8. NÁHODNÉ PROCESY I

Čas ke studiu: 90 minut

Cíl: Seznámíte se se základními pojmy z teorie náhodných procesů, Markovovými procesy, procesy růstů a zániků. Naučíte se popisovat vícestavové systémy pomocí pravděpodobností přechodů a pravděpodobností stavů.

VÝKLAD

8.1. Náhodné procesy

Náhodným (stochastickým) procesem nazveme zobrazení, které každé hodnotě $t \in T$ přiřadí náhodnou veličinu $X(t)$. Proměnná *t* má ve většině případů význam času.

Realizací náhodného procesu rozumíme konkrétní pozorování náhodného procesu, tj. již nenáhodnou funkci, a značíme ji $x(t)$.

Dle povahy množiny *T* rozlišujeme:

- **náhodné procesy se spojitým časem** (náhodné funkce) – *T* je reálný interval,
- **náhodné procesy s diskrétním časem** (náhodné posloupnosti) – *T* je reálná diskrétní množina.

Hodnota $X(t)$ vyjadřuje stav pozorovaného objektu v čase *t*. Dle povahy náhodné veličiny $X(t)$ rozlišujeme:

- **náhodné procesy se spojitými stavy** - $X(t)$ je spojitá,
- **náhodné procesy s diskrétními stavy** - $X(t)$ je diskrétní.

Náhodný proces $\{X(t) : t \geq 0\}$ se spojitým časem a s diskrétními stavy $0,1,2,\ldots$ obvykle nazýváme **čítací proces**, protože zaznamenává počet nějakých událostí v čase. Hodnota $X(t)$ pak představuje počet daných událostí v intervalu $\langle 0,t \rangle$ a vzdálenosti jednotlivých okamžiků událostí od počátku *t* = 0 jsou náhodné veličiny.

8.2. Poissonův proces

Přibližme si nyní **Poissonův proces** jako příklad čítacího procesu, který se velmi často vyskytuje v aplikacích (například v teorii hromadné obsluhy).

Nechť $\{X(t): t \geq 0\}$ je čítací proces. Nechť navíc platí:

$$X(0) = 0,$$

délky intervalů mezi výskyty sledované události jsou nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & pro\ x > 0, \\ 0 & pro\ x \leq 0, \end{cases}$$

kde $\lambda > 0$ je parametr (tzv. intenzita homogenního Poissonova procesu).

Pak tento proces nazveme **homogenním Poissonovým procesem**, přičemž $X(t)$ má Poissonovo rozdělení s parametrem λt, tedy

$$P(X(t) = i) = \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t},\ i = 0,1,\dots\ .$$

Střední počet výskytů události v intervalu $\langle 0, t \rangle$ je roven λt. Parametr λ tedy udává střední počet výskytů sledované události za jednotku času.

Protože intervaly mezi jednotlivými výskyty událostí jsou nezávislé, znalost okamžiků prvních n výskytů neovlivňuje předpověď doby čekání na další výskyt události. Také skutečnost, že sledovaná událost už po určitou dobu nenastala, nemění pravděpodobnost jejího výskytu v dalším intervalu.

Příkladem Poissonova procesu by mohl být proces $\{X(t): t \geq 0\}$, kde $X(t)$ udává počet poruch nějakého zařízení v časovém intervalu $\langle 0, t \rangle$.

Řešený příklad

Zdroj záření vysílá v průměru 1 impuls za 2 sekundy, přičemž impulsy tvoří Poissonův proces. Jaká je pravděpodobnost, že v každém z pěti intervalů o délce 5 sekund

(0s, 5s), (5s, 10s),…, (20s, 25s)

budou registrovány nejméně 4 impulsy?

