4. ZÁKLADY TEORIE SPOLEHLIVOSTI

4.1. Teorie spolehlivosti

Čas ke studiu: 10 minut

Cíl: Po prostudování tohoto odstavce budete umět:

- popsat charakteristické rysy teorie spolehlivosti
- technické a matematické aspekty teorie spolehlivosti

VÝKLAD

Co zkoumá teorie spolehlivosti ?

Teorie spolehlivosti se zabývá technickými a matematickými otázkami spolehlivosti. Technická problematika souvisí s konstrukcí, použitými materiály, technologií a organizací výroby, diagnostikou a strategií údržby.

Matematická teorie spolehlivosti se soustředí na prognózu, odhad a optimalizaci bezporuchového provozu výrobků. (Výrobkem rozumíme prvek, systém nebo jeho část.)

Hlavními nástroji jsou zde teorie pravděpodobnosti a matematická statistika. Typicky matematickou záležitostí je např. stanovení charakteristik spolehlivosti jako jsou zaručená doba života, střední doba bezporuchového provozu, střední doba mezi poruchami, průměrné náklady na údržbu a opravy aj.

Matematická statistika a teorie pravděpodobnosti nám umožňují popis jevů, jejichž podstatu dokonale neznáme, ale jejichž zákonitosti vzniku jsou pro stanovení spolehlivosti velmi důležité. Jsou to např. fyzikální zákonitosti a mechanizmy poruch, procesy stárnutí, koroze, opotřebení a únavy materiálu, vzájemná souvislost různých poruch, vliv prostředí apod. Protože analýza těchto jevů z hlediska čistě fyzikálního nebo chemického je příliš složitá, nezbývá než zjišťovat poruchovost větších celků nebo většího počtu výrobků v delším čase statisticky. To však většinou vyžaduje sběr, přenos a zpracování informací přímo z provozu, jako např. soustavné a pečlivé vedení záznamů o všech poruchách a jejich příčinách, době provozu, době oprav, podmínkách činnosti a jiných vlivech u zařízení, která jsou často rozptýlena na různých místech a pracují v různých podmínkách.

Spolehlivost jakožto obecnou vlastnost výrobku splňovat po určitou dobu a za určitých podmínek danou funkci, je nutno posuzovat též podle ekonomického hlediska. Aplikací výsledků teorie spolehlivosti lze též použít nejen při návrhu zařízení a jeho způsobu provozu na zadané úrovni spolehlivosti, která vyplývá z výše zmíněných ekonomických kritérií, ale též při vzájemném porovnávání různých alternativ řešení, dále pro kvantitativní předpovědi chování složitých zařízení v dalším provozu a k sestavení optimální strategie údržby těchto zařízení.

Příklad 4.1.1

Moderní výrobky (systémy) sestavené z mnoha prvků jsou vysoce spolehlivé, např. počítač. Jestliže chceme tuto spolehlivost dále zvyšovat, pak nelze jít pouze cestou zvyšování spolehlivosti prvků. Jestliže systém např. sestává ze 100 000 prvků, které pracují nezávisle na sobě a každý z nich se s pravděpodobností 0.99999 po sledovanou dobu neporouchá, potom pravděpodobnost, že se systém po sledovanou dobu neporouchá (tj. bezporuchovost), je $(0.99999)^{100000} = 0.368$. Je proto nezbytné hledat jiné způsoby pro zvyšování bezporuchovosti – např. zálohování důležitých částí, aplikace údržby atd.

∑ Shrnutí kapitoly 4.1.

Spolehlivost lze charakterizovat jako obecnou vlastnost výrobku splňovat po určitou dobu a za určitých podmínek danou funkci.

Teorie spolehlivosti je vědní disciplína zodpovídající technické a matematické otázky spolehlivosti.

Hlavní nástroje pro zodpovězení matematických otázek teorie spolehlivosti jsou **teorie pravděpodobnosti a matematická statistika**.

Organizace výrobního procesu či technologie výroby (např. použití vhodných materiálů) souvisí s **technickými otázkami spolehlivosti**.

? Otázky 4.1.

