Spolufinancováno Evropskou unií
a českým státním rozpočtem

Co-financed by the European Union
and the Czech state budget

MATEMATICKÉ ZÁKLADY PRO ANALÝZU STROMEM PORUCH

prof. Ing. Radim Briš, CSc.

Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava

Fakulta elektrotechniky a informatiky

Ostrava 2018

Obsah

Literatura

Klíč k řešení úloh

POKYNY KE STUDIU

Aplikovaná matematika

Pro předmět Aplikovaná matematika jste obdrželi studijní materiál obsahující

- integrované skriptum pro distanční studium obsahující i pokyny ke studiu

Skriptum se dělí na části, kapitoly, které odpovídají logickému dělení studované látky, ale nejsou stejně obsáhlé. Předpokládaná doba ke studiu kapitoly se může výrazně lišit, proto jsou velké kapitoly děleny dále na číslované podkapitoly a těm odpovídá níže popsaná struktura.

Při studiu každé kapitoly doporučuji následující postup:

Čas ke studiu

Na úvod kapitoly je uveden **čas** potřebný k prostudování látky. Čas je orientační a může vám sloužit jako hrubé vodítko pro rozvržení studia celého předmětu či kapitoly. Někomu se čas může zdát příliš dlouhý, někomu naopak. Jsou studenti, kteří se s problematikou spolehlivosti ještě nikdy nesetkali a naopak takoví, kteří již v tomto oboru mají bohaté zkušenosti.

Cíl

Ihned potom jsou uvedeny cíle, kterých máte dosáhnout po prostudování této kapitoly – konkrétní dovednosti, znalosti.

Výklad

Následuje vlastní výklad studované látky, zavedení nových pojmů, jejich vysvětlením, vše většinou doprovázeno řešenými příklady.

Shrnutí pojmů

Na závěr kapitoly jsou zopakovány hlavní pojmy, které si v ní máte osvojit. Pokud některému z nich ještě nerozumíte, vraťte se k nim ještě jednou.

Otázky

Pro ověření, že jste dobře a úplně látku kapitoly zvládli, máte k dispozici několik teoretických otázek.

Úlohy k řešení

Jelikož hlavním cílem kurzu je schopnost aplikovat čerstvě nabyté znalosti při řešení reálných situací, některé kapitoly jsou ukončeny praktickými úlohami k řešení. Výsledky zadaných příkladů jsou uvedeny v závěru učebnice v KLÍČI K ŘEŠENÍ. Používejte je až po vlastním vyřešení úloh, jen tak si samokontrolou ověříte, že jste obsah kapitoly skutečně úplně zvládli.

Úspěšné a příjemné studium s touto učebnicí Vám přeje autor

Radim Briš

1. ZÁKLADNÍ POJMY Z TEORIE SPOLEHLIVOSTI

1.1. Teorie spolehlivosti

Čas ke studiu: 10 minut

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- popsat charakteristické rysy teorie spolehlivosti
- technické a matematické aspekty teorie spolehlivosti

Výklad

- **Co zkoumá teorie spolehlivosti ?**

Teorie spolehlivosti se zabývá technickými a matematickými otázkami spolehlivosti. Technická problematika souvisí s konstrukcí, použitými materiály, technologií a organizací výroby, diagnostikou a strategií údržby.

Matematická teorie spolehlivosti se soustředí na prognózu, odhad a optimalizaci bezporuchového provozu výrobků (Výrobkem rozumíme prvek, systém nebo jeho část). Hlavními nástroji jsou zde teorie pravděpodobnosti a matematická statistika. Typicky matematickou záležitostí je např. stanovení charakteristik spolehlivosti jako jsou zaručená doba života, střední doba bezporuchového provozu, střední doba mezi poruchami, průměrné náklady na údržbu a opravy aj.

Matematická statistika a teorie pravděpodobnosti nám umožňují popis jevů, jejichž podstatu dokonale neznáme, ale jejichž zákonitosti vzniku jsou pro stanovení spolehlivosti velmi důležité. Jsou to např. fyzikální zákonitosti a mechanizmy poruch, procesy stárnutí, koroze, opotřebení a únavy materiálu, vzájemná souvislost různých poruch, vliv prostředí apod. Protože analýza těchto jevů z hlediska čistě fyzikálního nebo chemického je příliš složitá, nezbývá než zjišťovat poruchovost větších celků, nebo většího počtu výrobků v delším čase statisticky. To však většinou vyžaduje sběr, přenos a zpracování informací přímo z provozu, jako např. soustavné a pečlivé vedení záznamů o všech poruchách a jejich příčinách, době provozu, době oprav, podmínkách činnosti a jiných vlivech u zařízení, která jsou často rozptýlena na různých místech a pracují v různých podmínkách.

Spolehlivost jakožto obecnou vlastnost výrobku splňovat po určitou dobu a za určitých podmínek danou funkci, je nutno posuzovat též podle ekonomického hlediska. Aplikací výsledků teorie spolehlivosti lze též použít nejen při návrhu zařízení a jeho způsobu provozu na zadané úrovni spolehlivosti, která vyplývá z výše zmíněných ekonomických kritérií, ale též při vzájemném porovnávání různých alternativ řešení, dále pro kvantitativní předpovědi chování složitých zařízení v dalším provozu a k sestavení optimální strategie údržby těchto zařízení.

Příklad 1

Moderní výrobky (systémy) sestavené z mnoha prvků jsou vysoce spolehlivé, např. počítač. Jestliže chceme tuto spolehlivost dále zvyšovat, pak nelze jít pouze cestou zvyšování

spolehlivosti prvků. Jestliže systém např. sestává ze 100 000 prvků, které pracují nezávisle na sobě a každý z nich se s pravděpodobností 0.99999 po sledovanou dobu neporouchá, potom pravděpodobnost, že se systém po sledovanou dobu neporouchá (tj. bezporuchovost), je $(0.99999)^{100000} = 0.368$. *Je proto nezbytné hledat jiné způsoby pro zvyšování bezporuchovosti – např. zálohování důležitých částí, aplikace údržby atd.*

Shrnutí pojmů

Spolehlivost lze charakterizovat jako obecnou vlastnost výrobku splňovat po určitou dobu a za určitých podmínek danou funkci.

Teorie spolehlivosti je vědní disciplína zodpovídající technické a matematické otázky spolehlivosti.

Hlavní nástroje pro zodpovězení matematických otázek teorie spolehlivosti jsou **teorie pravděpodobnosti a matematická statistika**.

Organizace výrobního procesu či technologie výroby (např. použití vhodných materiálů) souvisí s **technickými otázkami spolehlivosti**.

Otázky 1.1.

1. Co znamená spolehlivost?
2. Čím se zabývá teorie spolehlivosti?
3. Jaké jsou nástroje teorie spolehlivosti?

1.2. Základní pojmy

Čas ke studiu: 20 minut

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- definovat základní pojmy teorie spolehlivosti z hlediska technického
- bezporuchovost, životnost, opravitelnost, pohotovost, …
- charakterizovat poruchy a jejich klasifikace

Výklad

Nejprve vyložíme základní pojmy teorie spolehlivosti z hlediska technického, což nám poslouží jako motivace pro zavedení příslušných pojmů matematických. Pojem spolehlivosti je obvykle spojován s pojmem výrobku (neboli objektu). Výrobek od okamžiku, kdy je vyroben, má svou historii: doprava, skladování, příprava na využití, vlastní využití, údržba, oprava a vyřazení. V některých fázích historie výrobku budeme požadovat, aby byl **spolehlivý.**

- **Spolehlivost jako obecná vlastnost**

Spolehlivostí rozumíme obecnou vlastnost spočívající ve schopnosti výrobku plnit po stanovenou dobu požadované funkce při zachování provozních parametrů daných technickými podmínkami. Je charakterizována dalšími dílčími vlastnostmi, jako jsou: bezporuchovost, životnost, opravitelnost, udržovatelnost, skladovatelnost, bezpečnost a další.

- **Jaké jsou další dílčí vlastnosti spolehlivosti ?**

Technickými podmínkami přitom rozumíme souhrn specifikací technických a provozních vlastností výrobku spolu se způsoby jeho provozu, údržby a oprav. Jinými slovy je spolehlivost způsobilost výrobku uchovat svou kvalitu v daných podmínkách využívání. **Bezporuchovost** je způsobilost výrobku plnit bez poruchy požadované funkce po stanovenou dobu a za stanovených podmínek. **Životnost** je způsobilost výrobku plnit požadované funkce do mezního stavu stanoveného technickými podmínkami. Na konci období životnosti se u výrobků projeví takové rysy spojené s opotřebením a stárnutím, že jejich odstranění je neekonomické, nebo nemožné. Někdy může jít i o tzv. „morální opotřebení“. Opotřebení znamená ve spolehlivosti postupné změny znaků výrobků, které jsou vyvolány zatížením způsobeným pouze provozními podmínkami. Stárnutí znamená změny vzniklé zatížením mimo provoz. **Opravitelnost** je vlastnost výrobku spočívající v možnosti odhalení poruchy, zjištění její příčiny a odstranění opravou. **Udržovatelnost** je vlastnost výrobku spočívající ve způsobilosti k předcházení poruch předepsanou údržbou. **Skladovatelnost** je schopnost výrobku zachovávat nepřetržitě bezvadný (a tedy provozuschopný) stav po dobu skladování a přepravy při dodržení předepsaných podmínek. **Bezpečnost** je vlastnost výrobku neohrožovat lidské zdraví, nebo životní prostředí při plnění předepsané funkce po stanovenou dobu a za stanovených podmínek.

Z provozního hlediska je důležitá **pohotovost** výrobku, tj. schopnost výrobku v určitém okamžiku vyhovovat technickým podmínkám. Pohotovost (neboli též provozuschopnost) je komplexní vlastnost objektu zahrnující bezporuchovost a opravitelnost objektu v podmínkách provozu.

- **Co je porucha a jak poruchy klasifikujeme ?**

Důležitým a zdánlivě jednoduchým pojmem teorie spolehlivosti je pojem poruchy. **Porucha** je částečná nebo úplná ztráta, případně změna vlastností výrobku, která podstatným způsobem snižuje schopnost nebo způsobuje nemožnost výrobku plnit požadovanou funkci. Pojem poruchy je v mnoha případech relativní. V praxi je proto zapotřebí pojem poruchy přesně vymezit. Zhoršení schopnosti provozu, které ještě nezpůsobí poruchu, se označuje jako závada.

1. Podle podmínek vzniku se poruchy dělí na poruchy z vnějších a vnitřních příčin. Porucha z vnějších příčin je porucha způsobená nedodržením stanovených provozních podmínek a předpisů pro zatěžování, obsluhu a údržbu. Porucha z vnitřních příčin je porucha způsobená vlastní nedokonalostí výrobku při zachování stanovených provozních podmínek a předpisů. Mezi poruchy z vnitřních příčin patří především časné poruchy projevující se v počátečním období provozu. Jejich výskyt s rostoucím časem klesá. Příčinou časných poruch jsou nedostatky při návrhu a výrobě. Dále sem patří poruchy dožitím vznikající následkem opotřebení nebo stárnutí (viz dále).

2. Podle časového průběhu se poruchy dělí na náhlé a postupné. Náhlá porucha je porucha projevující se prudkou změnou jednoho, nebo více parametrů výrobku. Postupná porucha je porucha projevující se jako postupná změna parametrů výrobku, např. v důsledku stárnutí, nebo opotřebení. Zatímco poruchy náhlé se obvykle předvídat nedají, je předvídání postupných poruch častou úlohou teorie spolehlivosti. V některých situacích je účelné dále klasifikovat poruchy na částečné a úplné. Částečná porucha znamená odchýlení jednoho, nebo více parametrů od úrovně stanovené technickými podmínkami, které však úplně nebrání výrobku plnit požadovanou funkci. Úplná porucha je porucha, která zcela zabraňuje výrobku plnit požadovanou funkci. Částečná či postupná porucha se nazývá též **degradační porucha**, náhlá a úplná porucha se nazývá **havarijní porucha**.
3. Podle souvislosti s jinými poruchami se poruchy dělí na nezávislé a závislé. Závislá porucha vzniká následkem poruchy jiného prvku, nezávislá nikoli.
4. Podle doby trvání se rozlišují poruchy trvalé a poruchy dočasné. Trvalou poruchu je možno odstranit pouze opravou nebo náhradou porouchaného prvku, dočasné poruchy mohou samovolně vymizet nebo trvají jen po dobu působení vnějšího vlivu.

Dělení poruch do tříd je často relativní. Náhlé poruše obvykle předcházejí skryté změny vlastností prvku, které by bylo možno dosti podrobným zkoumáním zjistit a poruchu označit jako postupnou. Dokonalá znalost všech fyzikálně chemických dějů probíhajících v materiálech prvku, přesná znalost postupu výroby a podmínek provozu by dovolila předpovědět dobu vzniku poruchy prvku. V takovém případě by se porucha označila jako nenáhodná. Omezená znalost těchto činitelů je důvodem pro označení poruchy prvku jako náhodné.

- **Které dílčí vlastnosti budeme kvantitativně určovat ?**

Všechny výše uvedené dílčí spolehlivostní vlastnosti lze charakterizovat též kvantitativně pomocí vhodně zvolených spolehlivostních ukazatelů nebo charakteristik. V dalším se budeme zabývat pouze kvantitativním vyjádřením bezporuchovosti a pohotovosti. Bezporuchovost určujeme především u neobnovovaných (tj. neopravitelných) objektů a nebo tam, kde se zajímáme o činnost do první poruchy (Obecně se ovšem tento pojem zavádí i pro opravitelné objekty). Pohotovost (provozuschopnost) určujeme u obnovovaných objektů. Obnovované objekty se po vzniku poruchy opraví a provoz pokračuje. Oprava se považuje za účelnou tehdy, když průměrná cena opravy a náhradních součástí je malá vůči pořizovací ceně zařízení. Provoz obnovovaného systému nebo obnovovaného prvku lze popsat jako posloupnost stavů bezporuchového provozu a oprav, přičemž okamžiky poruch a oprav jsou náhodné.

Shrnutí pojmů

Spolehlivost je obecná vlastnost projevující se prostřednictvím dílčích vlastností: bezporuchovost, životnost, opravitelnost, udržovatelnost, skladovatelnost, bezpečnost.

Pohotovost je komplexní vlastnost výrobku zahrnující bezporuchovost a opravitelnost v podmínkách provozu.

Porucha je částečná nebo úplná ztráta, případně změna vlastností výrobku, která podstatným způsobem snižuje schopnost nebo způsobuje nemožnost výrobku plnit požadovanou funkci. Poruchy dělíme podle různých hledisek, nejčastěji podle podmínek vzniku na poruchy z vnějších a vnitřních příčin.

Otázky 1.2.

1. V čem se liší pojmy „bezporuchovost“ a „pohotovost“ ?
2. U jakých objektů má smysl tyto pojmy kvantitativně určovat ?
3. Co je porucha a jak lze poruchy klasifikovat ?

1.3. Doba do poruchy

Čas ke studiu: 40 minut

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- popsat dobu do poruchy pomocí distribuční funkce a funkce bezporuchovosti
- charakterizovat dobu do poruchy pomocí hazardní funkce (intenzity poruch)
- vyjádřit vztahy mezi jednotlivými popisnými funkcemi doby do poruchy
- charakterizovat dobu do poruchy pomocí základních číselných charakteristik

Výklad

- **Co je doba do poruchy a jak ji matematicky popsat ?**

Neporouchaný výrobek (prvek, systém, část systému) začne pracovat v okamžiku $t = 0$ za určitých podmínek, o nichž budeme zatím předpokládat, že se v průběhu času nemění. V okamžiku $t = X$ se výrobek porouchá. Doba X po kterou výrobek pracoval bez poruchy, se nazývá **doba do poruchy**.

V dalším budeme předpokládat, že doba do poruchy X je nezáporná náhodná veličina s **distribuční funkcí**

$$F(t) = P(X<t) \qquad (1.1)$$

Distribuční funkce doby do poruchy vyjadřuje pravděpodobnost toho, že na intervalu $(0,t)$ dojde k poruše. S distribuční funkcí doby do poruchy je úzce spojena funkce:

$$R(t) = P(X \geq t) \qquad (1.2)$$

která se nazývá **funkcí bezporuchovosti (**pravděpodobnost bezporuchového provozu). Vyjadřuje pravděpodobnost toho, že na intervalu (0,*t*) nedojde k poruše. *R*(*t*) je nerostoucí funkce času, *F*(*t*) je neklesající funkce času. Obě veličiny jsou nezáporná bezrozměrná čísla nejvýše rovna jedné. Zpravidla předpokládáme, že *R*(0) = 1, a *R*(nekonečno) = 0.

Je-li distribuční funkce *F*(*t*) spojitá, nazývá se odpovídající hustota pravděpodobnosti *f(t)*:

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = -\frac{dR(t)}{dt} \qquad (1.3)$$

též **hustota poruch**.

- **Hazardní funkce a její alternativní vyjádření**

Nejčastěji se bezporuchovost neopravovaného výrobku udává **hazardní funkcí** (někdy označovanou jako **intenzita poruch),** definovanou jako poměr hustoty pravděpodobnosti poruchy a funkce bezporuchovosti:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} \qquad R(t) > 0 \qquad (1.4)$$

Veličiny *f*(*t*) a $\lambda(t)$ mají rozměr [1/čas], obvykle se udávají v jednotkách [1/hod] nebo [1/rok]. Každá ze 4 základních veličin *R*(*t*), *F*(*t*), *f*(*t*), $\lambda(t)$ popisuje stejně úplně bezporuchovost neopravovaného objektu a z každé z nich je možno odvodit tři zbývající. Vzájemné převody udává následující tab. 1:

	R(*t*)	*F*(*t*)	*f*(*t*)	$\lambda(t)$
R(*t*)	*R*(*t*)	1 - *F*(*t*)	$1-\int_0^t f(x)dx$	$\exp\left[-\int_0^t \lambda(x)dx\right]$
F(*t*)	1 - *R*(*t*)	*F*(*t*)	$\int_0^t f(x)dx$	$1-\exp\left[-\int_0^t \lambda(x)dx\right]$
f(*t*)	$-\frac{dR(t)}{dt}$	$\frac{dF(t)}{dt}$	*f*(*t*)	$\lambda(t)\cdot\exp\left[-\int_0^t \lambda(x)dx\right]$
$\lambda(t)$	$\frac{-\frac{dR(t)}{dt}}{R(t)}$	$\frac{\frac{dF(t)}{dt}}{1-F(t)}$	$\frac{f(t)}{1-\int_0^t f(x)dx}$	$\lambda(t)$

Tabulka 1: Matematické převodní vztahy mezi základními funkčními ukazateli bezporuchovosti

Důležitou úlohu při rozdělení doby do poruchy hrají číselné charakteristiky tohoto rozdělení, zejména momenty a kvantily (střední doba do poruchy, rozptyl doby do poruchy, koeficienty šikmosti a špičatosti, γ-procentní život, neboli zaručená doba bezporuchového provozu atd.). Uvedeme zde několik z nich.

- **Jak kvantitativně určit základní číselné charakteristiky doby do poruchy ?**

Střední doba provozu do poruchy, která je pro neobnovované objekty rovna **střední době do poruchy** (ustálená mezinárodní zkratka pochází z angličtiny MTTF = Mean Time To Failure), se definuje jako střední (očekávaná) hodnota *E* náhodné veličiny, tj. doby do poruchy *X*

$$EX = \int_0^\infty t f(t)dt \qquad (1.5)$$

Hodnota *EX* je integrální hodnota, která vyjadřuje bezporuchovost jediným údajem. Obvykle se udává v [hod].

Vlastnost: Nechť nezáporná náhodná veličina *X* má funkci bezporuchovosti *R*(*x*) a nechť $EX^k < +\infty$, kde *k* je přirozené číslo (tedy nechť existují konečné obecné momenty všech řádů). Potom

$$EX^k = k\int_0^\infty x^{k-1}R(x)dx \qquad (1.6)$$

Důkaz lze provést užitím metody „per partes“.

Pro střední dobu do poruchy dostáváme užitím (1.6) pro $k = 1$ důležitý vztah

$$EX = \int_0^\infty R(x)dx \qquad (1.7)$$

Pro **rozptyl** doby do poruchy platí

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = 2\int_0^\infty xR(x)dx - (EX)^2, \quad (1.8)$$

což dostaneme opět užitím (1.6) pro $k = 2$.

Gama-procentní život $T\gamma$ je definován jako $100.(1-\gamma)$ procentní kvantil rozdělení doby do poruchy.

$$F(T\gamma) = 1-\gamma \quad \text{neboli} \qquad R(T\gamma) = \gamma \qquad (1.9)$$

Četnostní interpretace je taková, že přibližně 100γ % výrobků bude bez poruchy fungovat do okamžiku $T\gamma$.

Shrnutí pojmů

Distribuční funkce doby do poruchy vyjadřuje pravděpodobnost toho, že na intervalu (0, *t*) dojde k poruše. Doplněk distribuční funkce do jedničky se nazývá **funkcí bezporuchovosti**, která vyjadřuje pravděpodobnost toho, že na intervalu (0, *t*) nedojde k poruše.

