6 SPOJITÁ ROZDĚLENÍ PRAVDĚPODOBNOSTI

Čas ke studiu kapitoly: 120 minut

Cíl: Po prostudování tohoto odstavce budete umět:

- charakterizovat jednotlivé typy spojitých rozdělení: rovnoměrné, exponenciální, Erlangovo, Weibullovo, normální, normované normální, logaritmicko-normální, χ^2 , Studentovo, Fischer-Snedocorovo
- popsat vzájemnou souvislost mezi rozděleními v diskrétním procesu a v bodovém procesu ve spojitém čase

Výklad:

V předcházející kapitole jsme se věnovali rozdělením popisujícím diskrétní náhodnou veličinu, nyní přecházíme k popisu spojité náhodné veličiny. Zopakujme si, že rozdělení spojité náhodné veličiny je dáno distribuční funkci, popř. hustotou pravděpodobnosti. A nyní přejděme přímo k některým speciálním rozdělením.

6.1 Rovnoměrné rozdělení

Již dříve, v některém z předchozích řešených příkladů, jsme se setkali s rovnoměrným (rektangulárním) rozdělením. Jde o rozdělení, jehož hustota pravděpodobnosti je konstantní na nějakém intervalu $\langle a;b\rangle$ a všude jinde je nulová.

X … náhodná veličina s rovnoměrným rozdělením na intervalu $\langle a;b\rangle$

$$X \to R(a;b)$$

Hustota pravděpodobnosti:

$$f(x) = \begin{matrix} \dfrac{1}{b-a} & x \in \langle a;\mathrm{b}\rangle \\ 0 & jinde \end{matrix}$$

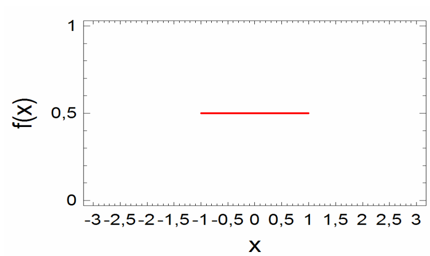
Distribuční funkce:

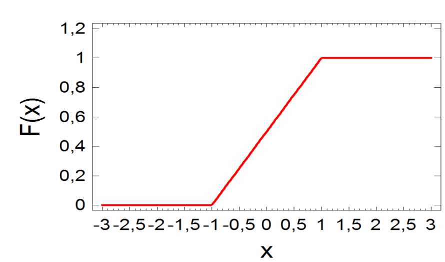
$$F(\mathrm{x}) = \begin{matrix} 0 & \mathrm{x} \in (-\infty;\mathrm{a}) \\ \dfrac{\mathrm{x-a}}{\mathrm{b-a}} & \mathrm{x} \in \langle a;b\rangle \\ 1 & \mathrm{x} \in (b;\infty) \end{matrix}$$

Střední hodnota: $EX = \dfrac{a+b}{2}$

Rozptyl: $DX = \dfrac{(a-b)^2}{12}$

Grafické znázornění hustoty pravděpodobnosti a distribuční funkce rovnoměrného rozdělení na intervalu $\langle -1;1\rangle$





Průvodce studiem:

- **Jak jsme přišli na to, že hustota pravděpodobnosti rovnoměrného rozdělení je definována jako**:

$$f(x)=\begin{matrix}\dfrac{1}{b-a} & x\in\langle a;\mathrm{b}\rangle \\ 0 & jinde\end{matrix} \qquad ?$$

Odvození:

Uvedli jsme si, že rovnoměrné rozdělení na intervalu $\langle a;b\rangle$ je takové, jehož hustota je konstantní na daném intervalu a všude jinde je nulová.

Z toho vyplývá, že vztah pro hustotu pravděpodobnosti můžeme zapsat ve tvaru:

$$f(x)=\begin{matrix}c & x\in\langle a;\mathrm{b}\rangle \\ 0 & jinde\end{matrix}, \qquad \text{kde } c\in R$$

Zbývá nám nalézt konstantu c:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_a^b cdx=[cx]_a^b=c(b-a)$$

$$c(b-a)=1$$

$$\underline{\underline{c=\frac{1}{b-a}}}$$

A proto:

$$f(x)=\begin{matrix}\dfrac{1}{b-a} & x\in\langle a;\mathrm{b}\rangle \\ 0 & jinde\end{matrix}$$

- **Odvození distribuční funkce rovnoměrného rozdělení**

$$x\in(-\infty;a) \qquad F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0dt=0$$

$$x\in\langle a;b\rangle \qquad F(x)=\int_{-\infty}^{a} 0dt+\int_a^x \frac{1}{b-a}dt=\frac{x-a}{b-a}$$

$$x \in (b;\infty) \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{a} 0dt + \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a}dt + \int_{b}^{\infty} 0dt = \frac{b-a}{b-a} = 1$$

- **Odvození střední hodnoty a rozptylu:**

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$$

$$\underline{\underline{EX}} = \int_{a}^{b} x \cdot \frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \underline{\underline{\frac{a+b}{2}}}$$

$$EX^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx$$

$$EX^2 = \int_{a}^{n} x^2 \cdot \frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^3-a^3}{3} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2$$

$$\underline{\underline{DX}} = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{4a^2+4ab+4b^2-3a^2-6ab-3b^2}{12} = \frac{a^2-2ab+b^2}{12} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{(a-b)^2}{12}}}$$

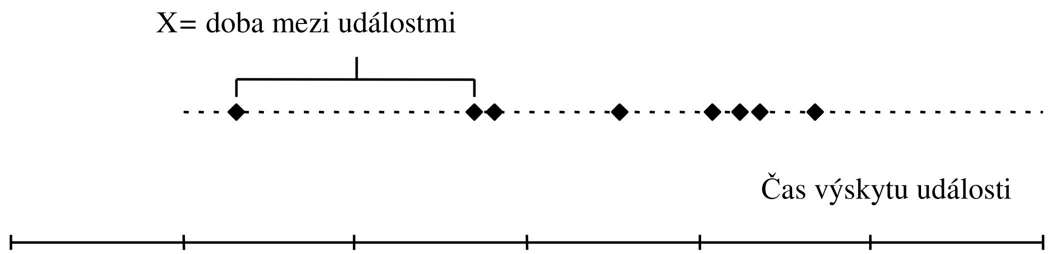
Výklad:

6.2 Exponenciální rozdělení

Mějme Poissonův proces, tj. v určitém časovém intervalu se s konstantní rychlostí výskytu λ objevují události, které jsou na sobě nezávislé (např. dopravní nehody na Martinovské křižovatce, příchody zákazníku do supermarketu, atd.).

Pak vhodným rozdělením pro popis **doby do výskytu první události, popř. doby mezi událostmi** je exponenciální rozdělení.

Toto rozdělení úzce souvisí s Poissonovým rozdělením. Jestliže totiž Poissonovo rozdělení popisovalo **počet** nějakých událostí v časovém intervalu, exponenciální rozdělení se používá k popisu **doby** do výskytu příslušné události. Např. počet dopravních nehod na Martinovské křižovatce za určitý časový interval se popisuje Poissonovým rozdělením, zatímco dobu od jedné nehody do druhé lze popisovat exponenciálním rozdělením.



X má **exponenciální rozdělení**

Obě tato rozdělení sehrávají důležitou roli v teorii spolehlivosti. Časté aplikace jsou též v teorii hromadné obsluhy (teorie front), kde se pomocí exponenciálního rozdělení modeluje doba čekání ve frontě. To, že náhodná veličina X má exponenciální rozdělení s parametry A a λ budeme zapisovat:

$$X \rightarrow E(A;\lambda)$$

Hustota pravděpodobnosti tohoto rozdělení má tvar:

$$f(\mathrm{t}) = \lambda \cdot \mathrm{e}^{-\lambda(\mathrm{t}-\mathrm{A})}; \qquad \mathrm{t} > \mathrm{A};\ \mathrm{A} \in \mathrm{R};\ \lambda > 0$$

Parametr **A** se často interpretuje jako tzv. „**parametr posunutí**“ rozdělení na ose x. Velmi často se při aplikacích setkáváme s "neposunutým" exponenciálním rozdělením, pro které A=0. **My se nadále budeme zabývat pouze tímto „neposunutým“ exponenciálním rozdělením.**

To, že náhodná veličina X má exponenciální rozdělení s parametry A=0 a λ budeme zapisovat:

$$X \rightarrow E(\lambda)$$

Pak se tvar **hustoty pravděpodobnosti** poněkud zjednoduší:

$$f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}; \qquad \mathrm{t} > 0;\ \lambda > 0$$

Distribuční funkce náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením E(λ):

$$F(\mathrm{t}) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}; \qquad t > 0;\ \lambda > 0$$

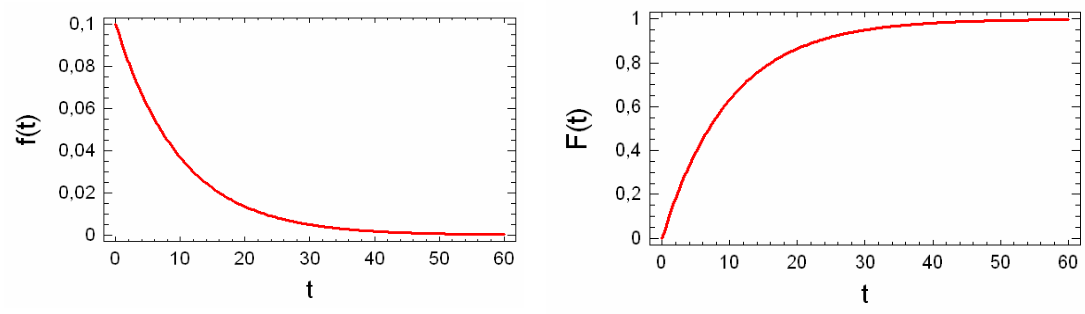
Intenzita poruch náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením E(λ):

$$\lambda(t) = \lambda = konst.; \qquad t > 0;\ \lambda > 0$$

Střední hodnota: $EX = \dfrac{1}{\lambda}$

Rozptyl: $DX = \dfrac{1}{\lambda^2}$

Grafické znázornění hustoty pravděpodobnosti a distribuční funkce exponenciálního rozdělení



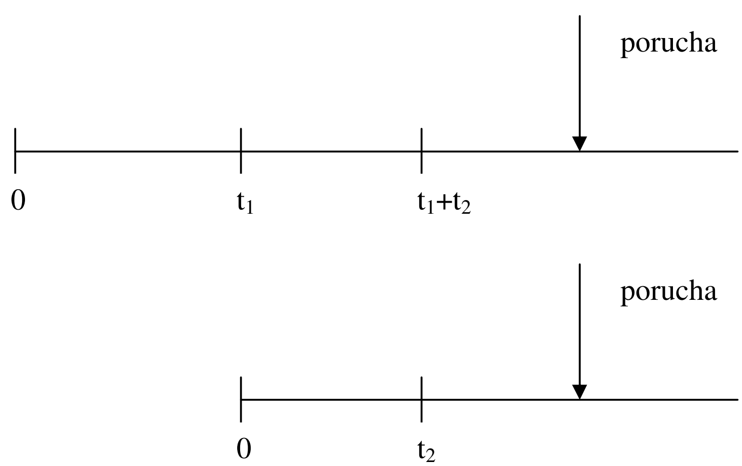
6.2.1 Exponenciální rozdělení = „rozdělení bez paměti"

Exponenciální rozdělení bývá někdy nazýváno "**rozdělení bez paměti**". Tento název znamená, že:

$$P(X > (t_1 + t_2) | X > t_1) = \mathrm{P}(X > t_2); \qquad t_1; t_2 \geq 0$$

Co si představit pod tímto vztahem?

Považujme exponenciální náhodnou veličinu X za dobu do poruchy nějakého zařízení. Pak pravděpodobnost, že zařízení, které pracovalo bez poruchy po dobu t_1, bude pracovat bez poruchy ještě alespoň po dobu t_2, je rovna pravděpodobnosti, že zařízení, které dosud nebylo v provozu, bude pracovat alespoň po dobu t_2.



