I. V prvním úseku křivka intenzity poruch klesá. Odpovídající časový interval se nazývá období časných poruch (období záběhu, období počátečního provozu, období osvojování nebo období dětských nemocí podle analogie s úmrtnostní křivkou člověka). Příčinou zvětšené intenzity poruch v tomto období jsou poruchy v důsledku výrobních vad, nesprávné montáže, chyb při návrhu, nebo při výrobě apod.
- II. Ve druhém úseku dochází k běžnému využívání zaběhnutého výrobku, k poruchám dochází většinou z vnějších příčin, nedochází k opotřebení, které by změnilo funkční vlastnosti výrobku. Intenzita poruch je v tomto období přibližně konstantní. Příslušný časový interval se nazývá období normálního užití, či stabilního života.
- III. Ve třetím úseku procesy stárnutí a opotřebení mění funkční vlastnosti výrobku, projevují se nastřádané otřesy výrobku z období II (analogie s nesprávnou životosprávou člověka), trhliny materiálu a intenzita poruch vzrůstá. Příslušný časový interval se nazývá období poruch v důsledku stárnutí a opotřebení.

### 3.6 Číselné charakteristiky náhodné veličiny

Rozdělení pravděpodobnosti každé náhodné veličiny  $X$  je plně popsáno pomocí její distribuční funkce  $F(x)$ , popř. podle hustoty pravděpodobnosti  $f(x)$ . V mnoha případech je však výhodné shrnout celkovou informaci o náhodné veličině do několika čísel, které charakterizují některé vlastnosti této náhodné veličiny a rovněž umožňují srovnání různých náhodných veličin. Tato čísla se nazývají **číselné charakteristiky náhodné veličiny  $X$** . Nyní se seznámíme s některými z nich.

- **Momenty rozdělení**

**Obecný moment r-tého řádu  $\mu_r'$**  značíme  $\mu_r' = EX^r$  ( $r = 0, 1, 2, \dots$ )

pro diskrétní NV:  $\mu_r' = \sum_{(i)} x_i^r \cdot P(x_i)$   $r = 0, 1, 2, \dots$

pro spojitou NV:  $\mu_r' = \int_{-\infty}^{\infty} x^r \cdot f(x) dx$   $r = 0, 1, 2, \dots$

(pokud uvedená řada nebo integrál konvergují absolutně)

**Centrální moment r-tého řádu  $\mu_r$**  značíme  $\mu_r = E(X - EX)^r$  ( $r = 0, 1, 2, \dots$ )

pro diskrétní NV:  $\mu_r' = \sum_{(i)} (x - EX)^r \cdot P(x_i)$   $r = 0, 1, 2, \dots$

pro spojitou NV:  $\mu_r' = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^r \cdot f(x) dx$   $r = 0, 1, 2, \dots$

(pokud uvedená řada nebo integrál konvergují absolutně)

- **Střední hodnota ( expected value )**

Střední hodnota NV je definována jako první obecný moment. Značí se **EX** nebo  **$\mu$** .

pro diskrétní NV:  $EX = \mu = \sum_{(i)} x_i \cdot P(x_i)$

pro spojitou NV:  $EX = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$

**Vlastnosti střední hodnoty:**

1.  $E(aX + b) = aEX + b$   $\forall a, b \in R$   
(tj. násobíme-li k X konstantou, násobí se jí i její střední hodnota; přičteme-li k X konstantu, zvýší se o tuto konstantu i její střední hodnota)
2.  $E(X_1 + X_2) = EX_1 + EX_2$   
(tj. střední hodnota součtu náhodných veličin je rovna součtu jednotlivých středních hodnot)
3.  $X_1, X_2, \dots$  *nezávislé NV*  $\Rightarrow E(X_1 \cdot X_2) = E(X_1) \cdot E(X_2)$   
(tj. jsou-li NV  $X_1, X_2$  nezávislé, pak střední hodnota jejich součinu je rovna součinu jednotlivých středních hodnot)

4.  $(Y = g(X)); g(X)$  spojitá f-cc)  $\Rightarrow EY = E(g(X))$

pro diskrétní NV Y: 
$$EY = \sum_i g(x_i) \cdot P(X = x_i)$$

pro spojitou NV Y: 
$$EY = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x) dx$$