Hazardní funkce (**intenzita poruch)** je poměr hustoty pravděpodobnosti poruchy a funkce bezporuchovosti.

Střední dobu provozu do poruchy (MTTF) lze určit integrací z funkce bezporuchovosti přes interval (0, +∞).

Gama-procentní život $T\gamma$ určuje přibližně dobu, po kterou bude bez poruchy fungovat 100γ % výrobků.

Rozptyl doby do poruchy lze určit rovněž ze znalosti funkce bezporuchovosti.

Otázky 1.3.

1. Jaké jsou možnosti pro jednoznačný a úplný popis náhodné veličiny: doba do poruchy nějakého výrobku ?

2. Které jsou v praxi nejpoužívanější číselné charakteristiky této náhodné veličiny ?

3. Jak je definována hazardní funkce (intenzita poruch), popřípadě odvoďte, jak souvisí s ostatními popisnými funkcemi náhodné veličiny: doba do poruchy ?

Úlohy k řešení 1.3.

1. Ventil vodovodního potrubí má zadánu funkci bezporuchovosti: $R(t) = e^{-0,001.t}$. Určete střední dobu do poruchy ventilu MTTF a dále určete rozptyl doby do poruchy ventilu *DX*. Dále určete *80%-tní* život ventilu $\boldsymbol{T_{0,80}}$
2. Určete *90%-tní* život $\boldsymbol{T_{0,90}}$ pro výrobek, jehož doba do poruchy se řídí Weibullovým rozdělením, s lineárně rostoucí intenzitou poruch (β = 2) a s parametrem $\lambda = 10$ $\left(F(t) = 1 - e^{-(\lambda t)^{\beta}}\right)$.
3. Doba do vybití baterie se řídí exponenciálním rozdělením $\left(F(t) = 1 - e^{-\frac{t}{MTTF}}\right)$.

a) Jaká je střední doba do vybití MTTF, víme-li, že 4000 hodin přežije 1% těchto baterií?
b) Je-li střední doba do vybití 3.150 hodin, kolik procent těchto baterií přežije 4000 hodin?

Poznámky k obnovovaným (opravitelným) výrobkům:

1. *Pro obnovované výrobky je nezbytné vyšetřovat kromě doby do poruchy ještě další náhodnou veličinu: dobu opravy (nebo dobu do ukončení opravy), přičemž touto veličinou budeme v dalším rozumět celkovou dobu údržby po poruše až po obnovu výrobku. Jako každá náhodná veličina, i doba opravy je charakterizována základními popisnými funkcemi, jako jsou hustota pravděpodobnosti (hustota oprav) a distribuční funkce. Zcela analogicky jako intenzita poruch se také zavádí* ***intenzita oprav*** *a nejčastěji používanou číselnou charakteristikou této náhodné veličiny je její střední (očekávaná) hodnota, která v teorii spolehlivosti nese označení jako* ***střední doba do obnovy****, zkratka* ***MTTR*** *(z anglického Mean Time To Repair).*

2. *Používané ukazatele spolehlivosti pro obnovované výrobky jsou dále:* ***Funkce okamžité pohotovosti A(t)****, což je pravděpodobnost, že výrobek je ve stavu schopném plnit v daných podmínkách a v daném časovém okamžiku požadovanou funkci, za předpokladu, že požadované vnější prostředky jsou zajištěny. Dále je to* ***součinitel asymptotické pohotovosti A****, což je limita okamžité pohotovosti, pro účely modelování, existuje-li, pro čas jdoucí k nekonečnu. V případě potřeby se určuje i* ***součinitel střední pohotovosti*** $\overline{A}(t_1, t_2)$ *, což je střední hodnota funkce okamžité pohotovosti v daném časovém intervalu* (t_1, t_2): $\overline{A}(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} A(t)dt$.

1.4. Intenzita poruch

Čas ke studiu: 25 minut

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- vysvětlit intenzitu poruch pomocí pravděpodobnosti
- demonstrovat intenzitu poruch graficky
- vysvětlit jednotlivé fáze života výrobku

Výklad

- **Jaká je pravděpodobnostní interpretace intenzity poruch ?**

Nechť $t > 0$, $\Delta t > 0$, $\Delta t \to 0$ a počítejme podmíněnou pravděpodobnost jevu, že se prvek porouchá (doba do poruchy je X) v časovém intervalu $(t, t + \Delta t)$ za podmínky, že pracoval bez poruchy do okamžiku t. Pro tuto podmíněnou pravděpodobnost dostaneme:

$$P(t < X < t + \Delta t | X \geq t) = \frac{P(t < X < t + \Delta t, X \geq t)}{P(X \geq t)} = \frac{P(t < X < t + \Delta t)}{P(X \geq t)} =$$

$$= \frac{1}{1 - F(t)} \cdot \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} \cdot \Delta t$$

pro $\Delta t \to 0$ dostáváme $\frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} \to \frac{dF}{dt} = f(t),$

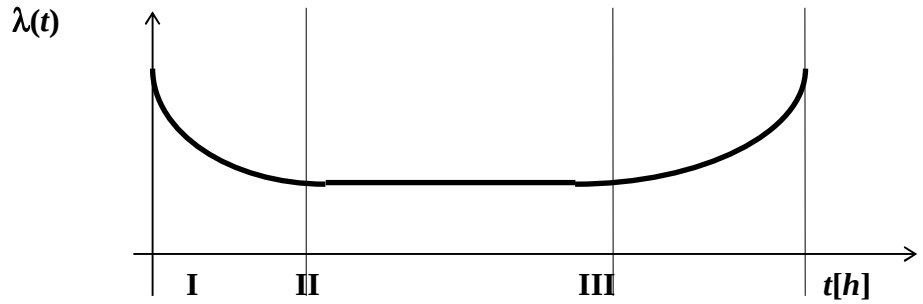
takže:

$$P(t < X < t + \Delta t | X \geq t) \approx \frac{f(t)}{1 - F(t)} \Delta t = \lambda(t).\Delta t \qquad (1.10)$$

Intenzita poruch je tedy lokální charakteristikou spolehlivosti. Vyjadřuje přibližně pravděpodobnost toho, že prvek, který se neporouchal do okamžiku t, se porouchá v intervalu $(t, t + 1)$.

- **Jak vypadá nejčastější grafická interpretace intenzity poruch ?**

Typický tvar intenzity poruch je zobrazen na následujícím obrázku. Křivka na tomto obrázku se nazývá vanová křivka a obvykle se dělí na tři úseky (I, II, III).



I …V prvním úseku křivka intenzity poruch klesá. Odpovídající časový interval se nazývá období časných poruch (období záběhu, období počátečního provozu, období osvojování nebo období dětských nemocí podle analogie s úmrtnostní křivkou člověka). Příčinou zvětšené intenzity poruch v tomto období jsou poruchy v důsledku výrobních vad, nesprávné montáže, chyb při návrhu, nebo při výrobě apod.

II …Ve druhém úseku dochází k běžnému využívání zaběhnutého výrobku, k poruchám dochází většinou z vnějších příčin, nedochází k opotřebení, které by změnilo funkční vlastnosti výrobku. Intenzita poruch je v tomto období přibližně konstantní. Příslušný časový interval se nazývá období normálního užití, či stabilního života.

III …Ve třetím úseku procesy stárnutí a opotřebení mění funkční vlastnosti výrobku, projevují se nastřádané otřesy výrobku z období II (analogie s nesprávnou životosprávou člověka), trhliny materiálu a intenzita poruch vzrůstá. Příslušný časový interval se nazývá období poruch v důsledku stárnutí a opotřebení.

Poznámky:

1. *Přestože uvedená intenzita poruch je typická pro mnoho průmyslových výrobků (a jakožto křivka úmrtnosti i pro člověka), lze ji těžko vyjádřit v elegantním analytickém tvaru pro všechna tři období najednou. Při vlastní analýze spolehlivosti musíme většinou aproximovat intenzitu poruch jednoduchými analytickými funkcemi vždy po jednotlivých obdobích.*
2. *U některých výrobků chybí období I, tj. období časných poruch. Je tomu např. u dobře kontrolovaných výrobků zaběhnutých přímo u výrobce. Jsou také výrobky, které „nestárnou“ - schází období III. To jsou např. výrobky vyřazené dříve než začnou stárnout. Velmi často, zejména při řešení spolehlivosti složitých systémů, budeme jednotlivé prvky sledovat pouze v období II, ve kterém je intenzita poruch přibližně konstantní.*
3. *Intenzitou poruch je úplně popsáno rozdělení doby do poruchy a naopak. Mezi funkcí bezporuchovosti a intenzitou poruch platí vztah (viz též tabulka 1):*

$$R(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(x)dx\right) \tag{1.11}$$

$$\lambda(t) = \frac{1}{R(t)}\frac{dR(t)}{dt} \tag{1.12}$$

Shrnutí pojmů

Intenzita poruch je lokální charakteristikou spolehlivosti, je mírou **pravděpodobnosti** toho, že výrobek, který se neporouchal do okamžiku *t*, se porouchá v okamžiku bezprostředně následujícím po *t*. Intenzitou poruch je úplně popsáno pravděpodobnostní rozdělení doby do poruchy a naopak.

Vanová křivka je typická závislost intenzity poruch na čase. Na ní rozlišujeme tři charakteristická období života výrobku: období **časných poruch**, období **stabilního života** a období **stárnutí**.

Otázky 1.4.

1. Charakterizujte intenzitu poruch pomocí pravděpodobnosti. Pravděpodobnost jakého jevu popisuje ?
2. Co je to vanová křivka ? Co je to období časných poruch ?
3. Jaký je vztah mezi intenzitou poruch a funkcí bezporuchovosti ?

1.5. Zálohování

Čas ke studiu: **15 minut**

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- charakterizovat podstatu zálohování
- rozlišit různé druhy zálohování a jednoduše je popsat
- formulovat základní zásadu pro zálohování

Výklad

- **Jaká je podstata zálohování a jaké druhy zálohování rozlišujeme ?**

Zálohování je jedna ze základních metod zvyšování spolehlivosti, která umožňuje (alespoň teoreticky) neomezeně zvyšovat spolehlivost systémů. Podstata zálohování spočívá v tom, že se k prvku (tzv. hlavnímu) přidá jeden nebo více záložních prvků, které při poruše hlavního prvku tento prvek nahrazují. Podle toho, v jakém režimu se nachází záložní prvek, dělíme zálohování do několika skupin. Jestliže záložní prvek pracuje ve stejném režimu jako prvek hlavní, mluvíme o **zatížené záloze** (**„horké rezervě“**). Jestliže záložní prvek plní svou funkci v mírnějším režimu než prvek hlavní, mluvíme o odlehčené záloze. Jestliže se záložní prvek nachází v režimu, ve kterém se nemůže porouchat, mluvíme o **nezatížené záloze** (**„studené rezervě**“). Ve většině skutečných zálohovaných systémů se setkáme s odlehčenou zálohou.

Důležitou součástí zálohovaných systémů je zařízení, které v případě poruchy hlavního prvku uvede do činnosti na místo hlavního prvku prvek záložní. Obecně se takové zařízení nazývá přepínač. V jednodušších modelech zálohování se předpokládá, že přepínač je absolutně spolehlivý. V reálných systémech však tomu tak nebývá, a proto při přesnější analýze je nutno v modelu počítat i s nespolehlivostí přepínačů.

- **Jak lze jednoduše popsat dva základní typy zálohování ?**

Proveďme nyní srovnání dob do poruchy zálohovaného systému se zatíženými a nezatíženými zálohami. Předpokládejme, že přepínač je absolutně spolehlivý, a že všechny prvky pracují na sobě nezávisle. Porouchaný prvek je okamžitě nahrazen prvkem záložním. Nechť X_1 je doba do poruchy hlavního prvku, a nechť $X_2, \ldots, X_n$ jsou doby do poruchy n - 1 záložních prvků. Doba do poruchy zálohovaného systému se zatíženými zálohami je

$$X_{\max} = \max (X_1, \ldots, X_n)$$

a doba do poruchy zálohovaného systému s nezatíženými zálohami je

$$X^{(n)} = X_1 + \ldots + X_n.$$

Vzhledem k tomu, že $X_{\max} \leq X^{(n)}$, je zálohovaný systém s nezatíženými zálohami vždy výhodnější než zálohovaný systém se zatíženými zálohami.

Základním problémem zálohování systémů je, zda zálohovat jednotlivé prvky systému nebo zda zálohovat celý systém identickým záložním systémem. Toto jsou extrémní případy, mezi kterými existuje široká škála možností zálohování. Některé bloky (tj. části systému) je možno zálohovat identickými bloky, jiné pak zálohovat po prvcích apod. Obecně lze snadno ukázat, že zálohování prvků vede vždy k vyšší spolehlivosti než zálohování bloků.

Shrnutí pojmů

Podstata **zálohování** spočívá v tom, že se k prvku (tzv. hlavnímu) přidá jeden nebo více záložních prvků, které při poruše hlavního prvku tento prvek nahrazují. Záložní prvky mohou pracovat buď jako **horké** nebo **studené rezervy**.
Zálohovaný systém s nezatíženými zálohami vždy výhodnější (spolehlivější) než zálohovaný systém se zatíženými zálohami.

Zálohování prvků vede vždy k vyšší spolehlivosti než zálohování bloků.

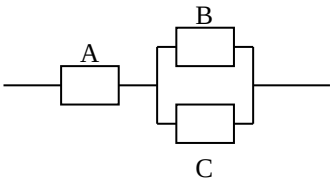
Otázky 1.5.

1. Charakterizujte podstatu zálohování.
2. Co je to horká rezerva? Co je to studená rezerva ?
3. Jaká jsou základní pravidla pro zálohování ?

Úlohy k řešení 1.5.

1. Systém na obrázku je funkční pokud funguje součástka A a nejméně jedna ze součástek B a C. Nechť pro jednotlivé součástky byly naměřeny následující doby do poruchy (A, B, C) = (400, 200, 300 hodin).
   a) Nechť součástka C pracuje v režimu studená rezerva. Po kolika hodinách dojde k poruše systému ?
   b) Nechť součástka C pracuje v režimu horká rezerva. Po kolika hodinách dojde k poruše systému ?

   Předpokládáme, že systém pracuje nezávisle na okolních podmínkách.



2. URČOVÁNÍ CHARAKTERISTIK SPOLEHLIVOSTI Z DAT

2.1. Odhady charakteristik spolehlivosti

Čas ke studiu: 10 minut

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- popsat způsoby udávání spolehlivostních charakteristik
- vyjmenovat nejčastěji používaná rozdělení pravděpodobnosti

Výklad

- **Co jsou parametrické a neparametrické odhady spolehlivostních charakteristik ?**

Časové průběhy základních ukazatelů spolehlivosti výrobků se získávají ze zkoušek spolehlivosti velkého počtu prvků, nebo z údajů o provozu za dlouhou dobu, tedy statisticky. Někdy je možné tyto průběhy odvodit z materiálových parametrů a ze znalosti poruchových mechanismů, tedy deterministicky. Při statistickém sledování se zaznamenávají doby poruch jednotlivých výrobků, nebo počty poruch v dosti krátkých časových intervalech. Jedním z možných způsobů udání spolehlivostních charakteristik je pak tabulka naměřených hodnot. Naměřené hodnoty se pak mohou vynést do grafu a může se proložit křivka. Tento tzv. neparametrický odhad, se běžně nepoužívá. Výhodnější je tzv. parametrický odhad, který spočívá v porovnání průběhu rozdělení poruch s některým zákonem rozdělení odvozeným z určitého matematického modelu. Při parametrickém rozdělení stačí určit jeden nebo několik parametrů zákona rozdělení a bezporuchovost udat těmito parametry. Zákon rozdělení se volí podle průběhu charakteristiky poruchy. Věrohodnost určení parametrů je omezena především množstvím výchozích údajů, jimiž jsou záznamy zkoušek spolehlivosti výrobků, záznamy o provozu zařízení a poruchové hlášenky. Pro odhad hodnoty parametrů se nejčastěji používá metoda maximální věrohodnosti (maximum likelihood), nebo metoda momentů.

- **Která jsou nejčastěji používaná rozdělení pravděpodobnosti v teorii spolehlivosti ?**

Zákon rozdělení poruch s udanými parametry plně popisuje charakteristiky bezporuchovosti a je proto možné vypočítat všechny další veličiny, jako je střední doba provozu do poruchy MTTF, funkci bezporuchovosti, pravděpodobnost bezporuchového provozu v určitém časovém intervalu apod.

V teorii spolehlivosti se používají pro diskrétní náhodnou proměnnou (počet vykonaných operací, přičemž porucha se může projevit pouze v okamžicích činnosti objektu) nejvíce binomické a Poissonovo rozdělení. Pro spojitou náhodnou proměnnou (náhodný čas, ve kterém nastane porucha) se používají v teorii spolehlivosti zejména exponenciální rozdělení, Weibullovo rozdělení, Rayleighovo rozdělení, normální rozdělení, logaritmicko-normální rozdělení, Gamma rozdělení, Erlangovo rozdělení a některé jejich kombinace.

***Poznámka**: Omezený rozsah této publikace bohužel nedovoluje věnovat dostatečnou pozornost popisu a zvláštnostem jednotlivých rozdělení, avšak tyto informace jsou běžně dostupné v jakékoliv učebnici o pravděpodobnosti a statistice. Následující odstavec tvoří jen stručný popis nejpoužívanějších rozdělení v teorii spolehlivosti.*

Shrnutí pojmů

Parametrický odhad spolehlivostních charakteristik spočívá v porovnání průběhu rozdělení poruch s některým zákonem rozdělení odvozeným z určitého matematického modelu a v určení neznámých parametrů tohoto modelu z dat.

Pro odhad hodnoty parametrů se nejčastěji používá **metoda maximální věrohodnosti** (maximum likelihood), nebo **metoda momentů**.

Nejčastěji používaná rozdělení v teorii spolehlivosti jsou: pro diskrétní náhodnou proměnnou nejvíce **binomické** a **Poissonovo** rozdělení, pro spojitou náhodnou proměnnou zejména **exponenciální** rozdělení, **Weibullovo** rozdělení, **Rayleighovo** rozdělení, **normální** rozdělení, **logaritmicko-normální** rozdělení, **Gamma** rozdělení, **Erlangovo** rozdělení a některé jejich kombinace.

Otázky 2.1.

1. Jak určujeme charakteristiky spolehlivosti z datových údajů ?
2. Jaká diskrétní (spojitá) rozdělení se požívají nejčastěji ?

2.2. Některá rozdělení pravděpodobnosti

Čas ke studiu: 25 minut

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- popsat diskrétní Poissonovo rozdělení pravděpodobnosti
- charakterizovat spojitá rozdělení: exponenciální, Weibullovo

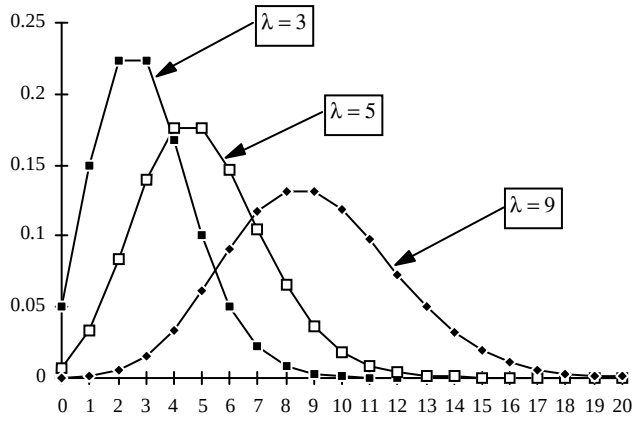
Výklad

- **Jak vypadá pravděpodobnostní funkce a základní číselné charakteristiky Poissonova rozdělení ?**

Poissonovy pokusy vycházejí z následujících předpokladů:

a) Jevy (např. poruchy) se vyskytují nezávisle na sobě.
b) Rychlost výskytu jevů je konstantní v celém sledovaném intervalu.