X … doba do poruchy

Zdá se jako by toto zařízení "zapomnělo" na dříve odpracovanou dobu. (Považovali-li bychom dobu do poruchy Vašeho monitoru za exponenciální náhodnou veličinu, pak pravděpodobnost, že se Váš monitor porouchá za více než 200hodin od této chvíle, by nijak nezávisela na jeho stáří (době jeho předcházejícího provozu)).

Tato vlastnost vysvětluje použití exponenciálního rozdělení v teorii spolehlivosti. **Exponenciální rozdělení popisuje dobře rozdělení doby života zařízení, u kterých dochází k poruše ze zcela náhodných příčin a nikoliv v důsledku opotřebení** (mechanické opotřebení, únava materiálu apod.). Zároveň tato vlastnost exponenciálního rozdělení vysvětluje proč je jeho intenzita poruch konstantní (není závislá na délce předcházejícího provozu zařízení).

Má-li doba do výskytu události exponenciální rozdělení, pak informace o tom, že událost nenastala po dobu t_1, nemění pravděpodobnost výskytu události v následujícím období délky t_2.

Průvodce studiem:

A opět přichází pasáž věnována zájemcům o matematické pozadí používaných vztahů:

- **Odvození distribuční funkce exponenciálního rozdělení**

➢ Popisujeme náhodnou veličinu X.

X ... doba do výskytu události (doba mezi událostmi) v Poissonově procesu, $X \rightarrow E(\lambda)$

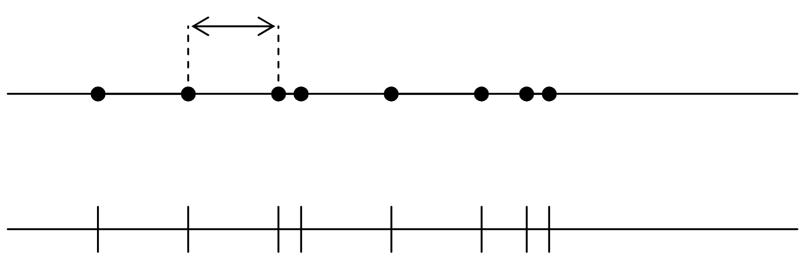
➢ Definujme si náhodnou veličinu N_t jako:

$\mathbf{N_t}$ ... počet výskytu události v časovém intervalu (0;t), $N_t \rightarrow Po(\lambda t)$

➢ Na základě logické úvahy, které napomůže následující obrázek, pak můžeme tvrdit, že následující jevy jsou ekvivalentní:

$(N_t \geq 1)$ ... v časovém intervalu (0;t) dojde k alespoň jednomu výskytu události
$(X < t)$ ... doba mezi událostmi (doba do první události) je menší než t

X ... doba mezi událostmi



doba výskytu události

Což můžeme zapsat následující formou:

$$(N_t \geq 1) \Leftrightarrow (X < t)$$

- Na základě výše uvedené ekvivalence jevů pak můžeme zapsat i příslušné vztahy pro jejich pravděpodobnosti a z nich odvodit distribuční funkci náhodné veličiny X (doby do výskytu události)

$$\begin{aligned} P(X<t) &= P(N_t \geq 1) \\ F(t) &= 1-P(N_t<1) \\ F(t) &= 1-P(N_t=0) \\ F(t) &= 1-\frac{(\lambda t)^0 e^{-\lambda t}}{0!} \\ F(t) &= 1-e^{-\lambda t}; \qquad t\geq 0;\ \lambda>0 \end{aligned}$$

- **Odvození hustoty pravděpodobnosti exponenciálního rozdělení**

- Hustotu pravděpodobnosti odvodíme z převodního vztahu mezi hustotou a distribuční funkcí:

$$f(t)=\frac{dF(t)}{dt}$$
$$f(t)=\lambda e^{-\lambda t} \qquad t\geq 0;\ \lambda>0$$

- **Odvození intenzity poruch exponenciálního rozdělení**

- Intenzitu poruch odvodíme z definičního vztahu:

$$\lambda(t)=\frac{f(t)}{1-F(t)}; \qquad F(t)<1,\ tj.\ t>0$$
$$\lambda(t)=\frac{\lambda\cdot e^{-\lambda t}}{1-\left(1-e^{-\lambda t}\right)}=\lambda=\frac{1}{EX}$$

- **Odvození střední hodnoty a rozptylu**

$$\underline{\underline{E'X}}=\int_{-\infty}^{\infty} t\cdot f(t)dt=\int_{0}^{\infty} t\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda t}dt=\left|\begin{matrix} u=\lambda t & v'=e^{-\lambda t} \\ u'=\lambda & v=\left(-\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda t}\end{matrix}\right|=\lim_{a\to\infty}\left[-t\cdot e^{-\lambda t}\right]_0^a+\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}dt=$$

$$=(-1)\cdot\lim_{a\to\infty}\frac{a}{e^{\lambda a}}+\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}dt=(-1)\cdot\lim_{a\to\infty}\frac{1}{\lambda\cdot e^{\lambda a}}+\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}dt=0+\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}dt=\lim_{a\to\infty}\left[-\frac{1}{\lambda}\cdot e^{-\lambda t}\right]_0^a=\underline{\underline{\frac{1}{\lambda}}}$$

$$E'X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot f(t)dt = \int_0^{\infty} t^2 \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda t} dt = \left| \begin{matrix} u = (\lambda t^2) & v' = e^{-\lambda t} \\ u' = (2\lambda t) & v = \left(-\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda t} \end{matrix} \right| = \lim_{a\to\infty} \left[-t^2 e^{-\lambda t} \right]_0^a +$$

$$+ \int_0^{\infty} 2 \cdot t \cdot e^{-\lambda t} dt = (-1) \cdot \lim_{a\to\infty} \frac{a^2}{e^{\lambda a}} + \int_0^{\infty} 2 \cdot t \cdot e^{-\lambda t} dt = (-1) \cdot \lim_{a\to\infty} \frac{2a}{\lambda \cdot e^{\lambda a}} + \int_0^{\infty} 2 \cdot t \cdot e^{-\lambda t} dt =$$

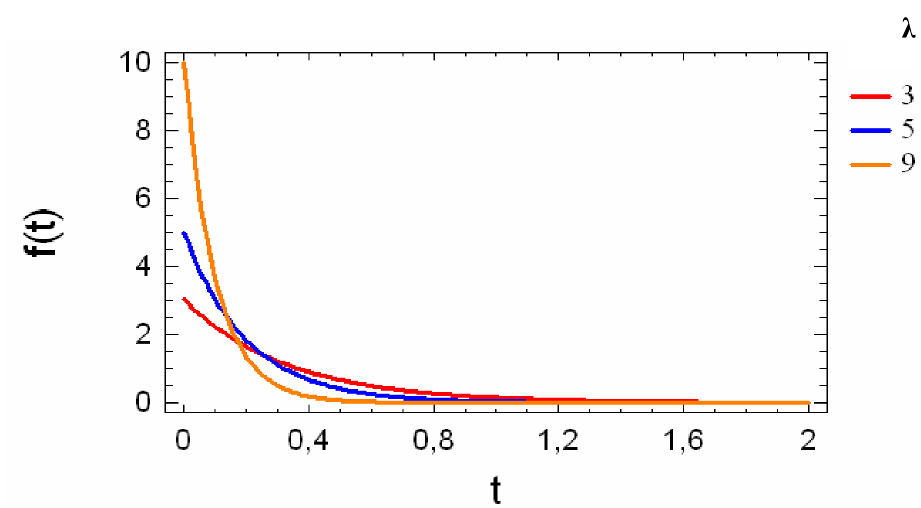
$$= (-1) \cdot \lim_{a\to\infty} \frac{2}{\lambda^2 \cdot e^{\lambda a}} + \int_0^{\infty} 2 \cdot t \cdot e^{-\lambda t} dt = 0 + \int_0^{\infty} 2 \cdot t \cdot e^{-\lambda t} dt = \left| \begin{matrix} u = (2t) & v' = e^{-\lambda t} \\ u' = 2 & v = \left(-\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda t} \end{matrix} \right| =$$

$$= \lim_{a\to\infty} \left[\frac{-2t}{\lambda} \cdot e^{-\lambda t} \right]_0^a + \int_0^{\infty} \left(\frac{2}{\lambda} \right) \cdot e^{-\lambda t} dt = \left(-\frac{2}{\lambda} \right) \cdot \lim_{a\to\infty} \frac{a}{e^{\lambda a}} - \frac{2}{\lambda^2} \cdot \lim_{a\to\infty} \left[e^{-\lambda t} \right]_0^a =$$

$$= \left(-\frac{2}{\lambda} \right) \cdot \lim_{a\to\infty} \frac{0}{\lambda \cdot e^{\lambda a}} - \frac{2}{\lambda^2} \cdot (-1) = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$\underline{\underline{DX}} = EX^2 - (EX)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda} \right)^2 = \underline{\underline{\frac{1}{\lambda^2}}}$$

- Následující graf ilustruje některé **příklady hustoty pravděpodobnosti pro různé hodnoty parametru λ**. Stojí za povšimnutí, že tvar hustoty je podobný jako tvar pravděpodobnostní funkce geometrického rozdělení. Exponenciální rozdělení je spojitým ekvivalentem diskrétního geometrického rozdělení pravděpodobnosti.



Řešený příklad:

Výrobce žárovky XX ví, že průměrná životnost žárovek XX je 10.000 h. V rámci své propagační kampaně chce garantovat dobu T, do níž se nespálí více než 3% žárovek. Určete tuto dobu.

Řešení:

X ... životnost žárovky (doba do poruchy) má exponenciální rozdělení

$$X \to E(\lambda)$$

- Určíme parametr λ:

$$\left.\begin{aligned} EX &= \frac{1}{\lambda} \\ EX &= 10.000\,h \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad \lambda = 10^{-4}\,h^{-1}$$

- Na základě zadané pravděpodobnosti nejdeme dobu T:

$$\begin{aligned} P(X < T) &\le 0{,}03 \\ F(T) &\le 0{,}03 \\ 1 - e^{-\lambda T} &\le 0{,}03 \\ 0{,}97 &\le e^{-\lambda T} \\ -\frac{\ln(0{,}97)}{\lambda} &\ge T \end{aligned}$$

$$T \le -10^4 \cdot \ln(0{,}97) \Rightarrow \underline{\underline{T \cong 304\,h}}$$

Výrobce může tvrdit, že více než 97% žárovek má životnost delší než 304 hodin.

Výklad:

6.3 Erlangovo rozdělení

Určitým zobecněním exponenciální náhodné veličiny (doba do (první) poruchy) je náhodná veličina s Erlangovým rozdělením, která **popisuje dobu do výskytu k-té události v Poissonově procesu**.

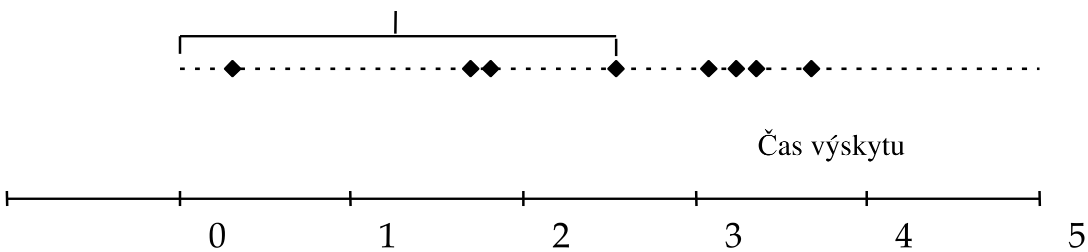
Erlangovo rozdělení je **speciálním typem tzv. Gamma rozdělení pro k z množiny celých čísel**. (Tento vztah je vhodné znát, chceme-li k nalezení distribuční funkce, popř. hustoty pravděpodobnosti použít statistický software – některé statistické pakety mají implementováno pouze Gamma rozdělení a hodnoty Erlangova rozdělení pak získáme dosazením příslušných parametrů).

