Náhodné procesy

Definice:

Náhodný proces je systém náhodných veličin $\{X_t\}_{t\in T}$, které jsou definovány na stejné množině elementárních jevů Ω (základní prostor). Množina *T* se nazývá **časová množina.**
Množina *T* může být libovolná. Často má *T* význam času; potom je to nějaká podmnožina reálných čísel **R** nebo $T=\langle 0,\infty)$ nebo $T=\langle a,b\rangle$ nebo $T=N$. Má-li *T* význam času, nazýváme někdy $\{X_t\}_{t\in T}$ místo náhodným procesem **časovou řadou**.

Příklady:

1. Náhodná veličina X_t popisuje počet impulsů (hovorů) registrovaných na telefonní ústředně (operátorem) za časový interval $\langle 0,t\rangle$. Pak $\{X_t\}_{t\in T}$ je náhodný proces a $T=\langle 0,+\infty)$.
2. $\{X_t\}_{t\in T}$ **,** $T=\langle 0,+\infty)$ je fluktuační složka napětí na výstupu rezistoru v elektrickém obvodu v čase $t\geq 0$. Fluktuace nastává v důsledku náhodného pohybu elektronů. Tento náhodný proces se nazývá ***termický šum***.
3. Uvažujme nějakou populaci (hmyzu, zvířat, lidí). Její velikost kolísá náhodně vzhledem k náhodnosti narození, úmrtí, emigrace, či imigrace. $\{X_t\}_{t\in T}$ označuje velikost populace v čase $t\in T$

Definice:

Prvky základního prostoru Ω, tj. hodnoty, kterých může NP nabýt, nazýváme **stavy** tohoto NP.

Náhodné procesy …budeme užívat značení buďto $\{X_t\}_{t\in T}$ nebo $\{X(t): t\in T\}$

Náhodným (stochastickým) procesem nazveme zobrazení, které každé hodnotě $t\in T$ přiřadí náhodnou veličinu $X(t)$. Proměnná t má ve většině případů význam času (odtud časová množina).

Realizací náhodného procesu rozumíme konkrétní pozorování náhodného procesu, tj. již nenáhodnou funkci, a značíme ji $x(t)$. Tuto funkci nazýváme **trajektorií** NP $\{X(t): t\in T\}$.

Dle povahy množiny T rozlišujeme:

- **náhodné procesy se spojitým časem** (náhodné funkce) – T je reálný interval,
- **náhodné procesy s diskrétním časem** (náhodné posloupnosti) – T je reálná diskrétní množina.

Prvky základního prostoru Ω, tj. hodnoty, kterých může NP nabýt, jsme nazvali **stavy** tohoto NP. Hodnota $X(t)$ tedy vyjadřuje náhodný stav pozorovaného procesu v čase t.

Dle povahy základního prostoru Ω (stavů $X(t)$) rozlišujeme:

- **náhodné procesy s diskrétními stavy** $X(t)$ – množina Ω je spočetná, tj. proces může nabývat jen konečně nebo spočetně mnoha hodnot.
- **náhodné procesy se spojitými stavy** $X(t)$ **-** Ω je nějaký interval v **R**

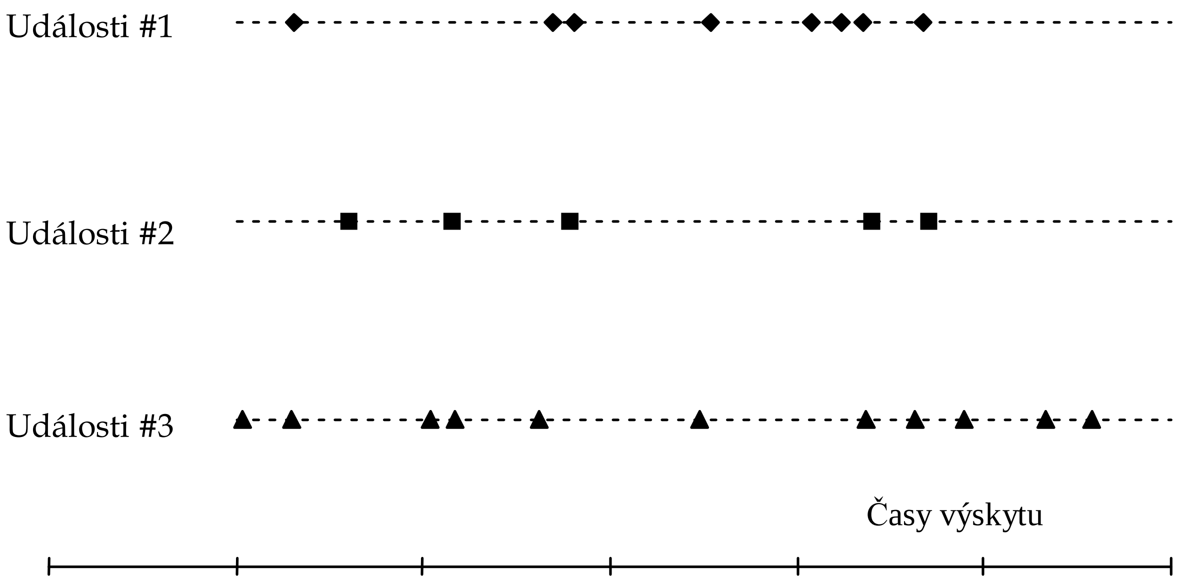
Náhodný proces $\{X(t) : t \geq 0\}$ se spojitým časem a s diskrétními stavy 0,1,2,… obvykle nazýváme **čítací proces**, protože zaznamenává počet nějakých událostí v čase. Hodnota $X(t)$ pak představuje počet daných událostí v intervalu $\langle 0, t \rangle$ a vzdálenosti jednotlivých okamžiků událostí od počátku $t = 0$ jsou náhodné veličiny.
Příkladem čítacího procesu je **Poissonův proces.**

Než ho zadefinujeme, připomeneme znalosti ze Statistiky I:

Poissonova NV

Příklady:

- počet studentů vstupujících do budovy VŠB TUO od 8:00 do 9:00 hod.
- počet pacientů ošetřených během dopoledních ordinačních hodin
- počet mikrodefektů v zadaném vzorku materiálu, atd.