Poissonovo rozdělení pravděpodobnosti:



Obr. 1: Pravděpodobnostní funkce Poissonova rozdělení pravděpodobnosti

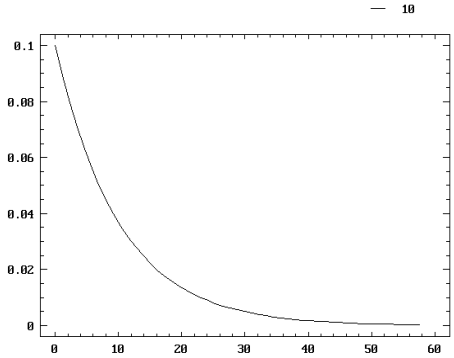
Náhodnou veličinou je X ... počet výskytů jevů v časovém intervalu od 0 do t. Je to tedy diskrétní rozdělení pravděpodobnosti, s následující pravděpodobnostní funkcí:

$$P(X = k) = \frac{(\lambda.t)^k}{k!}.e^{-\lambda t}, \quad \text{…viz obr. 1, pro různé hodnoty } \lambda, \text{ při } t = 1$$

$k = 0,1...;$ $\quad \lambda > 0; t > 0$

$EX = DX = \lambda t$

- **Jak vypadá základní popis pro exponenciální, gamma a Weibullovo rozdělení ?**



Obr. 2: Hustota pravděpodobnosti

Exponenciální rozdělení pravděpodobnosti:

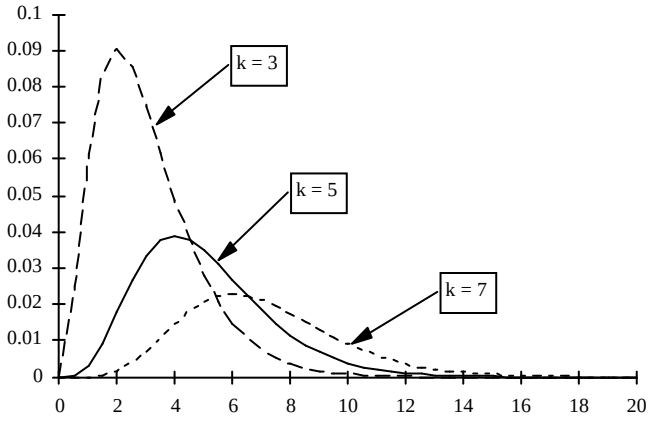
Popisuje náhodnou veličinu X ... dobu do první události nebo dobu mezi událostmi (tedy **spojitá** náhodná veličina)

$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $f(x) = \lambda . e^{-\lambda x}$,viz obr. 2, pro $\lambda=0.1$

$h(x) = \lambda \Rightarrow$ rozdělení je vhodné pro modelování období stabilního života

$$EX = \frac{1}{\lambda} \qquad DX = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2$$

Gamma rozdělení:



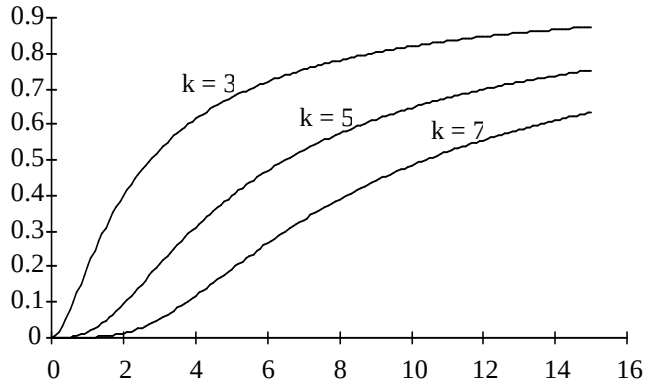
Obr. 3: Hustota pravděpodobnosti gamma rozdělení, $\lambda=1$

Popisuje náhodnou veličinu X ... dobu do výskytu k-té události

$$f(x) = \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} . x^{k-1} . e^{-\lambda x}, \qquad k \in N,$$

$$EX = \frac{k}{\lambda} \qquad DX = \frac{k}{\lambda^2}$$

$$h(x) = \frac{\lambda}{(k-1)! \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{(k-1-j)!(\lambda x)^j}}$$



Obr. 4: Hazardní funkce gamma rozdělení, λ=1

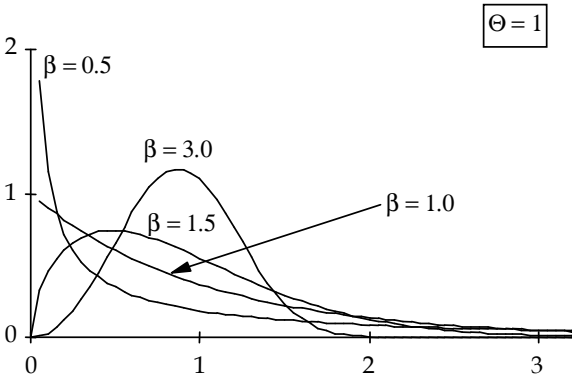
h(x) je ostře rostoucí pro k > 1 ⇒ rozdělení je vhodné pro modelování procesů stárnutí a opotřebení

Weibullovo rozdělení:

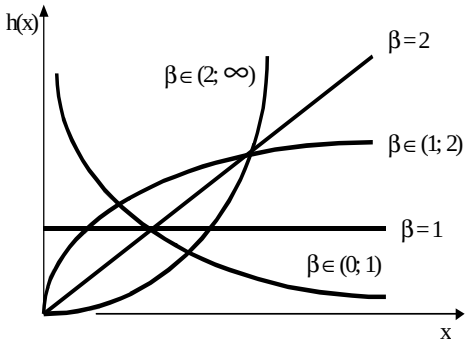
$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\Theta}\right)^{\beta}}$, $\Theta > 0, \beta > 0, x > 0$ (0.1) β ... parametr tvaru, Θ ... parametr měřítka

$h(x) = \frac{\beta}{\Theta} \cdot \left(\frac{x}{\Theta}\right)^{\beta - 1}$

$$f(x) = \frac{\beta}{\Theta}\left(\frac{x}{\Theta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\Theta}\right)^{\beta}}$$



Obr. 5: Hustota pravd. pro Weibull. rozd.



Obr. 6: Intenzita poruch v závislosti na β

β ∈ (0; 1) ... popis období časných poruch
β = 1 ... popis období stabilního života
β ∈ (1; ∞) ... popis období stárnutí

Shrnutí pojmů

Počet výskytů poruch na pevném intervalu od 0 do t je za jistých předpokladů popsán **Poissonovým** rozdělením pravděpodobnosti. Náhodná doba do první poruchy nebo doba mezi dvěma po sobě jdoucími poruchami je zpravidla popsána **exponenciálním** rozdělením pravděpodobnosti. Doba do výskytu k-té poruchy je popsána **gamma** rozdělením. Procesy stárnutí a opotřebení nejlépe charakterizuje **Weibullovo** rozdělení pravděpodobnosti. Pro popis období stabilního života se nejlépe hodí exponenciální rozdělení.

Otázky 2.2.

1. Jaká diskrétní a spojitá rozdělení pravděpodobnosti znáte ?
2. K čemu slouží gamma rozdělení v teorii spolehlivosti ?
3. Která rozdělení použijete pro jednotlivé fáze života výrobku ?

2.3. Metoda momentů

Čas ke studiu: 25 minut

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- odhadovat parametry rozdělení pravděpodobnosti metodou momentů

Výklad

- **V čem spočívá princip metody momentů**

Metoda momentů je principielně jednoduchá metoda pro konstrukci bodových odhadů neznámých parametrů známých rozdělení, která spočívá v tom, že porovnáváme výběrové momenty získaných dat s odpovídajícími teoretickými momenty předpokládaného rozdělení s hustotou $f(t)$.

Máme-li k dispozici zaznamenaná data $t_1, \ldots, t_n$; pak k-tý výběrový obecný moment je dán vztahem $M_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_1^k$ (2.1)

Podobně k -tý výběrový centrální moment je dán

$$M_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(t_i - \bar{t}\right)^k \qquad (2.2)$$

kde $\bar{t}$ je výběrový průměr.

Odpovídající teoretické momenty jsou dány rovnicemi

$$\mu'_k = \int_0^{\infty} t^k f(t)dt$$

resp.

$$\mu_k = \int_0^{\infty}\left(t - \mu'_1\right)^k f(t)dt \qquad (2.3)$$

Jestliže rozdělení s hustotou $f(t)$ má r neznámých parametrů a jestliže soustava rovnic

$$M'_k = \mu'_k,\ k = 1, \ldots, r$$

resp.

$$M_k = \mu_k,\ k = 1, \ldots, r$$

má jediné řešení, pak dává metoda momentů jednoznačně určené odhady r parametrů.

Příklad 1

Uvažujme exponenciální rozdělení $f(t) = \lambda.e^{-\lambda t}$ *s neznámým parametrem* λ. *Pak* $\mu'_1 = \int_0^{\infty} t\lambda.e^{-\lambda t}dt = \frac{1}{\lambda}$ *a* $M'_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{n}$. *Rovnice* $\mu'_1 = M'_1$ *přechází na rovnici*

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{n} \quad \text{neboli} \quad \tilde{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} t_i} \qquad (2.4)$$

což je odhad neznámého parametru λ *získaný metodou momentů.*

Příklad 2

Uvažujme Weibullovo rozdělení $f(t) = \frac{\alpha}{\beta}t^{\alpha-1}.e^{-\frac{t^{\alpha}}{\beta}}$ *se dvěma neznámými parametry* α, β. *Pak porovnáním centrálních momentů dostáváme soustavu dvou rovnic pro neznámé* α, β:

$$\begin{aligned} \beta^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i \\ \beta^{\frac{2}{\alpha}}\Gamma\left(\frac{2+\alpha}{1+\alpha}\right) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i^2 \end{aligned} \qquad (2.5)$$

kde $\Gamma(x)$ *je gama funkce.*

Soustava (2.5) je ovšem řešitelná pouze numericky volbou vhodného iteračního procesu.

Shrnutí pojmů

Metoda momentů je principielně jednoduchá metoda pro konstrukci odhadů neznámých parametrů známých rozdělení, která spočívá v tom, že porovnáváme výběrové momenty získaných dat s odpovídajícími teoretickými momenty předpokládaného rozdělení s hustotou $f(t)$. Metoda vede na řešení soustavy takového počtu rovnic, kolik je neznámých parametrů.

Úlohy k řešení 2.3.

1. Nechť turbína elektrárny podléhá náhodným šokům, které splňují předpoklady Poissonových pokusů. Nechť při každém pátém šoku dojde k závažné poruše turbíny. Během dlouhodobého sledování byly zaznamenány následující doby do poruch turbíny (v hodinách): (1020, 1100, 960, 1500, 1450, 1320, 1255, 1165, 1385, 1410). Určete pravděpodobnostní rozdělení pro dobu do poruchy turbíny. Určete dále

- odhad neznámého parametru zjištěného rozdělení metodou momentů
- hazardní funkci turbíny
- ve které fázi svého životního cyklu se turbína nachází

2.4. Metoda maximální věrohodnosti

Čas ke studiu: 25 minut

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- odhadovat parametry rozdělení pravděpodobnosti metodou maximální věrohodnosti

Výklad

- **Na čem je založena metoda maximální věrohodnosti**

Odhady získané touto metodou se všeobecně vyznačují dobrými statistickými vlastnostmi.

Nechť $t_1, t_2, \ldots, t_n$ je náhodný výběr z rozdělení s hustotou $f(t;\Theta)$, kde Θ je neznámý parametr. Naším problémem bude nalézt funkci (zvanou funkce věrohodnosti) danou

$$L(t_1,...,t_n;\Theta) = f(t_1;\Theta).f(t_2;\Theta)...f(t_n;\Theta) \qquad (2.6)$$

a z ní pak získat $\hat{\Theta}$ tak, aby $\hat{\Theta} = (t_1,\ldots,t_n)$ bylo co nejlepším odhadem pro Θ. Pravá strana rovnice (2.6) je sdružená hustota pravděpodobnosti *n*-nezávislých proměnných ($t_1, \ldots, t_n$) se stejným rozdělením.

Ve skutečnosti $L(t_1,\ldots,t_n;\Theta)$ může být uvažována jako apriorní pravděpodobnost pro získání hodnot $t_1, \ldots, t_n$.
Jelikož L je jednoduše funkcí neznámého parametru Θ, který je odhadován, metoda maximální věrohodnosti je založena na získání takové hodnoty Θ, která maximalizuje L. Při praktických výpočtech bývá však výhodnější maximalizovat spíše funkci ln L namísto L, jelikož obě tyto operace jsou ekvivalentní a dávají stejné výsledky. Podmínkou optimality je tedy rovnice

$$\frac{\partial \ln L(t_1,...,t_n;\Theta)}{\partial \Theta} = 0 \qquad (2.7)$$

a hodnota z této podmínky získaná je funkcí náhodného výběru, $\hat{\Theta} = \hat{\Theta}(t_1,\ldots,t_n)$.

Příklad 1

Mějme exponenciální rozdělení s hustotou $f(t) = \lambda.e^{-\lambda t}$. *Funkce věrohodnosti pak bude dána výrazem*

$$L(t_1,\ldots,t_n;\lambda) = (\lambda.e^{-\lambda t_1}).(\lambda.e^{-\lambda t_2})...(\lambda.e^{-\lambda t_n}) = \lambda^n \exp\left(-\lambda\sum_{i=1}^{n} t_i\right) \qquad (2.8)$$

a logaritmováním získáme

$$\ln L(t_1,...,t_n;\lambda) = n.\ln\lambda - \lambda.\sum_{i=1}^{n} t_i \qquad (2.9)$$

Rovnice (2.7) pak dává vztah pro maximálně věrohodný odhad parametru $\hat{\lambda}$ *:*

$$\frac{\partial \ln L(t_1,...,t_n;\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} t_i = 0$$

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} t_i} \qquad (2.10)$$

Příklad 2

Uvažujme dvouparametrické Weibullovo rozdělení s hustotou $f(t) = \frac{\alpha}{\beta} t^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{t^\alpha}{\beta}\right)$

Funkce věrohodnosti L je dána

$$L(t_1,\ldots,t_n;\alpha,\beta)=\frac{\alpha}{\beta}t_1^{\alpha-1}\exp\left(-\frac{t_1^{\alpha}}{\beta}\right)\ldots\frac{\alpha}{\beta}t_n^{\alpha-1}\exp\left(-\frac{t_n^{\alpha}}{\beta}\right)=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n\prod_{j=1}^{n}t_j^{\alpha-1}\exp\left(-\frac{1}{\beta}\sum_{j=1}^{n}t_j^{\alpha}\right) \tag{2.11}$$

A logaritmováním získáme

$$\ln L=n\ln\alpha-n\ln\beta+(\alpha-1)\sum_{j=1}^{n}\ln t_j-\frac{1}{\beta}\sum_{j=1}^{n}t_j^{\alpha} \tag{2.12}$$

Optimalizaci však provádíme s ohledem na oba neznámé parametry α,β, takže rovnice (2.7) přechází v tomto případě na dvě následující rovnice:

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\alpha}=\frac{n}{\alpha}+\sum_{j=1}^{n}\ln t_j-\frac{1}{\beta}\sum_{j=1}^{n}t_j^{\alpha}\ln t_j=0$$

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\beta}=-\frac{n}{\beta}+\frac{1}{\beta^2}\sum_{j=1}^{n}t_j^{\alpha}=0 \tag{2.13}$$

Z druhé rovnice můžeme snadno získat

$$\beta=\frac{\sum_{j=1}^{n}t_j^{\alpha}}{n} \tag{2.14}$$

zatímco z první rovnice dostaneme

$$\beta=\frac{\sum_{j=1}^{n}t_j^{\alpha}\ln t_j}{\frac{n}{\alpha}+\sum_{j=1}^{n}\ln t_j} \tag{2.15}$$

Porovnáním pravých stran posledních dvou rovnic získáme jednu rovnici pro jednu neznámou α. Řešení je nutno provést opět numericky volbou vhodného iteračního procesu.

Shrnutí pojmů

Metoda maximální věrohodnosti je principielně jednoduchá metoda pro konstrukci odhadů neznámých parametrů známých rozdělení pravděpodobnosti, která je založena na podmínce maximalizace **věrohodnostní funkce,** což je sdružená hustota pravděpodobnosti daného náhodného výběru, brána ovšem jako funkce neznámých parametrů**.**

Úlohy k řešení 2.4.

1. Doba do poruchy dieselgenerátoru se řídí exponenciálním rozdělením pravděpodobnosti. Během dlouhodobého sledování byly zaznamenány následující poruchové doby v hodinách: (150, 190, 165, 177, 203, 178, 162, 181, 194, 168). Odhadněte parametr λ metodou maximální věrohodnosti. Charakterizujte hazardní funkci dieselgenerátoru, odhadněte funkci bezporuchovosti v čase t=100 hodin. Určete 90% -tní život dieselgenerátoru.

3. ANALÝZA SPOLEHLIVOSTI SYSTÉMU METODOU STROMŮ PORUCH

3.1. Úvod

Čas ke studiu: 10 minut

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- charakterizovat metodu stromu poruch
- popsat historii vývoje této metody

Výklad

- **Co je metoda stromu poruch a jakou historii má tato metoda ?**

Systémová analýza pomocí stromu poruch (FTA - Fault Tree Analysis) patří dnes bezesporu k nejčastěji používaným způsobům pro vyhodnocování spolehlivosti složitých systémů. Tento postup poskytuje stručný, uspořádaný a přehledný popis různých možných příhod uvnitř systému, které mohou vést k předem definované „nežádoucí události“. Právě tyto vlastnosti udržují stálou popularitu a perspektivnost této metody ve srovnání s obecnějšími (např. orientované grafy) a účinnějšími (pro některé případy) metodami.

Metoda stromů poruch byla vyvinuta laboratoří Bell Telephone pro provedení bezpečnostní analýzy odpalovacího zařízení Minuteman. Dále byla rozpracována společností Boeing Company do stavu matematické simulace (Monte Carlo) s využitím hybridních systémů. Postupně byla tato metoda aplikována i na digitální systémy. Využití metody bylo zpočátku v hlavní míře soustředěno na elektronické systémy, širokou popularizaci a následné rozpracování této metody v oblasti jaderných zařízení přineslo zpracování známé rozsáhlé Rassmussenovy studie (Reactor Safety Study) v r. 1975 [1].

Strom poruch lze definovat jako „uspořádaný systém logicky svázaných vstupních událostí vedoucích k předem determinované nežádoucí události“. Terminologie a symbolika stromů poruch není zatím stoprocentně ujednocena a často se liší nejen podle národních zvyklostí, ale odlišuje se i u jednotlivých autorů a institucí. Při studiu i při aplikaci této metody je proto třeba této skutečnosti věnovat zvýšenou pozornost. V převážené míře je dnes přijímána dnes terminologie a symbolika americké literatury, kde dosáhla tato metoda největšího rozvoje a využití a tuto budeme proto v dalším textu uvažovat jako základní s uvedením možných odchylek.

K obsahu této kapitoly je třeba uvést, že s ohledem na rozsah publikace je pozornost soustředěna na uvedení do dané problematiky a přehled nejzákladnějších pojmů a principů a zdaleka nepokrývá dnes již obrovský komplex literatury věnované tomuto tématu. V následující části jsou uvedeny základy analýzy stromem poruch, jeho kvalitativní a kvantitativní vyhodnocení, přehled výpočtových programů a aplikační příklady.

Shrnutí pojmů

Strom poruch lze definovat jako „uspořádaný systém logicky svázaných vstupních událostí vedoucích k předem determinované nežádoucí události“.

Metoda stromů poruch byla vyvinuta laboratoří Bell Telephone.

Otázky 3.1.

4. K čemu slouží systémová analýza spolehlivosti pomocí stromu poruch ?
5. Jaká je stručná historie vývoje této metody ?

3.2. Analýza stromem poruch

3.2.1. Základní pojmy systémové analýzy

Čas ke studiu: 10 minut

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- formulovat cíl systémové analýzy
- charakterizovat různé analytické přístupy k systémové analýze

Výklad

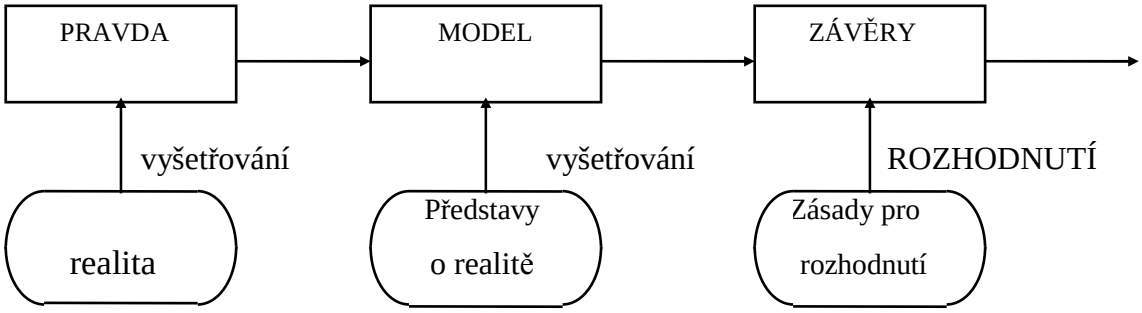
- **Co je cílem systémové analýzy ?**

Za cíl systémové analýzy lze považovat rozhodovací proces, jehož základem je naše současná znalost o příslušné situaci, daná přímou zkušeností, nebo zkušeností z podobné situace. Tyto znalosti mohou být dále zpřesňovány testováním a analýzou těchto výsledků, přičemž jsou podmíněny stupněm našeho optimismu či pesimismu. Můžeme předpokládat, že se „vše bude vyvíjet tím nejlepším směrem“ nebo naopak věřit Murphyho zákonu, že „cokoliv špatného se může stát, stane se“. O získaných informacích (pro většinu případů) proto nelze prohlásit, že jsou úplným relevantním souborem informací a tudíž ani není možné eliminovat všechny prvky nejistoty. Naše

rozhodnutí tedy může být správné, ale teprve budoucnost může odhalit, zda bylo dobré, či špatné. Systémovou analýzu pak lze v tomto smyslu definovat jako řízený proces uspořádaného a včasného vyšetřování specifických systémových informacích vhodných pro dané rozhodnutí.