- **Rozptyl ( disperze, variance )**

Rozptyl je druhým centrálním momentem, charakterizuje šířku rozdělení a značí se **DX**, popř.  $\sigma^2$ .

$$DX = \mu_2 = E(X - EX)^2 = EX^2 - (EX)^2$$

Důkaz výše uvedeného tvrzení je založen na vlastnostech střední hodnoty.

pro diskrétní NV: 
$$DX = \sum_{(i)} x_i^2 \cdot P(x_i) - \left( \sum_{(i)} x_i \cdot P(x_i) \right)^2$$

pro spojitou NV: 
$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx - \left( \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx \right)^2$$

**Vlastnosti rozptylu:**

1.  $D(aX + b) = a^2 DX, \quad \forall a \in R$   
(tj. násobíme-li náhodnou veličinu konstantou, hodnota jejího rozptylu se vynásobí druhou mocninou této konstanty; přičteme-li k náhodné veličině konstantu, její rozptyl se nezmění)
2.  $X_1, X_2, \dots$  nezávislé NV  $\Rightarrow D(X_1 + X_2) = DX_1 + DX_2$   
(tj. jsou-li NV  $X_1, X_2$  nezávislé, pak rozptyl jejich součinu je roven součinu jednotlivých rozptylů)

- **Směrodatná odchylka ( standard deviation )**

Směrodatná odchylka je definována jako odmocnina z rozptylu a značí se  $\sigma_x$ .

$$\sigma_x = \sqrt{DX}$$

- **Šikmost ( skewness )**

Je mírou symetrie daného rozdělení pravděpodobnosti, značí se  $a_3$  a je definována jako:

$$a_3 = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3}$$

Symetrii rozdělení (vzhledem k symetrii normovaného normálního rozdělení) pak posuzujeme takto:

- $a_3 = 0$  ... symetrické rozdělení
- $a_3 < 0$  .... negativně zešikmený soubor
- $a_3 > 0$  .... pozitivně zešikmený soubor

- **Špičatost ( kurtosis )**

Je mírou špičatosti (plochosti) rozdělení, značí se  $a_4$  a je definována jako:

$$a_4 = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4}$$

Špičatost rozdělení (vzhledem ke špičatosti normovaného normálního rozdělení) pak posuzujeme takto:

- $a_4 = 3$  .... normální špičatost (tj. špičatost normálního rozdělení)
- $a_4 < 3$  .... menší špičatost než u normálního rozdělení ( plošší )
- $a_4 > 3$  .... větší špičatost než u normálního rozdělení ( špičatější )

Vzhledem k nepraktickému vyhodnocování špičatosti (vzhledem ke 3) se mnohdy používá tzv. standardizovaná špičatost, která je definována jako:

$$a_4 - 3$$

a špičatost rozdělení je pak posuzována vzhledem k hodnotě 0.

- **Kvantily**

Značí se  $x_p$  a jsou definovány obdobně jako v exploratorní analýze dat.

- pro diskrétní NV:  $\forall p \in \langle 0;1 \rangle : x_p = \sup\{x_i / F(x_i) = p\}$   
(tj. největší z hodnot, pro které platí, že  $F(x_p) = p$ )
- pro spojitou NV:  $\forall p \in \langle 0;1 \rangle : F(x_p) = p$

- **Modus**

Značí se  $\hat{x}$  a je definován odlišně pro diskrétní a spojitou NV.

- pro diskrétní NV: hodnota, pro kterou platí:  $P(X = \hat{x}) \geq P(X = x_i)$ ,  $i = 1,2,\dots$   
(tj. hodnota, které nabývá NV s největší pravděpodobností)



pro spojitou NV: hodnota, pro kterou platí:  $f(x) \geq f(x)$  pro  $-\infty < x < \infty$   
 (tj. hodnota, v níž hustota pravděpodobnosti nabývá svého maxima)



### Řešený příklad:

Vraťme se k dříve definované diskrétní náhodné veličině  $X$  – hod kostkou. V jednom z výše řešených příkladu jsme si určili a zakreslili její pravděpodobnostní i distribuční funkci.

