7 LIMITNÍ VĚTY

Čas ke studiu kapitoly: 70 minut

Cíl: Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- formulovat a používat limitní věty
- aproximovat jiná rozdělení rozdělením normálním

Výklad:

V této kapitole nadefinujeme tvrzení (limitní věty), která jsou důležitá pro popis pravděpodobnostních modelů v případě rostoucího počtu náhodných pokusů.

7.1 Definice základních pojmů

7.1.1 Konvergence podle pravděpodobnosti (stochastická konvergence)

Konvergence podle pravděpodobnosti ke konstantě *a*

Je dána posloupnost náhodných veličin $\{X_n\}$ $(=X_1, X_2, \dots, X_n)$ a reálné číslo a ($a \in R$). Jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ platí:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|X_n - a\right| < \varepsilon\right) = 1$$

(jestliže pravděpodobnost, že X_n nabude hodnoty z intervalu $(a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$ konverguje pro $n \to \infty$ k jedné (pro libovolně malé ε)), pak říkáme, že posloupnost náhodných veličin $\{X_n\}$ konverguje k a podle pravděpodobnosti.

Konvergence podle pravděpodobnosti k náhodné veličině X

Tato konvergence je zobecněním předcházejícího případu.

Je dána posloupnost náhodných veličin $\{X_n\}$ a náhodná veličina X. Jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ platí:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|X_n - X\right| < \varepsilon\right) = 1$$

(jestliže pravděpodobnost, že X_n nabude hodnoty z intervalu $(X-\varepsilon;\ X+\varepsilon)$ konverguje pro $n \to \infty$ k jedné (pro libovolně malé ε)), pak říkáme, že posloupnost náhodných veličin $\{X_n\}$ konverguje k náhodné veličině X podle pravděpodobnosti.

7.1.2 Konvergence v distribuci

Je dána posloupnost náhodných veličin $\{X_n\}$,posloupnost distribučních funkcí náhodných veličin $\{X_n\}$-$\{F_n(x)\}$ a náhodná veličina X, která má distribuční funkci F(x).
Jestliže:

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x),$$

pak říkáme, že posloupnost náhodných veličin $\{X_n\}$ konverguje k náhodné veličině X v distribuci a F(x) nazýváme **asymptotickou distribuční funkcí**.

Konverguje-li posloupnost náhodných veličin $\{X_n\}$ k náhodné veličině X v distribuci, znamená to, že pro dostatečně velká n můžeme distribuční funkci náhodné veličiny X_n aproximovat (tzn. s jistou chybou nahradit) asymptotickou distribuční funkcí F(x).

Příklad:
Jestliže posloupnost náhodných veličin $\{X_n\}$ konverguje v distribuci k rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$, (říkáme také, že náhodná veličina **X_n má asymptoticky normální rozdělení**), pak

$$\lim_{n \to \infty} F_n(x) = F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

(tzn. pro velká n můžeme distribuční funkci náhodné veličiny X_n aproximovat distribuční funkci normální náhodné veličiny a tu po standardizaci najít v tabulkách).

7.2 Čebyševova nerovnost

Je-li X libovolná náhodná veličina se střední hodnotou EX a **konečným** rozptylem DX ($=\sigma^2$) $(DX < \infty)$, pak Čebyševova nerovnost odhaduje (velice hrubě) pravděpodobnost odchylky náhodné veličiny X od její střední hodnoty.

$$\forall\, \varepsilon > 0: \quad P(|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$$

Následující vztah reprezentuje aplikaci Čebyševovy nerovnosti pro případ, kdy chceme odhadnout pravděpodobnost, že náhodná veličina X je od své střední hodnoty vzdálená o více než k- násobek směrodatné odchylky σ (za ε dosadíme k.σ):

$$\forall\, \sigma, k > 0: \quad P(|X - EX| \geq k \cdot \sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

Řešený příklad:

Odhadněte pravděpodobnost, že náhodná veličina je od své střední hodnoty vzdálená o více než 3σ.

Řešení:

$$\forall\, \sigma > 0: \quad P(|X - EX| \geq 3 \cdot \sigma) \leq \frac{1}{3^2} (= 0,\bar{1})$$

Hledaná pravděpodobnost nepřekračuje 11%. (Je to opravdu hrubý odhad, srovnejte si s pravidlem 6 sigma platným pro normální rozdělení.)

Řešený příklad:

Pravděpodobnost vyrobení zmetku je 0,5. Odhadněte pravděpodobnost, že při vyrobení 1000 výrobků bude 400 – 600 zmetků.

Řešení:

X ... počet zmetků v 1000 výrobcích, proto:

$$X \rightarrow Bi(1000;0,5) \Rightarrow EX = n.p = 500; \quad DX - n.p.(1-p) = 250; \quad \sigma_X = \sqrt{DX} = \sqrt{250}$$

Pravděpodobnost, že počet zmetků bude v rozmezí 400 až 600 lze vyjádřit ve tvaru:

$$P(400 < X < 600) = P(|X - 500| < 100) = 1 - P(|X - 500| \geq 100)$$

Vyjádříme-li si povolenou odchylku od střední hodnoty (100) jako násobek směrodatné odchylky ($\sqrt{250}$), můžeme z Čebyševovy nerovnosti zjistit, že:

$$P(|X - 500| \geq 100) = P\left(|X - 500| \geq \frac{100}{\sqrt{250}} \cdot \sqrt{250}\right) \leq \frac{1}{\left(\frac{100}{\sqrt{250}}\right)^2} = \frac{250}{10000} = 0{,}025,$$

z čehož lze jednoduše odvodit, že:

$$\underline{\underline{P(400 < X < 600) > 0{,}975}}$$

(Je-li $P(|X - 500| \geq 100) \leq 0{,}025$, pak $1 - P(|X - 500| \geq 100) > 0{,}975$ $(= 1 - 0{,}025)$). Znovu si připomeňme, že jde o velice hrubý odhad.

