NÁHODNÉ VÝBĚRY A ÚVOD DO TEORIE ODHADU

NÁHODNÉ VÝBĚRY

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- porozumět pojmu náhodný výběr
- používat výběrové charakteristiky, či statistiky
- výběrová rozdělení

Náhodný výběr

Při zkoumání reálných dějů se často setkáváme s případy, kdy pozorované veličiny (např. doba do poruchy stroje, počet PC jednotek připojených k síti) mají náhodný charakter, spočívající v tom, že jejich pozorované hodnoty více, či méně kolísají při opakovaných pozorováních, i když podmínky průběhu těchto dějů i pozorování zůstávají v podstatě neměnné. Takové veličiny interpretujeme jako náhodné veličiny s určitými typy rozdělení pravděpodobnosti a hovoříme o **statistických modelech**. Abychom mohli učinit potřebné závěry o zkoumaných reálných dějích, musíme znát odpovídající typ rozdělení pravděpodobnosti, který buď vyplývá z jejich teoretického (např. fyzikálního) popisu anebo jej odhadujeme ze zjištěných hodnot sledované veličiny. Při realizaci uvedeného postupu (určení konkrétního rozdělení pravděpodobnosti, jeho parametrů nebo jejich vlastností) hovoříme o **statistické indukci**.
Statistický model vychází z výsledků teorie pravděpodobnosti a je založen na následujících základních pojmech.

- **Populace a výběrový soubor**

Chceme-li vědět, jak chutná víno v sudu, nemusíme vypít celý sud. Stačí jenom malý doušek a víme na čem jsme.
Celkové množství, o kterém chceme vypovídat, nazýváme **populací** nebo **základním souborem**. Jeho podmnožinou, kterou zkoumáme a na jejímž základě děláme závěry, nazýváme **výběrový soubor**.
Předpokládáme, že populace má (v daném znaku) rozdělení, které neznáme. Naměříme hodnoty tohoto znaku na výběrovém souboru. Na základě těchto měření chceme dělat závěry o celé populaci. Z matematického pohledu se na každou naměřenou hodnotu (tj. na každý prvek výběrového souboru) můžeme dívat jako na náhodnou veličinu, jejíž rozdělení je dáno pravděpodobnostními vlastnostmi celé populace. Závěry můžeme vztáhnout na populaci, pokud byly prvky výběrového souboru vybrány náhodně. Z matematického pohledu to znamená, že náhodné veličiny jsou navzájem nezávislé.

- **Náhodný výběr**

Náhodný výběr ($\underline{X}$): Speciální náhodný vektor, jehož složky jsou nezávislé náhodné veličiny se stejným rozdělením pravděpodobnosti.

Vysvětlení pojmu: Opakujeme-li n-krát nezávisle pokus (pozorování, měření), jehož výsledek je náhodná veličina X s distribuční funkcí $F(x)$, pozorujeme vlastně náhodný vektor $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)'$, $X_i \sim F(x)$, jehož složky jsou vzájemně nezávislé náhodné veličiny s touž distribuční funkcí $F(x)$. Tento vektor nazýváme **náhodný výběr** z rozdělení $F(x)$ nebo **náhodný výběr ze základního souboru** (nebo **populace**) s rozdělením $F(x)$.Číslo n se nazývá **rozsah** náhodného výběru.
Podle rozsahu obvykle rozdělujeme náhodné výběry na **malé** pro $n \le 30$ a **velké** pro $n > 30$.
Náhodný výběr má zřejmě simultánní distribuční funkci $F(\underline{x})$:

$$F(\underline{x}) = F(x_1,\dots, x_n) = P(X_1<x_1, X_2<x_2, \dots) = F(x_1) \,.\, F(x_2) \dots = \prod_{i=1}^{n} F(x_i)$$

a podobně i simultánní hustotu pravděpodobnosti:

$$f(\underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$$

Číselný vektor $(x_1,\dots, x_n)$‘, který získáme při realizaci náhodného výběru $(X_1, \dots, X_n)$ ‘, nazýváme **statistický soubor** nebo vzorek o rozsahu n. Množina všech těchto vektorů se nazývá **výběrový prostor**. Je to zřejmě podmnožina množiny R^n.
Řadu informací o posuzované náhodné veličině X poskytují její číselné charakteristiky, např. $E(X)$, $D(X)$, směrodatná odchylka atd. Při statistické indukci jsme při určování jejich hodnot odkázáni na realizace náhodných výběrů, tedy na statistické soubory. Užíváme přitom následující pojmy:
Funkci náhodného výběru $\underline{X}=(X_1, \dots, X_n)$‘, k jejímuž určení není třeba znát konkrétní hodnoty parametrů příslušného rozdělení, nazýváme **statistika** nebo **výběrová charakteristika** a značíme ji $T(\underline{X})=T(X_1, \dots, X_n)$. Je to obecně náhodná veličina. Její hodnotu $t=T(x_1,\dots, x_n)$, kterou nabývá na statistickém souboru $(x_1,\dots, x_n)$ ‘, nazýváme **pozorovaná hodnota statistiky** ***T*** nebo empirická charakteristika.
Používáme zejména následující statistiky:

1. $T_1(\underline{X}) = \overline{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i / n$ ..... výběrový průměr pro odhad střední hodnoty

   $$E(T_1(\underline{X})) = E\overline{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} EX_i = \frac{EX_i}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} 1 = EX_i$$

2. $T_2(\underline{X}) = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$ ..... výběrový rozptyl (=S^2)

   Není těžké ukázat, že $ES^2 = DX_i$

3. $T_3(\underline{X}) = \sqrt{S^2} = S$..... výběrová směrodatná odchylka

Výběrová rozdělení – rozdělení základních výběrových charakteristik

Předpokládejme, že daný náhodný výběr pochází z normálního rozdělení:
$\underline{X}=(X_1, \dots, X_n)$‘ , $X_i \to N(\mu, \sigma^2)$

1. $\overline{X_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \to N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ … plyne jednak z centrální limitní věty pro velká n, ale dá

se také ukázat na základě odvození rozdělení součtu náhodných veličin

2. $Z_n = \dfrac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma} \cdot \sqrt{n} \rightarrow N(0,1)$ … plyne z transformace předešlého rozdělení

3. $\dfrac{S_n^2}{\sigma^2} \cdot (n-1) \rightarrow \chi^2(n-1)$ … rozdělení Chí-kvadrát (χ^2) s (n – 1) stupni volnosti

kde $S_n^2 = \dfrac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$

4. $\dfrac{\overline{X}_n - \mu}{S_n} \cdot \sqrt{n} \rightarrow t(n-1)$ … rozdělení Studentovo s (n – 1) stupni volnosti

Rozdělení relativní četnosti (výběrový podíl) při n > 30

Nechť $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, X_i ... alternativní rozdělení, čili binomické Bi(1, p)

Potom S_n ... Bi(n, p); ES_n $= np$; DS_n $= np(1-p)$

Máme-li n Bernoulliových pokusů, při kterých nastane k výskytů nějaké události, označíme výběrový průměr (výběrový podíl, relativní četnost) $\hat{p}$

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{k}{n}$$

Potom platí (centrální limitní věta):

$$\hat{p} \rightarrow N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

Tedy $E(\hat{p}) = p$; $D(\hat{p}) = \dfrac{p(1-p)}{n}$

A také platí $\dfrac{\hat{p} - p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}} \rightarrow N(0,1)$ … plyne z transformace předešlého rozdělení

ÚVOD DO TEORIE ODHADU

Bodové a intervalové odhady

Při popisu náhodné veličiny X, jejíž hodnoty při realizaci náhodného výběru pozorujeme, často vystačíme se získáním informací o parametrech jejího rozdělení pravděpodobnosti. Skutečné hodnoty těchto parametrů obvykle neznáme a odhadujeme je ze získaného statistického souboru. Jako příklad lze uvést parametry μ a σ^2 normálního rozdělení, které navíc v tomto případě představují číselné charakteristiky, přičemž odhady jejich hodnot umožňují učinit praktické závěry. Úloha nalezení odhadu neznámého parametru spadá do oblasti statistické indukce.