1. Co je to spolehlivost?
2. Čím se zabývá teorie spolehlivosti?
3. Jaké jsou nástroje teorie spolehlivosti?

4.2. Základní pojmy

Čas ke studiu: 20 minut

Cíl: Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- definovat základní pojmy teorie spolehlivosti z hlediska technického
- definovat: bezporuchovost, životnost, opravitelnost, pohotovost, …
- charakterizovat poruchy a klasifikovat je

VÝKLAD

Nejprve vyložíme základní pojmy teorie spolehlivosti z hlediska technického, což nám poslouží jako motivace pro zavedení příslušných pojmů matematických. Pojem spolehlivosti je obvykle spojován s pojmem výrobku (neboli objektu). Výrobek od okamžiku, kdy je vyroben, má svou historii: doprava, skladování, příprava na využití, vlastní využití, údržba, oprava a vyřazení. V některých fázích historie výrobku budeme požadovat, aby byl **spolehlivý.**

❑ Spolehlivost jako obecná vlastnost

Spolehlivostí rozumíme obecnou vlastnost spočívající ve schopnosti výrobku plnit po stanovenou dobu požadované funkce při zachování provozních parametrů daných technickými podmínkami.
Je charakterizována dalšími dílčími vlastnostmi, jako jsou: bezporuchovost, životnost, opravitelnost, udržovatelnost, skladovatelnost, bezpečnost a další.

❑ Jaké jsou dílčí vlastnosti spolehlivosti ?

Technickými podmínkami přitom rozumíme souhrn specifikací technických a provozních vlastností výrobku spolu se způsoby jeho provozu, údržby a oprav. Jinými slovy je spolehlivost způsobilost výrobku uchovat svou kvalitu v daných podmínkách využívání.

Bezporuchovost je způsobilost výrobku plnit bez poruchy požadované funkce po stanovenou dobu a za stanovených podmínek.

Životnost je způsobilost výrobku plnit požadované funkce do mezního stavu stanoveného technickými podmínkami. Na konci období životnosti se u výrobků projeví takové rysy spojené s opotřebením a stárnutím, že jejich odstranění je neekonomické, nebo nemožné. Někdy může jít i o tzv. „morální opotřebení“.

Opotřebení znamená ve spolehlivosti postupné změny znaků výrobků, které jsou vyvolány zatížením způsobeným pouze provozními podmínkami.

Stárnutí znamená změny vzniklé zatížením mimo provoz.

Opravitelnost je vlastnost výrobku spočívající v možnosti odhalení poruchy, zjištění její příčiny a odstranění opravou.

Udržovatelnost je vlastnost výrobku spočívající ve způsobilosti k předcházení poruch předepsanou údržbou.

Skladovatelnost je schopnost výrobku zachovávat nepřetržitě bezvadný (a tedy provozuschopný) stav po dobu skladování a přepravy při dodržení předepsaných podmínek.

Bezpečnost je vlastnost výrobku neohrožovat lidské zdraví nebo životní prostředí při plnění předepsané funkce po stanovenou dobu a za stanovených podmínek.

Z provozního hlediska je důležitá **pohotovost** výrobku, tj. schopnost výrobku v určitém okamžiku vyhovovat technickým podmínkám. Pohotovost (neboli též provozuschopnost) je komplexní vlastnost objektu zahrnující bezporuchovost a opravitelnost objektu v podmínkách provozu.

Co je porucha a jak poruchy klasifikujeme ?

Důležitým a zdánlivě jednoduchým pojmem teorie spolehlivosti je pojem porucha. **Porucha** je částečná nebo úplná ztráta, případně změna vlastností výrobku, která podstatným způsobem snižuje schopnost nebo způsobuje nemožnost výrobku plnit požadovanou funkci. Pojem porucha je v mnoha případech relativní. V praxi je proto zapotřebí pojem porucha přesně vymezit.

Zhoršení schopnosti provozu, které ještě nezpůsobí poruchu, se označuje jako **závada**.

Klasifikace poruch

1. **Podle podmínek vzniku** se poruchy dělí na **poruchy z vnějších a vnitřních příčin**.

Porucha z vnějších příčin je porucha způsobená nedodržením stanovených provozních podmínek a předpisů pro zatěžování, obsluhu a údržbu.

Porucha z vnitřních příčin je porucha způsobená vlastní nedokonalostí výrobku při zachování stanovených provozních podmínek a předpisů. Mezi poruchy z vnitřních příčin patří především ***časné poruchy*** projevující se v počátečním období provozu. Jejich výskyt s rostoucím časem klesá. Příčinou časných poruch jsou nedostatky při návrhu a výrobě. Dále sem patří ***poruchy dožitím*** vznikající následkem opotřebení nebo stárnutí (viz dále).