Výklad:

7.3 Zákon velkých čísel

Jako zákon velkých čísel označujeme tvrzení o konvergenci průměru v posloupnosti náhodných veličin.

Zákon velkých čísel:

X_1, X_2, …, X_n jsou **nezávislé** náhodné veličiny se **stejnými středními hodnotami** $EX_1 = EX_2 = \ldots = EX_n = \mu$. Jestliže $\overline{X_n}$ definujeme jako:

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} X_j; \quad n \in N,$$

pak posloupnost $\{\overline{X_n}\}$ konverguje podle pravděpodobnosti k μ.

$$\left(\overline{X_n} \xrightarrow{p} \mu\right), \text{ tj. } \lim_{n \to \infty} P\left(\left|\overline{X_n} - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Všimněme si, že X_1, X_2, …, X_n nemusí mít stejné rozdělení, a zároveň nemáme žádné požadavky na jejich rozptyl.

7.3.1 Silný zákon velkých čísel

Nastává-li tato konvergence s pravděpodobností 1, mluvíme o silném zákonu velkých čísel.

Silný zákon velkých čísel:

X_1, X_2, …, X_n jsou **nezávislé** náhodné veličiny se **stejnými středními hodnotami** $EX_1 = EX_2 = \ldots = EX_n = \mu$. Jestliže $\overline{X_n}$ definujeme jako:

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}.\sum_{j=1}^{n} X_j; \quad n \in N,$$

pak **posloupnost** $\{\overline{X_n}\}$ **konverguje podle pravděpodobnosti k μ skoro jistě**:

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \overline{X_n} = \mu\right) = 1$$

7.3.2 Slabý zákon velkých čísel

Slabý zákon velkých čísel postihuje (oproti silnému zákonu velkých čísel) slabší formu konvergence (konvergence odchylek průměru od jeho střední hodnoty), máme při něm však také slabší požadavky na nezávislost náhodných veličin.

Slabý zákon velkých čísel:

X_1, X_2, …, X_n jsou **nekorelované** náhodné veličiny se **stejnými středními hodnotami** $EX_1 = EX_2 = \ldots = EX_n = \mu$ a **konečnými rozptyly**, pak:

$$\forall \varepsilon > 0: \quad \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\left| \sum_{i=1}^{n} (X_i - EX_i) \right|}{n} < \varepsilon \right) = 1$$

Průvodce studiem:

Následující pasáž je věnována **důkazu platnosti zákona velkých čísel** (pro zájemce):

Víme, že: $EX_1 = EX_2 = \ldots = EX_n = \mu$

$DX_1 = DX_2 = \ldots = DX_n = \sigma^2$

Je-li: $\overline{X_n} = \frac{1}{n}.\sum_{j=1}^{n} X_j; \quad n \in N$,

pak na základě vlastností střední hodnoty a rozptylu můžeme tvrdit, že:

$$E\overline{X_n} = \frac{1}{n} \cdot (n \cdot \mu) = \mu \text{ , } D\overline{X_n} = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot (n \cdot \sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Čebyševova nerovnost říká, že: $\forall\, \varepsilon > 0: \quad P(|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$,

což můžeme zapsat taktéž jako: $\forall\, \varepsilon > 0: \quad P(|X - EX| < \varepsilon) \leq 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}$

Aplikujeme-li tuto nerovnost na náhodnou veličinu $\overline{X_n}$, dostaneme:

$\forall\, \varepsilon > 0: \quad P(|\overline{X_n} - \mu| < \varepsilon) \leq 1 - \frac{\frac{\sigma^2}{n}}{\varepsilon^2}$, po úpravě: $\forall\, \varepsilon > 0: \quad P(|\overline{X_n} - \mu| < \varepsilon) \leq 1 - \frac{\sigma^2}{n \cdot \varepsilon^2}$

V dalším kroku určíme limitu pro n→ ∞ z výše uvedeného výrazu:

$$\lim_{n\to\infty} P(|\overline{X_n} - \mu| < \varepsilon) \leq \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{\sigma^2}{n \cdot \varepsilon}\right)$$
$$\lim_{n\to\infty} P(|\overline{X_n} - \mu| < \varepsilon) \leq 1,$$

což znamená, že posloupnost $\{\overline{X_n}\}$ konverguje podle pravdě-podobnosti k μ

Výklad:

Důsledkem zákona velkých čísel je Bernoulliho věta.

7.3.3 Bernoulliho věta

Bernoulliho věta říká, že relativní četnost sledovaného jevu stochasticky konverguje (konverguje podle pravděpodobnosti) k jeho pravděpodobnosti. To nám umožňuje experimentálně odhadovat neznámou pravděpodobnost pomocí pozorované relativní četnosti (viz. klasická definice pravděpodobnosti).