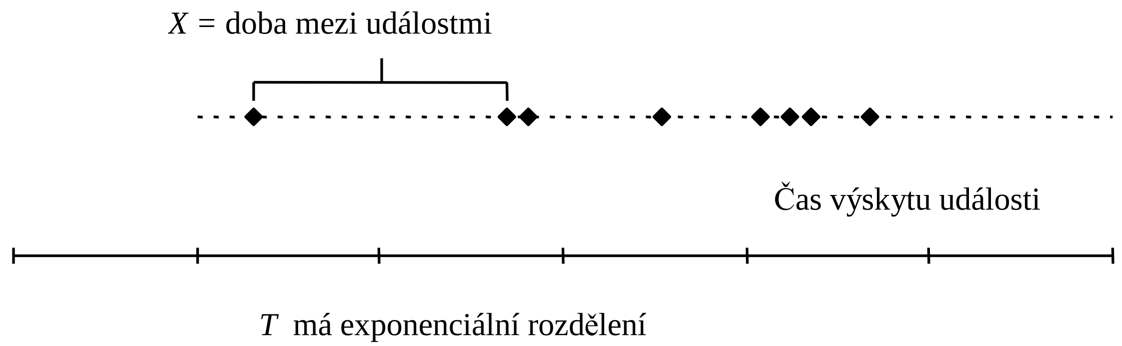


$$P(X=k)=\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!};\ 0\le k<\infty$$

$$E(X)=\lambda t \quad D(x)=\lambda t$$

NV s exponenciálním rozdělením

$$X \rightarrow E(\lambda)$$



$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x};\ x \geq 0$$

$$E(\mathrm{X}) = \int_{t=0}^{\infty} \lambda t\, e^{-\lambda t}\, dt = \frac{1}{\lambda}$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \ldots = \frac{1}{\lambda^2}$$

Poissonův proces

Přibližme si nyní **Poissonův proces** jako příklad čítacího procesu, který se velmi často vyskytuje v aplikacích (například v teorii hromadné obsluhy).

Nechť $\{X(t): t \geq 0\}$ je čítací proces. Nechť navíc platí:

$$X(0) = 0,$$

délky intervalů mezi výskyty sledované události jsou nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & pro\ x > 0, \\ 0 & pro\ x \leq 0, \end{cases}$$

kde $\lambda > 0$ je parametr (tzv. intenzita homogenního Poissonova procesu).

Pak tento proces nazveme **homogenním Poissonovým procesem**, přičemž $X(t)$ má Poissonovo rozdělení s parametrem λt, tedy

$$P(X(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \ \ k = 0,1,\dots .$$

Střední počet výskytů události v intervalu $\langle 0,t \rangle$ je roven λt. Parametr λ tedy udává střední počet výskytů sledované události za jednotku času.

Protože intervaly mezi jednotlivými výskyty událostí jsou nezávislé, znalost okamžiků prvních n výskytů neovlivňuje předpověď doby čekání na další výskyt události. Také skutečnost, že sledovaná událost už po určitou dobu nenastala, nemění pravděpodobnost jejího výskytu v dalším intervalu.

Příkladem Poissonova procesu by mohl být proces $\{X(t): t \geq 0\}$, kde $X(t)$ udává počet poruch nějakého zařízení v časovém intervalu $\langle 0,t \rangle$.

Řešený příklad

Zdroj záření vysílá v průměru 1 impuls za 2 sekundy, přičemž impulsy tvoří Poissonův proces. Jaká je pravděpodobnost, že v každém z pěti intervalů o délce 5 sekund

(0s, 5s), (5s, 10s),…, (20s, 25s)

budou registrovány nejméně 4 impulsy?

Protože $EX(t) = \lambda t$ *, spočteme z rovnice* $1 = \lambda \cdot 2$ *parametr* $\lambda = 0{,}5$. *Pro t = 5 pak získáme* $EX(5) = 0{,}5 \cdot 5 = 2{,}5$. *Pro pravděpodobnost, že během jednoho intervalu dojde k registraci alespoň 4 impulsů, platí*

$$P\left(X(5) \geq 4\right) = \sum_{k=4}^{\infty} \frac{2{,}5^k}{k!} e^{-2{,}5}$$

a hledaná pravděpodobnost pro všech pět intervalů je tak rovna hodnotě

$$\left[\sum_{k=4}^{\infty} \frac{2{,}5^k}{k!} e^{-2{,}5}\right]^5.$$

Markovův proces

Nebude-li uvedeno jinak, $\{X(t): t \geq 0\}$, popř. $\{X_t, t \geq 0\}$, bude označovat náhodný proces se spojitým časem a diskrétní množinou stavů $I = \{0,1,2,\ldots\}$ (stavy jsou pro jednoduchost označeny celými nezápornými čísly).