- **Co je rozhodovací proces ?**

Podstatu rozhodovacího procesu, tj. vztah mezi otevřenou realitou, systémovým modelem a rozhodovacím procesem lze pak znázornit následujícím způsobem:



Obr. 7

Systémem rozumíme určitý celek, obsahující množinu vzájemně na sebe působících samostatných prvků. Ohraničen je „vnější hranicí“, která představuje vzájemnou interakci mezi systémem a okolím a dále stanovenou „hranicí řešení“, omezující např. detailnost rozboru „vnitřními hranicemi“ pro základní interakce uvnitř systému. Před započetím systémové analýzy by měly být známy systémové meze a limity řešení, tyto se však v praktických situacích mění během analýzy. Příkladem může být např. systém s událostmi, jejichž pravděpodobnost výskytu je řádově 10^{-4}. Při návrhu dvojnásobné redundance v tomto systému bychom se při jednoduchém spolehlivostním přepočtu ocitli skokem v absurdních rozmezích 10^{-12} při neuvažování zřejmě celé řady pravděpodobnějších událostí.

- **Jak členíme analytické přístupy k systémové analýze ?**

Analytické přístupy k systémové analýze lze členit na induktivní a deduktivní. Induktivní metody [2] jsou využívány pro určení možných (zpravidla poruchových) stavů systému. Patří k nim např. analýza předběžného rizika (Preliminary Hazards Analysis - PHA), analýza příčiny a následku poruchy (Failure Mode and Effect Analysis - FMEA) , analýza rizika poruchy (Fault Hazard Analysis - FHA) a konečně i metody stromu událostí (Event Tree Analysis). Deduktivní metody pak jsou používány k určování toho, jak může dojít k danému (nejčastěji poruchovému) stavu systému. Příkladem deduktivní analýzy je právě analýza stromem poruch.

Shrnutí pojmů

Cílem **systémové analýzy** je **rozhodovací proces**, jehož základem je naše současná znalost o příslušné situaci, daná přímou zkušeností, nebo zkušeností z podobné situace.

Analýza stromem poruch je deduktivní systémový analytický přístup

Otázky 3.2.1.

1. Vysvětlete podstatu rozhodovacího procesu.
2. Co jsou induktivní a deduktivní metody ? Uveďte příklady.

3.2.1.1. Poruchové a bezporuchové modely, vrcholová událost

Čas ke studiu: **15 minut**

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- vysvětlit dva základní koncepční pohledy na provoz systému
- vysvětlit souvislost mezi oběma koncepcemi
- definovat pojem vrcholová událost

Výklad

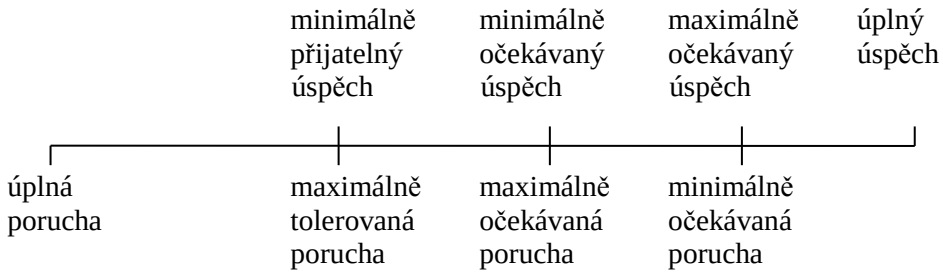
Provoz systému lze uvažovat dvojím způsobem:

a) můžeme vyhodnotit všechny stavy, resp. cesty, které vedou k úspěchu (tj. jeho funkci) či naopak,

b) vyhodnotit cesty, které vedou k jeho poruše.

Obě koncepce (obr. 8) mají zřejmě v některých bodech přímou vzájemnou vazbu.

KONCEPCE ÚSPĚCHU



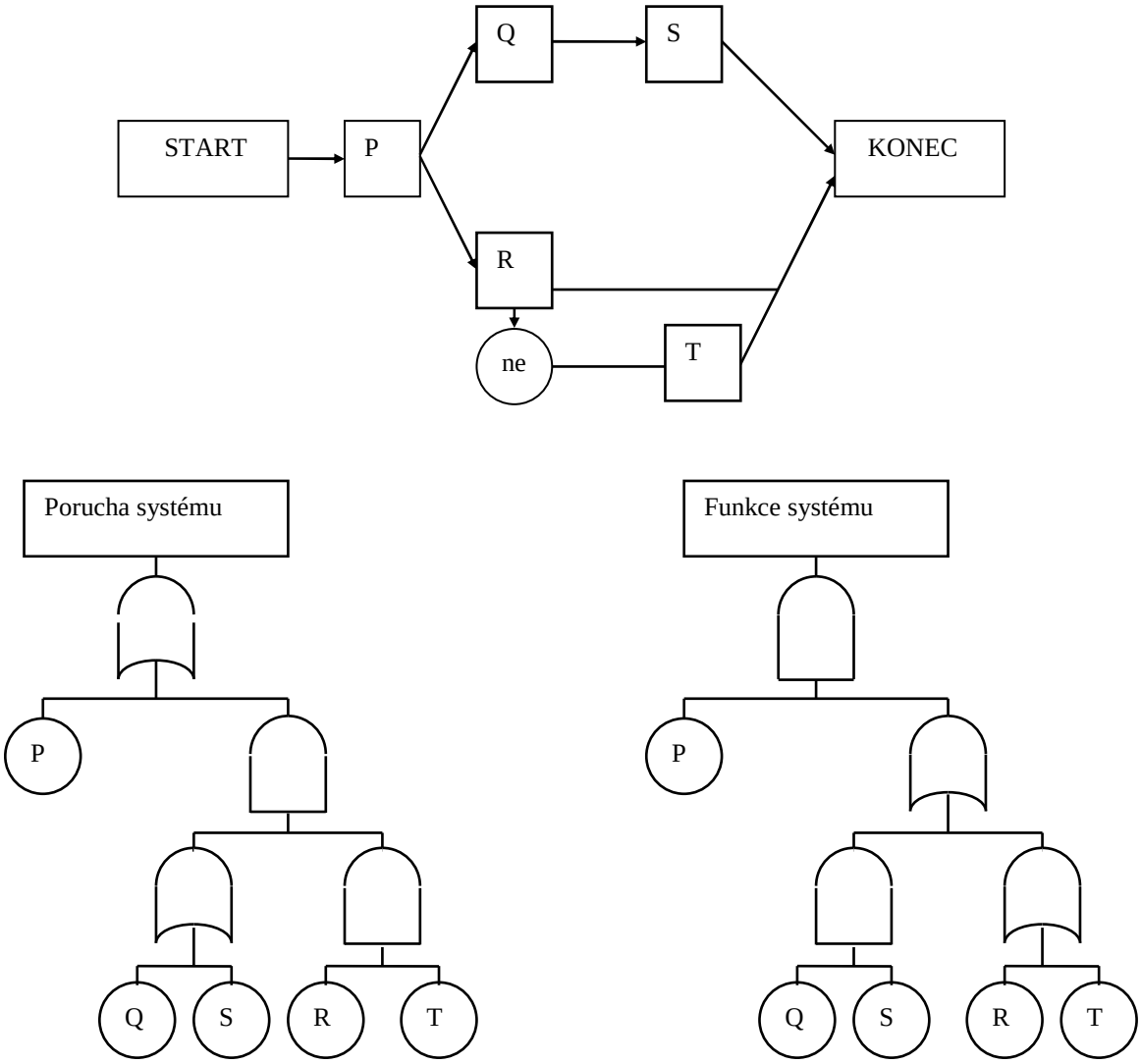
KONCEPCE PORUCHY

Obr. 8

I když je pohled na systém z hlediska úspěchu přijatelnější a často právě pro svůj optimismus používán (např. „systém je spolehlivý na 4 devítky“ ap.), z analytického hlediska se z několika důvodů jeví výhodnější model poruchový. Zpravidla mívá tento model méně částí (méně příčin poruch), které lze snadněji určit (příčina úspěchu nemusí být někdy zřejmá). Z výpočtového hlediska je pak výhodnější pracovat z malými čísly (tj. pravděpodobnostmi poruch).

Příklad 1

Příklad přechodu od blokového schématu (funkci sledujeme jako průchod signálu schématem; jednotlivé prvky se chovají binárně - tj. zadrží či propustí signál) ke stromu poruch (resp. stromu úspěchu), je uveden na obr. 9.



Obr. 9: Vytvoření stromu poruch a stromu úspěchu na základě blokového schématu

Přechod od stromu úspěchu ke stromu poruch a naopak vzniká záměnou hradel typu AND a OR (přesné popisy uvedeme v dalším výkladu, odstavec *3.2.3. Konstrukce stromu poruch*).

- **Co je vrcholová událost ?**

Vrcholovou událostí (TOP) označujeme událost, při které systém není schopen své funkce, nebo která je pro nás nežádoucí. Objevují se též ekvivalentní pojmy špičková událost, porucha systému, nežádoucí událost. Volba vrcholové události je zásadní věcí při konstrukci stromu poruch a je třeba jí věnovat patřičnou pozornost. Rozvoj vrcholové události - ve smyslu hledání příčin jejího vzniku, je třeba provádět postupně až do úrovně příčin, které nejsou dále rozvíjeny, jejichž pravděpodobnost jsme schopni kvantifikovat. Tyto „konečné příčiny“ nazýváme zpravidla prvky (primární, prvotní, vstupní či základní události, elementy, komponenty, podsystémy, součástky, listy ap.)

Označíme-li pravděpodobnost vrcholové události F_{TOP} (což může být např. distribuční funkce doby do první poruchy systému, funkce bezporuchovosti systému, popř. funkce okamžité pohotovosti, apod.) a nalezneme-li, že závisí na poruchovém chování *n* prvků (o pravděpodobnostech F_i) pak hledáme vyjádření:

$$F_{TOP} = \Phi(F_i : i = 1, 2, ..., n) \qquad (3.1)$$

Shrnutí pojmů

Provoz systému lze vyhodnotit jednak na bázi **koncepce poruchy** a jednak na bázi **koncepce úspěchu**. Koncepce poruchy (úspěchu) předpokládá vyhodnocení všech cest, které vedou k poruše systému (úspěchu, tj. správné funkci systému).
Vrcholová událost (TOP) je nežádoucí událost, při které systém není schopen vykonávat své funkce.

Otázky 3.2.1.1.

4. Charakterizujte vyšetřování systému pomocí stromu poruch.
5. Charakterizujte vyšetřování systému pomocí stromu úspěchu.
6. Co je to vrcholová událost ?

3.2.2. Přechod od funkčního schématu ke stromu poruch

Čas ke studiu: **15 minut**

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- postup uplatňovaný před konstrukcí stromu poruch
- zásady pro sestavování funkčního schématu systému
- zásady pro vymezení funkceschopnosti systému

Výklad

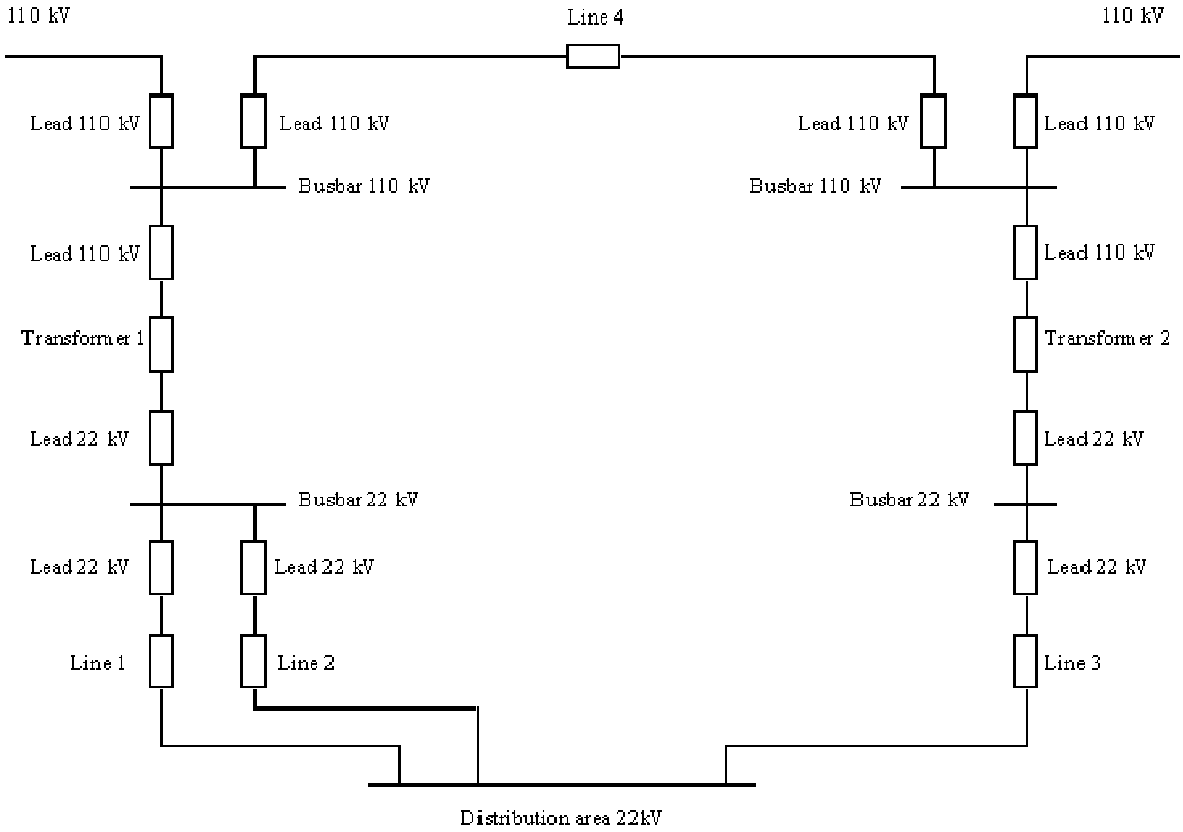
- **Přechod od funkčního, či logického schématu ke stromu poruch**

Výchozím bodem analýzy je stanovení vrcholové události a její rozvoj s určením systémů (resp. podsystémů, komponent) a událostí, které ji ovlivňují s případným vymezením podmínek, za kterých nastávají. Dalším krokem pak může být hledání pravděpodobnosti poruchy systému, které často přechází na konstrukci několika stromů poruch s ohledem na režimové stavy systému, příp. různé provozní a okolní podmínky. Je třeba upozornit, že v dalším se budeme výhradně zabývat pouze dvoustavovými (binárními) stromy poruch (tzn. jak o vrcholové události, tak o prvcích musíme rozhodnout jednoznačně zda fungují, nebo se porušily, příp. zda nastaly či nenastaly).

V obou uvedených případech je třeba nejprve dokonale systémy poznat, jak konstrukčně, tak funkčně a sestavit jejich funkční schémata. Sestavená funkční schémata doplněná o podmínky, vnější události působící na systém, funkci operátora atd. lze použít pro vytvoření logického schématu (např. blokového, které již respektuje binární chování, příp. i více možných poruch jedné komponenty) nebo přímo stromu poruch.

- **Funkční schéma**

Při sestavení funkčního schématu je třeba již uvážit některá možná zjednodušení, která je třeba ihned důsledně uvádět do předpokladů a stejně tak omezení daná analýzami jiného typu či neznalostí. Schéma by mělo být doplněno i informacemi o možnostech kontroly, testů, údržbě, periodických prohlídkách a jejich trvání, opravitelnosti, způsobu provozu (stále pracující, na vyzvání, studená rezerva ap.). Jako příklad je uveden zjednodušený systém distribuce elektrické energie (lit. [3]), viz obrázek 10. Jedná se o typovou napájecí oblast 22 kV, která je napájená z vedení 110 kV. Na toto vedení jsou zasmyčkovány dvě rozvodny 110/22 kV typu „H“. Oblast distribuce je pak napájena třemi vedeními 22 kV.



Obr. 10: Zjednodušené funkční schéma systému napájecí oblasti 22 kV

- **Vymezení funkceschopnosti systému**

Tato etapa práce bezprostředně navazuje na předcházející konstrukci funkčního schématu a zahrnuje rozbor možných stavů systému a vymezení možných poruchových stavů systému s ohledem na definovanou vrcholovou událost. Je třeba stanovit i možné poruchové stavy podsystémů a komponent v souvislosti s možnými příčinami, vliv lidské chyby, vnějších událostí, prostředí ap. Stejně tak je třeba, jako přípravu na konstrukci stromu poruch, vyjasnit řadu otázek typu „Co se stane, když . . . ?“, které jsou potřebné k dokonalejšímu poznání funkceschopnosti systému. Odpověď na tyto otázky často vyžaduje řadu složitých experimentálních analýz, teoretických úvah, rozborů a výpočtů (tepelných, fyzikálních, termohydraulických ap.) a konzultací s odborníky v příslušné oblasti.

Shrnutí pojmů

Při systémové analýze spolehlivosti je třeba nejprve systém dokonale poznat, jak konstrukčně, tak funkčně a sestavit jeho **funkční schéma**. Sestavené funkční schéma doplněné o další provozní podmínky, vnější události působící na systém atd., lze přímo použít pro vytvoření stromu poruch, vycházeje z hluboké **analýzy funkceschopnosti systému**. Analýza funkceschopnosti rozebírá různé možné poruchové stavy podsystémů a komponent v souvislosti s možnými příčinami, vliv lidské chyby, vnějších událostí, prostředí atd.

Otázky 3.2.2.

1. Charakterizujte počáteční fázi systémové analýzy spolehlivosti předcházející sestavení stromu poruch.
2. Co doprovází sestavování funkčního schématu ?

3.2.3. Konstrukce stromu poruch

Čas ke studiu: 30 minut

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- základní terminologii a symboliku pro konstrukci stromu poruch
- funkce základních hradel AND, OR a „výběrového hradla“

Výklad

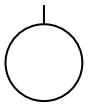
Vlastní sestavení stromu poruch vychází z vrcholové události a strom je postupně rozvíjen hledáním příčin této nežádoucí události (tj. „Kdy může tato událost nastat?“) na základě předchozích rozborů. Při rozvíjení využíváme logického součtu (disjunkce, logika „nebo“, tj. událost nastane tehdy, jestliže nastane jedna z *n* událostí) resp. logického součinu (konjunkce, logika „a“, tj. událost nastane tehdy, jestliže nastane současně *n* událostí). U výběrových systémů využíváme i logiky „*m* z *n*“ (tj. *m* libovolných událostí z *n* vyvolá nadřazenou událost). Tento typ lze snadno převést na základní typ logiky „nebo“ a „a“. Postupným rozvíjením nově vzniklých událostí rozvíjíme strom poruch až k primárním událostem (porucha komponenty, resp. dílčí porucha komponenty či podsystému, lidská chyba, příp. jiné související události), které jsme schopni kvantifikovat. Tyto události se stávají prvky stromu poruch a musí být nezávislé (tzn. nesmí mít společnou příčinu). Je třeba si uvědomit, že strom poruch není modelem všech možných systémových poruch, ale pouze těch příčin, které způsobují poruchu systému (resp. vrcholovou událost).

- **Terminologie a symbolika**

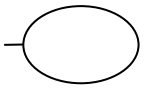
Strom poruch zpracováváme graficky, k vyjádření logiky „nebo“ (příp. OR) a „a“ (příp. AND) využíváme symbolů nazývaných hradla. Pro vyjádření stromu jsou dále užívány symboly pro primární události (resp. „meziudálosti“) a symboly přenosu.

- **Značení primárních událostí**

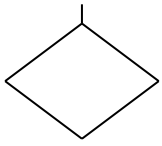
U primárních událostí uvažujeme pět možných typů



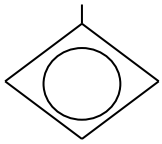
Základní událost - základní chyba, kterou nelze dále dělit (prvek)



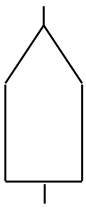
Podmíněná událost - specifické podmínky nebo omezení týkající se některých logických hradel



Nerozvinutá událost - událost, která není dále rozvíjena buď z důvodu jejího malého významu, nebo proto, že o ní nemáme informace



Nerozvedená událost - událost, pro kterou existuje nezávislý podstrom, který byl vyhodnocen separátně a tyto kvantitativní výsledky jsou použity pro kvantifikaci této události (s událostí pracujeme jako se základní událostí)

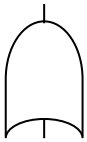


Vnější událost - událost, o které předpokládáme, že se vyskytne (dojde-li k ní, nejedná se o poruchu)

- **Značení meziudálostí**

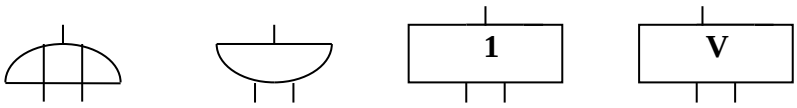
Zprostředkovaná událost resp. „meziudálost“ - událost, ke které dojde z jedné nebo několika příčin spojených logickými hradly (používá se pro přehledné „čtení stromů poruch“ a má v podstatě funkci komentáře)

- **Značení a funkce základních hradel: OR, AND a „výběrové“**



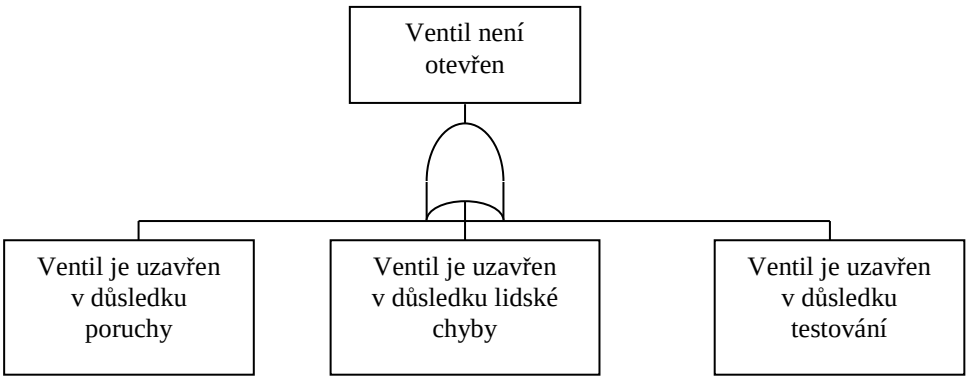
Hradlo „OR“ (disjunkce) - k výstupní události dojde tehdy, dojde-li alespoň k jedné (nebo více) ze vstupních událostí.