$x_i$	$P(X = x_i)$
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6

$x_i$	$F(x_i)$
$(-\infty; 1>$	0
$(1; 2>$	1/6
$(2; 3>$	2/6
$(3; 4>$	3/6
$(4; 5>$	4/6
$(5; 6>$	5/6
$(6; \infty)$	1

Nyní určíme:

- střední hodnotu
- rozptyl
- směrodatnou odchylku
- medián
- modus

**Řešení:**

$$a) \underline{EX} = \mu = \sum_{(i)} x_i \cdot P(x_i) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = \underline{\underline{3,5}}$$

$$b) \underline{DX} = \mu_2 = E(X - EX)^2 = EX^2 - (EX)^2$$

$$EX^2 = \sum_{(i)} x_i^2 P(x_i) = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{91}{6} \cong 15,2$$

$$\underline{\underline{DX}} = EX^2 - (EX)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{21}{6}\right)^2 = \frac{546}{36} - \frac{441}{36} = \underline{\underline{\frac{105}{36} \cong 2,9}}$$

$$c) \underline{\underline{\sigma_x}} = \sqrt{DX} = \frac{\sqrt{105}}{6} \cong 1,7$$

$$d) x_{0,5} = ?$$

$$F(x_i) = 0,5 \Leftrightarrow x_i \in (3; 4)$$

$$\underline{x_{0,5}} = \sup\{(3;4)\} = \underline{4} \quad (\text{ověření: platí, že } 50\% \text{ hodnot náhodné veličiny je } \leq 4)$$

- e) modus je hodnota, pro kterou platí:  $P(X = \hat{x}) \geq P(X = x_i), \quad i = 1, 2, \dots$   
 (tj. hodnota, které nabývá NV s největší pravděpodobností)

Protože v našem případě nabývá NV X všech hodnot se stejnou pravděpodobností, jedná se o **vícemodální rozdělení** s mody  $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ .



### Řešený příklad:

A nyní najdeme vybrané číselné charakteristiky pro spojitou náhodnou veličinu. Zvolme si náhodnou veličinu Y definovanou takto:

$$f(y) = \begin{cases} c(1-y)(1+y) & -1 < y < 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

Určete:

- střední hodnotu
- rozptyl
- směrodatnou odchylku
- medián
- modus

**Řešení:**

Nejdříve bychom museli určit konstantu c ze vztahu:  $\int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy = 1$

My využijeme toho, že daný problém jsme již výše řešili a můžeme proto přímo převzít výsledek, že  $c=0,75$ .

$$a) \quad \underline{EY} = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f(y) dy = \int_{-\infty}^{-1} y \cdot 0 dy + \int_{-1}^1 y \cdot \frac{3}{4} (1-y^2) dy + \int_1^{\infty} y \cdot 0 dy = 0 + \frac{3}{4} \left[ \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \right]_{-1}^1 + 0 = 0$$

(výsledek byl očekávatelný, protože hustota pravděpodobnosti NV Y je sudá funkce)

$$b) \quad DY = EY^2 - (EY)^2$$

$$EY^2 = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \cdot f(y) dy = \int_{-\infty}^{-1} y^2 \cdot 0 dy + \int_{-1}^1 y^2 \cdot \frac{3}{4} (1-y^2) dy + \int_1^{\infty} y^2 \cdot 0 dy = 0 + \frac{3}{4} \left[ \frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5} \right]_{-1}^1 + 0 =$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{15} = \frac{1}{5}$$

$$\underline{\underline{DY}} = EY^2 - (EY)^2 = \frac{1}{5} - 0^2 = \frac{1}{5} = 0,2$$

$$c) \quad \underline{\underline{\sigma_y}} = \sqrt{DY} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \cong 0,45$$

$$d) \quad F(y_{0,5}) = 0,5$$

Znovu využijeme toho, že jsme s touto náhodnou veličinou pracovali již dříve a bez opětovného výpočtu použijeme znalosti distribuční funkce  $F(y)$ .

$$F(y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } y < (-1) \\ \frac{1}{4}(-y^3 + 3y + 2) & \text{pro } (-1) \leq y \leq 1 \\ 1 & \text{pro } y > 1 \end{cases}$$

Ze vztahu pro distribuční funkci je zřejmé, že medián může být pouze hodnota z intervalu  $(-1;1)$ :

$$\frac{1}{4}(-y_{0,5}^3 + 3y_{0,5} + 2) = 0,5$$

$$(-y_{0,5}^3 + 3y_{0,5} + 2) = 2$$

$$-y_{0,5}^3 + 3y_{0,5} = 0$$

$$y_{0,5}(-y_{0,5}^2 + 3) = 0 \Rightarrow \begin{aligned} y_{0,5_1} &= 0 \\ y_{0,5_2} &= \sqrt{3} \notin (-1;1) \\ y_{0,5_3} &= -\sqrt{3} \notin (-1;1) \end{aligned}$$