Protože $EX(t)=\lambda t$ *, spočteme z rovnice* $1=\lambda\cdot 2$ *parametr* $\lambda=0{,}5$*. Pro t = 5 pak získáme* $EX(5)=0{,}5\cdot 5=2{,}5$*. Pro pravděpodobnost, že během jednoho intervalu dojde k registraci alespoň 4 impulsů, platí*

$$P(X(5)\geq 4)=\sum_{k=4}^{\infty}\frac{2{,}5^k}{k!}e^{-2{,}5}$$

a hledaná pravděpodobnost pro všech pět intervalů je tak rovna hodnotě

$$\left[\sum_{k=4}^{\infty}\frac{2{,}5^k}{k!}e^{-2{,}5}\right]^5.$$

8.3. Markovův proces

Nebude-li uvedeno jinak, $\{X(t):t\geq 0\}$ bude označovat náhodný proces se spojitým časem a diskrétní množinou stavů $I=\{0,1,2,\ldots\}$ (stavy jsou pro jednoduchost označeny celými nezápornými čísly).

Proces $\{X(t):t\geq 0\}$ nazveme **Markovovým procesem**, splňuje-li tzv. markovskou vlastnost:

pro libovolná $0\leq t_1<t_2<\ldots<t_n<t\leq\tau$ a $i_1,\ldots,i_n,i,j\in I$ platí:

$$P\left(X(\tau)=j\,|\,X(t)=i,X(t_n)=i_n,\ldots,X(t_1)=i_1\right)=P\left(X(\tau)=j\,|\,X(t)=i\right).$$

Pravděpodobnost na pravé straně uvedené rovnosti nazýváme **pravděpodobnost přechodu**.

Je-li tedy t přítomný okamžik, potom chování Markova procesu v libovolném budoucím okamžiku $\tau\geq t$ závisí pouze na přítomném stavu a nikoli na stavech předchozích.

Markovův proces se nazývá **homogenní**, pokud pravděpodobnost přechodu z předchozího výkladu nezávisí na hodnotách t a τ, ale pouze na jejich rozdílu. Používáme pak značení

$$p_{ij}(\tau-t)\overset{ozn}{=}P\left(X(\tau)=j\,|\,X(t)=i\right).$$

Tedy v homogenním procesu závisejí pravděpodobnosti přechodu pouze na rozdílu časových okamžiků a jsou navíc invariantní vůči posunutí v čase. Pro $\tau=t$ pak dostaneme

$$p_{ij}(0)=\begin{cases}0 & pro\ i\neq j,\\ 1 & pro\ i=j.\end{cases}$$

Pro popis rozdělení Markovova procesu v čase t budeme v dalším textu užívat

$$p_i(t) \overset{ozn}{=} P(X(t) = i),\ i = 0,1,2,\dots\ .$$

Při pravděpodobnostech $p_i(0)$, i = 0,1,2,…, se mluví o **počátečním rozdělení** Markovova procesu. Při velkém t je obvykle Markovův proces stabilizovaný a řídí se **stacionárním rozdělením** se stacionárními pravděpodobnostmi

$$\pi_i = \lim_{t\to\infty} p_i(t),\ i = 0,1,2,\dots\ .$$

Jednoduchým příkladem homogenního Markovova procesu by mohl být homogenní Poissonův proces z předchozího příkladu. Počáteční rozdělení by mělo tvar $p_0(0) = 1$, $p_n(0) = 0$ pro n = 1,2,… a pro pravděpodobnosti přechodu by platilo $p_{ij}(h) = \frac{\lambda h^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda h}$ pro $i, j \in N \cup \{0\}, j \geq i$.

V homogenním Markovově procesu platí

- $p_{ij}(t_1 + t_2) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}(t_1) p_{kj}(t_2),\ t_1, t_2 \geq 0,\ i, j = 0,1,2,...,$
- $p_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j(0) p_{ji}(t),\ t \geq 0,\ i = 0,1,2,....$

První rovnice se nazývá **Chapmanova-Kolmogorovova rovnice**.

Prospektivní Kolmogorovovy diferenciální rovnice – nechť pro homogenní Markovův proces platí předpoklady:

1. existují limity $q_{ii} = \lim_{h\to 0_+} \frac{p_{ii}(h) - 1}{h}$, i = 0,1,2,…,
2. existují limity $q_{ij} = \lim_{h\to 0_+} \frac{p_{ij}(h)}{h},\ i \neq j,\ i, j = 0,1,2,...,$
3. pro pevné j je konvergence vůči i v bodě 2 stejnoměrná.