Bernoulliho věta:

Nechť X_1, X_2, ... jsou nezávislé náhodné veličiny s alternativním rozdělením (počet úspěchů v jednom pokusu) s parametrem p (pravděpodobnost úspěchu), jestliže $\overline{X_n}$ definujeme jako:

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}.\sum_{j=1}^{n} X_j; \quad n \in N,$$

pak

$$\left(\overline{X_n} \xrightarrow{p} p\right)$$

Jelikož výraz na levé straně představuje relativní četnost výskytu uvažované události v posloupnosti n pokusů, můžeme při velkém počtu pokusů odhadovat pravděpodobnost nastoupení nějaké události relativní četností výskytu této události v posloupnosti *n* pokusů.

Průvodce studiem:

A opět zde máme objasnění matematického pozadí výše uvedené věty.

Odvození Bernoulliho věty:

Víme, že: $X_1 \ldots X_n \to A(p)$

$EX_1 = EX_2 = \ldots = EX_n = p$

$DX_1 = DX_2 = \ldots = DX_n = p.(1-p)$

Je-li: $X = \sum_{j=1}^{n} X_j; \quad n \in N,$

pak $X \to Bi(n; p)$

(součet n alternativních náhodných veličin s parametrem p (počet úspěchů v jednom pokusu) je binomickou náhodnou veličinou s parametry n a p (počet úspěchů v n pokusech)

Jestliže $\overline{X_n}$ definujeme jako:

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}.\sum_{j=1}^{n} X_j = \frac{1}{n} \cdot X; \quad n \in N,$$

pak $\overline{X_n}$ označuje relativní četnost výskytu události a podle zákona velkých čísel posloupnost $\{\overline{X_n}\}$ (relativní četnost) konverguje podle pravděpodobnosti k pravděpodobnosti p (střední hodnotě EX_i), tzn. že pro velká n můžeme pravděpodobnost odhadovat relativní četností.

$$\left(\overline{X_n} \xrightarrow{p} p\right), \qquad \text{tj. } \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\overline{X_n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Výklad:

7.4 Centrální limitní věta

V předcházejícím výkladu jsme se zmínili o tom, že mimořádně důležité postavení mezi rozděleními má rozdělení normální. Je tomu tak mimo jiné i proto, že k normálnímu rozdělení se za určitých podmínek blíží i jiná rozdělení náhodných veličin. O náhodných veličinách, jež konvergují v distribuci k normálnímu rozdělení (náhodné veličiny, jejichž distribuční funkce pro velká n konverguje k distribuční funkci normálního rozdělení), říkáme, že mají **asymptoticky normální rozdělení**. Konvergencí rozdělení k normálnímu rozdělení se zabývá centrální limitní věta, která má dvě dílčí formulace: Lindebergovu-Lévyho větu a Moivreovo-Laplaceovu větu.

7.4.1 Lindebergova-Lévyho věta

Podle této věty má pro dosti velké n součet i průměr náhodných veličin se stejným rozdělením, stejným průměrem a stejným rozptylem přibližně normální rozdělení.

Lindebergova-Lévyho věta

Jestliže $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny se stejným (libovolným) rozdělením, stejnými středními hodnotami $EX_1 = EX_2 = \ldots = EX_n = \mu$ a se stejnými (konečnými) rozptyly $DX_1 = DX_2 = \ldots = DX_n = \sigma^2$, pak platí:

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} P(Y_n < u) = \Phi(u)$$

(Y_n má asymptoticky normální rozdělení N(0,1), ($F_{Y_n}(u) \to \Phi(u)$), tj. Y_n konverguje v distribuci k rozdělení N(0,1))

Z této věty bezprostředně vyplývá, že pro dostatečně velká n platí:

1. $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow EX = n \cdot \mu; \quad DX = \mathrm{n} \cdot \sigma^2$,

   rozdělení náhodné veličiny X lze aproximovat rozdělením $N(n\mu; n\sigma^2)$, tj. X má asymptoticky normální rozdělení, $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \to N(\mu; \sigma^2)$.

Podobný závěr platí pro $\overline{X}$:

2. $\overline{X} = \overline{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \dfrac{X}{n} \Rightarrow E\overline{X} = \dfrac{1}{n} \cdot n\mu = \mu; \quad D\overline{X} = \left(\dfrac{1}{n}\right)^2 \cdot n\sigma^2 = \dfrac{\sigma^2}{n}$

rozdělení náhodné veličiny $\overline{X}$ lze aproximovat rozdělením $N\left(\mu; \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$, tj. $\overline{X}$ má asymptoticky normální rozdělení, $\overline{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \to N\left(\mu; \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$.

Řešený příklad:

Dlouhodobým průzkumem bylo zjištěno, že doba potřebná k objevení a odstranění poruchy stroje má střední hodnotu 40 minut a směrodatnou odchylku 30 minut. Jaká je pravděpodobnost, že doba potřebná k objevení a opravení 100 poruch nepřekročí 70 hodin?