- e) modus je hodnota, pro kterou platí:  $f(\bar{x}) \geq f(x)$  pro  $-\infty < x < \infty$   
(tj. hodnota, v níž hustota pravděpodobnosti nabývá svého maxima)

Pro maximum funkce platí, že první derivace v něm musí být nulová (nebo nedefinována) a druhá derivace v něm musí být záporná.

Je zřejmé, že rovněž modus budeme hledat na intervalu  $(-1;1)$ :

$$\frac{df(y)}{dy} = 0$$

$$\left[ \frac{3}{4}(1 - y^2) \right]' = 0$$

$$\frac{3}{4}(0 - 2y) = 0$$

$y = 0 \dots$  bod podezřelý z maxima

Zda se jedná o maximum bychom mohli ověřit z druhé derivace  $f''(y)$ , ale my využijeme opět toho, že jsme s danou NV pracovali a pohledem na graf  $f(y)$  si ověříme, že hustota pravděpodobnosti  $f(y)$  skutečně nabývá svého maxima v bodě 0.

$$\underline{\underline{y=0}}$$



### Výklad:

## 3.7 Funkce náhodné veličiny

Definujme náhodnou veličinu  $Y = g(X)$ , kde  $g(x)$  je nějaká prostá reálná funkce definovaná na základním souboru náhodné veličiny  $X$ . Odvodíme rozdělení náhodné veličiny  $Y$ : distribuční funkci  $H(y)$  a hustotu  $h(y)$ , jestliže známe rozdělení náhodné veličiny  $X$ : dána distribuční funkce  $F(x)$  a hustota  $f(x)$ .

$$H(y) = P(Y < y) = P(g(X) < y) \quad \text{pro každé } -\infty < y < \infty$$

Jestliže k funkci  $g$  existuje funkce inverzní  $g^{-1}$ , pak platí:

$$H(y) = P(g(X) < y) = P(X < g^{-1}(y)) = F(g^{-1}(y)) \quad \text{pro } g \text{ rostoucí a}$$

$$H(y) = P(g(X) < y) = P(X > g^{-1}(y)) = 1 - P(X < g^{-1}(y)) = 1 - F(g^{-1}(y)) \quad \text{pro } g \text{ klesající.}$$

Pro spojitou náhodnou veličinu  $X$  a spojitě diferencovatelnou funkci  $g$  je hustota  $h(y)$  náhodné veličiny  $Y$  rovna:

$$h(y) = f(g^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{d g^{-1}(y)}{dy} \right|$$



### Řešený příklad:

Nechť náhodná veličina  $W$  je definována jako lineární transformace náhodné veličiny  $Y$ .

$$f(y) = \begin{cases} 0,75(1-y)(1+y) & -1 < y < 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

$$W = 5Y + 6$$

Nalezněte:

- distribuční funkci  $G(w)$  náhodné veličiny  $W$
- hustotu pravděpodobnosti  $g(w)$  náhodné veličiny  $W$ ,
- střední hodnotu  $EW$  náhodné veličiny  $W$
- rozptyl  $DW$  náhodné veličiny  $W$ .

**Řešení:**

Stejně jako v předchozích případech využijeme toho, že jsme již s NV  $Y$  pracovali (v opačném případě bychom museli nejdříve najít  $F(y)$ ,  $EY$  a  $DY$ ).

$$F(y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } y < (-1) \\ \frac{1}{4}(-y^3 + 3y + 2) & \text{pro } (-1) \leq y \leq 1 \\ 1 & \text{pro } y > 1 \end{cases}, \quad EY = 0, \quad DY = 0,2$$

$$a) \quad \underline{\underline{G(w) = P(W < w) = P(5Y + 6 < w) = P(Y < \frac{w-6}{5}) = F(\frac{w-6}{5})}}$$

Nyní určíme distribuční funkci  $G(w)$  tak, že do předpisu pro distribuční funkci  $F(y)$  dosadíme za  $y$  výraz  $\left(\frac{w-6}{5}\right)$ .