Z metodického hlediska používáme dva typy odhadů parametrů. Jedná se o tzv. **bodový odhad**, kdy parametr rozdělení aproximujeme číslem a tzv. **intervalový odhad**, kdy tento parametr aproximujeme intervalem, v němž s velkou pravděpodobností daný parametr leží. Přitom uvažovaným parametrem může být i vektor, případně funkce daných parametrů. Při konstrukci bodových a intervalových odhadů vycházíme z následujících pojmů.
Nechť máme náhodný výběr $(X_1, \ldots, X_n)'$ z rozdělení s distribuční funkcí $F(x,\theta)$ s neznámým parametrem θ. Množinu všech uvažovaných hodnot parametru θ nazýváme **parametrický prostor**. Statistiku $\hat{\theta} = T(\underline{X}) = T(X_1, \ldots, X_n)$, která bude sloužit pro účely odhadu neznámého parametru θ, budeme nazývat **odhadem** parametru θ, její pozorovanou hodnotu pak **bodovým odhadem** θ. Abychom mohli rozhodnout, která statistika je „dobrým“ odhadem θ, musíme prostudovat vlastnosti výběrových rozdělení různých statistik.
Jednou z žádoucích vlastností odhadu je jeho nestrannost. Řekneme, že odhad je **nestranný**, jestliže střední hodnota jeho výběrového rozdělení je rovna hledanému parametru.

Vlastnosti „dobrého“ bodového odhadu

Dobrý“ (věrohodný) odhad musí splňovat určité vlastnosti. Mezi základní vlastnosti věrohodných odhadů patří:

- nestrannost (nevychýlenost, nezkreslenost)
- vydatnost (eficience)
- konzistence

Nestranný odhad

Řekneme, že odhad je **nestranný**, jestliže se jeho střední hodnota rovná hledanému parametru ($E\hat{\Theta} = \Theta$).

Znamená to, že tento odhad systematicky nenadhodnocuje ani nepodhodnocuje odhadovaný parametr.

Slabší formou nestrannosti je **asymptotická nestrannost**. Říkáme, že odhad je asymptoticky nestranný pokud: $\lim_{n\to\infty} E\hat{\Theta} = \Theta$

Příklady nestranných odhadů:

- $\hat{\theta} = T_1(\underline{X}) = \overline{X}$ je nestranným odhadem střední hodnoty (limitní věty)
- Výběrová relativní četnost p je nestranným odhadem relativní četnosti (podílu) π
- V případě náhodného výběru z normálního rozdělení je výběrový rozptyl s^2 nestranným odhadem rozptylu σ^2

Je třeba říci, že existuje mnoho dobrých odhadů, které nejsou nestranné.

Vydatný (eficientní, nejlepší) odhad

Nestrannost sama o sobě nezaručuje, že je odhad „dobrý“. Rádi bychom dosáhli také toho, aby bodové odhady byly rozloženy co nejtěsněji kolem odhadovaného parametru. Pokud budeme mít dva nestranné odhady $\hat{\Theta}_1$ a $\hat{\Theta}_2$, vybereme si ten, který bude mít menší rozptyl. Tato vlastnost se nazývá **vydatnost** (eficience).

Jestliže pro dva nestranné odhady $\hat{\Theta}_1$ a $\hat{\Theta}_2$ platí $D\hat{\Theta}_1 < D\hat{\Theta}_2$, potom je **relativní eficience** odhadu $\hat{\Theta}_1$ vzhledem k odhadu $\hat{\Theta}_2$ dána podílem $D\hat{\Theta}_1 / D\hat{\Theta}_2$, což je číslo mezi 0 a 1.

Nestranný odhad, jehož rozptyl je nejmenší mezi všemi nestrannými odhady příslušného parametru, se nazývá **nejlepší nestranný (eficientní) odhad**.