Erlangovo rozdělení má dva parametry: **k** – počet události (parametr tvaru, shape, α – v Gamma rozdělení), k nimž má dojít a rychlost výskytu těchto události **λ** (parametr měřítka, scale, β v Gamma rozdělení).

Má-li náhodná veličina X Erlangovo rozdělení, značíme to takto:

$$X_k \rightarrow Erlang\,(k, \lambda)$$

X_k = doba do výskytu k.události (na obr. k = 4)



X_k má Erlangovo rozdělení

Náhodnou veličinu s Erlangovým rozdělením si můžeme představit jako součet k nezávislých exponenciálních náhodných veličin (doba do výskytu k-té události je součtem dob mezi 0-tou a 1. události, 1. a 2. události, ..., (k-1). a k. události).

Pro Erlangovo rozdělení s parametry k a λ platí tyto vztahy:

Hustota pravděpodobnosti:

$$f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}; \qquad t > 0$$

Distribuční funkce:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^j}{j!}$$

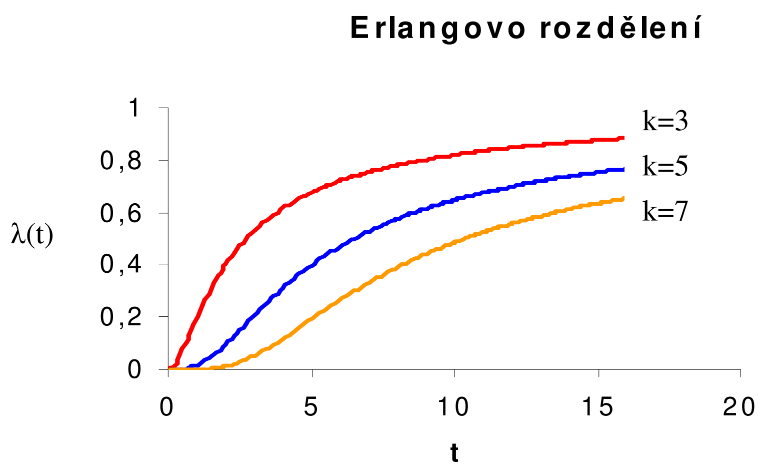
Intenzita poruch:

$$\lambda(t) = \frac{\lambda}{(k-1)!\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{(k-1-j)!(\lambda t)^j}}$$

Střední hodnota: $EX_k = \dfrac{k}{\lambda}$

Rozptyl: $DX_k = \frac{k}{\lambda^2}$

Graf intenzity poruch Erlangova rozdělení pro λ = 1; k = 3; 5; 7



Intenzita poruch λ(t) je v případě Erlangova rozdělení rostoucí funkce a proto je toto **rozdělení vhodné pro modelování procesů stárnutí**.

Průvodce studiem:

Následující pasáž je znovu určena pro zájemce o matematické pozadí používaných vztahů.

- **Odvození distribuční funkce Erlangova rozdělení**

Mějme:

X_k ... doba do výskytu k-té události v Poissonově procesu, $X_k \to Erlang\,(k;\lambda)$
N_t ... počet výskytu události v časovém intervalu (0;t), $N_t \to Po\,(\lambda t)$

Platí, že v časovém intervalu (0;t) nastane alespoň k události právě když doba do výskytu k-té události je menší než t.

$$(N_t \geq k) \Leftrightarrow (X_k < t)$$

Z této ekvivalence lze odvodit distribuční funkci Erlangova rozdělení.

$$F(t) = P(X_k < t) = P(N_t \geq k) = 1 - P(N_t < k) = 1 - \sum_{j=0}^{k-1}\left(e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^j}{j!}\right) = 1 - e^{-\lambda t} \cdot \sum_{j=0}^{k-1}\frac{(\lambda t)^j}{j!}$$

- **Odvození hustoty pravděpodobnosti**

Hustotu pravděpodobnosti získáme derivací distribuční funkce:

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot \sum_{j=0}^{k-1}\frac{(\lambda t)^j}{j!} + \left(-e^{-\lambda t}\right) \cdot \sum_{j=0}^{k-1}\frac{j \cdot (\lambda t)^{j-1} \cdot \lambda}{j!} =$$

$$= \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot \sum_{j=0}^{k-1}\frac{(\lambda t)^j}{j!} - \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot \sum_{j=1}^{k-1}\frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!} =$$

$$= \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot \left(\sum_{j=0}^{k-2}\frac{(\lambda t)^j}{j!} + \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}\right) - \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot \sum_{j=0}^{k-2}\frac{(\lambda t)^j}{j!} =$$

$$= \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot \sum_{j=0}^{k-2}\frac{(\lambda t)^j}{j!} + \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} - \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot \sum_{j=0}^{k-2}\frac{(\lambda t)^j}{j!} = \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}$$

- **Odvození intenzity poruch**

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$$

$$= \frac{\lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}}{e^{-\lambda t} \cdot \sum_{j=0}^{k-1}\frac{(\lambda t)^j}{j!}} = \frac{\lambda}{(k-1)! \cdot \sum_{j=0}^{k-1}\frac{(\lambda t)^j}{(\lambda t)^{k-1} \cdot j!}} = \frac{\lambda}{(k-1)! \cdot \sum_{j=0}^{k-1}\frac{(\lambda t)^{j-k+1}}{j!}} = \frac{\lambda}{(k-1)! \cdot \sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{(\lambda t)^{k-1-j} \cdot j!}} =$$

$$= \frac{\lambda}{(k-1)! \cdot \sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{(\lambda t)^j \cdot (k-1-j)!}}$$

- **Odvození střední hodnoty a rozptylu**

Mějme:

X

X ... doba do výskytu události v Poissonově procesu, $X \rightarrow E(\lambda)$

Je zřejmé, že Erlangova náhodná veličina (s parametry k; λ) je součtem k exponenciálních veličin (s parametrem λ):

$$X_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$$

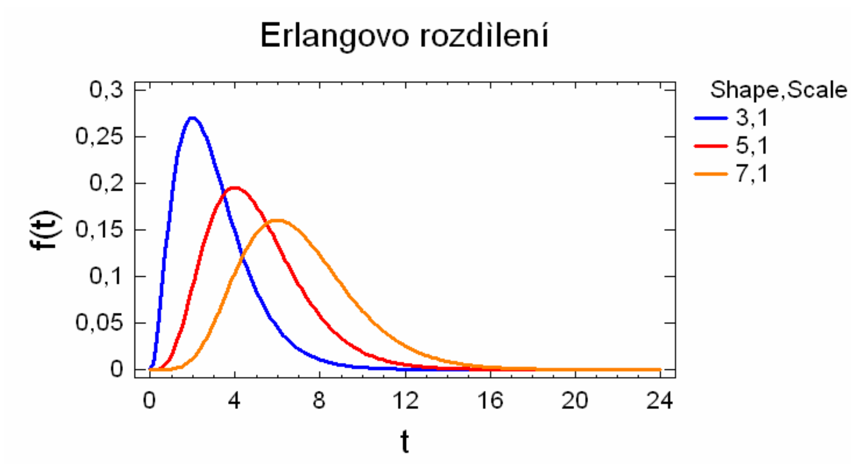
Z vlastností střední hodnoty víme, že střední hodnota součtu náhodných veličin je rovna součtu jejich středních hodnot:

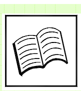
$$EX_k = \sum_{i=1}^{k} EX_i = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} + \ldots + \frac{1}{\lambda} = \frac{k}{\lambda}$$

Jednotlivé exponenciální náhodné veličiny jsou nezávislé a proto taktéž rozptyl součtu náhodných veličin je roven součtu jejich rozptylů:

$$DX_k = \sum_{i=1}^{k} DX_i = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \ldots + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{k}{\lambda^2}$$

- Na následujícím obrázku jsou **příklady hustoty Gamma rozdělení pro λ = 1 a různé hodnoty k**. Poznamenejme, že s rostoucím k roste rozptyl tohoto rozdělení a koeficient šikmosti se přibližuje nule (rozdělení je více symetrické).





Výklad:

6.4 Weibullovo rozdělení

Weibullovo rozdělení je velmi flexibilní (díky parametru β) a proto se jím zejména v teorii spolehlivosti popisují spojité náhodné veličiny definované jako **doba do poruchy** (doba bezporuchovosti). Používá se zejména při popisu komponent, které jsou **v období ranných**

poruch nebo v období stárnutí (tj. tam kde se projevuje mechanické opotřebení nebo únava materiálu).

Weibullovo rozdělení má dva parametry: **Θ** – parametr měřítka (scale, Θ > 0, závisí na materiálu, namáhání a podmínkách užívání) a **β** – parametr tvaru (shape, β > 0, na jeho hodnotě závisí tvar intenzity poruch a tím i vhodnost použití pro určité období doby života).

Má-li náhodná veličina X Weibullovo rozdělení, značíme to takto:

$$X \rightarrow W(\Theta, \beta)$$

Distribuční funkce:

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\Theta}\right)^{\beta}}; \qquad t > 0; \Theta > 0; \beta > 0$$

Hustota pravděpodobnosti:

$$f(t) = \frac{\beta}{\Theta}\left(\frac{t}{\Theta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\Theta}\right)^{\beta}}; \qquad t > 0; \Theta > 0; \beta > 0$$

Intenzita poruch:

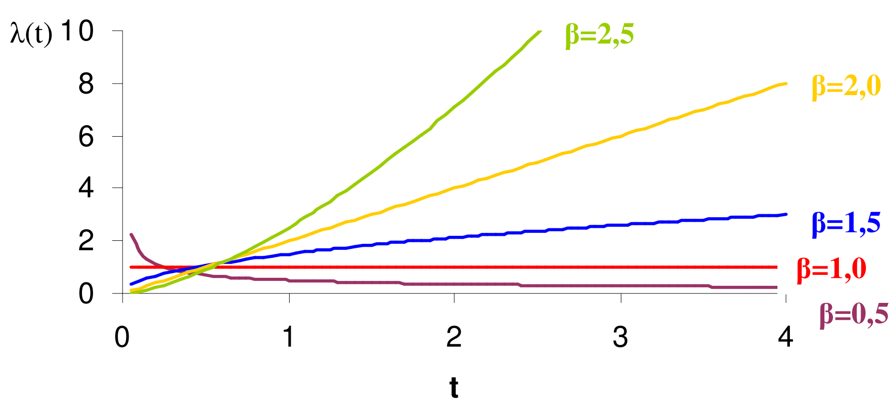
$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\Theta}.\left(\frac{t}{\Theta}\right)^{\beta-1}; \qquad t > 0; \Theta > 0; \beta > 0$$

Ze vztahu pro intenzitu poruch Weibullova rozdělení je zřejmé, že:

$$\lambda(t) = konst. \cdot t^{\beta-1}$$

a proto tvar intenzity poruch závisí na volbě parametru β.

Některé příklady intenzity poruch Weibullova rozdělení (Θ=1):



Všimněme si, že pro β=1, přejde Weibullovo rozdělení v rozdělení exponenciální (konstantní intenzita poruch) s parametrem $\lambda = \frac{1}{\Theta}$.