$$G(w) = \begin{cases} 0 & \text{pro } \left(\frac{w-6}{5}\right) < -1 \\ \frac{1}{4}\left(-\left(\frac{w-6}{5}\right)^3 + 3\left(\frac{w-6}{5}\right) + 2\right) & \text{pro } -1 \leq \left(\frac{w-6}{5}\right) \leq 1 \\ 1 & \text{pro } \left(\frac{w-6}{5}\right) > 1 \end{cases}$$

$$G(w) = \begin{cases} 0 & \text{pro } w < 1 \\ -\frac{1}{500}(w^3 - 18w^2 + 33w - 16) & \text{pro } 1 \leq w \leq 11 \\ 1 & \text{pro } w > 11 \end{cases}$$

- Hustotu pravděpodobnosti určíme jako derivaci distribuční funkce:

$$g(w) = \frac{dG(w)}{dw}$$

$$g(w) = \begin{cases} 0 & \text{pro } 1 \leq w \leq 11 \\ -\frac{1}{500}(3w^2 - 36w + 33) & \text{pro } (w < 1) \cup (w > 11) \end{cases}$$

po úpravě:

$$g(w) = \begin{cases} -\frac{3}{500}(w^2 - 12w + 11) & \text{pro } 1 \leq w \leq 11 \\ 0 & \text{pro } (w < 1) \cup (w > 11) \end{cases}$$

c) Z vlastností střední hodnoty plyne, že:

$$\underline{\underline{EW}} = E(5Y + 6) = 5.EY + 6 = 5.0 + 6 = \underline{\underline{6}}$$

d) Z vlastností rozptylu plyne, že:

$$\underline{\underline{DW}} = D(5Y + 6) = 5^2.DY = 25.0,2 = \underline{\underline{5}}$$



### Řešený příklad:

Nechť náhodná veličina  $X$  má spojitou rostoucí distribuční funkci  $F(x)$ . Najděte distribuční funkci a hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny  $Y = F(X)$ .

**Řešení:**

$$Y = F(x)$$

- $F(x)$  nabývá pro  $x \in \mathbb{R}$  hodnot z intervalu  $\langle 0; 1 \rangle \Rightarrow$  náhodná veličina  $Y$  nabývá rovněž hodnot z intervalu  $\langle 0; 1 \rangle \Rightarrow$

$$\text{pro } y < 0 \dots H(y) = 0$$

$$\text{pro } y > 1 \dots H(y) = 1$$

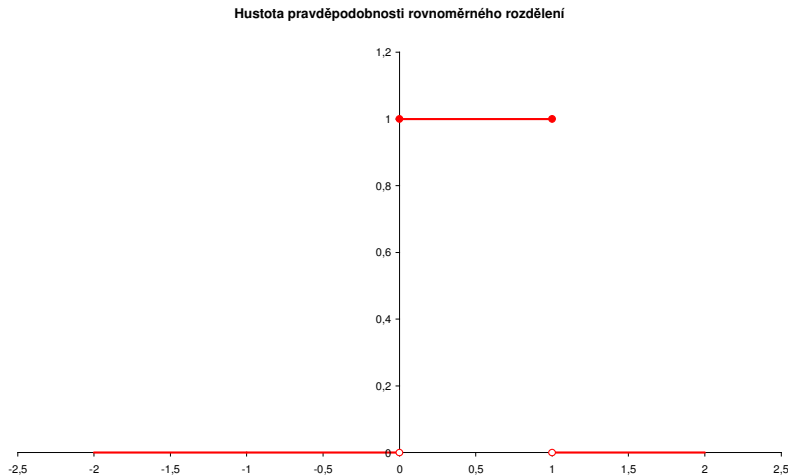
$$\text{pro } 0 \leq y \leq 1 \dots H(y) = P(Y < y) = P(F(X) < y) = P(X < F^{-1}(y)) = F(F^{-1}(y)) = y$$

$$H(y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } y < 0 \\ y & \text{pro } 0 \leq y \leq 1 \\ 1 & \text{pro } y > 1 \end{cases}$$

- Hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny  $Y$

$$h(y) = \frac{dH(y)}{dy}$$

$$h(y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } y \in \langle 0;1 \rangle \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$



Náhodná veličina  $Y$  má tzv. **rovnoměrné** (rektangulární) **rozdělení v intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$**  .