Pak pro pravděpodobnosti přechodu platí

$$p_{ij}'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}(t) q_{kj}\ ,\ t > 0,\ i, j = 0,1,2,...$$

a pro pravděpodobnosti rozdělení procesu platí

$$p_i'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) q_{ki}\ ,\ t > 0,\ i = 0,1,2,....$$

V dalším textu budeme používat značení $o(h)$, které se užívá pro libovolnou funkci argumentu *h*, pro kterou platí

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=0.$$

Hodnoty q_{ij}, $i,j=0,1,2,...$, z poslední definice nazýváme **intenzity přechodu ze stavu *i* do stavu *j*** a dále platí

$$p_{ii}(h)=1+q_{ii}h+o(h),\ \ p_{ij}(h)=q_{ij}h+o(h),\ i\neq j\,.$$

8.4. Příklady

Poissonův proces

Už víme, že v tomto případě $X(t)$ udává počet výskytů sledované veličiny v intervalu $\langle 0,t\rangle$. V intervalu $(t,t+h)$, kde *h* je kladné číslo blízké nule, nastane nezávisle na počtu výskytů do času *t* sledovaná událost

- právě jednou s pravděpodobností $\lambda h+o(h)$,
- více než jednou s pravděpodobností $o(h)$,
- nenastane ani jednou s pravděpodobností $1-\lambda h+o(h)$.

Tedy pravděpodobnosti přechodu se rovnají

$$p_{ii}(h)=1-\lambda h+o(h),$$
$$p_{i,i+1}(h)=\lambda h+o(h)$$

a

$$p_{ij}(h)=o(h),\ \ j>i+1\,.$$

Vidíme tedy, že pravděpodobnost jednoho výskytu události v krátkém intervalu je úměrná intenzitě procesu a délce intervalu. Dalším zjištěním je skutečnost, že pravděpodobnost dvou nebo více výskytů událostí klesá k nule s klesající délkou intervalu, a to rychleji než je délka intervalu.

Dle výsledků z minulé kapitoly pak spočteme

$$q_{ii}=\lim_{h\to 0_+}\frac{p_{ii}(h)-1}{h}=\lim_{h\to 0_+}\frac{1-\lambda h+o(h)-1}{h}=\lim_{h\to 0_+}\frac{-\lambda h+o(h)}{h}=-\lambda\,,$$
$$q_{i,i+1}=\lim_{h\to 0_+}\frac{p_{i,i+1}(h)}{h}=\lim_{h\to 0_+}\frac{\lambda h+o(h)}{h}=\lambda\,,$$

a

$$q_{ij} = \lim_{h\to 0_+} \frac{p_{ij}(h)}{h} = \lim_{h\to 0_+} \frac{o(h)}{h} = 0\,,\ \ j > i+1\,.$$

Protože logicky nemůže nastat situace, že by byl počet výskytů události v intervalu $\langle 0,t\rangle$ větší než počet výskytů v intervalu $\langle 0,t+h\rangle$, položíme $p_{ij}(h)=0$ pro $j<i$. Odtud pak máme $q_{ij}=0$ pro $j<i$.

Nyní si již můžeme napsat Kolmogorovovy diferenciální rovnice. Protože pro pevné *i* je q_{ki} nenulové pouze pro *k* = *i* – 1 a *k* = *i*, platí:

$$p_0^{'}(t) = -\lambda p_0(t)\,,$$
$$p_i^{'}(t) = \lambda p_{i-1}(t) - \lambda p_i(t)\,,\ i = 1,2,3,\dots\,.$$

Protože také požadujeme $X(0)=0$, předepíšeme si počáteční podmínky:

$$p_0(0)=1\,,\ \ p_i(0)=0\,,\ i = 1,2,3,\dots\,.$$

Řešení diferenciálních rovnic:

- $$p_0^{'}(t)+\lambda p_0(t)=0\,,\ \ p_0(0)=1$$

  Obecné řešení rovnice má tvar $p_0(t)=ce^{-\lambda t}$, $c\in R$ a z počáteční podmínky plyne, že $c=1$. Řešením úlohy je tedy funkce $p_0(t)=e^{-\lambda t}$.