Proces $\{X(t): t \geq 0\}$ nazveme **Markovovým procesem**, splňuje-li tzv. markovskou vlastnost:

pro libovolná $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t \leq \tau$ a $i_1, \ldots, i_n, i, j \in I$ platí:

$$P\big(X(\tau) = j \big| X(t) = i, X(t_n) = i_n, \ldots, X(t_1) = i_1\big) = P\big(X(\tau) = j \big| X(t) = i\big).$$

Pravděpodobnost na pravé straně uvedené rovnosti nazýváme **pravděpodobnost přechodu**.

Je-li tedy t přítomný okamžik, potom chování Markova procesu v libovolném budoucím okamžiku $\tau \geq t$ závisí pouze na přítomném stavu a nikoli na stavech předchozích.

Markovův proces se nazývá **homogenní**, pokud pravděpodobnost přechodu z předchozího výkladu nezávisí na hodnotách t a τ, ale pouze na jejich rozdílu. Používáme pak značení

$$p_{ij}(\tau - t) \overset{ozn}{=} P\left(X(\tau) = j \middle| X(t) = i\right).$$

Tedy v homogenním procesu závisejí pravděpodobnosti přechodu pouze na rozdílu časových okamžiků a jsou navíc invariantní vůči posunutí v čase. Pro $\tau = t$ pak dostaneme

$$p_{ij}(0) = \begin{cases} 0 & pro\ i \neq j, \\ 1 & pro\ i = j. \end{cases}$$

Pro popis rozdělení Markovova procesu v čase t budeme v dalším textu užívat

$$p_i(t) \overset{ozn}{=} P\left(X(t) = i\right),\ i = 0,1,2,\dots\ .$$

Při pravděpodobnostech $p_i(0)$, $i = 0,1,2,\dots$, se mluví o **počátečním rozdělení** Markovova procesu.

Při velkém t je obvykle Markovův proces stabilizovaný a řídí se **stacionárním rozdělením** se stacionárními pravděpodobnostmi

$$\pi_i = \lim_{t \to \infty} p_i(t), \; i = 0,1,2,\dots \,.$$

Jednoduchým příkladem homogenního Markovova procesu by mohl být homogenní Poissonův proces z předchozího příkladu. Počáteční rozdělení by mělo tvar $p_0(0) = 1$, $p_n(0) = 0$ pro $n = 1,2,\dots$ a pro pravděpodobnosti přechodu by platilo $p_{ij}(h) = \frac{\lambda h^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda h}$ pro $i, j \in N \cup \{0\}, j \geq i$.

V homogenním Markovově procesu platí

- $p_{ij}(t_1 + t_2) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}(t_1) p_{kj}(t_2)$, $t_1, t_2 \geq 0$, $i, j = 0,1,2,\dots$,

- $p_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j(0) p_{ji}(t)$, $t \geq 0$, $i = 0,1,2,\dots$.

První rovnice se nazývá **Chapmanova-Kolmogorovova rovnice**.

Důkaz: Máme dokázat, že

$$p_{ij}(t_1+t_2)=\sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}(t_1)p_{kj}(t_2)$$

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A|B_k)\,P(B_k)$$ ….věta o úplné pravděpodobnosti

$$P(A|C) = \sum_{k=1}^{n} P(A|B_k,C).P(B_k|C)$$ … věta o úplné pravděpodobnosti v podmíněné podobě

Vezmeme speciální jevy A a C:

$$B_k = \{X(t_1)=k\}$$

$$B_i \cap B_j = \emptyset;\ \forall\ i \neq j$$

$$\bigcup_k B_k = \Omega$$

$$P(A|C) = P\big(X(t_1+t_2)=j \big| X(0)=i\big)$$

$$=\sum_k P\big(X(t_1+t_2)=j \big| X(t_1)=k, X(0)=i\big)\times P(X(t_1)=k|X(0)=i)$$

$$=\sum_k P\big(X(t_1+t_2)=j \big| X(t_1)=k\big)\times P(X(t_1)=k|X(0)=i)$$

$$=\sum_k p_{kj}(t_2)\times p_{ik}(t_1) \qquad c.b.d.$$

Definujme dva přechody intenzit z hlediska derivací v $t = 0$.

Pro každý stav i předpokládáme, že existuje a je konečná

$$\frac{d}{dt}p_{ii}(t)\Big|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{1-p_{ii}(t)}{0-t}, \quad \text{a nechť} \qquad d_{ii} = \frac{-d}{dt}p_{ii}(t)\Big|_{t=0}$$

Pro všechna i a j, kde $i \neq j$, předpokládáme, že existuje a je konečná:

$$\frac{d}{dt}p_{ij}(t)\Big|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{0-p_{ij}(t)}{0-t}, \quad \text{a nechť} \qquad d_{ij} = \frac{d}{dt}p_{ij}(t)\Big|_{t=0}$$

Úpravami předchozích vztahů dostaneme

$$\frac{1-p_{ii}(t)\big|_{t=0}}{t} = d_{ii} + r_i(t),$$

kde $r_i(t) \to 0$ pro $t \to 0$. Potom úpravou dostaneme:

$$1-p_{ii}(t)=d_{ii}t+tr_i(t)=d_{ii}t+0(t).$$

Tato rovnice může být interpretována jako: pravděpodobnost přechodu ze stavu i do nějakého jiného stavu během časového intervalu t a je rovna $d_{ii}t+0(t)$.