2. **Podle časového průběhu** se **poruchy** dělí na **náhlé a postupné**.

Náhlá porucha je porucha projevující se prudkou změnou jednoho nebo více parametrů výrobku.

Postupná porucha je porucha projevující se jako postupná změna parametrů výrobku, např. v důsledku stárnutí nebo opotřebení.

Zatímco poruchy náhlé se obvykle předvídat nedají, je předvídání postupných poruch častou úlohou teorie spolehlivosti.

3. V některých situacích je účelné dále klasifikovat **poruchy na částečné a úplné**.

Částečná porucha znamená odchýlení jednoho nebo více parametrů od úrovně stanovené technickými podmínkami, které však úplně nebrání výrobku plnit požadovanou funkci.

Úplná porucha je porucha, která zcela zabraňuje výrobku plnit požadovanou funkci.

Částečná či postupná porucha se nazývá též **degradační porucha**, náhlá a úplná porucha se nazývá **havarijní porucha**.

4. **Podle souvislosti s jinými poruchami** se **poruchy** dělí na **nezávislé a závislé**.

Závislá porucha vzniká následkem poruchy jiného prvku, nezávislá nikoli.

5. **Podle doby trvání** se rozlišují **poruchy trvalé a poruchy dočasné**.

Trvalou poruchu je možno odstranit pouze opravou nebo náhradou porouchaného prvku.

Dočasné poruchy mohou samovolně vymizet nebo trvají jen po dobu působení vnějšího vlivu.

Dělení poruch do tříd je často relativní. Náhlé poruše obvykle předcházejí skryté změny vlastností prvku, které by bylo možno dosti podrobným zkoumáním zjistit a poruchu označit jako postupnou. Dokonalá znalost všech fyzikálně chemických dějů probíhajících v materiálech prvku, přesná znalost postupu výroby a podmínek provozu by dovolila předpovědět dobu vzniku poruchy prvku. V takovém případě by se porucha označila jako nenáhodná. Omezená znalost těchto činitelů je důvodem pro označení poruchy prvku jako náhodné.

- **Které dílčí vlastnosti spolehlivosti budeme kvantitativně určovat ?**

Všechny výše uvedené dílčí spolehlivostní vlastnosti lze charakterizovat též kvantitativně pomocí vhodně zvolených spolehlivostních ukazatelů nebo charakteristik. V dalším se budeme zabývat pouze kvantitativním vyjádřením bezporuchovosti a pohotovosti.

Bezporuchovost určujeme především u neobnovovaných (tj. neopravitelných) objektů a nebo tam, kde se zajímáme o činnost do první poruchy (Obecně se ovšem tento pojem zavádí i pro opravitelné objekty).

Pohotovost (provozuschopnost) určujeme u obnovovaných objektů. Obnovované objekty se po vzniku poruchy opraví a provoz pokračuje. Oprava se považuje za účelnou tehdy, když průměrná cena opravy a náhradních součástí je malá vůči pořizovací ceně zařízení. Provoz obnovovaného systému nebo obnovovaného prvku lze popsat jako posloupnost stavů bezporuchového provozu a oprav, přičemž okamžiky poruch a oprav jsou náhodné.

Σ Shrnutí kapitoly 4.2.

Spolehlivost je obecná vlastnost projevující se prostřednictvím dílčích vlastností: bezporuchovost, životnost, opravitelnost, udržovatelnost, skladovatelnost, bezpečnost.

Pohotovost je komplexní vlastnost výrobku zahrnující bezporuchovost a opravitelnost v podmínkách provozu.

Porucha je částečná nebo úplná ztráta, případně změna vlastností výrobku, která podstatným způsobem snižuje schopnost nebo způsobuje nemožnost výrobku plnit požadovanou funkci. Poruchy dělíme podle různých hledisek, nejčastěji podle podmínek vzniku na poruchy z vnějších a vnitřních příčin.

? Otázky 4.2.

1. V čem se liší pojmy „bezporuchovost“ a „pohotovost“ ?
2. U jakých objektů má smysl tyto pojmy kvantitativně určovat ?
3. Co je porucha a jak lze poruchy klasifikovat ?

4.3. Doba do poruchy

Čas ke studiu: 40 minut

Cíl: Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- popsat dobu do poruchy pomocí distribuční funkce a funkce bezporuchovosti
- charakterizovat dobu do poruchy pomocí hazardní funkce (intenzity poruch)
- vyjádřit vztahy mezi jednotlivými popisnými funkcemi doby do poruchy
- charakterizovat dobu do poruchy pomocí základních číselných charakteristik

VÝKLAD

Co je doba do poruchy a jak ji matematicky popsat ?