Mezi vstupními a výstupními událostmi neplatí příčinná vazba, tzn. výstupní porucha není nikdy vyvolána vstupními, ale je jejich pomocí pouze více specifikována. V literatuře se objevují ještě další symboly pro vyjádření tohoto hradla např.



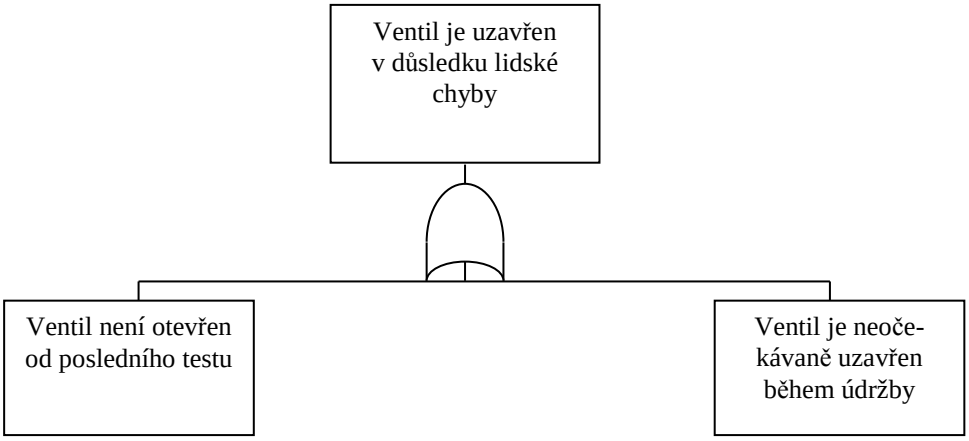
Příklad 1

Příkladem hradla „OR“ může být např. „porucha ventilu, protože není otevřen“

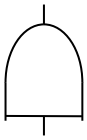


Obr. 11: Příklad hradla „OR“

Tyto meziudálosti je možno samozřejmě ještě dále rozvíjet, např.

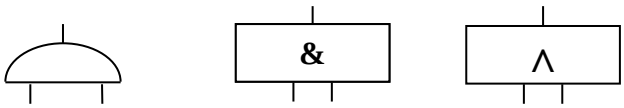


Obr. 12: Další rozvoj dané meziudálosti



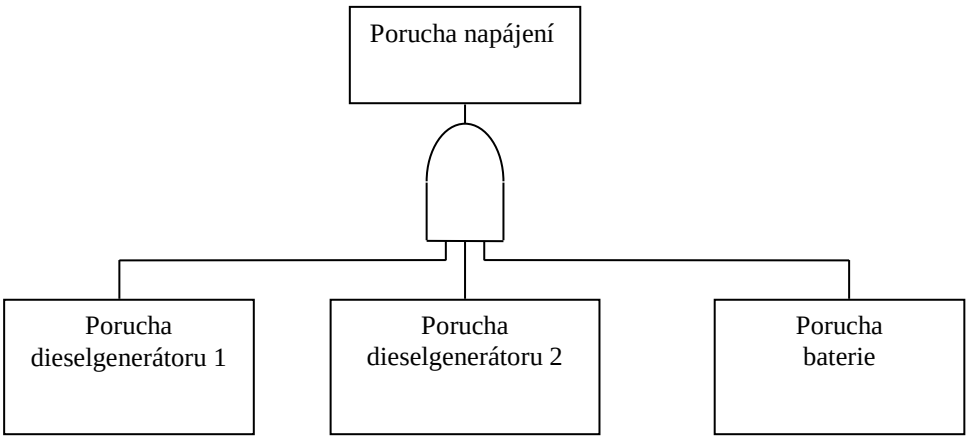
Hradlo „AND“ (konjunkce) - k výstupní události dojde pouze tehdy, jestliže dojde ke všem vstupním událostem.

Mezi vstupními a výstupní událostí existuje příčinný vztah, tj. vstupní poruchy kolektivně reprezentují příčinu výstupní události. Pro toto hradlo se v literatuře objevují ještě další symboly, např.



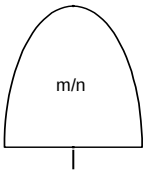
Příklad 2

Jako příklad uveďme poruchu dvou dieselgenerátorů a baterie, které vedou k poruše napájení



Obr. 13: Příklad hradla „AND“

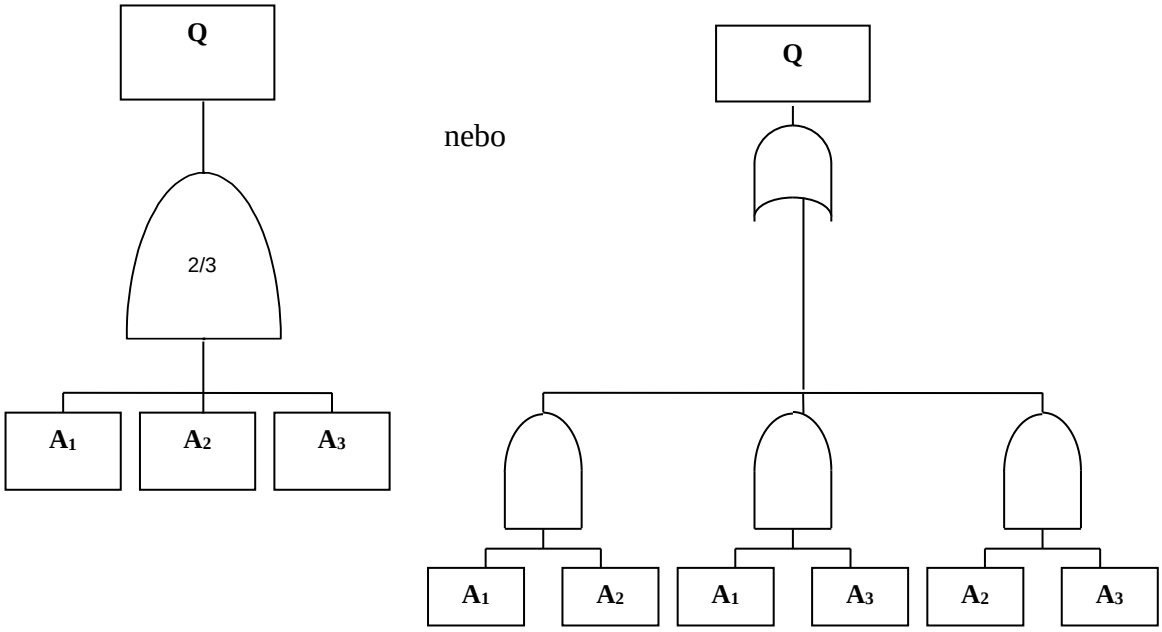
V případě výběrových systémů se doporučuje pro přehlednost stromu poruch používat „výběrové hradlo“, které lze samozřejmě jinak rozepsat pomocí hradel OR a AND.



Hradlo „výběrové“ - k výstupní události dojde tehdy, jestliže nastane alespoň m z n vstupních událostí $(m < n)$

Příklad 3

Příkladem výběrového systému může být systém signálů n čidel vyvolávající zásah bezpečnostního systému jaderného reaktoru. V případě zásahu bezpečnostního systému na každý signál by došlo k řadě zbytečných zásahů (bezpečná porucha) při falešném signálu. Naopak při zásahu až při všech signálech současně by už při poruše jednoho čidla či přenosové trasy mohlo dojít k „nebezpečné poruše“. Na obr. 14 je uveden systém „dva ze tří“, který omezuje výskyt bezpečných poruch a současně připouští poruchu signálu při nebezpečné poruše. Analyzujeme-li ve stromu poruch nebezpečenou poruchu, pak porucha nastává, není-li přenesen signál z libovolných dvou čidel. V obrázku je uvedeno i rozepsání hradla pomocí hradel OR a AND.



Obr. 14: Příklad „výběrového“ hradla pro systém „dva ze tří“

- **Symboly pro pokračování stromu poruch**

vstup

Symboly pokračování se používají pro přehlednější kreslení stromů poruch (např. neopakování již popsaných podstromů) nebo pro

Možnost rozkreslení stromů poruch na několik částí.

výstup

Označení pokračovacích symbolů si musí vzájemně odpovídat.

Shrnutí pojmů

Strom poruch je grafické schéma, které se skládá z **primárních událostí, meziudálostí** a **hradel**. Hradla jsou vyjádřením logických operací mezi událostmi. Základními hradly jsou logický součet (**hradlo OR**), kdy výstupní událost nastane tehdy, jestliže nastane alespoň jedna z *n* vstupujících událostí, dále logický součin (**hradlo AND**), kdy výstupní událost nastane tehdy, jestliže nastane současně všech *n* vstupujících událostí, a konečně **výběrové hradlo *m* z *n***, které je založeno na logice „*m* z *n*“ (tj. *m* libovolných událostí z *n* vyvolá nadřazenou událost). Toto výběrové hradlo lze snadno převést na předchozí základní hradla OR a AND. Postupným rozvíjením nově vzniklých událostí rozvíjíme strom poruch až k primárním událostem.

Otázky 3.2.3.

1. Co je to strom poruch a z čeho se skládá ?
2. Znázorněte vyloženou symbolikou a vysvětlete vztah mezi dvěma událostmi A a B, které jsou propojeny hradlem a) AND, b) OR.
3. Znázorněte vyloženou symbolikou a vysvětlete vztah mezi třemi událostmi A, B a C které jsou propojeny výběrovým hradlem „*1 ze 3*“ ?

Poznámky ke generaci stromu poruch:

1. **Porucha a chyba.** Slovo porucha (anglicky failure) se při systémových analýzách objevuje jako specifický pojem pro neplnění funkce (např. „relé nespíná“). Chyba (fault; srov. fault tree) je obecnější pojem (např. „relé sepne, ale ve špatnou dobu“, „selhání operátora“). Znamená to, že všechny poruchy jsou chyby, ale ne všechny chyby jsou poruchami. V tuzemské literatuře se tyto termíny příliš nerozlišují a ve většině případů, kde je to možné, používáme termín porucha.
2. **Aktivní a pasivní komponenty**. Komponenty (prvky) zpravidla dělíme na pasivní (např. komponenta užívaná pro přenos nějakého signálu - el. vedení, potrubí - převádí výstup jedné aktivní komponenty do vstupu jiné aktivní komponenty) a aktivní (přímo tvoří nebo modifikuje signál - pneumatický ventil, vypínač, čerpadlo, relé). Z kvantitativního hlediska je pravděpodobnost poruchy pasivních komponent zpravidla o dva až tři řády nižší než u aktivních. U aktivních komponent pak často rozlišujeme pravděpodobnost poruchy „při chodu“ (např. běžící čerpadlo) nebo „na vyzvání“ (např. nastartování čerpadla).
3. **Primární a sekundární poruchy**. Při klasifikaci poruch často hovoříme o primárních (např. prasknutí nádoby při tlaku $p < p_0$, tj. pod projektovým tlakem vlivem defektního sváru), sekundárních (prasknutí při tlaku $p > p_0$) a „funkčních“ poruchách (k poruše dochází, pracují-li komponenty správně, ale v nesprávný čas nebo v nesprávném místě).

3.2.4. Pravidla pro konstrukci a popis stromu poruch

Čas ke studiu: 20 minut

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete

- znát hlavní zásady uplatňované při konstrukci stromu poruch
- umět sestavit strom poruch
- umět upravit strom poruch před matematickým zpracováním

Výklad

- **Jaký je postup při konstrukci stromu poruch ?**

Postup při konstrukci stromu poruch lze shrnout do několika základních pravidel.

a) *„Popiš děje, které vstupují do bloku událostí jako poruchy (resp. chyby); urči přesně, co jsou poruchy a kdy k nim dojde“*. Při popisu dějů se nevyhýbáme ani rozsáhlejšímu popisu, který však je třeba formulovat přesně a výstižně tak, abychom ho mohli v dalším postupu jednoznačně rozvíjet (např. „nenastartování motoru při el. napájení“ atd.)

b) Dalším krokem je prověření jednotlivých bloků s těmito popisy otázkou *„Může se porucha (chyba) skládat z poruch (chyb) komponent?“* Odpověď na tuto otázku vede ke druhému pravidlu. *„Jestliže odpověď na tuto otázku je „ano“, pak klasifikujeme tuto událost jako poruchový stav komponentní, jestliže „ne“, pak jako poruchový stav systémový.“* V prvém případě použijeme dále hradla OR a hledáme primární, sekundární a funkční poruchy. V druhém případě hledáme minimálně nezbytné a dostatečné příčiny a jejich logiku (OR, AND, atd.).

c) K výše uvedeným pravidlům lze ještě uvést *pravidlo „žádného zázraku“*. Obecně lze připustit, že posloupnost poruchy může být blokována „zázračnou a neočekávanou poruchou nějaké komponenty. Předpokládáme však normální funkce ostatních komponent, tj. volné šíření poruchového následku stromem poruch.

d) Systematický postup lze definovat jako *pravidlo „kompletního hradla“* definující tvorbu stromu poruch po úrovních, tzn. pokud nejsou definovány všechny vstupy do určitého hradla, nelze pokračovat na nižší úroveň.

e) Důslednou analýzu podmiňuje pravidlo, které můžeme definovat jako *„zákaz z hradla do hradla“*. Jinými slovy, každý další krok konstrukce stromu by měl být popsán komentářem, přímý přechod z hradla do hradla se prezentuje jako nepořádně provedená analýza. Redukce stromu lze provést až při kvantitativním vyhodnocování, kdy se jedná již o jeho matematické zpracování.

- **Jak popsat strom poruch pro účely matematického zpracování ?**

Po ukončení konstrukce stromu poruch přicházíme k jeho matematickému zpracování. Pro tento účel, zpravidla už se znalostí počtu primárních událostí a hradel, strom očíslujeme (už s uvážením potřeb dále použité metodiky vyhodnocení, tj. např. číslování pouze primárních událostí či všech - zpravidla zleva doprava a zdola nahoru; rozepsání stromu tak, aby do každého hradla vstupovaly pouze dvě události atd.). Nejběžněji je používán zápis pomocí Booleovy algebry (viz dále):

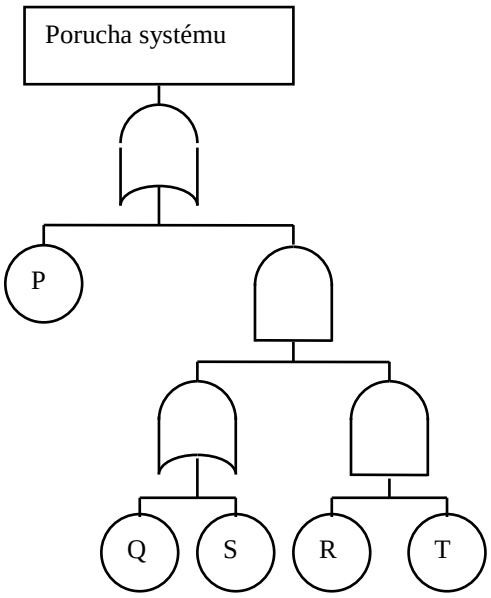
Strom poruch je popsán jako logická funkce základních událostí ψ

$$TOP = \psi (A_1, A_2, \ldots, A_n) \qquad (3.2)$$

kde Booleova logika zachycuje vliv hradel a funkce je tedy tvořena jen primárními událostmi A_i.

Příklad 1

Jako příklad uveďme popis stromu poruch dle obr. 9.



$$TOP = (Q \cup S) \cap (R \cap T) \cup P \qquad (3.3)$$

nebo

$$TOP = (Q + S) \ . \ (R \ . \ T) \ + P \qquad (3.4)$$

Obr. 9: Jednoduchý strom poruch

V případě komplikovaného stromu samozřejmě postupujeme tak, že vycházíme od vrcholové události a postupně popisujeme jednotlivá značená hradla na nižších úrovních. Postupnou substitucí dostáváme nakonec žádanou logickou funkci. Při úpravách je žádoucí využívat základních pravidel Booleovy algebry (viz další výklad), pro zjednodušení. Operátory mezi událostmi jsou v souladu s definovanými logickým součtem a součinem (OR, AND).

Otázky 3.2.4.

1. Popište stručně nejdůležitější pravidla uplatňovaná při konstrukci stromu poruch.
2. Jaká je nejčastější podoba stromu poruch pro účely matematického zpracování ?

Shrnutí výhod a nevýhod metody stromů poruch

Řada výhod i nevýhod vyplynula již z předcházejících kapitol. Shrneme-li je, pak hlavní výhody jsou:

a) tvoří přehledné a systematické vizuální zobrazení, na kterém je na první pohled vidět, jakým způsobem přispívají jednotlivé základní prvky k poruchovosti systému

b) jsou účinnou pomocí při diagnostice a vyhledávání vadných prvků

c) poskytují účinnou pomoc řídícím pracovníkům a pracovníkům, kteří neznají detailně konstrukci zařízení, a dále dobrou možnost kontroly konstrukce stromu

d) umožňují relativně snadno odhalit aspekty důležité z hlediska spolehlivosti

e) umožňují provádět analýzu spolehlivosti s přehledným znázorněním i vlivů mimo oblast „hardwaru“ zařízení.

Hlavními nevýhodami jsou na druhé straně:

a) obtížnost a pracnost při sestaveni stromu poruch

b) nutnost detailní znalosti systému

c) relativně snadná možnost vzniku chyby při sestavení stromu

d) pomocí stromu poruch nelze znázornit vratné jevy, udržovatelnost, opravitelnost atd.

Korespondenční úkol 1

Sestrojte nejdříve funkční schéma pro systém, sestávající minimálně z pěti komponent a charakterizovaný tzv. „můstkovou strukturou“. Ze získaného funkčního schématu pak generujte strom poruch pro vrcholovou událost TOP danou tím, že na výstupu struktury není monitorována žádná odezva vstupního signálu.

3.3. Kvalitativní vyhodnocení stromu poruch

3.3.1. Základní pojmy

Čas ke studiu: 30 minut

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- popsat kvalitativní vyhodnocení stromu poruch
- vysvětlit základní pojmy kvalitativní analýzy: minimální řez a dráha, koherence stromu poruch, závislost stromu poruch, modularizace

Výklad

- **Co je cílem kvalitativního vyhodnocení stromu poruch ?**

Sestrojený strom poruch přechází v této etapě na matematický model popsaný graficky, resp. matematickým zápisem (viz odstavec 3.2.4.). Jeho vyhodnocení lze provést ručním způsobem nebo s pomocí počítače a různých typů výpočtových programů. Cílem kvalitativního vyhodnocení je najít strukturní funkci stromu, tj. vyjádřit vrcholovou událost jako funkci jednotlivých prvků tak, abychom po dosazení příslušných pravděpodobností primárních událostí v daném čase získali přímo pravděpodobnost vrcholové události. Kvantitativní vyhodnocení v případě neschůdnosti tohoto postupu může přejít na odhad, tj. vyčíslení horních resp. i dolních mezí této pravděpodobnosti.

- **Co je to minimální řez a minimální dráha ?**

V počítačovém zpracování přechází zpravidla kvalitativní analýza na nalezení souboru minimálních řezů (anglicky *minimal cut set*). Takovýmto minimálním řezem rozumíme nejmenší možnou kombinaci primárních prvků stromu, které, nastanou-li současně, vyvolají vrcholovou událost. Počet prvků v řezu pak určuje řád tohoto řezu.

Přejdeme-li od stromu poruch ke stromu úspěchu (někdy nazývaný též duální strom poruch; tj. provedeme záměnu hradel, přechod z Booleovského popisu stromu pomocí de Morganových vztahů, čímž budeme hledat doplněk vrcholové události) pak řez tohoto stromu nazveme minimální dráhou (*minimal path*). Analogicky minimální dráhou rozumíme nejmenší možnou kombinaci *n* událostí, které musí zároveň nastat, aby nedošlo k vrcholové události stromu poruch (tzn., které komponenty si musí zachovat svou funkci, aby nebyla ohrožena funkceschopnost vyšetřovaného systému).