- $$p_1^{'}(t)+\lambda p_1(t)-\lambda e^{-\lambda t}\,,\ \ p_1(0)-0$$

  Řešením příslušné homogenní rovnice je funkce $p_1(t)-ce^{-\lambda t}$, $c\in R$. Obecné řešení nalezneme pomocí variace konstanty. Dosazením do rovnice tedy dostaneme

  $$c^{'}(t)e^{-\lambda t} - \lambda c(t)e^{-\lambda t} + \lambda c(t)e^{-\lambda t} = \lambda e^{-\lambda t}\,.$$

  Odtud plyne $c^{'}(t)=\lambda$ a proto $c(t)=\lambda t+\tilde{c}$, $\tilde{c}\in R$. Z počáteční podmínky plyne, že $\tilde{c}=0$. Řešením úlohy je tak funkce $p_1(t)=\lambda te^{-\lambda t}$.

- $$p_2^{'}(t)+\lambda p_2(t)=\lambda^2 te^{-\lambda t}\,,\ \ p_2(0)=0$$

  Řešením příslušné homogenní rovnice je opět $p_2(t)=ce^{-\lambda t}$, $c\in R$. Obecné řešení nalezneme pomocí variace konstanty. Po dosazení do rovnice obdržíme $c^{'}(t)=\lambda^2 t$, a proto $c(t)=\dfrac{\lambda^2 t^2}{2}+\tilde{c}$, $\tilde{c}\in R$. Z počáteční podmínky znovu plyne, že $\tilde{c}=0$. Řešením úlohy je funkce $p_2(t)=\dfrac{\lambda^2 t^2}{2}e^{-\lambda t}$.

- …

Výše uvedeným postupem získáme řešení ve tvaru

$$p_i(t)=\frac{(\lambda t)^i}{i!}e^{-\lambda t}\text{ , } i = 0,1,2,\dots \text{ .}$$

Vidíme tedy, že veličina $X(t)$ má Poissonovo rozdělení s parametrem λt. Jak jsme již zmínili, λ má zde význam středního počtu výskytů události za jednotku času. Číslo λ budeme nazývat **intenzitou Poissonova procesu**.

Díky vzájemné nezávislosti $X(t_1)$ a $X(t_2)$ při t_1 a t_2 velmi od sebe vzdálených můžeme psát

$$\lim_{h\to\infty} p_{ij}(h)=\pi_j\text{ .}$$

Nyní vyjdeme z Chapmanovy-Kolmogorovovy rovnice:

$$p_{ij}(h_1+h_2)=p_{ij}(h_1)p_{jj}(h_2)+\sum_{k\neq j}p_{ik}(h_1)p_{kj}(h_2)$$

a nechme $h_1\to\infty$:

$$\pi_j=\pi_j p_{jj}(h_2)+\sum_{k\neq j}\pi_k p_{kj}(h_2)\text{.}$$

Tedy

$$\pi_j\left(1-p_{jj}(h_2)\right)=\sum_{k\neq j}\pi_k p_{kj}(h_2)\text{,}$$

po vydělení h_2 a přechodem k $h_2\to 0$ dostaneme

$$-\pi_j q_{jj}=\sum_{k\neq j}\pi_k q_{kj}\text{ , } j = 0,1,2,\dots \text{ .}$$

Toto je soustava lineárních rovnic, kterou musí splňovat pravděpodobnosti π_j , pokud takové existují. Pravděpodobnosti π_j , j = 0,1,…, se nazývají **stacionární pravděpodobnosti**.

Poissonovým procesem modelujeme velmi často počet poruch na daném zařízení během určitého časového intervalu.

Proces růstu a zániku

Proces růstu a zániku je homogenní Markovův proces $\{X(t): t \geq 0\}$ se stavy $0,1,2,\ldots$. Veličina $X(t)$ udává četnost souboru (např. mikroorganismů, osob,…) v čase t, přičemž během intervalu $(t, t+h)$, kde h je kladné číslo blízké nule, se soubor, který v čase t obsahuje i objektů, může

- zvětšit právě o jeden objekt s pravděpodobností $\lambda_i h + o(h)$, $i = 0,1,\ldots$,
- zmenšit právě o jeden objekt s pravděpodobností $\mu_i h + o(h)$, $i = 0,1,\ldots$,
- zmenšit nebo zvětšit o více než jeden objekt s pravděpodobností $o(h)$,
- nezmenšit ani nezvětšit s pravděpodobností $1 - \lambda_i h - \mu_i h + o(h)$.