### Shrnutí:

**Náhodná veličina** je veličina, jejíž hodnota je jednoznačně určena výsledkem náhodného pokusu (je-li tento výsledek dán reálným číslem). Jde o reálnou funkci definovanou na základním prostoru a charakterizovanou distribuční funkcí.

**Distribuční funkce** je definována jako  $F(x) = P(X < x)$ , jde tedy o funkci, která každému reálnému číslu přiřazuje pravděpodobnost, že náhodná veličina nabývá hodnot menších než toto reálné číslo.

**Pravděpodobnost výskytu náhodné veličiny na nějakém intervalu** určujeme na základě těchto vztahů:

$$P(X < a) = F(a)$$

$$P(X \geq b) = 1 - F(b)$$

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$$

Podle toho, jakých může náhodná veličina nabýt hodnot (resp. z jakého intervalu), rozlišujeme spojitou a diskrétní náhodnou veličinu, přesněji řečeno náhodnou veličinu se **spojitým a diskrétním rozdělením**.

**Diskrétní náhodná veličina** je náhodnou veličinou, která může nabývat pouze konečného nebo spočetně nekonečného množství hodnot (např. výsledek hodu kostkou) Diskrétní náhodnou veličinu popisujeme prostřednictvím **pravděpodobnostní funkce**, popř. distribuční funkce.

**Spojité náhodná veličina** je náhodnou veličinou, která může nabývat všech hodnot z libovolného konečného nebo nekonečného intervalu (např. životnost zářivky) Pro popis spojité náhodné veličiny používáme distribuční funkci, **hustotu pravděpodobnosti** a v případě, že jde o nezápornou spojitou náhodnou veličinu používáme také **intenzitu poruch**. Intenzita poruch má pro většinu výrobků z technické praxe charakteristický tvar vanové křivky.

V mnoha případech je výhodné shrnout celkovou informaci o náhodné veličině do několika čísel, které charakterizují některé vlastnosti náhodné veličiny, případně umožňují srovnání různých náhodných veličin. Tato čísla se nazývají **číselné charakteristiky náhodné veličiny**. Mezi základní číselné charakteristiky řadíme např. **střední hodnotu, rozptyl, směrodatnou odchylku, kvantily, modus, šikmost a špičatost**.

V případě, že  $g(x)$  je nějaká prostá reálná funkce, definovaná na základním souboru náhodné veličiny  $X$ , můžeme snadno odvodit rozdělení **transformované náhodné veličiny**  $Y = g(X)$ .





## Otázky

1. Popište zavedení náhodné veličiny pomocí distribuční funkce, včetně nejvýznamnějších vlastností této funkce.
2. Jaký je vzájemný vztah mezi distribuční funkcí a pravděpodobnostní funkcí diskrétní náhodné veličiny ?
3. Jaký je vzájemný vztah mezi distribuční funkcí a hustotou pravděpodobnosti spojitě náhodné veličiny ?
4. Co je to intenzita poruch a jak se dá vyjádřit pomocí distribuční funkce a hustoty pravděpodobnosti ? Jaký je její charakteristický tvar ?
5. Které obecné a centrální momenty znáte ? Co je to medián a modus ?
6. Odvoďte předpis pro distribuční funkci náhodné veličiny  $Y$ , je-li tato náhodná veličina definovaná jako  $Y=g(X)$ , kde  $g$  je prostá reálná funkce definovaná na základním prostoru náhodné veličiny  $X$ .



## Úlohy k řešení

1. Náhodná veličina  $X$  je dána součtem počtu ok při dvou hodech klasickou hrací kostkou. Určete pro danou náhodnou veličinu:

- pravděpodobnostní funkci
- distribuční funkci
- střední hodnotu
- rozptyl

2. Necht' náhodná veličina  $Z$  je definována takto:

$$f(z) = \frac{1}{(1+e^z)(1+e^{-z})} \quad -\infty < z < \infty$$

Nalezněte distribuční funkci náhodné veličiny  $Z$ .

3. Bod je náhodně vybrán z koule o poloměru  $R$ . Náhodnou veličinu  $X$  definujme jako vzdálenost tohoto bodu od počátku. Určete pro danou náhodnou veličinu:

- distribuční funkci
- hustotu pravděpodobnosti
- střední hodnotu
- rozptyl

4. Strana krychle má rovnoměrné rozdělení na intervalu  $\langle 0;2 \rangle$ . Určete distribuční funkci objemu krychle.