Podobně můžeme psát pro $i \neq j$

$$p_{ij}(t)=d_{ij}t+0(t).$$

Tento vztah může být interpretován jako pravděpodobnost přechodu ze stavu i do stavu j v časovém intervalu t, která je rovna $d_{ij}t+0(t)$. Jako výsledek máme pro libovolné $t \geq 0$ a $h>0$

$$p_{ij}(t+h)=p_{ij}(t)\overbrace{\{1-(d_{jj}h+0(h))\}}^{p_{jj}(h)}+\sum_{k\neq j}p_{ik}(t)d_{kj}h+0(h)$$

dále

$$\frac{p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)}{h}=-d_{jj}p_{ij}(t)+\sum_{k\neq j}p_{ik}(t)d_{kj}+\frac{0(h)}{h}.$$

Předpokládáme, že $p'_{ij}(t)$ existuje a $h \to 0$, pak obdržíme

$$p'_{ij}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)}{h} = -d_{jj} p_{ij}(t) + \sum_{k \neq j} p_{ik}(t) d_{kj} \; .$$

Pro všechny stavy *i* a *j* tato rovnice dává systém diferenciálních rovnic, jejichž řešením získáme pravděpodobnosti přechodu.

K získání bezpodmínečných stavových pravděpodobností $p'_i(t)$ pro každý stav i přijmeme stejný důvod, který byl již použit v odvození předcházejících rovnic. Takže máme

$$p_i(t+h) = p_i(t)(1 - d_{ii}h) + \sum_{j \neq i} p_j(t) d_{ji} h + 0(h) \; ,$$

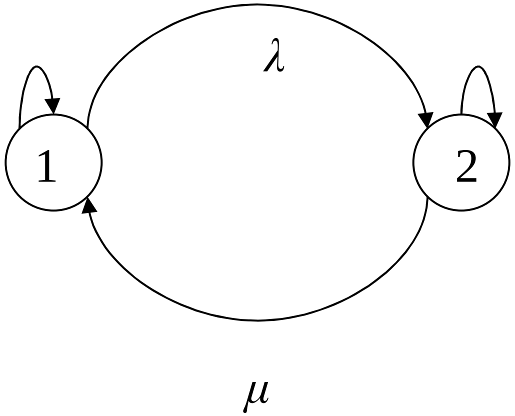
ze které získáme

$$p'_i(t) = -d_{ii} p_i(t) + \sum_{j \neq i} p_j(t) d_{ji}$$. **Nejčastější formulace !!!**

Tento výraz definuje systém rovnic, který je lineární z hlediska Laplaceovy transformace proměnných a může být řešen standardními technikami.

Ilustrace

Uvažujme systém zobrazený na obrázku, jenž se pohybuje mezi stavy 1 a 2. Rozložení přechodu v čase ze stavu 1 do stavu 2 je $\lambda e^{-\lambda t}$ a ze stavu 2 do stavu 1 $\mu e^{-\mu t}$. Úkolem bude určit pravděpodobnost, že systém bude ve stavu 1, popř. 2 v jakémkoliv daném čase *t*.



Z předchozího textu víme, že $$d_{ii} = \frac{-d}{dt} p_{ii}(t)\Big|_{t=0} \quad d_{ij} = \frac{d}{dt} p_{ij}(t)\Big|_{t=0}$$

$$d_{11} = -\frac{d}{dt}\left(e^{-\lambda t}\right)\Big|_{t=0} = \lambda \qquad d_{12} = -\frac{d}{dt}\left(1-e^{-\lambda t}\right)\Big|_{t=0} = \lambda$$

a podobně $\qquad d_{22} = \mu \qquad d_{21} = \mu$

Dále můžeme psát

$$p'_{ij}(t) = -d_{jj}\, p_{ij}(t) + \sum_{k \neq j} p_{ik}(t) d_{kj} \; ,$$

použitím Laplaceovy transformace obdržíme

$$sP_{ij}(s) - P_{ij}(0) = -d_{jj} P_{ij}(s) + \sum_{k \neq j} P_{ik}(s) d_{kj} \; ,$$

kde

$P_{ij}(0) = 1$ pro $i = j$ a $P_{ij}(0) = 0$ pro $i \neq j$.

Potom

$$sP_{11}(s)-1=-\lambda P_{11}(s)+\mu P_{12}(s)$$
$$sP_{12}(s)=-\mu P_{12}(s)+\lambda P_{11}(s)$$
$$sP_{22}(s)-1=-\mu P_{22}(s)+\lambda P_{21}(s)$$
$$sP_{21}(s)=-\lambda P_{21}(s)+\mu P_{22}(s).$$

Zapsáno v maticové formě

$$\begin{vmatrix} s+\lambda & -\mu & 0 & 0 \\ -\lambda & s+\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s+\mu & -\lambda \\ 0 & 0 & -\mu & s+\lambda \end{vmatrix} \begin{vmatrix} P_{11}(s) \\ P_{12}(s) \\ P_{22}(s) \\ P_{21}(s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Po vyřešení a provedení inverzní transformace získáme

$$p_{11}(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}$$
$$p_{12}(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}$$
$$p_{22}(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}\ .$$
$$p_{21}(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}-\frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}$$

Nyní najdeme bezpodmínečné stavy pravděpodobností $p_i(t)$ pro každý stav *i*.

$$p'_j(t) = -d_{jj} p_j(t) + \sum_{j \neq i} p_i(t) d_{ij}$$

Po použití Laplaceovy transformace na obou stranách rovnice získáme

$$sP_j(s) - p_j(0) = -d_{jj} P_j(s) + \sum_{i \neq j} d_{ij} P_i(s)$$

$$P_j(s) = \frac{1}{s + d_j}\left[p_j(0) + \sum_{i \neq j} P_i(s) d_{ij} \right].$$