- **Co je koherence stromu poruch ?**

Při rozboru stromu poruch je třeba prověřit, zda se jedná o koherentní strukturu. Koherencí rozumíme takovou vlastnost systému, kdy při náhlé poruše resp. opravě prvku nedojde k opačnému chování vrcholové události, tj. obnovení funkce systému, resp. jeho poruše.

- **Co znamená závislost stromu poruch ?**

Dalším důležitým pojmem je závislost stromu poruch. I když o primárních událostech předpokládáme, že jsou nezávislé, mohou se ve stromu poruch některé primární události či podstromy opakovat. Při přímém vyhodnocení se pak snadno můžeme dopustit chyby.

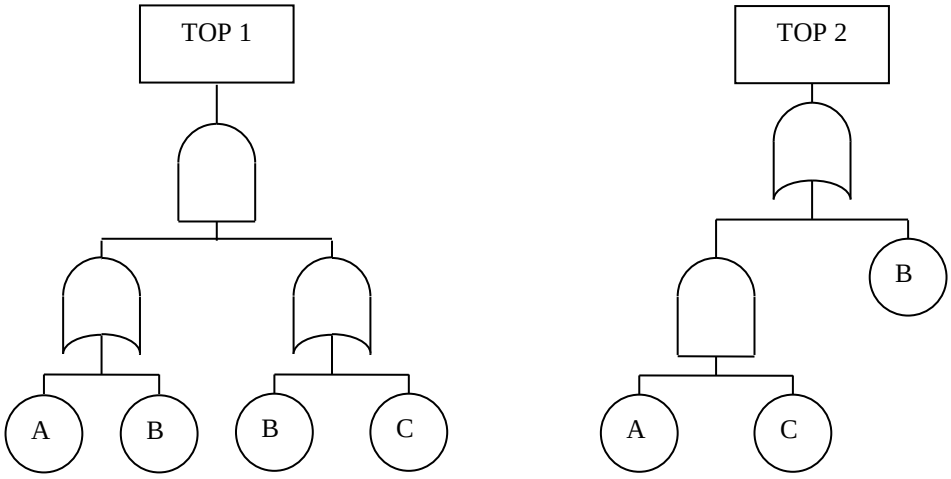
Příklad 1

Uvažujme jednoduché stromy poruch na obr.15. Oba stromy poruch jsou zřejmě ekvivalentní. Logický výraz pro výslednou poruchu prvního stromu je

$$\text{TOP 1} = (A + B) \,.\, (B + C) \tag{3.5}$$

S použitím Booleovy algebry dále platí

$$\text{TOP 1} = AB + BB + AC + BC = AC + B \,.\, (A + C + B) = AC + B = \text{TOP 2} \tag{3.6}$$



Obr. 15: Logický model ilustrující eliminaci závislých poruch

Označíme-li pro *A*, *B*, *C* po řadě doplňky pravděpodobností primárních událostí do jedničky $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ dostáváme

$$\begin{aligned} \overline{P}_{TOP1} &= \left[1 - \left(1 - \overline{a}\overline{b}\right)\left(1 - \overline{b}\overline{c}\right)\right] = \overline{b}\left(\overline{a} + \overline{c} - \overline{a}\overline{b}\overline{c}\right) \\ \overline{P}_{TOP2} &= \left[1 - \left(1 - \overline{a}\right)\left(1 - \overline{c}\right)\right].\overline{b} = \overline{b}\left(\overline{a} + \overline{c} - \overline{a}\overline{c}\right) \end{aligned} \tag{3.7}$$

Oba výrazy nejsou zřejmě ekvivalentní a pro $\overline{P}_{TOP1}$ dostáváme zřejmě chybný výsledek, neboť pravděpodobnost události *B* je v tomto případě uvažována dvakrát.

- **Co znamená modularizace stromu poruch ?**

Rozsáhlý strom poruch bývá (zvláště pro kvantitativní vyhodnocení) často s výhodou modularizován. Tento postup snižuje počet primárních událostí vytvářením tzv. „makrokomponent“, které reprezentují podstromy. Tyto makrokomponenty musí být nezávislé jak

vzhledem k ostatním primárním událostem, tak k ostatním vytvořeným makrokomponentám. S ohledem na následnou kvantifikaci jsou nejvýhodnější podstromy pouze s hradly OR. Při jejich vyhodnocení, za předpokladu použití exponenciálního modelu, se exponenciální model zachovává i u makrokomponenty.

Shrnutí pojmů

Cílem **kvalitativního vyhodnocení** je najít strukturní funkci stromu, tj. vyjádřit vrcholovou událost jako funkci jednotlivých prvků tak, abychom po dosazení příslušných pravděpodobností primárních událostí v daném čase získali přímo pravděpodobnost vrcholové události.
Minimálním řezem rozumíme nejmenší možnou kombinaci primárních prvků stromu, které, nastanou-li současně, vyvolají vrcholovou událost. Počet prvků v řezu pak určuje **řád řezu**.

Minimální dráhou rozumíme nejmenší možnou kombinaci *n* událostí, které musí zároveň nastat, aby nedošlo k vrcholové události stromu poruch (tzn., které komponenty si musí zachovat svou funkci, aby nebyla ohrožena funkceschopnost vyšetřovaného systému).

Koherencí rozumíme takovou vlastnost systému, kdy při náhlé poruše resp. opravě prvku nedojde k opačnému chování vrcholové události.

Opakující se primární události ve stromu poruch vnášejí do stromu **závislosti**, které mohou být zdrojem chyb při kvantitativním vyhodnocení.

Modularizace stromu poruch znamená jeho zjednodušení na základě vyhledání makrokomponent, které reprezentují podstromy.

Otázky 3.3.1.

1. Co znamená kvalitativní vyhodnocení stromu poruch ?
2. Vysvětlete pojmy: minimální řez, koherence stromu poruch, závislost stromu poruch, modularizace.

3.3.2. Využití Booleovy algebry, výpočet pravděpodobností jednoduchých složených událostí

Čas ke studiu: 50 minut

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- charakterizovat Booleovu algebru
- využívat základních pravidel Booleovy algebry ke zjednodušování stromu poruch
- počítat pravděpodobnosti jednoduchých složených událostí
- provést rozklad stromu poruch na minimální řezy, provést pivotální dekompozici

Výklad

- **Co je Booleova algebra ?**

Booleova algebra je libovolná množina prvků, na které jsou definovány operace součet, násobení a inverze, která je dále uzavřená vůči těmto operacím, a která zachovává řadu algebraických zákonů (komutativní, asociativní, distributivní), vůči oběma operacím. Její základní pravidla uvádíme přehledně s matematickým i technickým značením v tabulce 2. Booleovské proměnné označené v tabulce čárkou (X') jsou komplementární doplňky (inverze) k původním proměnným X, symbol $\varnothing$ značí nulový prvek, symbol Ω značí jednotkový prvek, oba charakterizovány příslušnými vlastnostmi v tabulce. Platnost některých doplněných vztahů lze snadno ověřit (např. pomocí Vennových diagramů).

Tabulka 2: Pravidla Booleovské algebry

Matematická symbolika	Technická symbolika	Označení
(1a) $X \cap Y = Y \cap X$	$X \cdot Y = Y \cdot X$	Komutativní zákon
(1b) $X \cup Y = Y \cup X$	$X + Y = Y + X$	
(2a) $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$	$X \cdot (Y \cdot Z) = (X \cdot Y) \cdot Z$ $X (YZ) = (XY) Z$	Asociativní zákon
(2b) $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$	$X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$	
(3a) $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$	$X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$ $X (Y + Z) = XY + XZ$	Distributivní zákon
(3b) $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$	$X + Y \cdot Z = (X + Y) \cdot (X + Z)$	
(4a) $X \cap X = X$	$X \cdot X = X$	Idempotentní zákon
(4b) $X \cup X = X$	$X + X = X$	

(5a) $X \cap (X \cup Y) = X$ (5b) $X \cup (X \cap Y) = X$	$X \cdot (X + Y) = X$ $X + X \cdot Y = X$	Zákon absorbce
(6a) $X \cap X' = \varnothing$ (6b) $X \cup X' = \Omega$	$X \cdot X' = \varnothing$ $X + X' = \Omega$	Zákon komplementů
(7a) $(X \cap Y)' = X' \cup Y'$ (7b) $(X \cup Y)' = X' \cap Y'$	$(X \cdot Y)' = X' + Y'$ $(X + Y)' = X' \cdot Y'$	de Morganovy vzorce
(8a) $\varnothing \cap X = \varnothing$ (8b) $\varnothing \cup X = X$ (8c) $\Omega \cap X = X$ (8d) $\Omega \cup X = \Omega$ (8e) $\varnothing' = \Omega$ (8f) $\Omega' = \varnothing$	$\varnothing \cdot X = \varnothing$ $\varnothing + X = X$ $\Omega \cdot X = X$ $\Omega + X = \Omega$ $\varnothing' = \Omega$ $\Omega' = \varnothing$	Operace s $\varnothing$ a Ω
(9a) $X \cup (X' \cap Y) = X \cup Y$ (9b) $X' \cap (X \cup Y') = X' \cap Y' = (X \cup Y)'$	$X + X' \cdot Y = X + Y$ $X' \cdot (X + Y') = X' \cdot Y' = (X + Y)'$	Často užívané vztahy

- **Jak využít Booleovu algebru k úpravě a zjednodušení stromu poruch ?**

S ohledem na stromy poruch nám komutace dovoluje zaměňovat pořadí prvků v hradlech, asociace různé grupování v sérii hradel stejného typu a distribuce nám dovoluje manipulovat s kombinacemi, kde se vyskytují jak AND tak OR hradla. Uvedené zákony i doplněné vztahy umožňují postupnou úpravu a zjednodušování Booleovsky popsaného stromu poruch.

- **Booleovský popis hradel**

Hradlo OR je v Booleovské algebře ekvivalentní sjednocení, či součtu, obecně pro hradlo s n vstupy $A_1, A_2, \ldots, A_n$ platí

$$Q = A_1 + A_2 + \ldots + A_n \qquad (3.8)$$

Pro pravděpodobnost $P(Q)$ pak pro hradlo se dvěma vstupy A, B lze zapsat

$$P(Q) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A)\,P(B/A) \qquad (3.9)$$

Pro vzájemně se vylučující události ($P(A \cap B) = 0$) je

$$P(Q) = P(A) + P(B) \qquad (3.10)$$

Jsou-li A, B nezávislé, pak $P(B/A) = P(B)$ a tudíž

$$P(Q) = P(A) + P(B) - P(A)\,P(B) \qquad (3.11)$$

resp.

$$P(Q) = 1 - (1 - P(A)) \,.\, (1 - P(B)) \qquad (3.12)$$

Obecně pro *n* vstupů pak $$P(Q) = 1 - \prod_{i=1}^{n}\left(1 - P\left(A_i\right)\right) \qquad (3.13)$$

Bereme-li vztah (3.10) jako aproximativní, pak je ve všech případech konzervativní, neboť

$$P(A) + P(B) \geq P(A) + P(B) - P(A \cap B) \qquad (3.14)$$

a při jeho použití se už při pravděpodobnostech $P(A) < 10^{-1}$, $P(B) < 10^{-1}$ dopouštíme malé chyby (max 5%).

Hradlo AND je v Booleovské algebře ekvivalentní průniku, či součinu, pro hradlo s *n* vstupy obecně platí

$$Q = A_1 \,.\, A_2 \,.\, \ldots \,.\, A_n \qquad (3.15)$$

a pro pravděpodobnosti u hradla se dvěma vstupy platí

$$P(Q) = P(A) \,.\, P(B/A) = P(B) \,.\, P(A/B) \qquad (3.16)$$

V případě nezávislých událostí dostaneme

$$P(Q) = P(A) \,.\, P(B) \qquad (3.17)$$

a obecně pro *n* vstupů $$P(Q) = \prod_{i=1}^{n} P\left(A_i\right) \qquad (3.18)$$

K vyjádření **pravděpodobnosti události na výstupu výběrového hradla** zaveďme pravděpodobnosti vstupních událostí $p_1, p_2, \ldots, p_n$ a $T(n, j)$ pravděpodobnost vzniku *j* nebo více událostí ze skupiny událostí $A_n, A_{n-1}, \ldots, A_1$. V případě $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p$, tj. stejné pravděpodobnosti vzniku všech vstupních událostí, lze snadno dokázat, že platí

$$T(n, j) = \sum_{r=j}^{n}\binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} \qquad (3.19)$$

- **Pivotální dekompozice Booleovské funkce (stromu poruch)**

Tato metoda (lit.[4]) vyjadřuje Booleovskou funkci ve standardizované formě, rozvinuje obecnou Booleovskou funkci $\psi(A_1, A_2, \ldots, A_n)$, představující nějaký strom poruch. Předpokládáme, že pro $A_i = 1$ se událost vyskytla a pro $A_i = 0$ se nevyskytla. Rozvinutí pak provádíme následovně

$$\psi(A_1, A_2, \ldots, A_n) = A_1 \,.\, \psi(1, A_2, \ldots, A_n) + (1 - A_1)\, \psi(0, A_2, \ldots, A_n) \qquad (3.20)$$

Rozvíjet lze postupně pro všechny proměnné až získáme 2^n vzájemně se vylučujících kombinací.

Příklad 1

Proveďte pivotální dekompozici obecné Booleovské funkce tří proměnných.

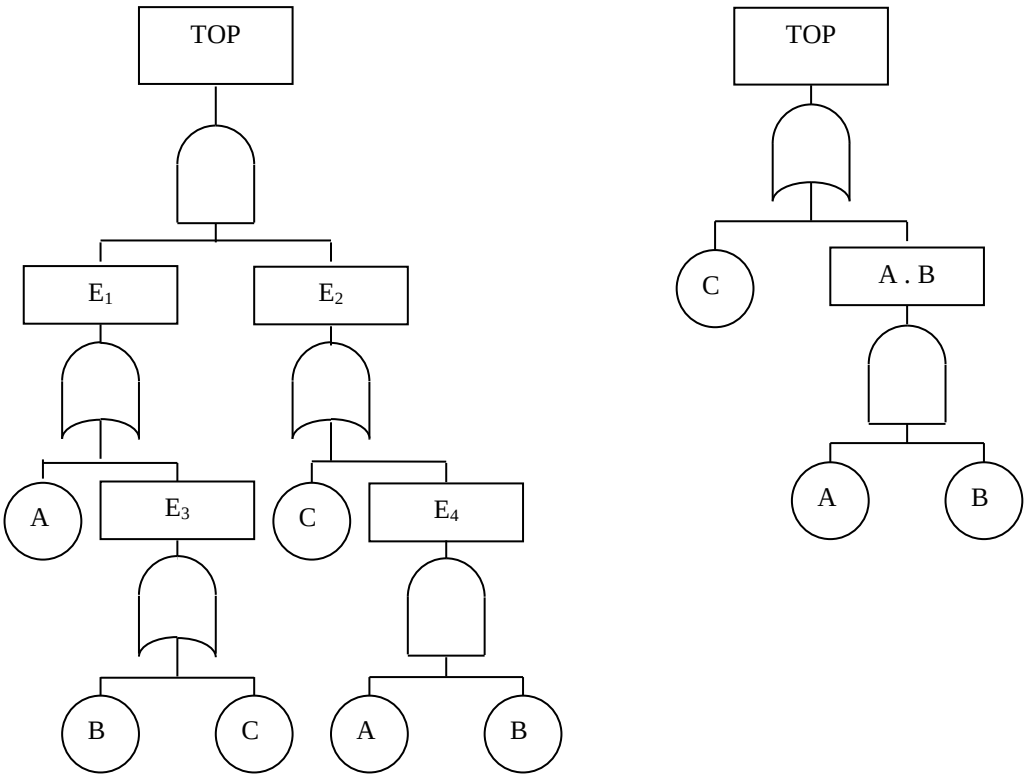
$$\psi(A,B,C) = ABC\,\psi(1,1,1) + AB(1-C)\,\psi(1,1,0) + A(1-B)C\,\psi(1,0,1) + A(1-B)(1-C)\,\psi(1,0,0) + (1-A)BC\psi(0,1,1) + (1-A)B(1-C)\,\psi(0,1,0) + (1-A)(1-B)C\,\psi(0,0,1) + (1-A)(1-B)(1-C)\,\psi(0,0,0) \qquad (3.21)$$

- **Určení souboru minimálních řezů**

Úplný soubor minimálních řezů lze získat úpravou Booleovského popisu vrcholové události TOP = $\psi(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ pomocí výše uvedených pravidel Booleovské algebry. Při těchto úpravách dochází ke zjednodušení a redukci stromu poruch. Jako příklad uveďme strom poruch na obr. 16

Příklad 2

Proveďte redukci stromu poruch z obrázku 16.



Obr. 16: Redukce stromu poruch

TOP = E_1 . E_2 = (A + E_3) . (C + E_4) = (A + B + C) (C + A .B) =

A .C + A .A .B + B .C + B .A .B + C .C + C .A .B = A .C + A .B + B .C + A .B + C + A .B .C = A .B +C

(3.22)

K nalezení souborů minimálních řezů v současné době existuje řada počítačových algoritmů. Jejich znalost pak umožní vyčíslení pravděpodobnosti vrcholové události.

Shrnutí pojmů

Booleova algebra je množina prvků, pro které jsou definovány operace sčítání, násobení a inverze, která je uzavřená vůči těmto operacím. Pro tyto operace platí stanovená pravidla. Vlastnosti Booleovy algebry umožňují postupnou úpravu a zjednodušování Booleovsky popsaného stromu poruch. **Hradlo OR** je v Booleovské algebře ekvivalentní **součtu**, h**radlo AND** je ekvivalentní **součinu.**

Pro vyčíslení pravděpodobností výstupních událostí, vycházejících ze základních hradel OR a AND platí jednoduché pravděpodobností vztahy.

Každý strom poruch lze rozložit jednak metodou **pivotální dekompozice,** a jednak pomocí nalezených **minimálních řezů.** Tyto rozklady jsou mnohdy nezbytné pro vyčíslení pravděpodobnosti vrcholové události.

Úlohy k řešení 3.3.2

1. Nalezte všechny minimální řezy pro strom poruch z obrázku 9.
2. Vypočítejte pravděpodobnost výstupní události z výběrového hradla „2 ze 3“ pro případ, kdy všechny vstupující události mají pravděpodobnost p = 0,3

Otázky 3.3.2.

1. K čemu slouží Booleova algebra v teorii spolehlivosti ?
2. Jak vypočíst pravděpodobnost Booleovského součtu (součinu) pro nezávislé vstupní události ?

Souhrn ke kvalitativnímu vyhodnocení stromů poruch

Mezi hlavní výsledky kvalitativní analýzy patří:

a) získání souboru minimálních řezů, resp. úspěšných cest

b) kvalitativní stanovení důležitosti (příspěvky k systémové poruše) jednotlivých komponent, resp. řezů

- důležitost řezu je dána jeho řádem; čím nižší řád, tím významnější řez
- významnost komponent je dána jejich přítomností ve významných řezech; např. systém se skládá ze dvou paralelních větví, kde v první je *n* sériově řazených komponent a v druhé jedna komponenta, potom druhá komponenta se, na rozdíl od ostatních, objevuje ve všech *n* řezech druhého řádu
- ocenění souboru řezů s ohledem na možné vícenásobné poruchy (např. poruchy se společnou příčinou, tzv. common cause failures); hledání řezů vyššího řádu ($i \geq 2$), které by mohly nastat vlivem jedné příčiny, resp. události, poruchy.

3.4. Kvantitativní vyhodnocení stromu poruch

3.4.1. Kvantifikace stromu poruch

Čas ke studiu: 15 minut

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- formulovat cíl kvantitativní analýzy spolehlivosti
- formy a podoby vstupních dat

- **Cílem kvantitativní analýzy** je:

a) určení zadaných absolutních ukazatelů spolehlivosti systému, resp. řezů (vyhodnocení může být prováděno v závislosti na čase, pouze v některých časových bodech, při uvážení oprav i limitně pro $t \rightarrow \infty$; mimo oprav lze uvažovat i periodické prohlídky, pravidelnou údržbu, vliv lidského faktoru ap.; stanovit lze i jiné spolehlivostní ukazatele, např. intenzitu poruch, funkci okamžité pohotovosti systému, součinitel asymptotické pohotovosti, součinitel střední pohotovosti atd.)

b) kvantitativní významnost vstupních událostí, podstromů, tj. citlivost pravděpodobnosti poruchy (vrcholové události) systému na pravděpodobnost vzniku vstupních událostí, podstromů

c) citlivostní analýza, kterou oceňujeme efekty změn modelu, dat, příp. i chyby získaných výsledků

Kvantifikace stromu poruch zahrnuje přiřazení vstupních dat všem prvkům stromu poruch. Toto přiřazení by mělo být v souladu s předchozím rozborem těchto prvků jak z hlediska možné poruchy a její pravděpodobnosti (určení typu pravděpodobnostního rozdělení výskytu poruchy, u „spících prvků“ pravděpodobnost poruchy „na vyzvání“, ocenění vlivu lidské chyby atd.), tak s ohledem na ostatní vlivy, jako je opravitelnost, periodické prohlídky, údržba aj. Při kvantifikaci stromu poruch je třeba vycházet z možností metodiky, příp. výpočtového programu, který máme k dispozici. Z tohoto hlediska můžeme komponenty např. dělit na:

a) neopravitelné

b) opravitelné (s možností okamžitého zjištění poruchy, resp. monitorované)

c) opravitelné (periodicky prohlížené, příp. s pravidelnou profylaktikou nebo výměnou)

Toto nejčastěji používané rozdělení je možno někdy ještě dále dělit (např. porucha zjistitelná měřícím přístrojem nemusí být zjištěna pro jeho poruchu); periodická prohlídka může být nedokonalá vlivem nedbalosti provedení, příp. imitace skutečných podmínek.