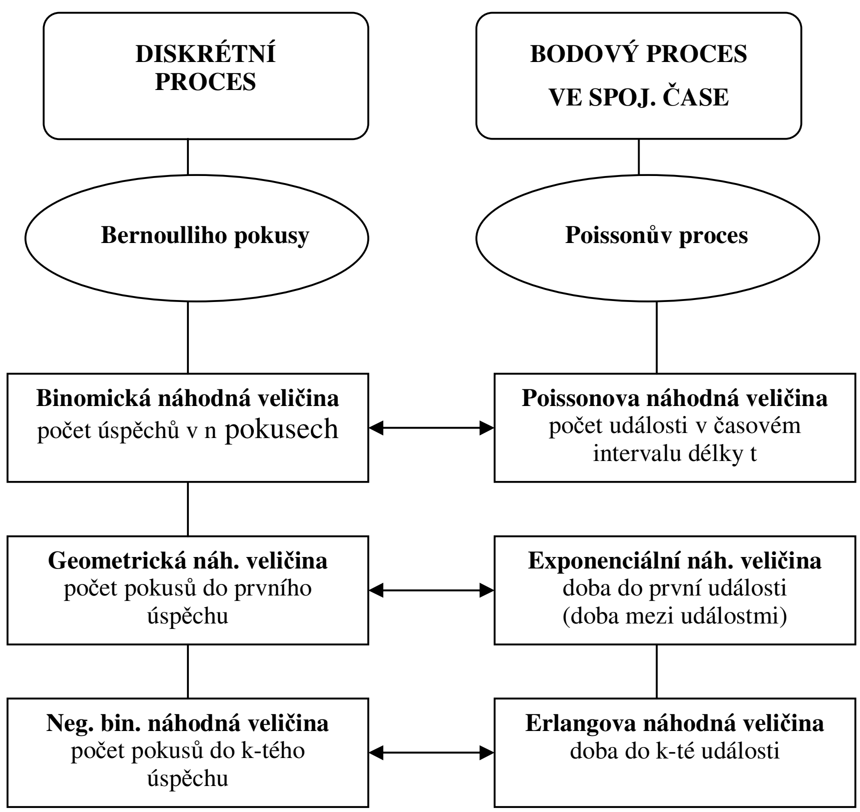
$$\beta = 1 \quad \Rightarrow \quad W(\Theta;1) \rightarrow E\left(\frac{1}{\Theta}\right)$$

Z výše uvedeného grafu je rovněž zřejmé použití Weibullova rozdělení v závislosti na parametru β:

$0 < \beta < 1$	období dětských nemocí	λ(t) ... klesající funkce
$\beta = 1$	období stabilního života	$\lambda(t) = konst. = \frac{1}{\Theta} = \lambda$ (exp. rozdělení)
$1 < \beta < 2$	období stárnutí	λ(t) ... konvexní, rostoucí funkce
$\beta = 2$	období stárnutí	λ(t) ... lineárně rostoucí funkce
$\beta > 2$	období stárnutí	λ(t) ... konkávní, rostoucí funkce

6.5 Souvislost mezi rozděleními

Mezi mnohými dosud probranými rozděleními založenými na Bernoulliho pokusech a na Poissonově procesu lze najít logickou souvislost zobrazenou na následujícím obrázku.



Řešený příklad:

Předpokládejme, že doba do poruchy určitého systému je modelována Weibullovým rozdělením s lineárně rostoucí intenzitou poruch. (Θ =50)

a) Jaká je intenzita poruch systému po deseti hodinách funkce?
b) Jaká je pravděpodobnost, že systém bude pracovat bez poruchy během počátečních 100 hodin?

Řešení:

X ... doba do poruchy, ($X \to W(50;\beta)$

Hodnotu parametru β určíme na základě poznámky, že intenzita poruch je lineárně rostoucí. Obecný tvar intenzity poruch Weibullova rozdělení je:

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\Theta}.\left(\frac{t}{\Theta}\right)^{\beta-1}; \qquad t>0;\Theta>0;\beta>0$$

_z čehož vyplývá, že β = 2.

$$X \to W(50;2)$$

ada) Hledanou intenzitu poruch určíme dosazením do obecného vztahu:

$$\underline{\underline{\lambda(10)}} = \frac{2}{50}.\left(\frac{10}{50}\right)^{2-1} \underline{\underline{= 0{,}008}}$$

Intenzita poruch daného systému je po 10 hodinách provozu 0,008. Tj. pokud byl systém po 10 hodin bezporuchový, pak pravděpodobnost, že v následujícím velmi krátkém časovém intervalu Δt dojde k poruše, je 0,008 .Δt.

adb) Pravděpodobnost, že systém bude prvních 100 hodin bezporuchový určíme přes jev opačný, jehož pravděpodobnost udává distribuční funkce.

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\Theta}\right)^{\beta}}; \qquad t>0;\Theta>0;\beta>0$$

$$\underline{\underline{P(X>100)}} = 1 - F(100) = 1 - \left[1 - e^{-\left(\frac{100}{50}\right)^2}\right] = e^{-\left(\frac{100}{50}\right)^2} = e^{-4} \underline{\underline{= 0{,}018}}$$

Pravděpodobnost, že daný systém bude prvních 100 hodin bezporuchový je 1,8%.

Výklad:

6.6 Normální rozdělení

Normální rozdělení je nejdůležitějším pravděpodobnostním rozdělením, popisujícím chování velkého množství náhodných jevů v technice, přírodních vědách i ekonomii.

Klasickým příkladem tohoto rozdělení je rozdělení náhodných chyb vzniklých při měření nějaké veličiny (tažnosti 0,5 palcových trubek). Při opakovaném měření téže veličiny za stejných podmínek způsobují náhodné (neovlivnitelné) vlivy odchylky od skutečné hodnoty měřené veličiny.

Lze říci, že **normální rozdělení je vhodným pravděpodobnostním modelem tehdy, působí-li na kolísání náhodné veličiny velký počet nepatrných a vzájemně nezávislých vlivů**.

Značný význam normálního rozdělení spočívá rovněž v tom, že **za určitých podmínek lze pomocí něj aproximovat řadu jiných spojitých i nespojitých rozdělení**.

Normální rozdělení má dva parametry: $\boldsymbol{\mu}$ – střední hodnotu, charakterizující polohu tohoto rozdělení a $\boldsymbol{\sigma}^2$ – rozptyl, charakterizující rozptýlení hodnot kolem střední hodnoty.

POZOR!
V anglosasské literatuře (a v některých statistických paketech) jsou jako parametry normálního rozdělení uváděny střední hodnota $\boldsymbol{\mu}$ a směrodatná odchylka $\boldsymbol{\sigma}$.

Normální rozdělení (hustota pravděpodobnosti) je jednomodální rozdělení, symetrické kolem střední hodnoty μ. Střední hodnota je rovna modu a mediánu. Náhodná veličina X, jež se rímto rozdělením řídí, může nabývat libovolné hodnoty z R. Křivka hustoty pravděpodobnosti (Gaussova křivka) má zvonovitý tvar s maximem ve střední hodnotě a „šířkou“ úměrnou směrodatné odchylce.

To, že se náhodná veličina X řídí normálním rozdělením se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2 zapisujeme:

$$X \rightarrow N\left(\mu;\sigma^2\right)$$

Hustota pravděpodobnosti:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}; \qquad -\infty < x < \infty$$

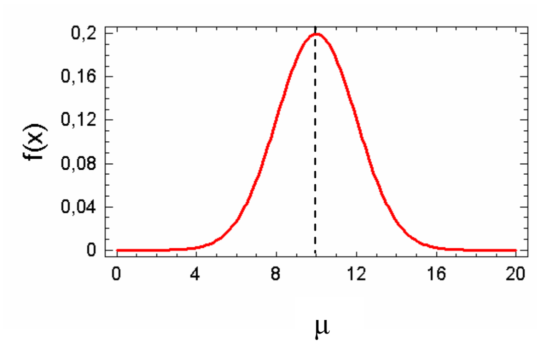
Distribuční funkce:

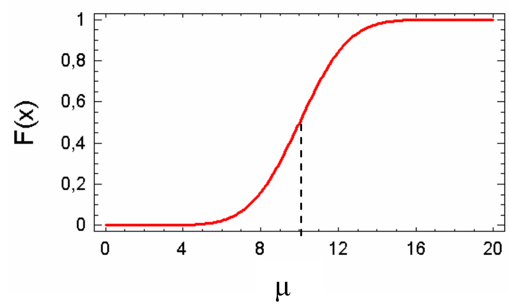
$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\left(\frac{t-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2} dt$$

Střední hodnota: $EX = \mu$

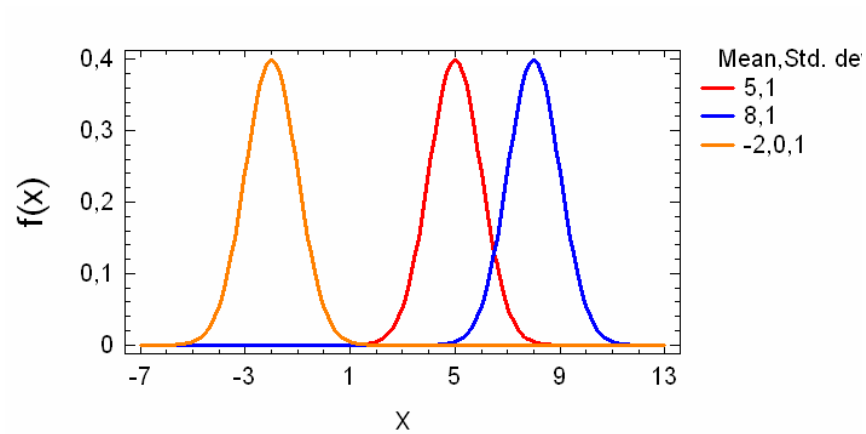
Rozptyl: $DX = \sigma^2$

Grafické znázornění hustoty pravděpodobnosti a distribuční funkce:

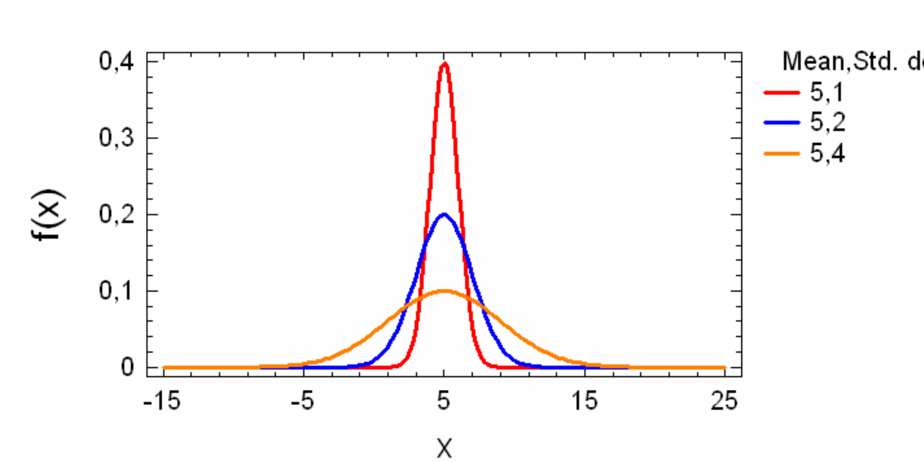




Vliv μ na křivku hustoty pravděpodobnosti



Vliv σ na křivku hustoty pravděpodobnosti



Výpočet distribuční funkce je analyticky nemožný a proto se využívá možnosti vyjádřit distribuční funkci normální náhodné veličiny pomocí distribuční funkce normované náhodné veličiny, tj. normální náhodné veličiny s parametry μ = 0, σ^2 = 1. Distribuční funkce normované náhodné veličiny je přitom tabelována. (Viz. 6.7.1)

6.7 Normované (standardizované) normální rozdělení

Jak již jsme se zmínili, jde o speciální typ normálního rozdělení se střední hodnotou rovnou nule a jednotkovým rozptylem.

To, že má náhodná veličina Z (obvyklé značení pro tuto náhodnou veličinu) normované normální rozdělení, značíme:

$$Z \to N(0;1)$$

Důležitost tohoto rozdělení ukazuje i nestandardní značení pro distribuční funkci (Φ(x)) a hustotu pravděpodobnosti (φ(x)).