Neporouchaný výrobek (prvek, systém, část systému) začne pracovat v okamžiku $t = 0$ za určitých podmínek, o nichž budeme zatím předpokládat, že se v průběhu času nemění. V okamžiku $t = X$ se výrobek porouchá. Doba X po kterou výrobek pracoval bez poruchy, se nazývá **doba do poruchy**.

V dalším budeme předpokládat, že doba do poruchy X je nezáporná náhodná veličina s **distribuční funkcí**

$$F(t) = P(X<t)$$

Distribuční funkce doby do poruchy vyjadřuje pravděpodobnost toho, že na intervalu $(0,t)$ dojde k poruše. S distribuční funkcí doba do poruchy je úzce spojena funkce:

$$R(t) = P(X \geq t) \quad ,$$

která se nazývá **funkcí bezporuchovosti** (pravděpodobnost bezporuchového provozu), resp. **funkcí spolehlivosti** (zkráceně spolehlivost). Tato funkce vyjadřuje pravděpodobnost toho, že na intervalu $(0,t)$ nedojde k poruše. $R(t)$ je nerostoucí funkce času, $F(t)$ je neklesající funkce času. Obě veličiny jsou nezáporná bezrozměrná čísla nejvýše rovna jedné. Zpravidla předpokládáme, že $R(0) = 1$, a $R(\infty) = 0$.

Ve spolehlivosti se poměrně často setkáváme s pojmem zaručená **doba bezporuchového provozu (100γ% - ní život) T_γ**. Četnostní interpretace je taková, že přibližně 100γ % výrobků bude bez poruchy fungovat alespoň do okamžiku T_γ.

$$P(X \geq T_\gamma) = \gamma \quad \Rightarrow \quad 1 - F(T_\gamma) = \gamma \quad \Rightarrow \quad F(T_\gamma) = 1 - \gamma \quad \Rightarrow \quad T_\gamma = x_{1-\gamma}$$

Je-li distribuční funkce $F(t)$ spojitá, nazývá se odpovídající hustota pravděpodobnosti $f(t)$:

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = -\frac{dR(t)}{dt}$$

též **hustota poruch**.

❑ Hazardní funkce a její alternativní vyjádření

Nejčastěji se bezporuchovost neopravovaného výrobku udává **hazardní funkcí** (někdy označovanou jako **intenzita poruch),** definovanou jako poměr hustoty pravděpodobnosti poruchy a funkce bezporuchovosti:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} \qquad R(t) > 0$$

Veličiny $f(t)$ a $\lambda(t)$ mají rozměr [1/čas], obvykle se udávají v jednotkách [1/hod] nebo [1/rok]. Každá ze 4 základních veličin $R(t)$, $F(t)$, $f(t)$, $\lambda(t)$ popisuje úplně stejně bezporuchovost neopravovaného objektu a z každé z nich je možno odvodit tři zbývající. Vzájemné převody udává následující tabulka.

	$R(t)$	$F(t)$	$f(t)$	$\lambda(t)$
$R(t)$	$R(t)$	$1 - F(t)$	$1-\int_0^t f(x)dx$	$\exp\left[-\int_0^t \lambda(x)dx\right]$
$F(t)$	$1 - R(t)$	$F(t)$	$\int_0^t f(x)dx$	$1-\exp\left[-\int_0^t \lambda(x)dx\right]$
$f(t)$	$-\frac{dR(t)}{dt}$	$\frac{dF(t)}{dt}$	$f(t)$	$\lambda(t)\cdot\exp\left[-\int_0^t \lambda(x)dx\right]$
$\lambda(t)$	$-\frac{d(\ln R(t))}{dt} = \frac{-\frac{dR(t)}{dt}}{R(t)}$	$\frac{\frac{dF(t)}{dt}}{1-F(t)}$	$\frac{f(t)}{1-\int_0^t f(x)dx}$	$\lambda(t)$

Tabulka: *Matematické převodní vztahy mezi základními funkčními ukazateli bezporuchovosti*

Důležitou úlohu při rozdělení doby do poruchy hrají číselné charakteristiky tohoto rozdělení, zejména vybrané momenty a kvantily (střední doba do poruchy, rozptyl doby do poruchy, koeficienty šikmosti a špičatosti, γ-procentní život neboli zaručená doba bezporuchového provozu atd.). Uvedeme zde několik z nich.