- **Vstupní data pro vyhodnocení stromů poruch**

K těmto datům řadíme základní spolehlivostní charakteristiky prvků (např. intenzity poruch), zvláštní charakteristiky (např. doby oprav, intervaly periodických prohlídek), data potřebná pro

použití dané metodiky (např. přesnost, omezení řádu minimálních řezů, použití různých aproximací) a v případě použití výpočtového programu i data řídící jeho výpočet.

Základní spolehlivostní charakteristikou komponenty může být její distribuční funkce poruchy F_i , či přímo pravděpodobnost její poruchy v daném čase nebo intervalu, funkce okamžité pohotovosti A_i, doplňky předchozích funkcí, intenzita poruch λ_i (zpravidla předpokládáme její konstantní průběh bez vlivu „časných poruch“ či „stárnutí“, tj. ve střední části vanové křivky; pro spící, resp. startující komponenty zadáváme intenzitu poruch na vyzvání), typ pravděpodobnostního rozdělení (nejčastěji exponenciální, Weibullovo aj.) střední dobu provozu do poruchy $MTTF_i$ (pro exponenciální rozd.: $MTTF_i = 1 / \lambda_i$). Zvláštní charakteristiky mohou zahrnovat střední dobu do obnovy komponenty $MTTR_i$ a typ pravděpodobnostního rozdělení opravy, střední dobu údržby a střední dobu mezi údržbami, střední dobu testu a dobu mezi periodickými testy, střední dobu detekce a lokalizace poruchy, dobu mezi výměnami, či generálními opravami komponent, atd.

Shrnutí pojmů

Kvantitativní analýza spočívá v určení zadaných spolehlivostních ukazatelů systému na bázi znalosti spolehlivostních ukazatelů vstupních událostí. Dále jsou součástí kvantitativní analýzy různé **citlivostní analýzy**, jako citlivost pravděpodobnosti poruchy systému na pravděpodobnost vzniku vstupních událostí, podstromů, či citlivostní analýza vůči změnám modelu, dat, atd.

Vstupními daty jsou zpravidla spolehlivostní charakteristiky prvků systému, které mohou být v různých formách, nejčastěji v podobě znalosti intenzity poruch, či oprav, u speciálně udržovaných prvků musí být zadány i informace o údržbě, která mnohdy zásadně ovlivňuje spolehlivostní chování prvků, např. se zadá perioda prohlížených komponent.

Otázky 3.4.1.

1. Co je cílem kvantifikace stromu poruch systému ?
2. Jmenujte formy zadávání vstupních dat

3.4.2. Charakterizace vstupních dat

Čas ke studiu: 25 minut

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- vyjádřit matematicky funkci okamžité pohotovosti prvku včetně stacionární podoby
- ocenit vliv periodických prohlídek na pohotovost
- vysvětlit systémy „na vyzvání“ a lidský faktor

Při kvantitativním vyhodnocování stromu poruch se při kvantifikaci a posléze při výpočtu objevuje řada vlivů a předpokladů, které je ovlivňují.

- **Co je to obnova ?**

Obnova sledovaného prvku či systému zahrnuje jak jeho opravitelnost, tak možnost výměny. Při vyhodnocení obnovovaného systému se jako ukazatel spolehlivosti uplatňuje *funkce okamžité pohotovosti* (okamžitá pohotovost $A(t)$).

Pro konstantní intenzity poruch a oprav lze pro prvek stromu odvodit

$$A(t+dt) = A(t) \,.\, (1 - \lambda\, dt) + (1 - A(t))\, \mu\, dt \qquad (3.23)$$

Z této rovnice úpravou dostáváme autonomní rovnici prvního řádu

$$\frac{dA(t)}{dt} + A(t) \,.\, (\lambda + \mu) = \mu \qquad (3.24)$$

$$A(t) = \frac{\mu + \lambda e^{-t(\lambda+\mu)}}{\lambda+\mu} = \frac{\mathrm{MTTF} + e^{-t\left(\frac{1}{\mathrm{MTTF}}+\frac{1}{\mathrm{MTTR}}\right)}}{\mathrm{MTTF}+\mathrm{MTTR}} \qquad (3.25)$$

A doplňkem $A(t)$ je $F(t) = \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\left(1-\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t}\right) = \dfrac{\mathrm{MTTR}(1-\mathrm{e}^{-t\left(\frac{1}{\mathrm{MTTF}}+\frac{1}{\mathrm{MTTR}}\right)})}{\mathrm{MTTF}+\mathrm{MTTR}}$ (3.26)

Pro dostatečně velké t přechází zřejmě vztah do stacionární podoby, kde

$$A_S = \lim_{t\to\infty} A(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} = \frac{\mathrm{MTTF}}{\mathrm{MTTF}+\mathrm{MTTR}} \qquad (3.27)$$

$$F_S = \lim_{t\to\infty} F(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} = \frac{\mathrm{MTTR}}{\mathrm{MTTF}+\mathrm{MTTR}} \qquad (3.28)$$

A_S bývá označován také jako *součinitel asymptotické pohotovosti*

- **Údržba, periodické prohlídky a testy**

Při pravidelné údržbě prvku po časovém intervalu t_c s délkou trvání t_d (kdy je opravený a zkontrolovaný prvek vrácen do provozu) lze pravděpodobnost $P(t)$ nalezení prvku v porušeném stavu např. zapsat:

$$\begin{aligned} P(t) &= F(t) \quad \text{pro } t < t_c \\ &= 1 \quad \text{pro } t \geq t_c \end{aligned} \qquad (3.29)$$

přičemž $t = T - k\,(t_c + t_d)$, kde T je sledovaný interval a k nejvyšší přirozené číslo, aby $t \in (0;\, t_c + t_d)$.

Periodické prohlídky a testy mají smysl u takových poruch prvků, resp. událostí, které není možno ihned zjistit (neprojeví se proto, že nejsou monitorovány - jsou ve spícím stavu, či stavu vyčkávání). Předpokládáme většinou prohlídky dokonalé (jakoby byl příslušný prvek vyměněn za nový) a okamžité. Distribuční funkce poruchy se u těchto komponent periodicky opakuje. Pro vyhodnocení spolehlivosti systémů s periodickými prohlídkami jeho prvků lze s výhodou použít simulačních programů.

- **Poruchy na „vyzvání“**

Tyto poruchy souvisí se systémy, které jsou v pohotovosti a provádějí svou funkci „na vyzvání“ v případě potřeby (např. bezpečnostní systémy jaderných elektráren).

- **Lidský faktor**

Strom poruch dovoluje snadno zahrnout jako primární událost i poruchu způsobenou člověkem. Může se jednat o různé typy chyb způsobených špatným provedením požadovaného úkonu, neprovedením žádaného úkonu, či provedením úkonu, který neměl být proveden. Při zahrnutí těchto událostí a jejich kvantifikaci ve stromu poruch předpokládáme jejich konstantní pravděpodobnost výskytu v čase.

Shrnutí pojmů

Za předpokladu konstantní intenzity poruch a oprav lze **funkci okamžité pohotovosti** prvku vyjádřit v jednoduchém analytickém tvaru. Při dlouhodobém provozu prvku se tato funkce ustálí na jisté asymptotické hodnotě.

Periodické prohlídky a testy mají smysl u takových poruch prvků, resp. událostí, které není možno ihned zjistit (neprojeví se proto, že nejsou monitorovány - jsou ve spícím stavu, či stavu vyčkávání). Periodické prohlídky výrazně ovlivňují pohotovost prvků.

Některé systémy jsou v pohotovosti a provádějí svou funkci jen **„na vyzvání“** v případě potřeby.

Strom poruch dovoluje snadno zahrnout jako primární událost i **lidský faktor**, tj. poruchu způsobenou člověkem.

Otázky 3.4.2.

1. Charakterizujte a vyjádřete analyticky okamžitou pohotovost *A(t)*.
2. Jak ovlivňuje pohotovost periodická údržba prvku ?
3. Vysvětlete pojem lidský faktor.

3.4.3 Typy vyhodnocení stromu poruch

3.4.3.1. Přímá metoda pomocí pravdivostní tabulky

Čas ke studiu: 15 minut

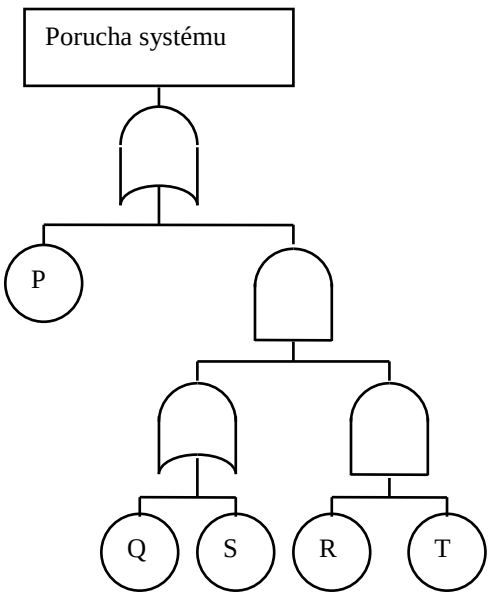
Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- kvantitativně vyhodnotit jednoduché stromy poruch
- znát omezení této jednoduché metody

- **Přímá metoda vyhodnocení založená na pivotální dekompozici**

Je to metoda založená na pivotální dekompozici, kde respektujeme všechny stavy systému (viz tab. 3, která reprezentuje strom poruch z obr. 9). Soustava nul a jedniček představuje „pracující“ či „porušený“ prvek nebo systém. Každý řádek reprezentuje jednu z možné kombinace stavů prvků *P*, *Q*, *R*, *S*, *T*. V posledním sloupci jsou uvedeny pravděpodobnosti jednotlivých stavů (kde pravděpodobnosti poruch jednotlivých prvků jsou: p,q,r,s,t), jejichž součet dává jednotku. Sečtením pravděpodobností těch stavů, kdy nastává vrcholová událost (systém = 1) dostáváme celkovou pravděpodobnost vrcholové události. Protože pro strom poruch s *n* prvky může nastat 2^n kombinací, stává se tento způsob pro větší *n* nepraktický.

Příklad 1



Obr. 9: Jednoduchý strom poruch

Tabulka 3: Pravdivostní tabulka pro systém z obrázku 9

Čís.	Uzlový bod P Q R S T	Systém	Pravděpodobnost stavu
1	0 0 0 0 0	0	(1-p)(1-q)(1-r)(1-s)(1-t)
2	0 0 0 0 1	0	(1-p)(1-q)(1-r)(1-s) t
3	0 0 0 1 0	0	(1-p)(1-q)(1-r) s (1-t)
4	0 0 0 1 1	0	(1-p)(1-q)(1-r) st
5	0 0 1 0 0	0	(1-p)(1-q) r (1-s)(1-t)
6	0 0 1 0 1	0	(1-p)(1-q) r (1-s) t
7	0 0 1 1 0	0	(1-p)(1-q) rs (1-t)
8	0 0 1 1 1	1	(1-p)(1-q) rst
9	0 1 0 0 0	0	(1-p) q (1-r)(1-s)(1-t)
10	0 1 0 0 1	0	(1-p) q (1-r)(1-s) t
11	0 1 0 1 0	0	(1-p) q (1-r) s (1-t)
12	0 1 0 1 1	0	(1-p) q (1-r) st
13	0 1 1 0 0	0	(1-p) qr (1-s)(1-t)
14	0 1 1 0 1	1	(1-p) qr (1-s) t
15	0 1 1 1 0	0	(1-p) qrs (1-t)
16	0 1 1 1 1	1	(1-p) qrst
17	1 0 0 0 0	1	p (1-q)(1-r)(1-s)(1-t)
18	1 0 0 0 1	1	p (1-q)(1-r)(1-s) t
19	1 0 0 1 0	1	p (1-q)(1-r) s (1-t)
20	1 0 0 1 1	1	p (1-q)(1-r) st
21	1 0 1 0 0	1	p (1-q) r (1-s)(1-t)
22	1 0 1 0 1	1	p (1-q) r (1-s) t
23	1 0 1 1 0	1	p (1-q) rs (1-t)
24	1 0 1 1 1	1	p (1-q) rst
25	1 1 0 0 0	1	pq (1-r)(1-s)(1-t)
26	1 1 0 0 1	1	pq (1-r)(1-s) t
27	1 1 0 1 0	1	pq (1-r) s (1-t)
28	1 1 0 1 1	1	pq (1-r) st
29	1 1 1 0 0	1	pqr (1-s)(1-t)
30	1 1 1 0 1	1	pqr (1-s) t
31	1 1 1 1 0	1	pqrs (1-t)
32	1 1 1 1 1	1	pqrst

Řešení: Snadno lze ukázat, že pravděpodobnost vrcholové události je

$P_{TOP} = p + (1 - p)\, q\mathrm{rt} + (1 - p)\,(1 - q)\,\mathrm{rst}$

Shrnutí pojmů

Jednoduché stromy poruch s malým počtem základních událostí lze vyhodnotit pomocí **přímé metody** založené na pivotální dekompozici. Metoda je založena na přímém vyčíslení pravděpodobností všech poruchových stavů systému pomocí **pravdivostní tabulky** a posléze jejich sečtením. Pro větší stromy je tento způsob vyhodnocení nepraktický.

Otázky 3.4.3.1.

1. Charakterizujte metodiku přímého vyhodnocení stromu poruch pomocí pravdivostní tabulky a uveďte její výhody a nevýhody

3.4.3.2. Analytické a simulační vyhodnocení

Čas ke studiu: **35 minut**

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- vyhodnotit jednoduché stromy poruch analyticky
- porozumět simulačnímu vyhodnocení stromu poruch

- **Analytické vyhodnocení**

Při analytickém vyhodnocení vycházíme většinou z nalezeného souboru minimálních řezů, který kvantifikujeme. Pravděpodobnost výskytu jednotlivého řezu získáme vynásobením pravděpodobností výskytu událostí, které obsahuje (pracujeme s těmito událostmi, jako kdyby

vstupovaly do hradla AND). Obecně lze vyčíslit pravděpodobnost výskytu vrcholové události dle aditivního teorému:

Aditivní teorém a jeho použití

Známe-li pravděpodobnosti výskytu minimálních řezů F_i (i = 1, 2, . . . , k), pak pravděpodobnost výskytu alespoň jednoho z těchto řezů lze zapsat pomocí výrazu (3.30), který bývá často nazýván aditivní teorém nebo věta o inkluzi a exkluzi.

$$F_{TOP} = P\left(\bigcup_{j=1}^{k} F_j\right) = \sum_{j=1}^{k} P(F_j) - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{k} P(F_i \cap F_j) + \ldots + (-1)^{k-1} P\left(\bigcap_{j=1}^{k} F_j\right) \qquad (3.30)$$

Tento vztah vznikl pouze zobecněním již uvedeného výrazu (3.9), pro k událostí:

$$P(Q) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \qquad (3.9)$$

Pokud převedeme součet řezů $\bigcup_{j=1}^{k} F_j$ na součet vzájemně se vylučujících součinů, lze pravděpodobnost vrcholové události vyčíslit přímo, jako součet pravděpodobností těchto součinů (pravděpodobnosti průniků jsou nulové).

Příklad 1

Kvantifikujte strom poruch z obr. 16, tj. nalezněte pravděpodobnost vrcholové události F_{TOP}

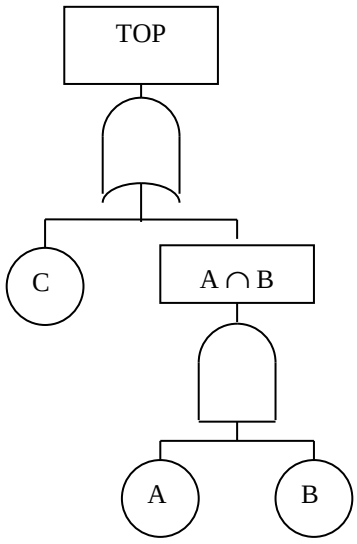
Řešení

$F_{TOP} = P(\mathrm{C}) + P(A) \,.\, P(B)$

pokud

$P(\mathrm{C} \cap (\mathrm{A} \cap \mathrm{B})) = 0$

Obr. 16: Redukovaný strom poruch



Simulační vyhodnocení

Pro přímé kvantitativní vyhodnocení stromu poruch je často využívána simulační metoda Monte Carlo. Tato metoda snadno překonává problémy vznikající s vyhodnocením opravitelných systémů s různým rozdělením pravděpodobnosti dob do poruchy (resp. dob trvání opravy) jednotlivých prvků. Lze s ní vyhodnocovat rozsáhlé stromy poruch bez výrazně se zvyšujících nároků na výpočetní čas, přitom stromy poruch mohou být libovolně závislé, úspěšně lze též modelovat systémy s periodicky prohlíženými prvky. Z tohoto hlediska lze hodnotit tuto metodu jako nejuniverzálnější z běžně používaných metod, která obzvláště nabývá na významu s ohledem na razantní vývoj počítačové a softwarové techniky.

Princip metody spočívá v tom, že se provádí velký počet simulací chování systému (na bázi generování pseudonáhodných čísel), přičemž se vychází ze stanovených zákonů rozdělení pravděpodobnosti dob poruch prvků a dob trvání oprav. Při každé takovéto simulaci se modeluje časový průběh událostí (třeba i s deterministicky předepsanými periodickými prohlídkami) a je hodnocen stav systému (porucha-bezporuchový stav). Z výsledků provedených simulací lze potom snadno stanovit statistický odhad pro pravděpodobnost bezporuchového provozu, příp. funkci okamžité pohotovosti systému, či další ukazatele, v celém průběhu zadaného času sledování systému.

Nevýhodou těchto metod je skutečnost, že pro vysoce spolehlivé systémy je k dostatečné přesnosti výsledné pravděpodobnosti vrcholové události třeba provést velký počet simulací. Tato skutečnost je problémem v případě, že cena jedné simulace je vysoká. V současnosti již však existují progresivní metody (např. metoda váženého výběru - Importace Sampling), které umožňují zvětšit počet výskytů poruch při zachování malého počtu simulací.