Vezmeme $p_1(0) = p$ a $p_2(0) = q = 1 - p$. Máme zadáno

$$d_{11} = \lambda$$
$$d_{12} = \lambda$$
$$d_{22} = \mu$$
$$d_{21} = \mu$$

$$P_1(s) = \frac{1}{s+\lambda}\left[p + \mu P_2(s)\right]$$

$$P_2(s) = \frac{1}{s+\mu}\left[q + \lambda P_1(s)\right]$$

Řešení je

$$P_1(s) = \frac{(s+\mu)p + \mu q}{s(s+\mu+\lambda)}$$

$$P_2(s) = \frac{q(s+\lambda) + \lambda p}{s(s+\mu+\lambda)}$$

po inverzní transformaci získáme

$$p_1(t) = \frac{1}{\lambda+\mu}\left[\mu - (\mu - (\mu+\lambda)p)e^{-(\mu+\lambda)t}\right]$$

$$p_2(t) = \frac{1}{\lambda+\mu}\left[\lambda + (\mu - (\mu+\lambda)p)e^{-(\mu+\lambda)t}\right].$$

Matice hustoty přechodu

Matice $A = \left\| d_{ij} \right\|$ se nazývá **matice hustoty přechodu** nebo **matice intenzit přechodu procesu**. Tato matice má následující vlastnosti:

1. její nediagonální prvky jsou nezáporné a diagonální prvky jsou záporné,
2. suma prvků v každém řádku je rovna nule, suma nediagonálních prvků je rovna sumě diagonálních prvků s opačným znaménkem.

Pro systém uvažovaný v předchozí ilustraci bude systém diferenciálních rovnic v maticové formě vypadat následovně:

$$\left| p_{11}'(t), p_{12}'(t), p_{22}'(t), p_{21}'(t) \right| = \left| p_{11}(t), p_{12}(t), p_{22}(t), p_{21}(t) \right| \begin{vmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ \mu & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & \mu \\ 0 & 0 & \lambda & -\lambda \end{vmatrix},$$

kde $\begin{vmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ \mu & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & \mu \\ 0 & 0 & \lambda & -\lambda \end{vmatrix}$ je matice hustoty přechodu A.

Také pro bezpodmínečný stav pravděpodobností máme

$$\left|p_1'(t), p_2'(t)\right| = \left|p_1(t), p_2(t)\right| \begin{vmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{vmatrix}.$$

Zde je matice intenzit přechodu A

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{vmatrix}.$$

$\sum$ Shrnutí

Nechť

$$\{X_t : t \geq 0\}$$

reprezentuje Markovův proces se spojitým časem a diskrétními stavy. Pro $t > s > 0$ a stavy *i* a *j* nechť

$$P\{X_t = j\} = p_j(t),$$

což je pravděpodobnost, že proces je ve stavu *j* v čase *t*, a $P\{X_t = j | X_s = i\} = p_{ij}(s,t),$

což je pravděpodobnost, že proces je ve stavu *j* v čase *t* a byl dán procesem, který byl ve stavu *i* v čase *s*.

Pravděpodobnost $p_{ij}(s,t)$ je nazývána **přechodovou pravděpodobnostní funkcí Markovova procesu**.

Předpokládáme, že $p'_{ij}(t)$ existuje a $h \to 0$, pak:

$$p'_{ij}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)}{h} = -d_{jj} p_{ij}(t) + \sum_{k \neq j} p_{ik}(t) d_{kj} \; .$$

Pro všechny stavy *i* a *j* tato rovnice dává systém diferenciálních rovnic, jejichž řešením získáme pravděpodobnosti přechodu.

K získání bezpodmínečných stavových pravděpodobností $p_i'(t)$ pro každý stav i přijmeme stejný důvod, který byl již použit v odvození předcházejících rovnic. Takže máme

$$p_i(t+h) = p_i(t)(1 - d_{ii}h) + \sum_{j \neq i} p_j(t) d_{ji} h + o(h),$$

ze které získáme

$$p_i'(t) = -d_{ii} p_i(t) + \sum_{j \neq i} p_j(t) d_{ji}.$$

Tento výraz definuje systém rovnic, který je lineární z hlediska Laplaceovy transformace proměnných, a může být řešen standardními technikami.

Příklady: viz zvláštní dokument ke cvičení, možnosti projektů

Ustálené stavy

Mějme náhodný proces $\{X(t) : t \geq 0\}$

Nechť díky vzájemné nezávislosti $X(t_1)$ a $X(t_2)$ při t_1 a t_2 velmi od sebe vzdálených můžeme psát

$$\lim_{h \to \infty} p_{ij}(h) = \pi_j .$$

Nyní vyjdeme z Chapmanovy-Kolmogorovovy rovnice:

$$p_{ij}(h_1 + h_2) = p_{ij}(h_1) p_{jj}(h_2) + \sum_{k \neq j} p_{ik}(h_1) p_{kj}(h_2)$$

a nechme $h_1 \to \infty$:

$$\pi_j = \pi_j p_{jj}(h_2) + \sum_{k \neq j} \pi_k p_{kj}(h_2).$$

Tedy

$$\pi_j (1 - p_{jj}(h_2)) = \sum_{k \neq j} \pi_k p_{kj}(h_2),$$

po vydělení h_2 a přechodem k $h_2 \to 0$ dostaneme

$$\pi_j q_j = \sum_{k \neq j} \pi_k q_{kj} , \qquad j = 0,1,2,\dots, \qquad \text{kde} \qquad q_j = d_{jj} ,\ q_{kj} = d_{kj} = \frac{d}{dt} p_{kj}(t)\Big|_{t=0}$$

Toto je soustava lineárních rovnic, kterou musí splňovat pravděpodobnosti π_j , pokud takové existují.

Pravděpodobnosti π_j , j = 0,1,…, se nazývají stacionární pravděpodobnosti.

Poznámka:

Poissonovým procesem modelujeme velmi často počet poruch na daném zařízení během určitého časového intervalu.