Hustota pravděpodobnosti:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}; \qquad -\infty < x < \infty$$

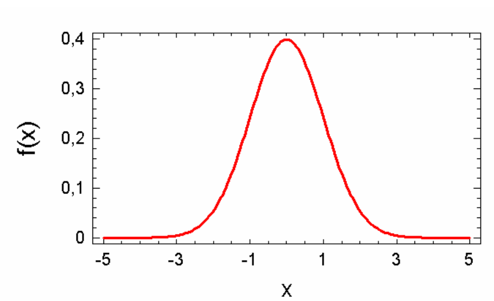
Distribuční funkce:

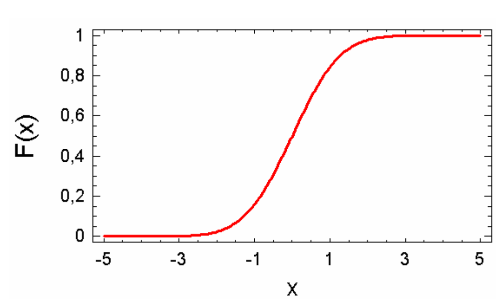
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}} dt$$

Střední hodnota: $EZ = 0$

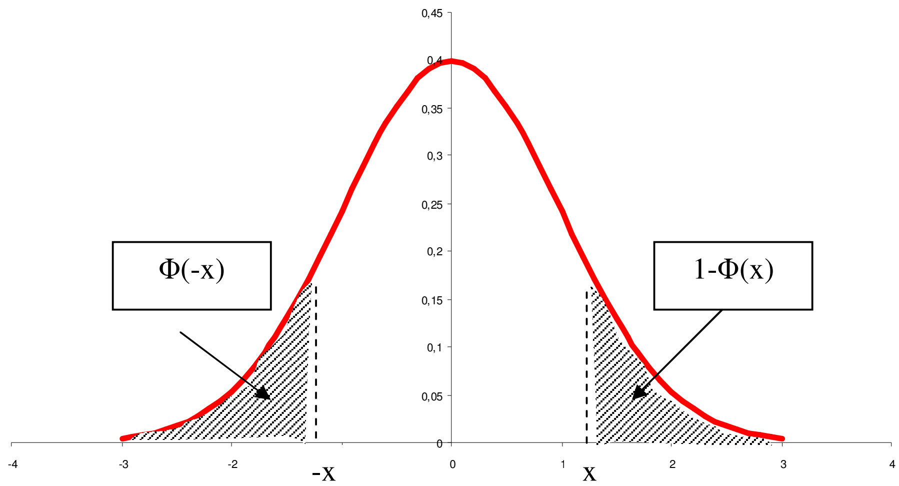
Rozptyl: $DZ = 1$

Grafické znázornění hustoty pravděpodobnosti a distribuční funkce:





Určení distribuční funkce Φ(x):



Hustota pravděpodobnosti normovaného normálního rozdělení je symetrická kolem „0“ a platí pro ni tedy:

$$\varphi(z) = \varphi(-z); \qquad -\infty < z < \infty$$

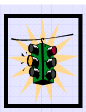
A opět ze symetrie dostáváme pro distribuční funkci (viz. výše uvedený obrázek):

$$\Phi(z) = 1 - \Phi(-z); \qquad -\infty < z < \infty$$

Zároveň lze dokázat, že pro kvantily normovaného normálního rozdělení platí vztah:

$$z_p = -z_{1-p}$$

Důležitost tohoto rozdělení spočívá zejména v tom, že jeho **distribuční funkce je tabelována** (viz. příloha Tabulky). V tabulkách najdeme distribuční funkci normovaného normálního rozdělení pro z ≥ 0, pro z < 0 určíme distribuční funkci na základě převodního vztahu mezi Φ(z) a Φ(-z).



Řešený příklad:

Určete:

a) Φ(0,54)
b) Φ(-2,42)
c) $z_{0,75}$
d) $z_{0,25}$

Řešení:

ada) Příslušnou distribuční funkci nalezneme v Tabulce 1:

V prvním sloupci je uveden argument distribuční funkce s přesností na jedno desetinné místo (0,5), identifikátor druhého sloupce udává druhé desetinné místo argumentu (4).

$$\underline{\underline{\Phi(0{,}54) = 0{,}705}}$$

adb) Pro nalezení distribuční funkce záporného argumentu musíme použít převodní vztah:

$$\Phi(z) = 1 - \Phi(-z); \qquad -\infty < z < \infty$$

V našem případě:

$$\Phi(-2{,}42) = 1 - \Phi(-2{,}42)$$
$$\Phi(-2{,}42) = 1 - 0{,}992$$
$$\underline{\underline{\Phi(-2{,}42) = 0{,}008}}$$

adc) Pro určení 100p%-ního kvantilu se musíme pokusit najít p v jádru tabulky a určit pro ně příslušnou hodnotu z_p.

$$\Phi(z_p) = p$$

V našem případě:

$$\Phi(z_{0,75}) = 0{,}75$$
$$\underline{\underline{z_{0,75} \quad \cong 0{,}67}}$$

add) V Tabulce 1 nalezneme hodnoty (50 až 100)%-ních kvantilů. Pro nalezení (0 až 50)%-ních kvantilů musíme použít převodní vztah mezi kvantily, který si tímto odvodíme:

$$\Phi(z_p) = p; \qquad \Phi(z_{1-p}) = 1 - p$$
$$1 - \Phi(z_p) = 1 - p$$
$$\Phi(-z_p) = \Phi(z_{1-p})$$
$$-z_p = z_{1-p}$$

V našem případě:

- ➢ $z_{0,25}$ v Tabulce 1 nenalezneme.
- ➢ $z_{0,25} = -z_{1-0,25} = -z_{0,75}$
- ➢ Nalezneme $z_{0,75}$:

$$\Phi(z_{0,75}) = 0{,}75$$
$$z_{0,75} = 0{,}67$$

- ➢ Určíme $z_{0,25}$: $\underline{\underline{z_{0,25}}} = -z_{0,75} \underline{\underline{= -0{,}67}}$

Výklad:

6.7.1 Standardizace normálního rozdělení

Jak jsme již uvedli výše, distribuční funkci normální náhodné veličiny nedokážeme analyticky nalézt a proto pro její určení používáme distribuční funkce normované (standardní) normální náhodné veličiny.

Nechť:

$$X \to N\left(\mu;\sigma^2\right)$$

Pak definujme náhodnou veličinu Z:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

Náhodná veličina Z má normované normální rozdělení, $Z \to N(0;1)$.

Mezi distribuční funkci normální a normované normální náhodné veličiny platí tento převodní vztah:

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Důkaz:

$$F(x) = P(X < x) = P(Z\cdot\sigma + \mu < x) = P\left(Z < \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Řešený příklad:

Nechť náhodná veličina X má normální rozdělení se střední hodnotou 10 a směrodatnou odchylkou 5. Určete:

a) F(7)
b) $x_{0,75}$
c) $x_{0,30}$

Řešení:

$$X \to N(10;25) \Rightarrow \mu = 10;\ \sigma^2 = 25$$

ada) Distribuční funkci normální náhodné veličiny určíme pomocí standardizace:

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$
$$F(7) = \Phi\left(\frac{7-10}{\sqrt{25}}\right) = \Phi(-0{,}6)$$
$$F(7) = 1 - \Phi(0{,}6)$$
$$F(7) = 1 - 0{,}726 \quad (viz.\, Tabulka\, 1)$$
$$\underline{\underline{F(7) = 0{,}274}}$$

adb) Postup při určení horního kvartilu je následující (opět využijeme standardizace):

$$F(x_{0,75}) = 0{,}75$$
$$\Phi\left(\frac{x_{0,75}-10}{\sqrt{25}}\right) = 0{,}75$$
$$\frac{x_{0,75}-10}{\sqrt{25}} = 0{,}67 \qquad (viz.\, Tabulka\, 1)$$
$$x_{0,75} = 5 \cdot 0{,}67 + 10$$
$$\underline{\underline{x_{0,75} = 13{,}35}}$$

adc) Poněkud odlišný postup musíme použít pro nalezení 30%-ního kvantilu:

$$F(x_{0,30}) = 0{,}30$$
$$\Phi\left(\frac{x_{0,30}-10}{\sqrt{25}}\right) = 0{,}30$$

V této fázi však ještě nemůžeme použít Tabulku 1, protože v jádru tabulky se nacházejí pouze hodnoty (0,50 až 1,00). A proto rovnici upravíme do vhodnějšího tvaru:

$$\Phi\left(\frac{x_{0,30}-10}{\sqrt{25}}\right) = 0{,}30$$
$$1-\Phi\left(\frac{x_{0,30}-10}{\sqrt{25}}\right) = 1-0{,}30$$
$$\Phi\left(-\frac{x_{0,30}-10}{\sqrt{25}}\right) = 0{,}70$$

A nyní již tabulky můžeme použít:

$$\begin{aligned}
&\Phi\left(-\frac{x_{0,30}-10}{\sqrt{25}}\right) = 0{,}70 \\
&-\frac{x_{0,30}-10}{\sqrt{25}} = 0{,}525 \qquad (viz.\,Tabulka\ 1) \\
&x_{0,30} = -5\cdot 0{,}525+10 \\
&\underline{\underline{x_{0,30} = 7{,}375}}
\end{aligned}$$

Výklad:

6.7.2 Pravidlo 6σ

Pravidlo 6σ je jedním ze základních principů na nichž stojí kontrola kvality a jakosti (SPC – Statisitics Process Control, ISO normy). Toto pravidlo říká, že **máme-li data pocházející z normálního rozdělení o parametrech μ, σ² (hodnoty normální náhodné veličiny X,** $X \to N(\mu,\sigma^2)$**), pak téměř všechna (99,8% z nich) leží v intervalu** $(\mu \pm 3\sigma)$**.** Protože délka tohoto intervalu je 6σ, hovoří se o pravidle šesti sigma.

Důkaz:

$$X \to N(\mu,\sigma^2)$$

Chceme dokázat, že: $P(\mu-3\sigma < X < \mu+3\sigma) = 0{,}998$

$$\begin{aligned}
L:\quad P(\mu-3\sigma < X < \mu+3\sigma) &= F(\mu+3\sigma) - F(\mu-3\sigma) = \Phi\left(\frac{(\mu+3\sigma)-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{(\mu-3\sigma)-\mu}{\sigma}\right) = \\
&= \Phi(3) - \Phi(-3) = \Phi(3) - [1-\Phi(3)] = 2\cdot\Phi(3) - 1 = 2\cdot 0{,}999 - 1 = \\
&= 0{,}998
\end{aligned}$$

$P:\quad 0{,}998$

$L = P$

Řešený příklad:

Stanovme pravděpodobnost, že náhodná veličina X mající rozdělení $N(\mu,\sigma^2)$ nabude hodnoty z intervalu $(\mu - k\cdot\sigma;\ \mu + k\cdot\sigma)$ pro dané kladné k.

Řešení:

Pro k>0:

$$\underline{\underline{P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma)}} = F(\mu + k\sigma) - F(\mu - k\sigma) = \Phi\left(\frac{(\mu + k\sigma) - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{(\mu - k\sigma) - \mu}{\sigma}\right) =$$
$$= \Phi(k) - \Phi(-k) = \Phi(k) - [1 - \Phi(k)] = \underline{\underline{2 \cdot \Phi(k) - 1}}$$

Následující tabulka uvádí hodnoty této pravděpodobnosti pro některé hodnoty k:

k	$P(\mu - k\sigma < \mathrm{X} < \mu + k\sigma)$
1	0,683
1,64	0,900
1,96	0,950
2,58	0,990
3	0,998

Výklad:

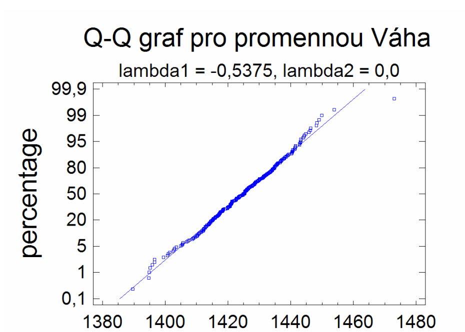
6.7.3 Nástroje ověření normality

Normalita je hlavním předpokladem o datech v drtivé většině analýz a testů (parametrické testy, Shewhartovy regulační diagramy, indexy způsobilosti…). Jde o předpoklad, že data pocházejí z normálního rozdělení. **Ověření normality je nezbytný krok před každou zodpovědnou analýzou jednorozměrných dat**.

a) Grafické znázornění a vizuální posouzení

(uživatel musí mít alespoň minimální znalosti o konstrukci a používání diagnostických exploratorních grafů). Nejčastěji se používá Q-Q graf, jádrové odhady hustoty, popř. kruhový graf.