Řešení:

X_i ... doba potřebná k objevení a odstranění i-té poruchy

Víme, že: $EX_i = 40$ minut a $DX_i = 30^2$ minut^2, rozdělení náhodné veličiny X_i neznáme

X ... celková doba do objevení sté poruchy

$$X = \sum_{i=1}^{100} X_i$$

Na základě Lindebergovy-Lévyho věty víme, že součet n náhodných veličin se stejným rozdělením (nemusíme vědět jakým), stejnými středními hodnotami a stejnými rozptyly můžeme aproximovat normálním rozdělením s parametry: $\mu = n \cdot EX_i$, $\sigma^2 = n \cdot DX_i$, proto:

$$X \to N\left(100 \cdot 40; 100 \cdot 30^2\right)$$

Nyní již není problém určit hledanou pravděpodobnost (nesmíme jen zapomenout na užívání stejných jednotek, v našem případě minut (70h = 4200 minut):

$$\underline{\underline{P(X < 4200)}} = F(4200) = \Phi\left(\frac{4200 - 4000}{\sqrt{90000}}\right) = \Phi(0{,}67) \underline{\underline{= 0{,}749}}$$

Řešený příklad:

Životnost elektrického holícího strojku Adam má exponenciální rozdělení se střední hodnotou 2 roky. Určete pravděpodobnost, že průměrná životnost 150-ti prodaných strojků Adam bude vyšší než 27 měsíců.

Řešení:

X_i ... životnost i-tého holícího strojku Adam

$$X_i \to Exp(2) \Rightarrow EX_i = \frac{1}{\lambda} = 2\ roky \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} rok^{-1} \Rightarrow DX_i = \frac{1}{\lambda^2} = 4\ rok^2$$

$\overline{X}$ ... průměrná životnost 150-ti strojků Adam

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{150} X_i}{150} = \frac{1}{150}\sum_{i=1}^{150} X_i$$

Z Lindebergovy-Lévyho věty víme, že: $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \to N\left(\mu; \frac{\sigma^2}{n}\right)$

V našem případě: $\overline{X} = \frac{1}{150}\sum_{i=1}^{150} X_i \to N\left(2; \frac{4}{150}\right)$

Nyní, když známe rozdělení průměrné životnosti 150-ti strojků Adam, můžeme řešení dokončit (27 měsíců = 2,25 roků):

$$\underline{\underline{P(X > 2{,}25)}} = 1 - F(2{,}25) = 1 - \Phi\left(\frac{2{,}25 - 2}{\sqrt{\frac{4}{150}}}\right) = 1 - \Phi(1{,}53) = 1 - 0{,}937 = \underline{\underline{0{,}063}}$$

Výklad:

Speciálním případem tvrzení o konvergenci součtu stejně rozdělených náhodných veličin (se stejným průměrem a stejným rozptylem) k rozdělení normálnímu je Moivreova - Laplaceova věta.

7.4.2 Moivreova-Laplaceova věta

Tato věta vyjadřuje konvergenci binomického rozdělení k normálnímu rozdělení.

Stačí si uvědomit, že binomická náhodná veličina je součtem alternativních náhodných veličin (nezávislé náhodné veličiny se stejným rozdělením, stejnou střední hodnotou a stejným rozptylem) a tudíž splňuje předpoklady Lindebergovy-Lévyho věty. Proto ji lze pro dostatečně velká n aproximovat norm. rozdělením s parametry: $\mu = n \cdot p; \sigma^2 = n \cdot p(1-p)$

Moivreova-Laplaceova věta

Nechť $X \to Bi(n; p)$; $\mathrm{EX} = \mathrm{np}; \mathrm{DX} = \mathrm{np}(1-\mathrm{p})$, potom pro velká n platí, že:

$$U = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \to N(0,1),$$

tj. jinak řečeno: pro dostatečně velká n: $X \to N(np; np(1-p))$.

Aproximace binomického rozdělení normálním se zlepšuje s rostoucím rozptylem. Poměrně dobré výsledky dává tato aproximace v případě, že:

$$np(1-p) > 9 \quad \text{nebo} \quad \min\{np; n(1-p)\} > 5$$

7.5 Aplikace centrální limitní věty

Centrální limitní věta se široce využívá pro většinu rozdělení.

7.5.1 Aproximace rozdělení výběrové relativní četnosti normálním rozdělením

Máme-li n Bernoulliho pokusů, při kterých nastane k výskytů nějaké události, můžeme určit **výběrovou relativní četnost p**:

$$p = \frac{k}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n},$$

kde X_i mají alternativní rozdělení s parametrem π ($X_i \to A(\pi)$, $EX_i = \pi$, $DX_i = \pi \cdot (1-\pi)$). Na základě Lindebergovy-Lévyho věty můžeme konstatovat, že součet alternativních náhodných veličin se stejnými středními hodnotami a stejnými rozptyly můžeme aproximovat rozdělením normálním s parametry: $\mu = n \cdot EX_i = n \cdot \pi$, $\sigma^2 = n \cdot DX_i = n \cdot \pi \cdot (1-\pi)$.

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \to N(n\pi; n\pi(1-\pi))$$

(Ke stejnému závěru dojdeme na základě Moivreovy-Laplaceovy věty, uvědomíme-li si, že součet alternativních náhodných veličin má rozdělení binomické.)