Příklady nejlepších nestranných odhadů:

- $\overline{X}$ je nejlepším nestranným odhadem střední hodnoty (limitní věty)
- Výběrová relativní četnost p je nejlepším nestranným odhadem rel. četnosti (podílu) π
- V případě náhodného výběru z normálního rozdělení je výběrový rozptyl s^2 nejlepším nestranným odhadem rozptylu σ^2

❑ Konzistentní odhad

Další žádoucí vlastností dobrého odhadu je konzistence. Odhad je konzistentní, pokud se s rostoucím rozsahem výběru (*n*) zpřesňuje, k čemuž dochází pokud:

a) $\hat{\Theta}$ je asymptoticky nestranný, tj. $E\hat{\Theta} \to \Theta$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} D\hat{\Theta} = 0$

Vlastnost b) říká, že se s rostoucím *n* (rozsahem výběru) rozdělení $\hat{\Theta}$ zužuje kolem hledaného parametru.

Příklady konzistentních odhadů:

- $\overline{X}$ je konzistentním odhadem střední hodnoty, protože $D\overline{X} = \dfrac{\sigma^2}{n} \to 0$ pro $n \to \infty$
- Výběrová relativní četnost p je konzistentním odhadem rel. četnosti (podílu) π, protože $Dp = \dfrac{\pi(1-\pi)}{n} \to 0 \; pro \; n \to \infty$

Σ Shrnutí kapitoly

„Dobrý“ (věrohodný) odhad musí splňovat určité vlastnosti. Mezi základní vlastnosti věrohodných odhadů patří:

- **nestrannost** (nevychýlenost, nezkreslenost)
- **vydatnost** (eficience)
- **konzistence**

Metoda momentů

Cíl: Po prostudování tohoto odstavce budete umět:

- odhadovat parametry rozdělení pravděpodobnosti metodou momentů

VÝKLAD

Pro odhad hodnot parametrů pravděpodobnostních rozdělení se nejčastěji používá **metoda maximální věrohodnosti** (maximum likelihood), nebo **metoda momentů**.

V čem spočívá princip metody momentů

Metoda momentů je principielně jednoduchá metoda pro konstrukci bodových odhadů neznámých parametrů známých rozdělení, která spočívá v tom, že porovnáváme výběrové momenty získaných dat s odpovídajícími teoretickými momenty předpokládaného rozdělení s hustotou $f(t)$. Metoda vede na řešení soustavy takového počtu rovnic, kolik je neznámých parametrů.

Máme-li k dispozici zaznamenaná data (náhodný výběr): $(\underline{X}) = (t_1, \ldots, t_n)^T$; pak:

***k*-tý výběrový obecný moment** je dán vztahem: $M_k' = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_1^k$

Podobně ***k*-tý výběrový centrální moment**: $M_k = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(t_i - \bar{t}\right)^k$, kde $\bar{t}$ je průměr.

Odpovídající teoretické momenty jsou dány rovnicemi:

***k*-tý obecný moment:** $\mu_k' = \int_0^{\infty} t^k f(t)\,dt$

***k*-tý výběrový centrální moment:** $\mu_k = \int_0^{\infty} \left(t - \mu_1'\right)^k f(t)\,dt$

Metoda momentů:

Jestliže pravděpodobnostní rozdělení s hustotou $f(t)$ má r neznámých parametrů a jestliže soustava rovnic

$$M_k' = \mu_k', \quad k = 1, \ldots, r$$

resp.

$$M_k = \mu_k, \quad k = 1, \ldots, r$$

má jediné řešení, pak dává metoda momentů jednoznačně určené odhady r parametrů.

Řešený příklad

Je dán náhodný výběr ($\underline{X}$)=(t_1, . . . , t_n)^T. Předpokládáme, že jde o výběr z exponenciálního rozdělení E(λ). Metodou momentů odhadněte neznámý parametr λ.

Označme si hledaný odhad $\tilde{\lambda}$. $\tilde{\lambda}$ *získáme jako řešení rovnice:* $\mu_1' = M_1'$