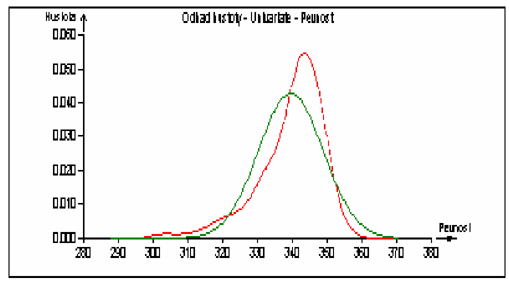
Q-Q graf



Jde o graf pro diagnostiku normality a odlehlých pozorování. Na ose x jsou vyneseny teoretické kvantily normálního rozdělení, na ose y jsou výběrové kvantily konstruované přímo z dat (viz. Exploratorní analýza). Pro normální data bez odlehlých pozorování má graf tvar přímky; pro normální data s odlehlými pozorováními má tvar přímky s koncovými body ležícími mimo tuto přímku; pro systematicky sešikmená data s kladnou šikmostí (např. rozdělení lognormální, exponenciální) má nelineární konvexní tvar . Pro systematicky sešikmená data se zápornou šikmostí má nelineární konkávní tvar . Pro data s vyšší špičatostí než odpovídá normálnímu rozdělení, tedy s vysokou koncentrací dat kolem střední hodnoty (např. Laplaceovo rozdělení) má tvar konkávně-konvexní . Pro data s nižší špičatostí než odpovídá normálnímu rozdělení, tedy s malou koncentrací dat kolem střední hodnoty (např. rovnoměrné rozdělení) má tvar konvexně-konkávní . Proti statistikám má QQ-graf výhodu v možnosti vizuálně posoudit, zda je nelinearita způsobena jen několika body, nebo všemi daty.

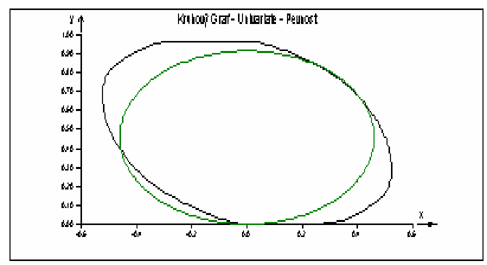
Odhad hustoty

Porovnání průběhu hustoty pravděpodobnosti normálního rozdělení (plná čára) s jádrovým odhadem hustoty vypočítaným na základě dat (přerušovaná čára). V případě normality a většího množství dat jsou si obě křivky blízké.

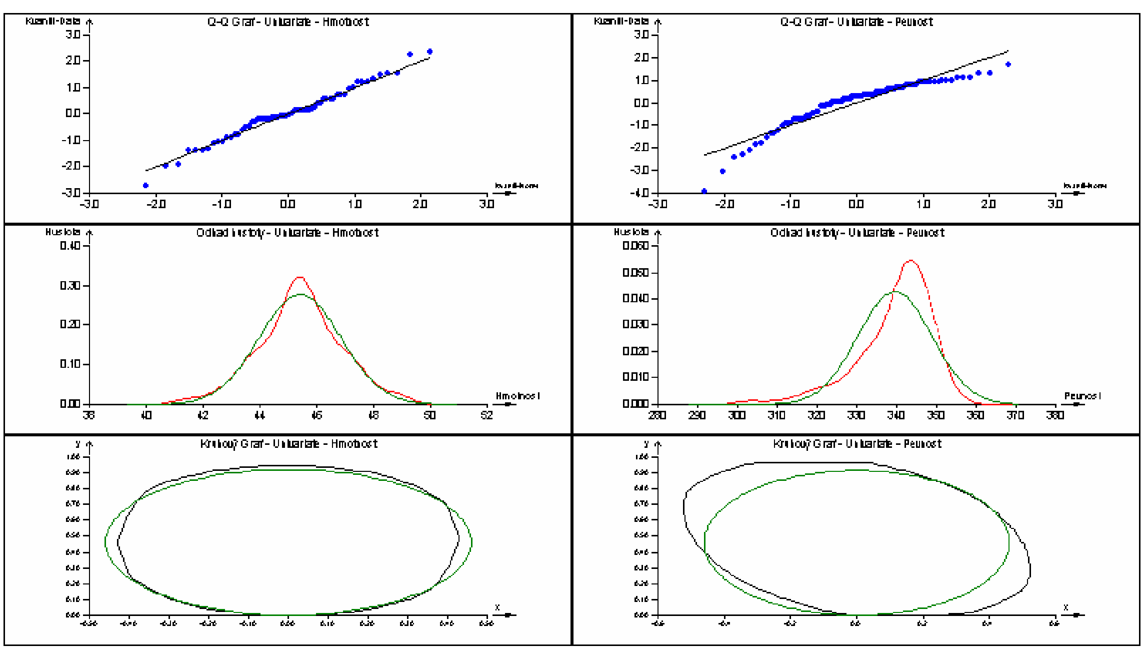


Kruhový graf

Slouží ke komplexnímu vizuálnímu posouzení normality na základě kombinace šikmosti a špičatosti. Zelený kruh (elipsa) je optimální tvar pro normální rozdělení, černý “kruh“ představuje data. V případě normálních dat se obě křivky téměř kryjí.



Ukázka výstupu (statistický software QC. Expert 2.5):



b) Statistické testy o normalitě

Pro ověření toho, zda data lze považovat za výběr z normálního rozdělení se používá mnoho druhů statistických testů (budeme se zabývat později). Pro příklad uveďme – **test dobré shody (Goodness of Fit Test)** a **testy založené na hodnotě odhadu šikmosti a špičatosti**.

6.8 Logaritmicko-normální rozdělení

Jestliže má náhodná veličina Y, Y = ln X, normální rozdělení s parametry μ a σ^2, pak náhodná veličina X má logaritmicko-normální rozdělení se stejnými parametry, což zapisujeme:

$$X \rightarrow LN\left(\mu;\sigma^2\right)$$

Z definice je zřejmé, že náhodná veličina s logaritmicko-normálním rozdělením může nabývat pouze kladných hodnot (definiční obor ln x). Proto nachází uplatnění při **popisu náhodných veličin nabývajících pouze kladných hodnot a to zejména v případech, kdy hustota pravděpodobnosti je asymetrická** (šikmost není nulová) s jedním vrcholem. Značný význam tohoto rozdělení tedy nacházíme v teorii spolehlivosti (různé parametry součástek nabývají pouze kladných hodnot – životnost, rozměry, tažnost, …) a v ekonomii při popisu příjmů (příjmová rozdělení).

Hustota pravděpodobnosti:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}; & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{pro } x \leq 0 \end{cases}$$

Distribuční funkce:

Distribuční funkci log.-normálního rozdělení nalezneme prostřednictvím distribuční funkce normovaného normálního rozdělení.

$$F(x) = \begin{cases} \Phi\left(\dfrac{\ln x - \mu}{\sigma}\right); & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{pro } x \leq 0 \end{cases}$$

Střední hodnota: $EX = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$

Rozptyl: $DX = e^{2\mu + \sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$

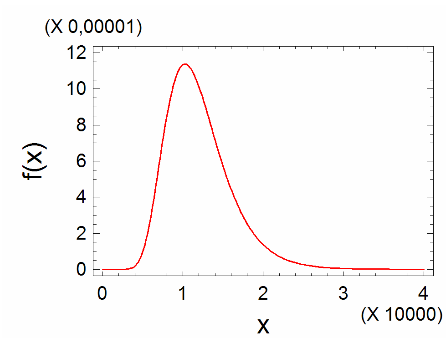
100p%-ní kvantil: $x_p = e^{\mu + \sigma \cdot z_p}$,

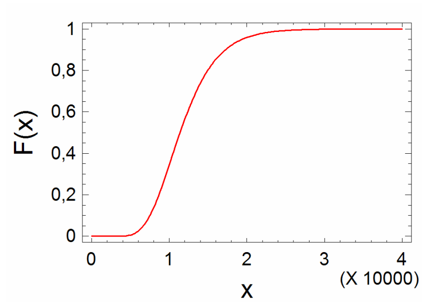
kde z_p je 100p%-ní kvantil normovaného normálního rozdělení

Grafické znázornění hustoty pravděpodobnosti a distribuční funkce:

X … příjem zaměstnanců jisté firmy

$$X \rightarrow LN\left(12.000;4.000^2\right)$$





Při praktickém používání tohoto rozdělení postupujeme tak, že náhodnou veličinu X nejdříve převedeme na Y = ln X a potom již postupujeme stejně jako u normálního rozdělení.

Průvodce studiem:

A opět zde máme pasáž pro zájemce:

- **Odvození distribuční funkce logaritmicko-normálního rozdělení:**

Nechť:

$$Y = \ln X$$

$$X \rightarrow LN\left(\mu;\sigma^2\right) \quad \Leftrightarrow \quad Y \rightarrow N\left(\mu;\sigma^2\right)$$

$F_X(x)$ (resp. $F_Y(y)$) je distribuční funkce náhodné veličiny X (resp. Y)

$$\forall x > 0: \quad F_X(x) = P(X < x) = P\left(e^Y < x\right) = P(Y < \ln x) = F_Y(\ln x) = \Phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)$$

$$\forall x \leq 0: \quad F_X(x) = 0$$

- **Odvození hustoty pravděpodobnosti logaritmicko-normálního rozdělení:**

$f_X(x)$ … hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny X

$$\forall x > 0: \quad f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \frac{d\Phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)}{dx} = \varphi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right) \cdot \frac{1}{x \cdot \sigma} = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2}{2}} =$$

$$= \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\forall x \le 0: \quad f_X(x) = 0$$

- **Odvození vztahu pro výpočet 100p%-ního kvantilu:**

$$P(X < \mathrm{x_p}) = p$$
$$F(x_p) = p$$
$$\Phi\left(\frac{\ln x_p - \mu}{\sigma}\right) = p$$
$$\frac{\ln x_p - \mu}{\sigma} = z_p \qquad (\Phi(z_p) = p)$$
$$\ln x_p = \sigma \cdot z_p + \mu$$
$$x_p = e^{(\mu + \sigma \cdot z_p)}$$

Řešený příklad:

Nechť X je náhodná veličina s logaritmicko-normálním rozdělením s parametry: $\mu=2$; $\sigma^2=9$. Určete:

a) pravděpodobnost, že náhodná veličina X je z intervalu (0;30)
b) medián daného rozdělení
c) střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X

Řešení:

$$X \to LN(2;9)$$

ada) Pravděpodobnost, že náhodná veličina X je z intervalu (0;30) můžeme určovat rovněž jako pravděpodobnost, že náhodná veličina X je menší než 30, neboť log.-normální náhodná veličina může nabývat pouze kladných hodnot.

Připomeňme si postup při určování distribuční funkce log.-normální náhodné veličiny:

$$F(x) = \begin{cases} \Phi\left(\dfrac{\ln x - \mu}{\sigma}\right); & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{pro } x \leq 0 \end{cases}$$

A nyní již přejděme k určení hledané pravděpodobnosti:

$$\underline{\underline{P(0 < X < 30)}} = F(30) - F(0) = \Phi\left(\frac{\ln 30 - 2}{\sqrt{9}}\right) - 0 = \Phi(0{,}47) \underline{\underline{= 0{,}681}}$$

nebo

$$\underline{\underline{P(0 < X < 30)}} = P(X < 30) = F(30) = \Phi\left(\frac{\ln 30 - 2}{\sqrt{9}}\right) = \Phi(0{,}47) \underline{\underline{= 0{,}681}}$$

adb) Pro určení mediánu můžeme použít vztah pro 100p%-ní kvantil, který byl odvozen v Průvodci studiem:

$$x_p = e^{\mu + \sigma \cdot z_p}$$

$$z_{0,5} = 0 \quad (viz.\, Tabulka\ 1) \qquad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x_{0,5}}} = e^{2+\sqrt{9}\cdot 0} = \underline{\underline{e^2 \cong 7{,}4}}$$

adc) Střední hodnotu a rozptyl určíme na základě výše uvedených vztahů:

$$EX = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{EX}} = e^{2+\frac{9}{2}} = \underline{\underline{e^{\frac{13}{2}} \cong 665{,}1}}$$

$$DX = e^{2\mu + \sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{DX}} = e^{2\cdot 2+9}\left(e^9 - 1\right) \underline{\underline{\cong 3{,}6 \cdot 10^9}}$$

Výklad:

Závěr kapitoly o spojitých rozděleních věnujeme třem důležitým rozdělením nacházejícím uplatnění zejména při odhadech a testování statistických hypotéz.