Zároveň z Lindebergovy-Lévyho věty vyplývá, že průměr náhodných veličin X_i (výběrovou relativní četnost p) lze také aproximovat normálním rozdělením, tentokrát s parametry: $\mu = EX_i = \pi$, $\sigma^2 = \frac{DX_i}{n} = \frac{\pi \cdot (1-\pi)}{n}$.

$$p \to N\left(\pi, \frac{\pi(1-\pi)}{n}\right)$$

Na základě standardizace (převodu na normované normální rozdělení) pak můžeme také říci, že:

$$\frac{p-\pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}} \to N(0,1)$$

7.5.2 Aproximace Poissonova rozdělení normálním rozdělením

Také Poissonovo rozdělení můžeme nahradit rozdělením normálním v případě, že časový interval $(0;t)$ je dostatečně velký a tudíž je dostatečně velký i očekávaný počet události (střední hodnota) λt:

$$X \to Po(\lambda t),\ EX = \lambda t,\ DX = \lambda t$$

pak pro dostatečně velké t platí, že X můžeme aproximovat normálním rozdělením s parametry: $\mu = \lambda t$, $\sigma^2 = \lambda t$:

$$X \to N(\lambda t, \lambda t)$$

Obdobně platí, že **průměrný počet výskytu události za časovou jednotku lze aproximovat normálním rozdělením**:

Y ... počet výskytu události za časovou jednotku, $Y = \frac{X}{t}$

Uvažujeme-li, že X lze aproximovat normálním rozdělením, $X \to N(\lambda t, \lambda t)$, pak i náhodnou veličinu Y, danou jako funkci náhodné veličiny X, lze aproximovat normálním rozdělením, jehož parametry jsou: $\mu = \frac{1}{t} \cdot \lambda t = \lambda$, $\sigma^2 = \left(\frac{1}{t}\right)^2 \cdot \lambda t = \frac{\lambda}{t}$:

$$Y \to N\left(\lambda, \frac{\lambda}{t}\right)$$

Při využití této aproximace si uvědomme, že průměrný počet události (Y) můžeme vztahovat k libovolné ohraničené oblasti (nejen časové) – např. k ploše.

Průvodce studiem:

Tato pasáž je opět věnována zájemcům o hlubší pochopení studované problematiky.

Proč můžeme Poissonovo rozdělení aproximovat normálním?

Tento důkaz je obdobný jako důkaz Poissonovy věty (odvození pravděpodobnostní funkce Poissonova rozdělení):

Uvažujme Poissonův proces, který je pozorován v průběhu času t. Předpokládejme, že rychlost výskytu událostí je λ. Potom pravděpodobnost výskytu událostí během intervalu (0;t) bude úměrná hodnotě λt.

Nyní rozdělíme interval délky t na n subintervalů stejné délky (t/n). Výskyt událostí v každém z těchto subintervalů bude nezávislý a pravděpodobnost výskytu událostí během jednoho tohoto malého intervalu bude úměrná hodnotě (λ.(t/n)). Pokud n je dostatečně velké číslo, pak délka intervalu (t/n) bude dostatečně malá - natolik, že pravděpodobnost výskytu více než jedné události v tomto intervalu je téměř nulová a pravděpodobnost výskytu jedné události je úměrná (λ.(t/n)).

Nechť X_i je počet výskytu události v i-tém subintervalu. Je zřejmé, že X_i má alternativní rozdělení s parametrem p=λ.(t/n).

$$X_i \to A\left(\lambda \cdot \frac{t}{n}\right);\ EX_i = \lambda \cdot \frac{t}{n};\ DX_i = \lambda \cdot \frac{t}{n} \cdot \left(1 - \lambda \cdot \frac{t}{n}\right)$$

Je-li X definována jako počet výskytu události během časového intervalu (0;t), pak má tato náhodná veličina Poissonovo rozdělení s parametrem λt.

$$X \to Po(\lambda t)$$

Zároveň můžeme náhodnou veličinu X vyjádřit jako součet n náhodných veličin X_i, a tudíž ji můžeme podle centrální limitní věty aproximovat normálním rozdělením:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow EX = n \cdot EX_i = \lambda t; \quad \mathrm{DX} = n \cdot DX_i = \lim_{n\to\infty}\left[\lambda t\left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left(\lambda t - \frac{(\lambda t)^2}{n}\right) = \lambda t$$

$$X \to N(\lambda t; \lambda \mathrm{t})$$

Výklad:

7.6 Oprava na spojitost

Chceme-li určovat pravděpodobnost výskytu diskrétní náhodné veličiny na intervalu $\langle a;b\rangle$ (resp. $(a;b\rangle$, resp. $(a;b)$, resp. $(b;\infty)$), popř. pravděpodobnost, že náhodná veličina nabude konkrétní hodnoty, zavádí se pro přesnější výpočet tzv. **oprava na spojitost**. Oprava na spojitost bude prezentována v následujícím řešeném příkladu.

Řešený příklad:

Na telefonní ústřednu je napojeno 3000 účastníků. Každý z nich bude volat telefonní ústřednu během hodiny s pravděpodobností 10%. Jaká je pravděpodobnost, že během následující hodiny zavolá ústřednu:

a) právě 300 účastníků?
b) více než 310 účastníků?
c) mezi 200 a 450 účastníky(včetně)?

Řešení:

X … počet účastníků volajících ústřednu během následující hodiny (z 3000)

Z definice náhodné veličiny X je zřejmé, že X má binomické rozdělení: $X \to Bi(3000;0{,}1)$, jehož pravděpodobnostní funkce je:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$$

ada) $P(X=300)=\binom{3000}{300}\cdot(0{,}1)^{300}\cdot(1-0{,}1)^{3000-300}=\dfrac{3000!}{2700!\cdot 300!}\cdot(0{,}1)^{300}\cdot(0{,}9)^{2700}$

Zde narážíme na problém. S pomocí kalkulačky nedokážeme určit žádný z výše uvedených faktoriálů. Proto v tomto případě provedeme alespoň přibližný výpočet (aproximaci).