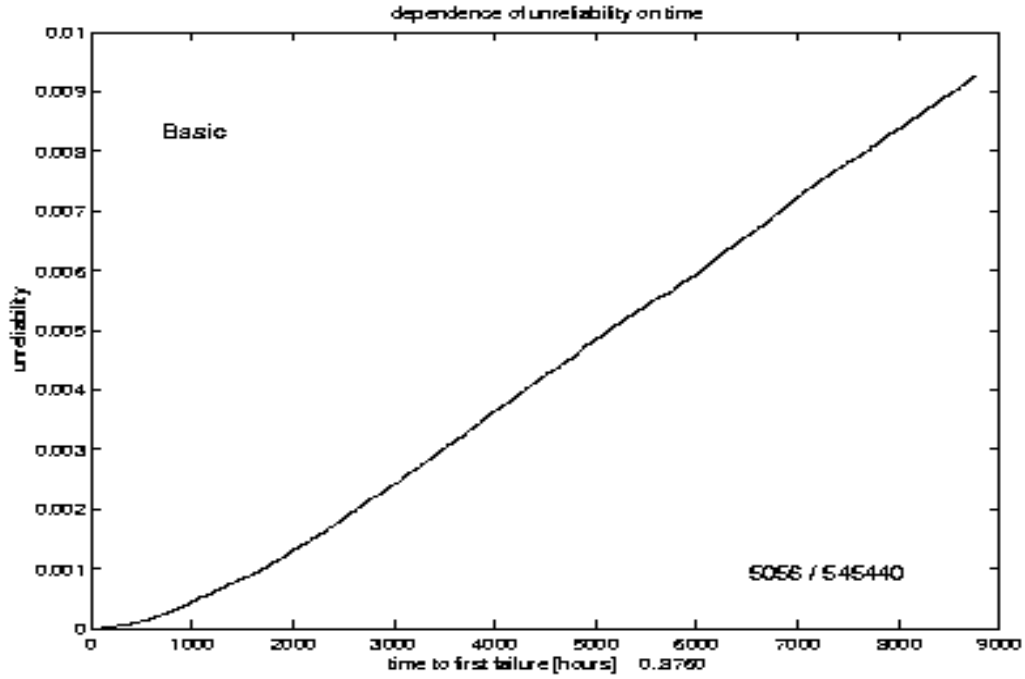
Příklad 2

Vyhodnocení časové závislosti (v průběhu jednoho roku) distribuční funkce doby do první poruchy (doplněk funkce bezporuchovosti do jedničky) opravitelného reálného systému napájecí oblasti 22 kV, znázorněného na obr. 10, vstupní data viz Tabulka 4. Výpočet provést simulační technikou.Dále je potřeba vyhodnotit pohotovost pomocí ukazatele součinitel střední pohotovosti $\overline{A}(t_1,t_2)$ *, pro pravidelné časové úseky* $t_2 - t_1 = 584$ *hod., tj. pro přibližně 24 denní intervaly.*

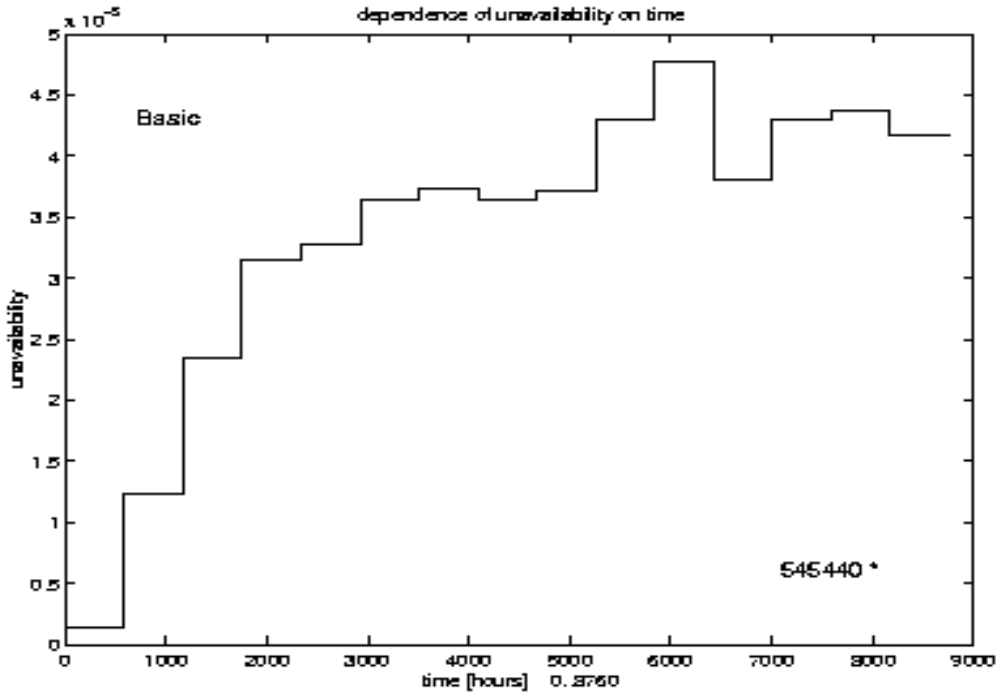
Základní událost – porucha prvku	**Pravděpodobnostní rozdělení**	**MTTF [hod.]**	**MTTR [hod.]**
Lead 110kV	EXP=exponenciální	8.76E5	100
Lead 22 kV	EXP	5.84E5	30
Transformer	EXP	2.19E5	1300
Line 1,2,3,11,12	EXP	4.17E3	3
Line 4	EXP	4.21E3	3.5
Line 5, 6	EXP	8.423E3	3.5
Line 7	EXP	6.04E4	215
Line 8, 9, 10	EXP	1.685E4	3.5

Tabulka 4: Vstupní data pro vyhodnocení stromu poruch systému napájecí oblasti 22 kV z obrázku 10.

Řešení obou úloh v grafické podobě přinášejí následující obrázky 17 a 18.
Celkový počet simulací: 545440; Počet simulací s alespoň jednou poruchou: 5056



Obr. 17: Graf závislosti distribuční funkce doby do první poruchy na čase v průběhu jednoho roku, pro systém napájecí oblasti 22 kV z obrázku 10



Obr.18: Součinitel střední nepohotovosti, tj. doplněk součinitele střední pohotovosti do jedničky:
1 - $\overline{A}(t_1, t_2)$ pro pravidelné 24 denní časové úseky

Shrnutí pojmů

Při **analytickém vyhodnocení** stromu poruch vycházíme většinou z nalezeného souboru minimálních řezů, který kvantifikujeme, tj. vyhodnotíme pravděpodobnost vrcholové události užitím **aditivního teorému**. Aditivní teorém je zobecněné pravidlo pro výpočet pravděpodobnosti sjednocení dvou událostí: $P(Q) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
Simulační metoda Monte Carlo je přibližná univerzální metoda pro vyhodnocení libovolně závislých stromů poruch s periodicky prohlíženými i opravitelnými prvky. Princip metody spočívá v tom, že se provádí velký počet simulací chování systému (na bázi generování pseudonáhodných čísel), přičemž se vychází ze stanovených zákonů rozdělení pravděpodobnosti dob poruch prvků a dob trvání oprav. Při každé takovéto simulaci se modeluje časový průběh událostí (včetně periodických prohlídek) a je hodnocen stav systému (porucha-bezporuchový stav). Z výsledků lze potom snadno stanovit statistický odhad pro pravděpodobnost bezporuchového provozu, příp. funkci okamžité pohotovosti systému v celém průběhu zadaného času sledování systému, popřípadě součinitel střední pohotovosti pro zadané intervaly.

Otázky 3.4.3.2.

1. Jak se provádí analytické vyhodnocení stromu poruch ?
2. Co je principem simulačního vyhodnocení stromu poruch ?
3. Jaká je nevýhoda simulačního přístupu ?

Korespondenční úkol 2

- ***Pro zadání systému z Korespondenční úlohy 1 sestrojte všechny minimální dráhy a všechny minimální řezy.***
- ***Nechť dále je daná můstková struktura tvořena ekvivalentními komponentami, všechny se stacionární pravděpodobností poruchy p = 0,85. Podle věty o inkluzi a exkluzi vypočtěte pravděpodobnost výskytu vrcholové události, tj. poruchy systému.***

3.4.4.Citlivostní analýza

Čas ke studiu: 15 minut

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- ocenit vliv daného minimálního řezu na poruchové chování systému
- ocenit vliv daného prvku na poruchové chování systému
- charakterizovat citlivost daného prvku dle Birnbaumovy míry

- **Co je cílem citlivostní analýzy ?**

Vliv jednotlivých řezů (resp. komponent) je možno kvantifikovat jako „část pravděpodobnosti poruchy systému“ (resp. řezu). **Vliv *i-tého* minimálního řezu na vrcholovou událost systému** definujeme jako

$$E_i(t) = \frac{P\{A_i(t)\}}{P\{A_1(t) \cup A_2(t) \cup \ldots \cup A_n(t)\}} = \frac{F_i(t)}{F(t)} \qquad (3.31)$$

$F_i(t)$,resp. $F(t)$…pravděpodobnost výskytu *i-tého* řezu A_i v čase *t*, resp. vrcholové události

Vliv *k-tého* prvku na systém v čase *t* pak definujeme jako podíl pravděpodobnosti výskytu takových minimálních řezů, které obsahují komponentu *k*, k pravděpodobnosti výskytu vrcholové události

$$e_k(t) = \frac{\sum_{i:k \in A_i} F_i(t)}{F(t)} \qquad (3.32)$$

Při předpokladu nezávislosti minimálních řezů je $E_i(t)$ pravděpodobnost vrcholové události způsobené *i-tým* minimálním řezem a e_k (t) je pravděpodobnost vrcholové události systému způsobené *k-tým* prvkem.

Při citlivostní analýze zjišťujeme dopad změn charakteristik prvků nebo změn ve stromu poruch na změny pravděpodobnosti výskytu vrcholové události. Pro provedené jednotlivé změny vyšetřujeme jejich vliv na pravděpodobnostní charakteristiky systému.

Citlivostí systému na *j-tý* prvek podle Birnbauma pak rozumíme pravděpodobnost, že systém je v takovém stavu, při němž porucha *j-tého* prvku znamená poruchu systému (neboli výskyt vrcholové události). Jinak řečeno je to pravděpodobnost, že systém je v takovém stavu, ve kterém fungování *j-tého* prvku je kriticky důležité s ohledem na vrcholovou událost (poruchu systému).

Shrnutí pojmů

Pro analýzu citlivosti můžeme zavést různé míry založené na výpočtu podmíněných pravděpodobností, z nichž nejčastější jsou: v**liv *i-tého* minimálního řezu**, **vliv *k-tého* prvku** na výskyt vrcholové události systému.

Při **citlivostní analýze** zjišťujeme dopad změn charakteristik prvků nebo změn ve stromu poruch na změny pravděpodobnosti výskytu vrcholové události. Pro provedené jednotlivé změny vyšetřujeme jejich vliv na pravděpodobnostní charakteristiky systému.

Citlivostí systému na *j-tý* prvek podle Birnbauma pak rozumíme pravděpodobnost, že systém je v takovém stavu, při němž porucha *j-tého* prvku znamená poruchu systému.

Otázky 3.4.4.

1. Co je to citlivostní analýza ?
2. Charakterizujte alespoň dvě citlivostní míry ?

3.4.5. Přehled výpočetních programů pro analýzu stromem poruch současných i minulých

- **Kteří jsou nejznámější producenti současných softwarových produktů pro analýzu spolehlivosti stromem poruch ?**

Pro vyhodnocení stromů poruch (kvalitativní, kvantitativní i citlivostní analýzu) byla sestavena celá řada výpočetních programů. Uvedeme jen pro informaci jejich krátký přehled ze současné doby. U všech producentů uvádíme adresu webovské stránky, odkud lze většinou získat demo-verzi příslušného programu:

1. Item Software, http://www.itemsoft.com/home.html
2. BQR Reliability Engineering Ltd., Izrael, http://www.bqr.com
3. Risk Spektrum, Švédsko, http://www.riskspectrum.com/
4. Relex Software, USA, http://www.relexsoftware.com
5. IsographDirect, http://www.isographdirect.com
6. LOGAN, Velká Británie, http://www.rmclogan.co.uk
7. SYDVEST, Norsko, http://www.sydvest.com
8. Reliass, Velká Británie, http://www.reliass.com
9. RAM-Tools, USA, http://www.ram-tools.com
10. Aralia- SimTree, Francie, http://www.itemuk.com/aralia.html

- **Některé známé výpočetní algoritmy pro analýzu stromem poruch z dřívějších dob**

a) Kódy pro kvalitativní analýzu
patří sem např. známé programy PREP (1970), ELRAFT (1971), MOCUS (1972), TREEL and MISCUP (1975), ALLCUTS (1975), SETS (1974), FTAP (1978),

WAMCUT - II (1981), SIFTA (1981), AFTP (1984), FATRAM, FAULTRAN, MFAULT, LOTR, DICOMICS

b) Kódy pro kvantitativní analýzu
KITT[1] (1969), KITT[2] (1970), SAMPLE (1975), MOCARS (1977), FRANTIC (1977), WAMCUT (1978), STADIC - II (1981), PROSA - 2 (1981), AFTP (1984), FTANS (1984), PAFT - F77 (1986), SALP - PC (1987), ZAVI, SYCS, SUPERPOCUS, PAS, FAUNET

c) Kódy pro přímé vyhodnocení
ARMM (1965), SAFTE (1968), GO (1968), NOTED (1971), PATREC (1974), PATREC-MC (1977), BAM (1975), WAM-BAM (1976), WAMCUT (1978), RELY, SAFTE-LR, REDIS, NAPEV, SAFEDO, SPASM, IMPORTANCE, SAMPLE, MOCARS

d) Kód dvojúčelový
Do této skupiny řadíme program PL-MOD (1977), který provádí jak kvalitativní, tak kvantitativní analýzu a nezávisí, ani na standardní generaci řezů, ani přímém vyhodnocení. Využívá modularizace.

e) Programy pro automatickou generaci stromů poruch
Řadíme sem programy CAT, AUTOETIC, FIABEX.

Většina těchto programových balíků je podrobně popsána v lit. [5].

Literatura

[1] Reactor Safety study (Appli. 2. Fault Tree), WASH-1400 USNRC, October 1975

[2] W. E. Vesely at al., Fault Tree Handbook, NUREG-0492, January 1981

[3] R.Briš & S.Rusek; Reliability Analysis of Distribution Area System under Maintenance, Proceedings of the European Safety and Reliability Conference, ESREL 2001 (Turin, September 2001), Politecnico di Torino, ISBN 88-8202-099-3, Pg.1023-1030.

[4] R.E. Barlow, F. Proschan; Mathematical Theory of Reliability; SIAM 1996, ISBN 0-89871-369-2

[5] K.B. Misra, Reliability Analysis and Prediction, Elsevier 1992, ISBN 0-444-89606-6

Klíč k řešení úloh

Úlohy ke kapitole 1:

Řešení úloh 1.3.

1. Ventil vodovodního potrubí má zadánu funkci bezporuchovosti: $R(t) = e^{-0,001.t}$. Určete střední dobu do poruchy ventilu MTTF a dále určete rozptyl doby do poruchy ventilu *DX*. Dále určete *80%-tní* život ventilu $\boldsymbol{T_{0,80}}$

Řešení:

$$\text{MTTF} = EX = \int_0^\infty t f(t)dt = \int_0^\infty R(t)dt = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-0,001.t}dt = 1000$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = 2\int_0^\infty tR(t)dt - (EX)^2 = \frac{1}{0,001^2} = 1000000$$

$$R(T_{0,80}) = 0,80 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{T_{0,80}} = 223,14$$

2. Určete *90%-tní* život $\boldsymbol{T_{0,90}}$ pro výrobek, jehož doba do poruchy se řídí Weibullovým rozdělením, s lineárně rostoucí intenzitou poruch (β = 2) a s parametrem $\lambda = 10$ $\left(F(t) = 1 - e^{-(\lambda t)^\beta}\right)$.

Řešení:

$$F(T_{0,90}) = 1 - e^{-(10.T_{0,90})^2} = 1 - 0,90 = 0,10 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{T_{0,90}} = 0,03246$$

3. Doba do vybití baterie T se řídí exponenciálním rozdělením $\left(F(t) = 1 - e^{-\frac{t}{MTTF}}\right)$.

   a) Jaká je střední doba do vybití MTTF, víme-li, že 4000 hodin přežije 1% těchto baterií?
   b) Je-li střední doba do vybití 3.150 hodin, kolik procent těchto baterií přežije 4000 hodin?

Řešení:

a) Víme, že $\boldsymbol{T_{0,01}} = 4000$ hod.

$$F(\mathrm{T}_{0,01}) = 1 - e^{-\frac{\mathrm{T}_{0,01}}{MTTF}} = 1 - 0,01$$

$$e^{-\frac{\mathrm{T}_{0,01}}{MTTF}} = 0,01 \qquad \text{Tedy MTTF} = 868,6 \text{ hodin.}$$

b) Víme, že MTTF = 3.150 hodin.

Distribuční funkce je definována jako následující pravděpodobnost $F(t) = P(T<t)$. Otázka tedy zní, jaká je pravděpodobnost $P(T > 4000)$?

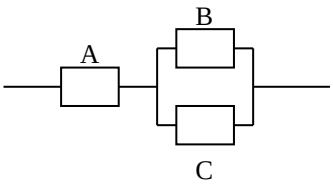
$$P(T \succ 4000) = 1 - P(T \prec 4000) = 1 - F(4000) \cong 0,281$$

Tedy přibližně 28,1 % baterií přežije 4000 hodin.

Řešení úloh 1.5.

1. Systém na obrázku je funkční pokud funguje součástka A a nejméně jedna ze součástek B a C. Nechť pro jednotlivé součástky byly naměřeny následující doby do poruchy (A, B, C) = (400, 200, 300 hodin).
   a) Nechť součástka C pracuje v režimu studená rezerva. Po kolika hodinách dojde k poruše systému ?
   b) Nechť součástka C pracuje v režimu horká rezerva. Po kolika hodinách dojde k poruše systému ?

Předpokládáme, že systém pracuje nezávisle na okolních podmínkách.



Řešení:

a) Nechť T_p značí dobu porušení systému.
T_p = min {A, B+C } = 400 hod.

b) T_p = min {A, max (B,C)} = 300 hod.

Úlohy ke kapitole 2:

Řešení úloh 2.3.

1. Nechť turbína elektrárny podléhá náhodným šokům, které splňují předpoklady Poissonových pokusů. Nechť při každém pátém šoku dojde k závažné poruše turbíny. Během dlouhodobého sledování byly zaznamenány následující doby do poruch turbíny (v hodinách): (1020, 1100, 960, 1500, 1450, 1320, 1255, 1165, 1385, 1410). Určete pravděpodobnostní rozdělení pro dobu do poruchy turbíny. Určete dále

- odhad neznámého parametru zjištěného rozdělení metodou momentů
- hazardní funkci turbíny
- ve které fázi svého životního cyklu se turbína nachází

Řešení:

Doba do poruchy se řídí Gamma rozdělením s hustotou $f(t) = \frac{\lambda^5}{\Gamma(5)}.t^4.e^{-\lambda t}$, s neznámým parametrem λ, který odhadneme metodou momentů:

Rovnice $\mu_1' = M_1'$ přechází na rovnici

$$\frac{5}{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{10} t_i}{10} \quad \text{neboli} \quad \tilde{\lambda} = \frac{50}{\sum_{i=1}^{10} t_i} \cong 0{,}004$$

což je odhad neznámého parametru λ získaný metodou momentů.

Hazardní funkce je: $$h(t) = \frac{0{,}004}{24\sum_{j=0}^{4} \frac{1}{(4-j)!(0{,}004t)^j}}$$

Turbína se nachází ve třetí fázi svého životního cyklu, tj. v období poruch v důsledku stárnutí a opotřebení.

Řešení úloh 2.4.

1. Doba do poruchy dieselgenerátoru se řídí exponenciálním rozdělením pravděpodobnosti. Během dlouhodobého sledování byly zaznamenány následující poruchové doby v hodinách: (150, 190, 165, 177, 203, 178, 162, 181, 194, 168). Odhadněte parametr λ metodou maximální věrohodnosti. Charakterizujte hazardní funkci dieselgenerátoru, odhadněte funkci bezporuchovosti v čase t=100 hodin. Určete 90% -tní život dieselgenerátoru.

Řešení:

Věrohodnostní funkce: $L(t_1,\ldots,t_n;\lambda) = (\lambda.e^{-\lambda t_1}).(\lambda.e^{-\lambda t_2})\ldots(\lambda.e^{-\lambda t_n}) = \lambda^n \exp\left(-\lambda\sum_{i=1}^{n} t_i\right)$

dává odhad parametru λ následovně: $\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} t_i}$, což po dosazení zadaných hodnot

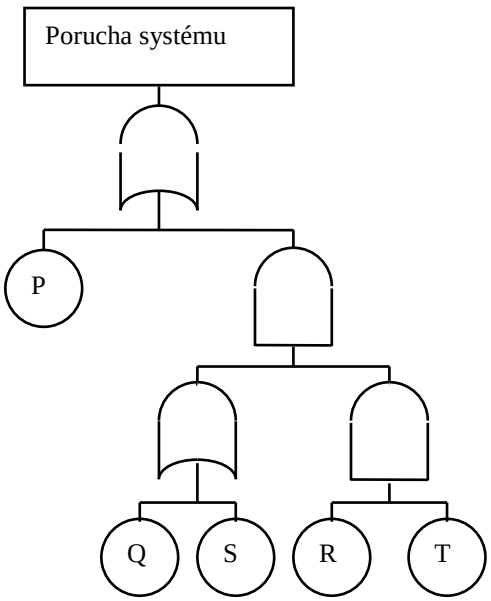
je $\hat{\lambda} = \frac{10}{1768} \cong 0{,}005656$.

Hazardní funkce je konstantní h(t) = 0,005656, dieselgenerátor je tedy v období stabilního života.
Funkce bezporuchovosti v čase 100 hodin je:
$R(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t} = e^{-0{,}5656} \cong 0{,}568$

Úlohy ke kapitole 3:

Řešení úloh 3.3.2

1. Nalezte všechny minimální řezy pro strom poruch z obrázku 9.
2. Vypočítejte pravděpodobnost výstupní události z výběrového hradla „2 ze 3“ pro případ, kdy všechny vstupující události mají pravděpodobnost p = 0,3.



Obrázek: Strom poruch z obrázku 9

Řešení

1. Minimálním řezem rozumíme nejmenší možnou kombinaci primárních prvků stromu, které, nastanou-li současně, vyvolají vrcholovou událost. Počet prvků v řezu pak určuje řád tohoto řezu. Řezem 1.řádu je výskyt události P, řezy 2.řádu nejsou, řezy 3.řádu jsou: (Q,R,T), (S,R,T).

2. $T(n, j)$ je pravděpodobnost vzniku j nebo více událostí ze skupiny událostí A_n, A_{n-1}, . . . , A_1. V případě $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p$, tj. stejných pravděpodobností výskytu všech vstupních událostí, lze snadno dokázat, že platí

$$T(n, j) = \sum_{r=j}^{n} \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}$$

V našem případě dosadíme a dostáváme $T(3,2) = \sum_{r=2}^{3} \binom{3}{r} (0,3)^r (0,7)^{3-r} = 0,216$