Příklad …viz níže zařízení v nepřetržitém provozu

29.2. Příklad. Představme si zařízení, které má být v nepřetržitém provozu, avšak má v náhodných okamžicích poruchy. Předpokládejme, že doba do poruchy má exponenciální rozdělení se střední hodnotou $1/\lambda$ a doba od vzniku poruchy do jejího odstranění má exponenciální rozdělení se střední hodnotou $1/\mu$. Položme $N(t) = 1$, jestliže v okamžiku t je zařízení v provozu, a $N(t) = 0$, jestliže je v okamžiku t poroucháno. Pak je $N(t)$ homogenní Markovův řetězec se stavy $(0, 1)$ a s intenzitami přechodu $\{N(t),\ t \geq 0\}$

(29.2.1) $$q_{0,1} = \mu\,, \qquad q_{1,0} = \lambda\,, \qquad q_1 = \lambda\,, \qquad q_0 = \mu\,.$$

Pro malé hodnoty h je totiž pravděpodobnost poruchy v intervalu $(t, t + h)$ rovna $1 - e^{-\lambda h} \simeq \lambda h$, pravděpodobnost poruchy, jejího odstranění a další poruchy pak je nekonečně malá řádu vyššího než h čili

$$\lim_{h \to 0} \frac{P_{1,0}(h)}{h} = \lambda\,.$$

Neboli $$q_{1,0} = d_{1,0} = \frac{d}{dt} P_{1,0}(t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(1 - e^{-\lambda . t}) = \lambda$$

$$q_{0,1} = d_{0,1} = \frac{d}{dt} P_{0,1}(t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(1 - e^{-\mu . t}) = \mu$$ atd.

Podobně by se postupovalo pro další intenzity. Stacionární rozdělení pravděpodobnosti je dáno soustavou rovnic

$$\pi_0 q_0 = \pi_1 q_{1,0}\,, \qquad \text{tj.} \quad \pi_0 \mu = \pi_1 \lambda\,,$$

$$\pi_1 q_1 = \pi_0 q_{0,1}\,, \qquad \text{tj.} \quad \pi_1 \lambda = \pi_0 \mu\,.$$

To znamená, že $\pi_1 = \pi_0 \mu/\lambda$. Aby stacionární rozdělení bylo rozdělením pravděpodobnosti, musí být

$$\pi_0 + \pi_1 = 1\,, \qquad \text{tj.} \quad \pi_0(1 + \mu/\lambda) = 1\,,$$

tj.

(29.2.2) $$\pi_0 = (1 + \mu/\lambda)^{-1} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = \frac{1/\mu}{1/\lambda + 1/\mu}\,,$$

$$\pi_1 = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{1/\lambda}{1/\lambda + 1/\mu}\,.$$

Pravděpodobnost π_1, která je rovna podílu střední hodnoty doby bezvadné funkce a součtu střední doby bezvadné funkce se střední dobou trvání poruchy, je známa v teorii spolehlivosti jako *koeficient pohotovosti.*

Proces růstu a zániku

Proces růstu a zániku je homogenní Markovův proces $\{X(t): t \geq 0\}$ se stavy 0,1,2,… . Veličina $X(t)$ udává četnost souboru (např. mikroorganismů, osob,…) v čase *t*, přičemž během intervalu $(t, t+h)$, kde *h* je kladné číslo blízké nule, se soubor, který v čase *t* obsahuje *i* objektů, může

- zvětšit právě o jeden objekt s pravděpodobností $\lambda_i h + o(h)$, $i = 0,1,\ldots$,
- zmenšit právě o jeden objekt s pravděpodobností $\mu_i h + o(h)$, $i = 1,\ldots$, dále $\mu_0 = 0$,
- zmenšit nebo zvětšit o více než jeden objekt s pravděpodobností $o(h)$,
- nezmenšit ani nezvětšit s pravděpodobností $1 - \lambda_i h - \mu_i h + o(h)$.

Intenzity přechodu jsou pak rovny

$$q_i = \lim_{h \to 0_+} \frac{1 - p_{ii}(h)}{h} = \lim_{h \to 0_+} \frac{1 - 1 + \lambda_i h + \mu_i h - o(h)}{h} = \lim_{h \to 0_+} \frac{\lambda_i h + \mu_i h - o(h)}{h} = \lambda_i + \mu_i ,$$

$$q_{i,i+1} = \lim_{h \to 0_+} \frac{p_{i,i+1}(h)}{h} = \lim_{h \to 0_+} \frac{\lambda_i h + o(h)}{h} = \lambda_i ,$$

$$q_{i,i-1} = \lim_{h \to 0_+} \frac{p_{i,i-1}(h)}{h} = \lim_{h \to 0_+} \frac{\mu_i h + o(h)}{h} = \mu_i ,$$

a

$$q_{ij} = \lim_{h \to 0_+} \frac{p_{ij}(h)}{h} = \lim_{h \to 0_+} \frac{o(h)}{h} = 0, \quad j > i+1 \text{ nebo } j < i-1.$$

Víme, že **ustálené stavy** jsou charakterizovány soustavou: $\pi_j q_j = \sum_{k \neq j} \pi_k q_{kj}$, j = 0,1,2,… .,

Stacionární pravděpodobnosti π_j , j = 0,1,…, pokud existují, jsou dány soustavou rovnic

j = 0: $\pi_0 \lambda_0 = \pi_1 \mu_1$, a ostatní členy součtu jsou 0. (*)

j = 1,2,…: $\pi_j (\lambda_j + \mu_j) = \pi_{j-1}\lambda_{j-1} + \pi_{j+1}\mu_{j+1}$,

Tedy

$$\pi_j \mu_j - \pi_{j-1}\lambda_{j-1} = \pi_{j+1}\mu_{j+1} - \pi_j \lambda_j , \quad j = 1,2,\ldots \text{ a tak dále.}$$

pro j = 1 tedy máme ten rozdíl 0, viz (*): $0 = \pi_1\mu_1 - \pi_0\lambda_0 = \pi_2\mu_2 - \pi_1\lambda_1 = \ldots$.