Z Moivreovy-Laplaceovy věty víme, že binomické rozdělení můžeme aproximovat rozdělením normálním:

Moivreova-Laplaceova věta:

Nechť $X \to Bi(n;p)$; $EX = np$; $DX = np(1-p)$, pak dostatečně velká n: $X \to N(np;np(1-p))$

V našem případě:

$X \to Bi(3000;0{,}1);\quad \mathrm{EX} = 3000 \cdot 0{,}1 = 300;\quad \mathrm{DX} = 3000 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 27$,

proto X mohu aproximovat normálním rozdělením s parametry μ=300; σ^2=27

$$X \to N(300;27)$$

Nyní musíme vyřešit ještě jednu komplikaci. Při aproximaci diskrétní náhodné veličiny spojitou dochází k tomu, že výpočet pravděpodobnostní funkce nelze jednoduše provést (pravděpodobnostní funkce spojité náhodné veličiny je nulová).

$$P(X = 300) = 0$$

Proto se provádí tzv. **oprava na spojitost**.

Je-li X definováno jako počet účastníků volajících během následující hodiny ústřednu, můžeme tvrdit, že pravděpodobnost, že příští hodinu bude volat 300 účastníků je stejná jako pravděpodobnost, že bude volat alespoň 299,5 a méně než 300,5 účastníků. (V intervalu $\langle 299{,}5;300{,}5)$ je pouze 300 účastníků.)

$$P(X = 300) = P(299{,}5 \le X < 300{,}5)$$

$P(299{,}5 \le X < 300{,}5)$ již není pro spojitou náhodnou veličinu nulová a tak můžeme provést aproximační výpočet. Této úpravě se říká oprava na spojitost.

$$\underline{\underline{P(X = 300)}} = P(299{,}5 \le X < 300{,}5) = P(X < 300) - P(X < 299{,}5) =$$
$$= F(300{,}5) - F(299{,}5) = \Phi\left(\frac{300{,}5 - 300}{\sqrt{27}}\right) - \Phi\left(\frac{299{,}5 - 300}{\sqrt{27}}\right) =$$
$$= \Phi(0{,}10) - \Phi(-0{,}10) = \Phi(0{,}10) - [1 - \Phi(0{,}10)] = 2 \cdot \Phi(0{,}10) - 1 =$$
$$= 2 \cdot 0{,}540 - 1 = \underline{\underline{0{,}08}}$$

adb) $P(X > 310) = \sum_{k=321}^{3000} \binom{3000}{k} \cdot (0{,}1)^k \cdot (1 - 0{,}1)^{3000-k} = 1 - \sum_{k=0}^{310} \binom{3000}{k} \cdot (0{,}1)^k \cdot (1 - 0{,}1)^{3000-k}$

I zde nastává problém. Vidíme, že vyčíslení příslušných součtů (sum) by nám zabralo spoustu času (pokud bychom to vůbec s pomocí kalkulačky dokázali). Proto i v tomto případě přistoupíme k přibližnému výpočtu (aproximaci).

$$X \to N(300;27)$$

Nyní můžeme provést přibližný výpočet:

$P(X > 310) = 1 - P(X \le 310)$

Znovu nastává problém způsobený aproximací diskrétního rozdělení spojitým a proto i zde přistoupíme k opravě na spojitost:

$$P(X > 310) = 1 - P(X \le 310) = 1 - P(X < 310{,}5)$$

$$\underline{\underline{P(X > 310)}} = 1 - F(310{,}5) = 1 - \Phi\left(\frac{310{,}5 - 300}{\sqrt{27}}\right) = 1 - \Phi(2{,}02) = 1 - 0{,}978 = \underline{\underline{0{,}022}}$$

adc) $P(200 \le X \le 450) = \sum_{k=200}^{450} \binom{3000}{k} \cdot (0{,}1)^k \cdot (1 - 0{,}1)^{3000-k}$

Opět máme ve výše uvedeném vztahu velký počet sčítanců a vysoké faktoriály, proto hledáme přibližný výsledek pomocí centrální limitní věty (Moivreovy-Laplaceovy věty). Zároveň i zde budeme provádět opravu na spojitost:

$$\underline{\underline{P(200 \le X \le 450)}} = P(X \le 450) - P(X < 200) = P(X < 450{,}5) - P(X < 200) =$$

$$= \mathrm{F}(450{,}5) - F(200) = \Phi\left(\frac{450{,}5 - 300}{\sqrt{27}}\right) - \Phi\left(\frac{200 - 300}{\sqrt{27}}\right) =$$

$$= \Phi(28{,}96) - \Phi(-19{,}25) = \Phi(28{,}96) - [1 - \Phi(19{,}25)] = \Phi(28{,}96) + \Phi(19{,}25) - 1 =$$

$$= 1 + 1 - 1 = \underline{\underline{1}}$$

Použitá aproximace nám dává velmi dobré výsledky (velmi blízké skutečným), protože je splněna podmínka, že: $np(1-p) > 9 \;\; (27 > 9)$.

Řešený příklad:

Sekretářka Petra píše na stroji rychlosti 250 úhozů / min. Při této rychlosti udělá průměrně 3 chyby za 10 minut. Jaká je pravděpodobnost, že při 30-ti minutovém diktátu udělá více než 10 chyb?