6.9 χ^2 – rozdělení

Mějme nezávislé náhodné veličiny Z_1; Z_2; ... ; Z_n, z nichž každá má normované normální rozdělení. Pak součet čtverců těchto náhodných veličin má rozdělení χ^2_n (chí-kvadrát) s n stupni volnosti (degree of freedom, DF).

$$\chi_n^2 = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2$$

To, že má náhodná veličina X rozdělení χ_n^2 označujeme:

$$X \to \chi_n^2$$

Počet stupňů volnosti tedy označuje počet sčítaných nezávislých náhodných veličin a je jediným parametrem tohoto rozdělení. Zároveň je definice rozdělení χ_n^2 zřejmé, že náhodná veličina s tímto rozdělením může nabývat pouze kladných hodnot.

Hustotu pravděpodobnosti v obecném tvaru (pro n stupňů volnosti) nebudeme pro značnou komplikovanost vztahu uvádět.

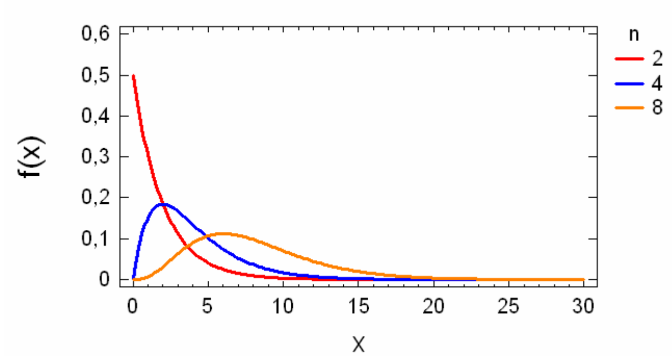
Střední hodnota: $E(\chi_n^2) = n$

Rozptyl: $D(\chi_n^2) = 2n$

100p%-ní kvantily:

Pro některá významná p (0,01; 0,05; 0,10; ...) a pro některá n jsou kvantily χ_n^2 rozdělení tabelovány (viz. příloha – Tabulka 3). Běžně lze také kvantily tohoto rozdělení stanovit pomocí statistického software.

Grafické znázornění hustoty pravděpodobnosti pro různé stupně volnosti



6.9.1 Vlastnosti rozdělení χ^2

1. Pro nezávislé náhodné veličiny s χ_n^2 rozdělením se dá dokázat, že jejich součet má opět χ_n^2 rozdělení a počet stupňů volnosti je roven součtu stupňů volnosti jednotlivých veličin v součtu.

2. Pokud náhodné veličiny $X_1, X_2, ..., X_n$ mají normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ a jsou navzájem nezávislé, pak výběrový rozptyl s^2 vynásobený (n-1) a vydělený σ^2 má rozdělení χ_{n-1}^2. (Plyne to bezprostředně z toho, že tento výraz se dá převést na součet čtverců (n-1) náhodných veličin s rozdělením N(0,1))

Tuto skutečnost můžeme stručně zapsat takto:

$$\frac{(n-1)\,s^2}{\sigma^2} \to \chi^2_{n-1}$$

6.9.2 Použití rozdělení χ^2

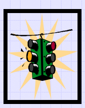
1. Vlastnosti, že:

$$\frac{(n-1)\,s^2}{\sigma^2} \to \chi^2_{n-1}$$

   (výběrový rozptyl s^2 vynásobený (n-1) a vydělený σ^2 má rozdělení χ^2_{n-1}) se využívá při testování toho, zda rozptyl základního souboru s normálním rozdělením je roven σ^2. (viz. Testování hypotéz)

2. χ^2_n rozdělení se používá pro ověření nezávislosti kategoriálních proměnných (test nezávislosti v kombinační tabulce)

3. Pokud testujeme, zda náhodné veličiny (naměřená data) pocházejí z určitého rozdělení, můžeme také s úspěchem použít chí-kvadrát rozdělení. Tento test je znám pod názvem "test dobré shody".



Řešený příklad:

Odvoďte distribuční funkci a hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny X, která má rozdělení χ^2_n s jedním stupněm volnosti.

Řešení:

$$X = Z^2$$

$$Z \to N(0;1) \quad \Rightarrow \quad X \to \chi^2_1$$

Náhodná veličina X je funkcí náhodné veličiny Z a proto budeme při hledání její distribuční funkce dále postupovat již známým způsobem (pouze vezmeme v úvahu, že náhodná veličina s rozdělením χ^2_n nabývá pouze kladných hodnot):

$pro\ x > 0:$

$$F(x) = P(X < x) = P(Z^2 < x) = P\left(-\sqrt{x} < Z < \sqrt{x}\right) = \Phi\left(\sqrt{x}\right) - \Phi\left(-\sqrt{x}\right) = \Phi\left(\sqrt{x}\right) - \left[1 - \Phi\left(\sqrt{x}\right)\right] =$$

$$= 2\Phi\left(\sqrt{x}\right) - 1 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t}{2}} dt - 1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{t}{2}} dt - 1$$

$pro\ x \le 0$:

$F(x) = 0$

Hustotu pravděpodobnosti pak určíme jednoduše jako derivaci distribuční funkce:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \begin{cases} 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \varphi\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \varphi\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

Výklad:

6.10 Studentovo t rozdělení

Uvažujme dvě nezávislé náhodné veličiny Z a χ_n^2. Náhodná veličina Z má normované normální rozdělení, náhodná veličina χ_n^2 má rozdělení χ^2 s n stupni volnosti. Potom náhodná veličina t;

$$T_n = \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi_n^2}{n}}}$$

má Studentovo t rozdělení s n stupni volnosti. Počet stupňů volnosti je jediný parametr tohoto rozdělení.

Pro $n \to \infty$ (vysoký počet stupňů volnosti, v praxi pro n>30) se Studentovo t rozdělení blíží normovanému normálnímu rozdělení.

Hustotu pravděpodobnosti nebudeme ani v tomto případě pro její složitost uvádět.

Střední hodnota: $E(T_n) = 0$

Rozptyl: $D(T_n) = \frac{n}{n-2}$

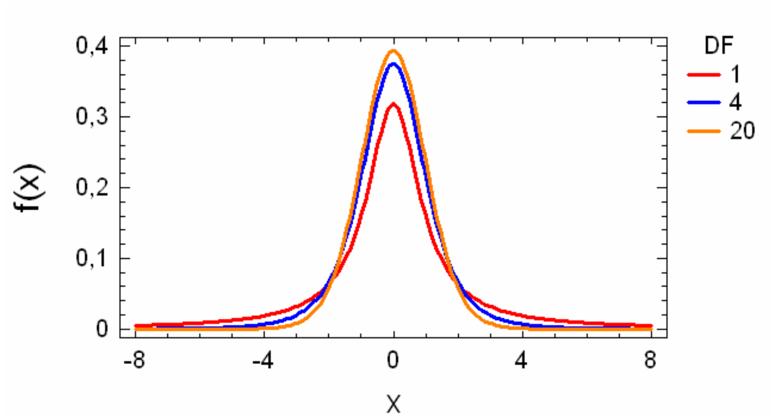
100p%-ní kvantily - t_p:

Pro vybraná p a pro vybrané stupně volnosti n jsou 100p%-ní kvantily tabelovány (viz. příloha – Tabulka 2). Většinou je tato tabelace provedena pouze pro p<0,5. Kvantily t_p pro p>0,5 získáme pomocí vztahu:

$$t_p = -t_{1-p}$$

Běžně se při určování kvantilů využívá rovněž statistický software.

Grafické znázornění hustoty pravděpodobnosti pro různé stupně volnosti



6.10.1 Vlastnosti Studentova t rozdělení

Náhodná veličina definována jako:

$$\frac{\overline{X}-\mu}{s}\cdot\sqrt{n}$$

má Studentovo t rozdělení s (n-1) stupni volnosti.

$$\frac{\overline{X}-\mu}{s}\cdot\sqrt{n}\rightarrow t_{n-1}$$

Odvození bude provedeno v následujícím Průvodci studiem.

6.10.2 Použití Studentova t rozdělení

Studentovo t rozdělení má široké uplatnění. Uvedeme alespoň některé možnosti použití.

1. Užívá se k testování hypotéz o střední hodnotě náhodného výběru, pokud je rozptyl neznámý. Mělo by platit, že tento náhodný výběr pochází z normálního rozdělení, ale tento předpoklad je většinou alespoň přibližně splněn, jak dále poznáme.

2. Užívá se k testování hypotéz o shodě středních hodnot dvou náhodných výběrů, se stejnými předpoklady jako v předcházejícím případě. - navíc musí být tyto výběry nezávislé.

3. Rozdělení je vhodným prostředkem pro analýzu výsledků regresní analýzy.

Průvodce studiem:

Původ názvu Studentovo má zajímavou historii. Irský statistik W. S. Gosset poprvé publikoval toto rozdělení anonymně pod pseudonymem "Student", protože jeho zaměstnavatel, pivovar Guiness v Dublinu, zakázal svým zaměstnancům publikovat pod svým vlastním jménem z obavy, že konkurence by odhalila tajemství jejich excelentního piva. Ve svém původním článku, Gosset použil označení "t" pro svoji statistiku. Odtud Studentovo t rozdělení pravděpodobnosti. Na práci Gosseta navázalo množství dalších statistiků; jmenujme alespoň R. A. Fishera, jehož jméno můžeme najít téměř ve všech směrech dalšího vývoje statistiky.

Následující odvození je opět určeno zájemcům o matematické pozadí používaných vztahů.

- **Odvození vlastností, že:** $\dfrac{\overline{X}-\mu}{s}\cdot\sqrt{n} \to t_{n-1}$

Pokud náhodné veličiny $X_1, X_2, ..., X_n$ mají normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ a jsou navzájem nezávislé, pak lze snadno ukázat (viz. Centrální limitní věta), že

$$\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

a dále po standardizaci (transformaci normální na normovanou normální náhodnou veličinu) platí:

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}} \to N(0,1)$$

Dále víme, že:

$$\frac{(n-1)\,s^2}{\sigma^2} \to \chi^2_{n-1}$$

Protože Studentova náhodná veličina je definována jako:

$$T_n = \frac{Z}{\sqrt{\dfrac{\chi^2_n}{n}}}$$

Jako náhodné veličiny Z a χ^2_n tedy mějme:

$$Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}}; \qquad \chi^2_{n-1} = \frac{(n-1)\,s^2}{\sigma^2}$$

Pak:

$$\frac{\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}}}{\sqrt{\dfrac{\dfrac{(n-1)\,s^2}{\sigma^2}}{n-1}}} \to t_{n-1}$$

Po úpravě:

$$\frac{\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}}}{\sqrt{\dfrac{\dfrac{(n-1)\,s^2}{\sigma^2}}{n-1}}}=\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}}\cdot\frac{\sigma}{s}=\frac{\overline{X}-\mu}{s}\cdot\sqrt{n}\rightarrow t_{n-1}$$

Výklad:

6.11 Fisherovo-Snedecorovo rozdělení - F rozdělení

Posledním spojitým rozdělením, kterým se budeme zabývat, je F rozdělení. Mějme dvě nezávislé náhodné veličiny χ_m^2 a χ_n^2. Obě mají rozdělení chí-kvadrát. První z nich má počet stupňů volnosti m, druhá má počet stupňů volnosti n (obecně mají různý počet stupňů volnosti). Pak náhodná veličina $F_{n,m,;}$

$$F_{n,m}=\frac{\dfrac{\chi_m^2}{m}}{\dfrac{\chi_n^2}{n}}$$

má Fisherovo-Snedecorovo rozdělení o m a n stupních volnosti. Toto rozdělení má tedy dva parametry- n a m.