Intenzity přechodu jsou pak rovny

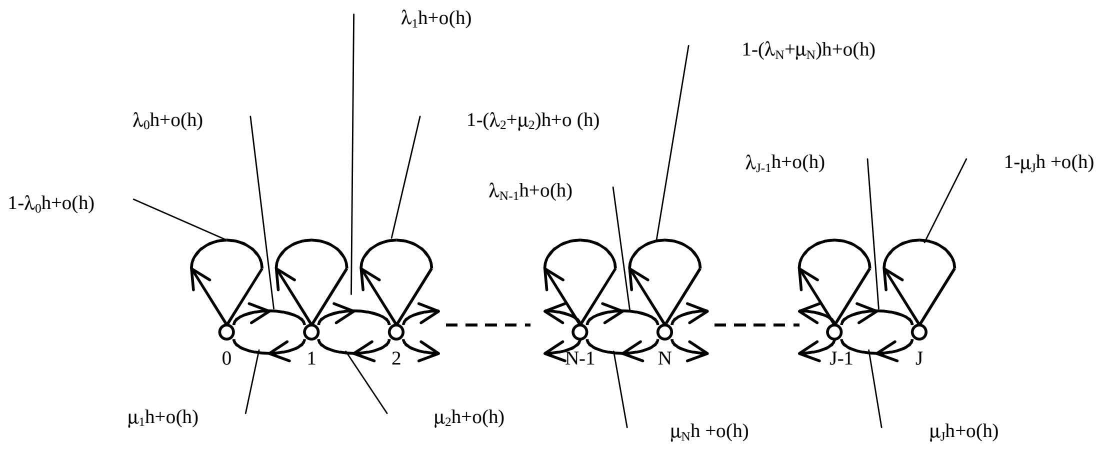
$$q_{ii} = \lim_{h \to 0_+} \frac{p_{ii}(h) - 1}{h} = \lim_{h \to 0_+} \frac{1 - \lambda_i h - \mu_i h + o(h) - 1}{h} = \lim_{h \to 0_+} \frac{-\lambda_i h - \mu_i h + o(h)}{h} = -\lambda_i - \mu_i ,$$

$$q_{i,i+1} = \lim_{h \to 0_+} \frac{p_{i,i+1}(h)}{h} = \lim_{h \to 0_+} \frac{\lambda_i h + o(h)}{h} = \lambda_i ,$$

$$q_{i,i-1} = \lim_{h \to 0_+} \frac{p_{i,i-1}(h)}{h} = \lim_{h \to 0_+} \frac{\mu_i h + o(h)}{h} = \mu_i ,$$

a

$$q_{ij} = \lim_{h \to 0_+} \frac{p_{ij}(h)}{h} = \lim_{h \to 0_+} \frac{o(h)}{h} = 0, \quad j > i+1 \text{ nebo } j < i-1.$$



Stacionární pravděpodobnosti π_j, $j = 0,1,\ldots$, pokud existují, jsou dány soustavou rovnic

$$\pi_0\lambda_0 = \pi_1\mu_1 ,$$
$$\pi_j(\lambda_j + \mu_j) = \pi_{j-1}\lambda_{j-1} + \pi_{j+1}\mu_{j+1} ,\ j = 1,2,\ldots .$$

Tedy

$$\pi_j\mu_j - \pi_{j-1}\lambda_{j-1} = \pi_{j+1}\mu_{j+1} - \pi_j\lambda_j ,\ j = 1,2,\ldots$$

a dále pak

$$0 = \pi_1\mu_1 - \pi_0\lambda_0 = \pi_2\mu_2 - \pi_1\lambda_1 = \ldots \ .$$

Odtud

$$\pi_j\mu_j = \pi_{j-1}\lambda_{j-1},\ \ j \geq 1 ,$$

a proto platí rekurentní vztah

$$\pi_j = \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j}\pi_{j-1} .$$

Opakovaným užitím této rovnosti dostaneme

$$\pi_j = \pi_0 \prod_{k=1}^{j} \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} .$$