Hustota exponenciálního rozdělení je $f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}$ *, proto:*

$$\mu_1' = \int_0^\infty t\lambda . e^{-\lambda t} dt = \lambda \cdot \int_0^\infty t.e^{-\lambda t} dt = \left| \begin{matrix} u(t) = t & v'(t) = e^{-\lambda t} \\ u'(t) = 1 & v(t) = -\frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda t} \end{matrix} \right| = \lambda \cdot \left\{ \left[-\frac{1}{\lambda} \cdot t \cdot e^{-\lambda t} \right]_0^\infty + \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty e \right.$$

$$= \lambda \cdot \left\{ \left[-\frac{1}{\lambda} \cdot t \cdot e^{-\lambda t} \right]_0^\infty + \left[-\frac{1}{\lambda^2} \cdot e^{-\lambda t} \right]_0^\infty \right\} = \lambda \cdot \left\{ \left[-\frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda t} \left(t + \frac{1}{\lambda} \right) \right]_0^\infty \right\} =$$

$$= \lambda \cdot \left\{ \lim_{t \to \infty} \left[-\frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda t} \left(t + \frac{1}{\lambda} \right) \right] + \frac{1}{\lambda^2} \right\} = \lambda \cdot \left\{ -\frac{1}{\lambda} \cdot \lim_{t \to \infty} \frac{t + \frac{1}{\lambda}}{e^{\lambda t}} + \frac{1}{\lambda^2} \right\} = -\lim_{t \to \infty} \frac{1}{\lambda \cdot e^{\lambda t}} + \frac{1}{\lambda} =$$

$$M_1' = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{n} .$$

Rovnice $\mu_1' = M_1'$ *přechází na rovnici:* $\frac{1}{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{n}$ *neboli* $\underline{\underline{\tilde{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} t_i}}}$,

což je odhad neznámého parametru λ *získaný metodou momentů.*

Shrnutí kapitoly

Metoda momentů je principielně jednoduchá metoda pro konstrukci odhadů neznámých parametrů známých rozdělení, která spočívá v tom, že porovnáváme výběrové momenty získaných dat s odpovídajícími teoretickými momenty předpokládaného rozdělení s hustotou *f*(*t*). Metoda vede na řešení soustavy takového počtu rovnic, kolik je neznámých parametrů.

Úlohy k řešení

1. Nechť turbína elektrárny podléhá náhodným šokům, které splňují předpoklady Poissonových pokusů. Nechť při každém pátém šoku dojde k závažné poruše turbíny.

Během dlouhodobého sledování byly zaznamenány následující doby do poruch turbíny (v hodinách): (1020, 1100, 960, 1500, 1450, 1320, 1255, 1165, 1385, 1410).

a) Určete pravděpodobnostní rozdělení pro dobu do poruchy turbíny.
b) Určete odhad neznámého parametru zjištěného rozdělení metodou momentů.
c) Určete hazardní funkci turbíny.
d) Určete, ve které fázi svého životního cyklu se turbína nachází.

Metoda maximální věrohodnosti

Cíl: Po prostudování tohoto odstavce budete umět:

- odhadovat parametry rozdělení pravděpodobnosti metodou maximální věrohodnosti

VÝKLAD

Na čem je založena metoda maximální věrohodnosti

Odhady získané touto metodou se všeobecně vyznačují dobrými statistickými vlastnostmi.

Nechť $(\underline{X}) = (t_1, \ldots, t_n)^T$ je náhodný výběr z rozdělení s hustotou $f(\underline{t};\Theta)$, kde Θ je neznámý parametr. Naším problémem bude nalézt funkci (zvanou funkce věrohodnosti) danou

$$L(t_1,\ldots,t_n;\Theta) = f(t_1;\Theta).f(t_2;\Theta)\ldots f(t_n;\Theta) = \prod_{i=1}^{n} f(t_i;\Theta)$$

a z ní pak získat $\hat{\Theta}$ tak, aby $\hat{\Theta} = \hat{\Theta}(t_1,\ldots,t_n)$ bylo co nejlepším odhadem pro Θ. Pravá strana rovnice je sdružená hustota pravděpodobnosti *n*-nezávislých proměnných ($t_1, \ldots, t_n$) se stejným rozdělením.

Jelikož L je jednoduše funkcí neznámého parametru Θ, který je odhadován, metoda maximální věrohodnosti je založena na získání takové hodnoty Θ, která maximalizuje L.

Při praktických výpočtech se ukázalo jako výhodnější maximalizovat spíše funkci ln L namísto L, což je možné proto, že obě tyto operace jsou ekvivalentní a dávají stejné výsledky.