5.  $X$  je spojitá náhodná veličina s hustotou pravděpodobnosti  $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ . Určete

$$P(1 \leq |X| \leq 2).$$

6. Spojitá náhodná veličina  $X$  je definovaná hustotou pravděpodobnosti  $f(x)$ :

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x) & \text{pro } x \in \langle 0;1 \rangle \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

Určete  $100\alpha\%$ -ní kvantil  $x_\alpha$  a medián. Určete pravděpodobnost  $P(X>0,5)$ ,  $P(X=0,4)$

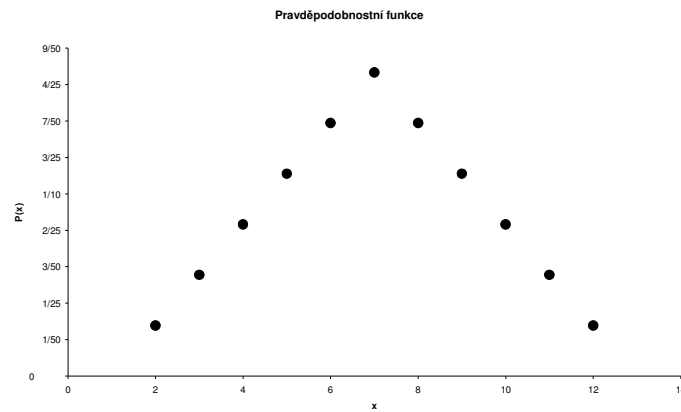


## Řešení:

1.  $X \dots$  diskrétní NV

a)

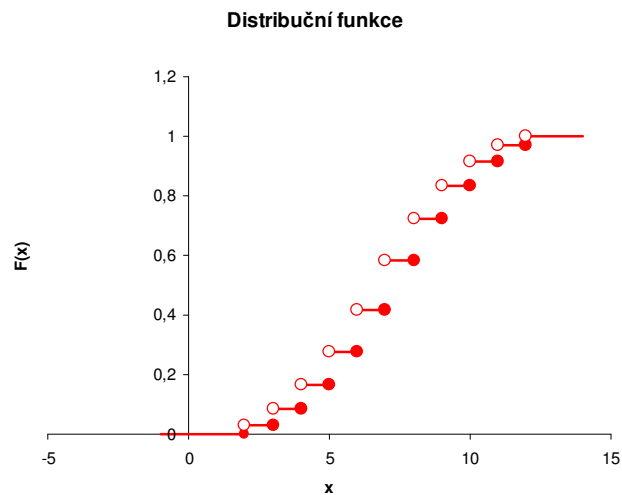
$x_i$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x_i)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36



b)

$x_i$	$(-\infty; 2>$	$(2; 3>$	$(3; 4>$	$(4; 5>$	$(5; 6>$	$(6; 7>$
$F(x_i)$	0	1/36	3/36	6/36	10/36	15/36

$x_i$	$(7; 8>$	$(8; 9>$	$(9; 10>$	$(10; 11>$	$(11; 12>$	$(12; \infty)$
$F(x_i)$	21/36	26/36	30/36	33/36	35/36	1



d)  $EX = 7$

e)  $DX = 210/36 \cong 5,83$

2.  $F(z) = \frac{e^z}{1+e^z}$

3. X ... spojitá NV

a)  $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-\infty; 0) \\ \frac{x^3}{R^3} & \text{pro } x \in \langle 0; R \rangle \\ 1 & \text{pro } x \in (R; \infty) \end{cases}$

b)  $f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{R^3} & \text{pro } x \in \langle 0; R \rangle \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

c)  $EX = \frac{3R}{4}$

d)  $DX = \frac{3R^2}{80}$

4.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-\infty; 0) \\ \frac{\sqrt[3]{x}}{2} & \text{pro } x \in \langle 0; 8 \rangle \\ 1 & \text{pro } x \in (8; \infty) \end{cases}$$

5.  $P(1 \leq |X| \leq 2) = e^{-1} - e^{-2}$

6.  $x_\alpha = 1 - \sqrt{1 - \alpha}$ ,  $x_{0,5} = 0,293$ ,  $P(X > 0,5) = 0,25$ ,  $P(X = 0,4) = 0$