Protože musí platit vztah $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$, obdržíme rovnost

$$\pi_0 + \pi_0 \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \pi_0 \prod_{k=1}^{2} \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} + \ldots = 1 ,$$

odtud

$$\pi_0 \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{j} \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} \right) = 1$$

a tedy konečně

$$\pi_0 = \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{j} \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} \right]^{-1} .$$

Může se stát, že bude řada ve výše uvedené rovnosti divergovat, tedy $\pi_0 = 0$ a $\pi_j = 0$ $\forall j \in N$. Toto nastane například, pokud $\lambda_{j-1} > \mu_j$ $\forall j \in N$. Za takovýchto podmínek nebude existovat ustálený stav a soubor neustále poroste.

Neopomeňme ještě připomenout, že Poissonův proces je speciálním případem procesu růstu a zániku ($\mu_j = 0$ pro všechna *j*).

$\sum$ Shrnutí kapitoly 8.

Náhodným (stochastickým) procesem nazveme zobrazení, které každé hodnotě $t \in T$ přiřadí náhodnou veličinu $X(t)$. Proměnná *t* má ve většině případů význam času.

Realizací náhodného procesu rozumíme konkrétní pozorování náhodného procesu, tj. již nenáhodnou funkci, a značíme ji $x(t)$.

Dle povahy množiny *T* rozlišujeme:

- **náhodné procesy se spojitým časem** (náhodné funkce),
- **náhodné procesy s diskrétním časem** (náhodné posloupnosti)

Hodnota $X(t)$ vyjadřuje stav pozorovaného objektu v čase *t*. Dle povahy náhodné veličiny $X(t)$ rozlišujeme:

- **náhodné procesy se spojitými stavy** - $X(t)$ je spojitá,
- **náhodné procesy s diskrétními stavy** - $X(t)$ je diskrétní.

Náhodný proces $\{X(t): t \geq 0\}$ se spojitým časem a s diskrétními stavy $0,1,2,\ldots$ obvykle nazýváme **čítací proces**, protože zaznamenává počet nějakých událostí v čase.

Nechť $\{X(t): t \geq 0\}$ je čítací proces. Nechť navíc platí:

$X(0) = 0$,

délky intervalů mezi výskyty sledované události jsou nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & pro\ x > 0, \\ 0 & pro\ x \leq 0, \end{cases}$$

kde $\lambda > 0$ je parametr (tzv. intenzita homogenního Poissonova procesu).

Pak tento proces nazveme **homogenním Poissonovým procesem**, přičemž $X(t)$ má Poissonovo rozdělení s parametrem λt.

Proces $\{X(t): t \geq 0\}$ nazveme **Markovovým procesem**, splňuje-li tzv. markovskou vlastnost:

pro libovolná $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t \leq \tau$ a $i_1, \ldots, i_n, i, j \in I$ platí:

$$P\left(X(\tau) = j \middle| X(t) = i, X(t_n) = i_n, \ldots, X(t_1) = i_1\right) = P\left(X(\tau) = j \middle| X(t) = i\right).$$

V homogenním Markovově procesu platí

- $p_{ij}(t_1 + t_2) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}(t_1) p_{kj}(t_2)$, $t_1, t_2 \geq 0$, $i, j = 0,1,2,\ldots$,
- $p_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j(0) p_{ji}(t)$, $t \geq 0$, $i = 0,1,2,\ldots$.

První rovnice se nazývá **Chapmanova-Kolmogorovova rovnice**.

Proces růstu a zániku je homogenní Markovův proces $\{X(t): t \geq 0\}$ se stavy $0,1,2,\ldots$.

? Otázky

1. Vysvětlete pojem náhodný proces a popište typy náhodných procesů.
2. Definujte Poissonův proces.
3. Definujte Markovův proces.
4. Co jsou to procesy růstu a zániku?
5. Odvoďte stacionární pravděpodobnosti (pravděpodobnosti stavů).