Podmínkou optimality je tedy rovnice:

$$\frac{\partial \ln L(t_1,\ldots,t_n;\Theta)}{\partial \Theta} = 0$$

a hodnota parametru získaná z této podmínky se nazývá **maximálně věrohodný odhad parametru θ.**

Řešený příklad

Je dán náhodný výběr ($t_1, \ldots, t_n$)^T. Předpokládáme, že jde o výběr z exponenciálního rozdělení E(λ). Metodou maximální věrohodnosti odhadněte neznámý parametr λ.

Označme si hledaný odhad $\hat{\lambda}$.

Hustota exponenciálního rozdělení je $f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}$, *proto funkce věrohodnosti pak bude dána výrazem:*

$$L(t_1,\ldots,t_n;\lambda) = (\lambda.e^{-\lambda t_1})(\lambda.e^{-\lambda t_2})\ldots(\lambda.e^{-\lambda t_n}) = \lambda^n \cdot e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} t_i}$$

Logaritmováním získáme

$$\ln L(t_1,\dots,t_n;\lambda) = \ln\left(\lambda^n \cdot e^{-\lambda.\sum_{i=1}^{n} t_i}\right) = \ln\left(\lambda^n\right) + \ln\left(e^{-\lambda.\sum_{i=1}^{n} t_i}\right) = n.\ln\lambda - \lambda.\sum_{i=1}^{n} t_i$$

Zbývá vyřešit podmínku optimality:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln L(t_1,\dots,t_n;\lambda)}{\partial\lambda} &= 0 \\
\frac{\partial\left(n.\ln\lambda - \lambda.\sum_{i=1}^{n} t_i\right)}{\partial\lambda} &= 0 \\
n\cdot\frac{1}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} t_i &= 0 \\
\hat{\lambda} &= \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} t_i}
\end{aligned}$$

Získali jsme maximálně věrohodný odhad parametru $\hat{\lambda}$.

Řešený příklad

Uvažujme dvouparametrické Weibullovo rozdělení s hustotou $f(t) = \frac{\beta}{\Theta} t^{\beta-1} e^{-\frac{t^\beta}{\Theta}}$. Metodou maximální věrohodnosti odhadněte parametry β a θ.

Funkce věrohodnosti L je dána

$$L(t_1,\dots,t_n;\beta,\Theta) = \frac{\beta}{\Theta} t_1^{\beta-1} e^{-\frac{t_1^\beta}{\Theta}} \dots \frac{\beta}{\Theta} t_n^{\beta-1} e^{-\frac{t_n^\beta}{\Theta}} = \left(\frac{\beta}{\Theta}\right)^n \prod_{i=1}^{n} t_i^{\beta-1} e^{-\frac{1}{\Theta}\sum_{j=1}^{n} t_j^\beta}$$

Logaritmováním získáme:

$$\ln L = \ln\left(\frac{\beta}{\Theta}\right)^n + \ln\prod_{i=1}^{n} t_i^{\beta-1} + \ln e^{-\frac{1}{\Theta}\sum_{j=1}^{n} t_j^\beta} = n\ln\beta - n\ln\Theta + \sum_{i=1}^{n} \ln t_i^{(\beta-1)} - \frac{1}{\Theta}\sum_{i=1}^{n} t_i^\beta =$$

$$= n\ln\beta - n\ln\Theta + (\beta-1)\sum_{i=1}^{n} \ln t_i - \frac{1}{\Theta}\sum_{i=1}^{n} t_i^\beta$$

Optimalizaci však provádíme s ohledem na oba neznámé parametry α,β, takže podmínka optimality přechází v tomto případě na dvě následující rovnice:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial\beta} = \frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^{n} \ln t_i - \frac{1}{\Theta}\sum_{i=1}^{n} t_i^\beta \ln t_i = 0$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \Theta} = -\frac{n}{\Theta} + \frac{1}{\Theta^2}\sum_{i=1}^{n} t_i^{\beta} = 0$$

Z druhé rovnice můžeme snadno získat

$$\Theta = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i^{\beta}}{n}$$

zatímco z první rovnice dostaneme

$$\Theta = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i^{\beta} \ln t_j}{\frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^{n} \ln t_i}$$

Porovnáním pravých stran posledních dvou rovnic získáme jednu rovnici pro jednu neznámou β. Řešení je nutno provést numericky volbou vhodného iteračního procesu.