Ani v tomto případě nebudeme uvádět vztah pro hustotu pravděpodobnosti (značně složitý).

Střední hodnota: $E\left(F_{m,n}\right)=\dfrac{n}{n-2}$

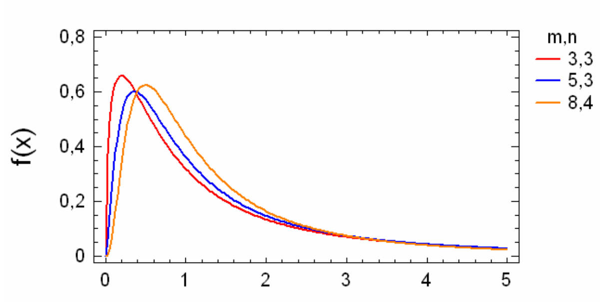
Rozptyl: $D(F_{m,n})=\dfrac{2n^2\left(1+\dfrac{n-2}{m}\right)}{(n-2)^2\,(n-4)}$

100p%-ní kvantily - F_p:

Pro praktické aplikace jsou pro vybrané pravděpodobnosti (p>0,5) a vybrané stupně volnosti n a m tabelovány kvantily F_p (viz. příloha – Tabulka 4). Pro p>0,5 se kvantily F_p určí ze vztahu:

$$F_p=\frac{1}{F_{1-p}(m,n)}$$

Grafické zobrazení hustoty pravděpodobnosti pro různé hodnoty m a n



6.11.1 Vlastnosti Fischerova-Snedecorova rozdělení

Je zřejmé použití tohoto rozdělení – jako rozdělení výběrových rozptylů dvou nezávislých náhodných vektorů, se stejnou směrodatnou odchylkou σ.

Nechť máme dva náhodné vektory: $\overline{X_1}; \overline{X_2}$

$$X_{1j} \rightarrow N(\mu_1, \sigma); \quad \mathrm{j} = 1, \mathrm{n}_1$$
$$X_{2j} \rightarrow N(\mu_2, \sigma); \quad \mathrm{j} = 1, \mathrm{n}_2$$

S_1; S_2 jsou náhodné veličiny definované jako:

$$S_1^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} \left(X_{1j} - \overline{X_1}\right)^2}{n_1 - 1}; \qquad S_2^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} \left(X_{2j} - \overline{X_2}\right)^2}{n_2 - 1}$$

Pak:

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} \rightarrow F_{n_1, n_2}$$

6.11.2 Použití Fischerova-Snedecorova rozdělení

Toto rozdělení má opět široké uplatnění, především při hodnocení výsledků statistických analýz. Používá se především:

1. k testu o shodnosti rozptylů dvou náhodných výběrů
2. k testům o shodě středních hodnot pro více náhodných výběrů, v analýze rozptylu.
3. k testům v regresní analýze.

Shrnutí:

Jedním ze základních spojitých rozdělení pravděpodobnosti je rozdělení rovnoměrné (rektangulární) na intervalu (a;b).

Název rozdělení	Popis	Hustota pravděpodobnosti	EX	DX
Rovnoměrné na (a;b)	f(x) je na (a;b) konstantní, jinde nulová	$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad x \in \langle a;b \rangle$ $0 \quad jinde$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(a-b)^2}{12}$

Následující tři rozdělení jsou založena na Poissonovském procesu, tj. na předpokladu, že jednotlivé události nastávají nezávisle na sobě, s konstantní rychlostí výskytu. Tato rozdělení se používají většinou pro popis náhodné veličiny definované jako doba do k-té události (poruchy), popř. doba mezi událostmi (poruchami).

Název rozdělení	Popis	Hustota pravděpodobnosti, Distribuční funkce, intenzita poruch	EX	DX
Exponenciální	doba do první události, doba mezi událostmi (popisuje pouze období stabilního života)	$f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}; \quad t > 0; \lambda > 0$ $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}; \quad t > 0; \lambda > 0$ $\lambda(t) = \lambda = konst.; \quad t > 0; \lambda > 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Erlangovo	doba do k-té události	$f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}; \quad t > 0$ $F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^j}{j!}$ $\lambda(t) = \frac{\lambda}{(k-1)! \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{(k-1-j)!(\lambda t)^j}}$	$\frac{k}{\lambda}$	$\frac{k}{\lambda^2}$
Weibullovo	doba do první události (poruchy) (vhodná volba β umožňuje použití v libovolném období intenzity poruch)	$f(t) = \frac{\beta}{\Theta}\left(\frac{t}{\Theta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\Theta}\right)^{\beta}}$ $F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\Theta}\right)^{\beta}}$ $\lambda(t) = \frac{\beta}{\Theta} \cdot \left(\frac{t}{\Theta}\right)^{\beta-1}$ $t > 0; \Theta > 0; \beta > 0$		

Nejdůležitějším pravděpodobnostním rozdělením popisujícím chování velkého množství náhodných jevů v technice, ekonomii i v přírodních vědách je rozdělení normální, jehož parametry jsou střední hodnota μ a rozptyl σ^2, a jeho speciální typ rozdělení normované normální s parametry μ=0 a σ^2=1.

Název rozdělení	Vlastnosti	Hustota pravděpodobnosti, Distribuční funkce	EX	DX
Normované normální	distribuční funkce $\Phi(z)$ je tabelovaná, hustota pravděpodobnosti je sudá funkce („Gaussův klobouk“)	$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}};\qquad -\infty<x<\infty$ $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dt$	0	1
Normální	distribuční funkci určujeme pomocí standardizace normální náhodné veličiny $F(x)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$	$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2};\qquad -\infty<x<\infty$ $F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{x} e^{-\left(\frac{t-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}\,dt$	μ	σ^2

V SPC (spolehlivost a jakost, statistická kontrola jakosti) se pak velmi často používá **metoda 6 sigma**.

Při popisu náhodných veličin nabývajících pouze kladných hodnot a to zejména v případech, kdy hustota pravděpodobnosti je asymetrická používáme logaritmicko-normální rozdělení.

Název rozdělení	Vlastnosti	Hustota pravděpodobnosti	EX	DX
Logaritmicko-normální	distribuční funkci určujeme převodem na distribuční funkci normovaného normálního rozdělení $F(x)=\begin{cases}\Phi\left(\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right); & \text{pro } x>0\\ 0 & \text{pro } x\le 0\end{cases}$	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}; & \text{pro } x>0\\ 0 & \text{pro } x\le 0\end{cases}$	$e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$	$e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2}-1\right)$

Poslední tři spojitá rozdělení, s kterými jsme se seznámili nacházejí uplatnění zejména při odhadech a testování statistických hypotéz. Jejich 100p%-ní kvantily jsou pro vybrané p a vybrané parametry tabelovány

Název rozdělení	Definice NV s daným rozdělením	Parametry	Vlastnosti
χ_n^2	$\chi_n^2=\sum_{i=1}^{n} Z_i^2$	n	$\frac{(n-1)\,s^2}{\sigma^2}\quad\rightarrow\ \chi_{n-1}^2$
Studentovo	$T_n=\frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi_n^2}{n}}}$	n	$\frac{\overline{X}-\mu}{s}\cdot\sqrt{n}\rightarrow t_{n-1}$

Fischerovo-Snedecorovo	$F_{n,m} = \dfrac{\dfrac{\chi_m^2}{m}}{\dfrac{\chi_n^2}{n}}$	m, n	$\dfrac{S_1^2}{S_2^2} \rightarrow F_{n_1,n_2}$

Otázky

1. Odvoďte distribuční funkci rovnoměrného rozdělení.
2. Popište exponenciální rozdělení a jeho význačné vlastnosti (hustota pravděpodobnosti, distribuční funkce, intenzita poruch, rozdělení „bez paměti“)
3. Definujte Erlangovu náhodnou veličinu
4. Definujte Weibullovu náhodnou veličinu a rozeberte její použití v závislosti na parametru tvaru – β
5. Popište souvislost mezi rozděleními diskrétní náhodné veličiny založenými na Bernoulliho pokusech a náhodné veličiny založenými na Poissonově procesu
6. Definujte normální náhodnou veličinu a popište její použití (včetně nalezení distribuční funkce, standardizace, a pravidla 6 sigma)
7. Definujte náhodné veličiny: χ^2_n, Studentovu a Fischer-Snedecorovu (prokažte orientaci v tabulkách kvantilů těchto rozdělení)
8. Odvoďte medián exponenciální náhodné veličiny.
9. Odvoďte dolní kvartil exponenciální náhodné veličiny.
10. Odvoďte intenzitu poruch Weibullova rozdělení.
11. Určete medián a 10%-ní kvantil náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením se střední hodnotou 10s.

Úlohy k řešení

1. Doba vypracování testu má normální rozdělení se střední hodnotou 60minut a směrodatnou odchylkou 10minut.
   a) Kolik % studentů dokončí test do hodiny a čtvrt?
   b) Jaká doba by měla být stanovena, aby test dokončilo průměrně 95% studentů?

2. Výrobní zařízení má poruchu v průměru jednou za 2000 hodin. Jaká je pravděpodobnost, že přístroj bude pracovat déle než 550 hodin?

3. Životnost žárovky má exponenciální rozdělení se střední hodnotou 400h. S jakou pravděpodobností bude žárovka svítit dalších 100 hodin, jestliže již svítila 600 hodin?

4. Odhadujeme, že střední životnost určitého přístroje je 110 dnů. S jakou pravděpodobností bude životnost náhodně vybraného přístroje mezi 100 a 150 dny?

5. Při kontrole jakosti přebíráme součástku pouze tehdy, jestliže se její rozměr pohybuje v mezích 26-27mm. Rozměry součástek mají normální rozdělení se střední hodnotou 26,4mm a směrodatnou odchylkou 0,2mm. Jaká je pravděpodobnost, že rozměr součástky náhodně vybrané ke kontrole bude v požadovaných mezích?

6. Průměrná doba mezi příjezdy nákladních automobilů s betonovou směsí je 10 minut. Jaká je pravděpodobnost, že doba mezi příjezdy dvou vozidel bude kratší než 7 minut?

7. Firma získá z každého prodaného výrobku 100,-Kč. Za výměnu během záruční lhůty zaplatí 300,-Kč. Životnost výrobku v letech má normální rozdělení N(3;1). Jakou záruční dobu v měsících má firma stanovit, aby střední (průměrný) zisk byl alespoň 60,-Kč/výrobek?

8. Doba do vybití baterie se řídí exponenciálním rozdělením.
   a) Jaká je střední doba do vybití, víme-li, že 4000 hodin přežije 1% těchto baterií?
   b) Je-li střední doba do vybití 3.150 hodin, kolik procent těchto baterii přežije 4000 hodin?

9. Chybu při měření určité veličiny modelujeme normálním rozdělením s nulovou střední hodnotou a s rozptylem 1,5. Určete interval (souměrný podle počátku), ve kterém se bude nacházet chyba v 90% měření.

10. Obsah nečistot v odpadních vodách je popsán normálním rozdělením se střední hodnotou 0,18 a směrodatnou odchylkou 0,03. Vypočtěte:
    6. procento zkoušek, při kterých obsah nečistot překročí hodnotu 0,24.
    7. hodnotu obsahu nečistot, která bude překročena v 1% zkoušek.

Řešení:

1. a) $0{,}933 = 93{,}3\%$
   b) 1 hodina 17 minut

2. $e^{-\frac{550}{2000}} = 0{,}760 = 76\%$

3. $e^{-\frac{1}{4}} = 0{,}779 = 77{,}9\%$

4. $e^{-\frac{100}{110}} - e^{-\frac{150}{110}} \cong 0{,}147 = 14{,}7\%$

5. $0{,}976 = 97{,}6\%$

6. $1 - e^{-\frac{7}{10}} \cong 0{,}503 = 50{,}3\%$

7. $T \le 2{,}89\ let \Rightarrow \mathrm{T} = 34\ m\check{e}s\acute{\imath}ce$

8. 869 hodin

9. $P(-2{,}01 < X < 2{,}01) = 0{,}9$

10. a) $0{,}977 = 97{,}7\%$
    b) 0,25