Odtud

$$\pi_j \mu_j = \pi_{j-1}\lambda_{j-1}, \; j \geq 1 ,$$

a proto platí rekurentní vztah

$$\pi_j = \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j} \pi_{j-1} .$$

Opakovaným užitím této rovnosti dostaneme

$$\pi_j = \pi_0 \prod_{k=1}^{j} \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}.$$

Protože musí platit vztah $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$, obdržíme rovnost

$$\pi_0 + \pi_0 \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \pi_0 \prod_{k=1}^{2} \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} + \ldots = 1,$$

odtud

$$\pi_0 \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{j} \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} \right) = 1$$

a tedy konečně

$$\pi_0 = \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{j} \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} \right]^{-1}$$

Může se stát, že bude řada ve výše uvedené rovnosti divergovat, tedy $\pi_0 = 0$ a $\pi_j = 0 \quad \forall j \in N$. Toto nastane například, pokud $\lambda_{j-1} > \mu_j \quad \forall j \in N$. Za takovýchto podmínek nebude existovat ustálený stav a soubor neustále poroste.

Neopomeňme ještě připomenout, že Poissonův proces je speciálním případem procesu růstu a zániku ($\mu_j = 0$ pro všechna *j*).

Řešený příklad…dopravní závod s M stejnými vozidly v provozu

29.4. Příklady — některé aplikace procesů růstu a zániku

29.4.1. Představme si pracoviště, na kterém je v provozu M shodných zařízení (např. dopravní závod s M stejnými vozidly v provozu) a pro případ poruchy některého zařízení je k dispozici Z záložních zařízení stejného druhu. Zařízení v provozu mají v náhodných okamžicích poruchy; předpokládejme, že jde o zařízení, která už mají za sebou dobu záběhu a odstraňování skrytých vad, avšak dosud nejeví známky výrazného opotřebení, takže realistickým modelem pro výskyt poruch u každého zařízení je Poissonův proces, tj. doba bezvadné funkce každého zařízení má exponenciální rozdělení se střední hodnotou $1/\mu$. Dále předpokládejme, že doba potřebná k odstranění poruchy má také exponenciální rozdělení se střední hodnotou $1/\lambda$. Jakmile některé ze zařízení v provozu má poruchu, je nahrazeno zařízením ze zálohy, pokud ještě nějaké v záloze je. Zařízení v záloze poruchy mít nemohou, zařízení opravená se vracejí do zálohy. Pro posouzení, do jaké míry je celý systém schopný provozu, je rozhodující rozdělení pravděpodobnosti počtu zařízení, schopných funkce. Označme $N(t)$ počet zařízení způsobilých provozu v okamžiku t (používaných a čekajících v záloze). Proces $\{N(t) \mid t \geqq 0\}$ je proces růstu a zániku. Příslušné intenzity přechodu stanovíme takto:

Dokud počet provozuschopných zařízení je $N(t) = n \geqq M$, mohou poruchy vznikat jen u těch M zařízení, kterých se používá, tudíž

$$q_{n,n-1} = \mu_n = M\mu \quad \text{pro } n \geqq M .$$

Doba X do poruchy každého z M provozuschopných zařízení má podle předpokladu exponenciální rozdělení, $P(X > x) = \mathrm{e}^{-\mu x}$ $(x > 0)$. Tedy pravděpodobnost, že u některého zařízení dojde k poruše během intervalu délky h, je rovna doplňku pravděpodobnosti, že doba bezporuchového provozu u všech M zařízení bude delší než h, čili

$$P_{n,n-1}(h) = 1 - [\mathrm{e}^{-\mu h}]^M = 1 - \mathrm{e}^{-\mu M h} \doteq M\mu h .$$

Podobně

$$\mu_n = n\mu \quad \text{pro } n < M .$$

Dále, pokud není žádné zařízení poroucháno a tedy v opravě, nemůže se žádné vrátit mezi provozuschopná, takže intenzita přechodů typu $n \to n + 1$ je

$$\lambda_n = 0 \quad \text{pro } n = M + Z . \qquad q_{n,n+1}$$

$$P_{n,n-1}(h) = P(X_{\min} \prec h) = 1 - P(X_{\min} \geq h) = 1 - \prod_{i=1}^{M} P(X_i \geq h) = 1 - \prod_{i=1}^{M} R_{\min}(h) = 1 - \left[e^{-\mu . h}\right]^M = 1 - e^{-M . \mu . h}$$

Jakmile je nějaké zařízení porouchány, tj. počet provozuschopných $N(t)$ menší než $M + Z$, opravuje se a může s určitou pravděpodobností být vráceno mezi provozuschopná. Protože doba opravy má exponenciální rozdělení se střední hodnotou $1/\lambda$, je

$$\lambda_n = \lambda \quad \text{pro } n < M + Z .$$

Stacionární rozdělení počtu provozuschopných zařízení tedy je dáno (29.3.7) a (29.3.8), přičemž

$$\pi_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{M+Z} \prod_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}\right]^{-1} = \tag{29.4.1}$$

$$= \left[1 + \sum_{n=1}^{M-1} \prod_{k=1}^{n} \frac{\lambda}{k\mu} + \prod_{k=1}^{M} \frac{\lambda}{k\mu} \sum_{j=0}^{Z} \left(\frac{\lambda}{M\mu}\right)^j\right]^{-1} .$$