Shrnutí kapitoly

Metoda maximální věrohodnosti je principielně jednoduchá metoda pro konstrukci odhadů neznámých parametrů známých rozdělení pravděpodobnosti, která je založena na maximalizaci **věrohodnostní funkce,** což je sdružená hustota pravděpodobnosti daného náhodného výběru, brána ovšem jako funkce neznámých parametrů**.**

Úlohy k řešení

1. Doba do poruchy dieselgenerátoru se řídí exponenciálním rozdělením pravděpodobnosti. Během dlouhodobého sledování byly zaznamenány následující poruchové doby v hodinách: (150, 190, 165, 177, 203, 178, 162, 181, 194, 168).
   a) Odhadněte parametr λ metodou maximální věrohodnosti,
   b) Charakterizujte hazardní funkci dieselgenerátoru,
   c) Odhadněte funkci bezporuchovosti v čase t=100 hodin,
   d) Určete 90% -ní život dieselgenerátoru (zaručenou dobu bezporuchového provozu, tj. dobu do poruchy, která bude překročena s 90% pravděpodobností).

2. Nechť turbína elektrárny podléhá náhodným šokům, které splňují předpoklady Poissonových pokusů. Nechť při každém pátém šoku dojde k závažné poruše turbíny. Během dlouhodobého sledování byly zaznamenány následující doby do poruch turbíny (v hodinách): (1020, 1100, 960, 1500, 1450, 1320, 1255, 1165, 1385, 1410).
   a) Určete pravděpodobnostní rozdělení pro dobu do poruchy turbíny,
   b) Určete odhad neznámého parametru zjištěného rozdělení metodou momentů,
   c) Určete hazardní funkci turbíny,

d) Určete, ve které fázi svého životního cyklu se turbína nachází.

Klíč k řešení

1a) $L(t_1,...,t_n;\lambda)=\left(\lambda.e^{-\lambda t_1}\right)\left(\lambda.e^{-\lambda t_2}\right)...\left(\lambda.e^{-\lambda t_n}\right)=\lambda^n e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n} t_i}$ dává odhad parametru λ následovně:

$\hat{\lambda}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} t_i}$, což po dosazení zadaných hodnot je $\hat{\lambda}=\frac{10}{1768}\cong 0{,}005656$.

b) Hazardní funkce je konstantní, λ(t) = 0,005656, dieselgenerátor je tedy v období stabilního života.

c) Funkce bezporuchovosti v čase 100 hodin je: $R(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t}$;
$R(100) = e^{-0{,}5656} \cong 0{,}568$

d) Hledanou dobu určíme řešením rovnice: $P(X > \mathrm{T}_{0{,}9}) = 0{,}9$, tj. $1 - F(T_{0{,}9}) = 0{,}9$;
$T_{0{,}9} = 18{,}6\, hodin$

2a) Doba do poruchy se řídí Gamma rozdělením s hustotou f(t) = $\frac{\lambda^5}{\Gamma(5)}.t^4.e^{-\lambda t}$, s neznámým parametrem λ

b) λ odhadneme metodou momentů:

Rovnice $\mu_1' = M_1'$ přechází na rovnici

$\frac{5}{\lambda}=\frac{\sum_{i=1}^{10} t_i}{10}$ neboli $\tilde{\lambda}=\frac{50}{\sum_{i=1}^{10} t_i}\cong 0{,}004$, což je odhad neznámého parametru λ získaný metodou momentů.

c) Hazardní funkce je:

$$\lambda(t) = \frac{0{,}004}{24\sum_{i=0}^{4}\frac{1}{(4-i)!\,(0{,}004t)^i}}$$

d) Turbína se nachází ve třetí fázi svého životního cyklu, tj. v období poruch v důsledku stárnutí a opotřebení.

$Y_i = 0 \quad pro\ X_i \geq 1$

$Y_i = 1 \quad pro\ X_i = 0 \quad i = 1,2,\ldots,n$