Řešení:

Definujme si náhodnou veličinu X jako počet chyb v diktátu (za 30 minut). Tato náhodná veličina (počet události v časovém intervalu) má Poissonovo rozdělení s parametrem λt = 9 (průměrný počet chyb za 30 minut, = EX = DX).

$$X \to Po(9)$$

$$\underline{\underline{P(X > 10)}} = 1 - P(X \le 10) = 1 - \sum_{k=0}^{10} \frac{9^k}{k!} \cdot e^{-9} = 1 - e^{-9}\left(\frac{9^0}{0!} + \frac{9^1}{1!} + \ldots + \frac{9^{10}}{10!}\right) = 1 - 0{,}706 = \underline{\underline{0{,}294}}$$

Tento výpočet byl poněkud pracný. Proveďme srovnávací výpočet pomocí centrální limitní věty:

Víme, že Poissonovu náhodnou veličinu s parametrem λt můžeme aproximovat **pro dostatečně velká λt** normálním rozdělením s parametry: $\mu = \lambda t$, $\sigma^2 = \lambda t$.

$$X \to N(9;9)$$

Pak:

$$\underline{\underline{P(X > 10)}} = 1 - P(X \le 10) = 1 - P(X < 10{,}5) - 1 - F(10{,}5) = 1 - \Phi\left(\frac{10{,}5 - 9}{\sqrt{9}}\right) = 1 - \Phi(0{,}5) =$$

$$= 1 - 0{,}691 \underline{\underline{= 0{,}309}}$$

Vyhodnocení aproximace pro tento případ:

Aproximační postup byl mnohem rychlejší, výsledky obou postupů se nám liší o 1,5%, což je asi 5% -ní chyba (0,015/0,294).

Výklad:

Oprava na spojitost (u pravděpodobnostní funkce):

Je-li X diskrétní náhodná veličina, pak: $P(X = a) = P(a - 0{,}5 \le X < \mathrm{a} + 0{,}5)$

Hodnota 0,5 ve výše uvedeném vztahu je dána dohodou. Teoreticky bychom mohli tuto komplikaci vyřešit například takto: $P(X = a) = P(a - 0{,}3 \le X < \mathrm{a} + 0{,}2)$.

Obecně – oprava na spojitost:

Posouzení vhodnosti použití opravy na spojitost provádíme vždy při řešení konkrétního příkladu důsledným převodem pravděpodobnosti výskytu náhodné veličiny na nějakém intervalu na vztah mezi distribučními funkcemi v příslušných bodech.

Shrnutí:

V této kapitole jsme se věnovali limitním větám, tj. tvrzením, která jsou důležitá pro popis pravděpodobnostních modelů v případě rostoucího počtu náhodných pokusů..

Pro orientaci v této problematice jsme se seznámili s několika novými pojmy:

Jestliže posloupnost náhodných veličin X_n **konverguje podle pravděpodobnosti k náhodné veličině X**, pak:

$$\forall \varepsilon > 0: \quad \lim_{n\to\infty} P\left(\left|X_n - X\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Jestliže posloupnost náhodných veličin $\{X_n\}$ **konverguje k náhodné veličině X v distribuci**, pak:

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x),$$

F(x) v tomto případě nazýváme **asymptotickou distribuční funkcí**.

Velice hrubý odhad pravděpodobnosti odchylky náhodné veličiny X od její střední hodnoty nám umožňuje **Čebyševova nerovnost**:

$$\forall\ \varepsilon > 0: \quad P\left(\left|X - EX\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$$

Chceme-li odhadnout pravděpodobnost, že odchylka náhodné veličiny X od její střední hodnoty je k násobkem směrodatné odchylky $(k \cdot \sigma)$, pak použijeme upravenou verzi Čebyševovy nerovnosti, kdy za ε dosadíme k.σ:

$$\forall\ \sigma, k > 0: \quad P\left(\left|X - EX\right| \geq k \cdot \sigma\right) \leq \frac{1}{k^2}$$

Konvergenci průměru v posloupnosti nezávislých veličin se zabývá **zákon velkých čísel**, který říká, že průměr nezávislých náhodných veličin se stejnými středními hodnotami konverguje podle pravděpodobnosti k jejich střední hodnotě.

Důsledkem zákona velkých čísel je **Bernoulliho věta**. Bernoulliho věta říká, že relativní četnost sledovaného jevu konverguje podle pravděpodobnosti k jeho pravděpodobnosti. To nám umožňuje experimentálně odhadovat neznámou pravděpodobnost pomocí pozorované relativní četnosti (viz. klasická definice pravděpodobnosti).

Konvergencí rozdělení k normálnímu rozdělení se zabývá **centrální limitní věta**, která má dvě dílčí formulace: Lindebergovu-Lévyho větu a Moivreovo-Laplaceovu větu.

Lindebergova-Lévyho věta říká, že pro dosti velké n má součet i průměr náhodných veličin se stejným rozdělením, stejným průměrem a stejným rozptylem přibližně normální rozdělení:

Jestliže $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny se stejným (libovolným) rozdělením, stejnými středními hodnotami $EX_1 = EX_2 = \ldots = EX_n = \mu$ a se stejnými (konečnými) rozptyly $DX_1 = DX_2 = \ldots = DX_n = \sigma^2$, pak platí:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow X \to N\left(n\mu; n\sigma^2\right)$$

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \to N\left(\mu; \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Moivreova-Laplaceova věta vyjadřuje konvergenci binomického rozdělení k normálnímu rozdělení:

Nechť $X \to Bi(n; p)$, pak: pro dostatečně velká n: $X \to N(np; np(1-p))$

Přičemž poměrně dobré výsledky dává tato aproximace v případě, že:

$$np(1-p) > 9 \quad \text{nebo} \quad \min\{np; n(1-p)\} > 5$$

Mezi důležité aplikace centrální limitní věty pak patří možnost **aproximace výběrové relativní četnosti normálním rozdělením**:

$$p \to N\left(\pi; \frac{\pi \cdot (1-\pi)}{n}\right),$$

možnost **aproximace Poissonova rozdělení rozdělením normálním**:

Nechť $X \to Po(\lambda t)$, pak pro dostatečně velké t můžeme X aproximovat normálním rozdělením s parametry: $X \to N(\lambda t, \lambda t)$

a možnost **aproximace průměrného počtu události za časovou jednotku normálním rozdělením**:

Nechť Y je průměrný počet výskytu události za časovou jednotku, pak: $Y \to N\left(\lambda, \frac{\lambda}{t}\right)$

Na závěr zbývá připomenout, že chceme-li dostat co nejlepší výsledky při aproximaci diskrétního rozdělení rozdělením spojitým, nezapomeneme při výpočtech na **opravu na spojitost**.

Otázky

1. Vysvětlete pojmy: konvergence podle pravděpodobnosti, konvergence v distribuci.
2. Co je to Čebyševova nerovnost a jak ji můžeme využít?
3. Vysvětlete zákon velkých čísel s ohledem na relativní četnost výskytu nějaké události v posloupnosti *n* pokusů (Bernoulliho věta)?
4. Co říká centrální limitní věta (Lindebergova-Lévyho věta, Moivreova-Laplaceova věta)?
5. Jak můžeme použít centrální limitní větu k aproximaci rozdělení Poissonova (popřípadě binomického) rozdělením normálním?
6. Jak můžeme pomocí centrální limitní věty aproximovat výběrovou relativní četnost?
7. Kdy se používá oprava na spojitost?

Úlohy k řešení

1. Farmář prodává brambory po koších. Váha koše má logaritmicko-normální rozdělení se střední hodnotou 17,80 kg a směrodatnou odchylkou 1,76 kg. Jaká je pravděpodobnost, že celková váha pěti košů brambor bude vyšší než 90 kg ?

2. Zaměstnanci jistého podniku mají nárok na jeden den plně hrazené nemocenské měsíčně. Jestliže víme, že zaměstnanci si vybírají cca 0,78 dní měsíčně (na zaměstnance) a v podniku pracuje 220 zaměstnanců, jaká je pravděpodobnost, že si zaměstnanci příští měsíc budou nárokovat více než 195 dní ?

3. V továrně na výrobu žárovek bylo při výstupní kontrole zjištěno, že životnost žárovky je (1600 ± 250) hodin. Jaká je pravděpodobnost, že vybereme-li náhodně 100 žárovek, tak jejich průměrná životnost bude nižší než 1560 hodin ?

4. Majitel kiosku na tramvajové zastávce odhadnul, že 15% zákazníků si kupuje hamburger. Ve středu nakupovalo v daném kiosku 375 zákazníků. Jaká je pravděpodobnost, že bylo prodáno více než 65 hamburgerů?

5. Místní firma kompletuje počítače PC. Průměrná doba potřebná k sestavení jednoho počítače je 35 minut. Ve firmě se kompletováním se pracuje 8 hodin denně, 20 dní měsíčně. Jaká je pravděpodobnost, že příští měsíc zaměstnanci sestaví:
   a) více než 300 počítačů
   b) mezi 250 a 275 počítači

6. Firma XY se zabývá výrobou mobilních telefonů. 5% výrobků je při výstupní kontrole vyřazeno v důsledku výrobních vad. Jaká je pravděpodobnost, že v kontrolní sérii 500 telefonů bude:
   a) méně než 30 vadných kusů
   b) mezi 2.5% a 7.5% vadných kusů

7. Před volbami je v populaci státu 52% příznivců koaličních stran. Jaká je pravděpodobnost, že průzkum veřejnosti rozsahu n = 1500 ukáže nesprávně převahu opozice?

8. Pravděpodobnost zásahu letícího cíle střelcem je 0,95. Jaká je pravděpodobnost, že počet zásahu ve 100 pokusech bude alespoň 97?

9. Při zásahu jádra atomu určitého prvku dojde s pravděpodobností 10% k vyzáření jisté částice.
   a) Kolem jaké střední hodnoty bude kolísat počet vyzářených částic při zásahu 100 jader?
   b) Odhadněte interval, v němž se bude pohybovat počet vyzářených částic při zásahu 100 jader s pravděpodobností 99,9%.

Řešení:

1. $1-\Phi(0{,}25)=0{,}401$

2. $1-\Phi(1{,}79)=0{,}037$

3. $1-\Phi(1{,}6)=0{,}055$

4. $1-\Phi(1{,}34)=0{,}090$ (aplikována oprava na spojitost)

5. a) $1-\Phi(1{,}58)=0{,}057$ (aplikována oprava na spojitost)
   b) $\Phi(0{,}04)+\Phi(1{,}47)-1=0{,}445$ (aplikována oprava na spojitost)

6. a) $\Phi(1{,}03)=0{,}848$
   b) $2\cdot\Phi(2{,}56)-1=0{,}99$

7. $1-\Phi(1{,}55)=0{,}061$

8. $1-\Phi(0{,}92)=0{,}179$

9. a) $EX=10;\quad \sigma_X=3$
   b) $P(1<X<19)=0{,}999$