Například při $M = 8$, $Z = 2$, $\lambda = 0{,}01\ \mathrm{h}^{-1}$, $\mu = 0{,}001\ \mathrm{h}^{-1}$, tj. při osmi zařízeních v provozu, dvou záložních, střední době bezporuchového chodu 1 000 h a střední době opravy 100 h je stacionární rozdělení počtu zařízení schopných provozu dáno tabulkou

n	$\pi_n = P(N(t) = n)$	$\sum_{j=n}^{10} \pi_j = P(N(t) \geqq n)$	n	$\pi_n = P(N(t) = n)$	$\sum_{j=n}^{10} \pi_j = P(N(t) \geqq n)$
0	0,000 072	1,000 000	6	0,097 082	0,896 712
1	0,000 699	0,999 928	7	0,138 689	0,799 630
2	0,003 495	0,999 229	8	0,173 362	0,660 941
3	0,011 649	0,995 734	9	0,216 702	0,487 579
4	0,029 124	0,984 085	10	0,270 877	0,270 877
5	0,058 249	0,954 961			

Je vidět, že všech osm zařízení bude v provozu s pravděpodobností jen 0,66, to znamená, že přibližně 34 % z celkové dlouhé doby provozu systému bude fungovat jen sedm nebo i méně zařízení. Zlepšení by se dosáhlo např. zařazením dalšího záložního prvku.

Návrhy na projekt:

1.

Provoz systému hromadné obsluhy se dvěma obslužnými zařízeními. Nechť požadavky na obsluhu tvoří Poissonův proces s intenzitou λ, doba obsluhy nechť má exponenciální rozdělení se střední hodnotou $1/\mu$. Předpokládejme, že lze obsluhovat dva zákazníky současně. Najděte rozdělení počtu obsluhovaných a čekajících v systému.

2.

V dílně pracuje M strojů, zcela shodných a fungujících nezávisle na sobě. K jejich obsluze je určen jeden mechanik. Každý stroj má rozdělení dob mezi poruchami exponenciální se střední hodnotou $\frac{1}{\lambda}$. Doba potřebná k odstranění poruchy má také exponenciální rozdělení, její střední hodnota je $\frac{1}{\mu}$. Najděte stacionární rozdělení počtu nefungujících strojů (jeden v opravě, ostatní porouchané čekají na opravu).

$$\left[\pi_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{M} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \frac{M!}{(M-n)!} \right]^{-1}, \quad \pi_n = \pi_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \frac{M!}{(M-n)!} \right]$$

$\sum$ Shrnutí

Náhodným (stochastickým) procesem nazveme zobrazení, které každé hodnotě $t \in T$ přiřadí náhodnou veličinu $X(t)$. Proměnná *t* má ve většině případů význam času.

Realizací náhodného procesu rozumíme konkrétní pozorování náhodného procesu, tj. již nenáhodnou funkci, a značíme ji $x(t)$.

Dle povahy množiny *T* rozlišujeme:

- **náhodné procesy se spojitým časem** (náhodné funkce),
- **náhodné procesy s diskrétním časem** (náhodné posloupnosti)

Hodnota $X(t)$ vyjadřuje stav pozorovaného objektu v čase *t*. Dle povahy náhodné veličiny $X(t)$ rozlišujeme:

- **náhodné procesy se spojitými stavy -** $X(t)$ je spojitá,
- **náhodné procesy s diskrétními stavy -** $X(t)$ je diskrétní.

Náhodný proces $\{X(t): t \geq 0\}$ se spojitým časem a s diskrétními stavy 0,1,2,… obvykle nazýváme **čítací proces**, protože zaznamenává počet nějakých událostí v čase.

Nechť $\{X(t): t \geq 0\}$ je čítací proces. Nechť navíc platí:

$X(0) = 0$,

délky intervalů mezi výskyty sledované události jsou nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & pro\ x > 0, \\ 0 & pro\ x \leq 0, \end{cases}$$

kde $\lambda > 0$ je parametr (tzv. intenzita homogenního Poissonova procesu).

Pak tento proces nazveme **homogenním Poissonovým procesem**, přičemž $X(t)$ má Poissonovo rozdělení s parametrem λt.

Proces $\{X(t): t \geq 0\}$ nazveme **Markovovým procesem**, splňuje-li tzv. markovskou vlastnost:

pro libovolná $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t \leq \tau$ a $i_1, \ldots, i_n, i, j \in I$ platí:

$$P\left(X(\tau) = j \middle| X(t) = i, X(t_n) = i_n, \ldots, X(t_1) = i_1\right) = P\left(X(\tau) = j \middle| X(t) = i\right).$$

V homogenním Markovově procesu platí

- $p_{ij}(t_1 + t_2) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}(t_1) p_{kj}(t_2)$, $t_1, t_2 \geq 0,\ i, j = 0,1,2,\ldots$,

- $p_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j(0) p_{ji}(t)$, $t \geq 0,\ i = 0,1,2,\ldots$.

První rovnice se nazývá **Chapmanova-Kolmogorovova rovnice**.

Proces růstu a zániku je homogenní Markovův proces $\{X(t) : t \geq 0\}$ se stavy 0,1,2,… .

Otázky

1. Vysvětlete pojem náhodný proces a popište typy náhodných procesů.

2. Definujte Poissonův proces.

3. Definujte Markovův proces.

4. Co jsou to procesy růstu a zániku?

5. Odvoďte stacionární pravděpodobnosti (pravděpodobnosti stavů).