❑ Jak kvantitativně určit základní číselné charakteristiky doby do poruchy ?

Střední doba provozu do poruchy, která je pro neobnovované objekty rovna **střední době do poruchy** (ustálená mezinárodní zkratka pochází z angličtiny MTTF = Mean Time To Failure), se definuje jako střední (očekávaná) hodnota náhodné veličiny, tj. doby do poruchy X

$$EX = \int_0^\infty t f(t)dt$$

Hodnota EX je integrální hodnota, která vyjadřuje bezporuchovost jediným údajem. Obvykle se udává v [hod].

Vlastnost: Nechť nezáporná náhodná veličina X má funkci bezporuchovosti $R(x)$ a nechť $EX^k < +\infty$, kde k je přirozené číslo (tedy nechť existují konečné obecné momenty všech řádů). Potom :

$$EX^k = k\int_0^{\infty} x^{k-1} R(x)\,dx$$

Důkaz lze provést užitím metody „per partes“.

Pro střední dobu do poruchy dostáváme užitím vztahu pro k-tý obecný moment (pro k = 1) důležitý vztah:

$$EX = \int_0^{\infty} R(x)\,dx$$

Pro **rozptyl** doby do poruchy platí

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = 2\int_0^{\infty} xR(x)\,dx - (EX)^2,$$

což dostaneme opět užitím vztahu pro k-tý obecný moment (pro k = 2).

Gama-procentní život $T\gamma$ je definován jako $100.(1-\gamma)$ procentní kvantil rozdělení doby do poruchy.

$$F(T\gamma) = 1-\gamma \quad \text{neboli} \qquad R(T\gamma) = \gamma$$

Četnostní interpretace je taková, že přibližně 100γ % výrobků bude bez poruchy fungovat do okamžiku $T\gamma$.

Shrnutí kapitoly 4.3.

Distribuční funkce doby do poruchy vyjadřuje pravděpodobnost toho, že na intervalu (0, t) dojde k poruše. Doplněk distribuční funkce do jedničky se nazývá **funkcí bezporuchovosti**, která vyjadřuje pravděpodobnost toho, že na intervalu (0, t) nedojde k poruše.

Hazardní funkce (**intenzita poruch**) je poměr hustoty pravděpodobnosti poruchy a funkce bezporuchovosti.

Střední dobu provozu do poruchy (MTTF) lze určit integrací z funkce bezporuchovosti přes interval (0, +∞).

Gama-procentní život $T\gamma$ určuje přibližně dobu, po kterou bude bez poruchy fungovat 100γ % výrobků.

Rozptyl doby do poruchy lze určit rovněž ze znalosti funkce bezporuchovosti.

Průvodce studiem

Poznámky k obnovovaným (opravitelným) výrobkům:

1. Pro obnovované výrobky je nezbytné vyšetřovat kromě doby do poruchy ještě další náhodnou veličinu: dobu opravy (nebo dobu do ukončení opravy), přičemž touto veličinou budeme v dalším rozumět celkovou dobu údržby po poruše až po obnovu výrobku. Jako každá náhodná veličina, i doba opravy je charakterizována základními

popisnými funkcemi, jako jsou hustota pravděpodobnosti (hustota oprav) a distribuční funkce. Zcela analogicky jako intenzita poruch se také zavádí **intenzita oprav** a nejčastěji používanou číselnou charakteristikou této náhodné veličiny je její střední (očekávaná) hodnota, která v teorii spolehlivosti nese označení jako **střední doba do obnovy**, zkratka **MTTR** (z anglického Mean Time To Repair).

2. Používané ukazatele spolehlivosti pro obnovované výrobky jsou dále: **Funkce okamžité pohotovosti A(t)**, což je pravděpodobnost, že výrobek je ve stavu schopném plnit v daných podmínkách a v daném časovém okamžiku požadovanou funkci, za předpokladu, že požadované vnější prostředky jsou zajištěny. Dále je to **součinitel asymptotické pohotovosti A**, což je limita okamžité pohotovosti, pro účely modelování, existuje-li, pro čas jdoucí k nekonečnu. V případě potřeby se určuje i **součinitel střední pohotovosti** $\overline{A}(t_1,t_2)$, což je střední hodnota funkce okamžité pohotovosti v daném časovém intervalu (t_1 ,t_2): $\overline{A}(t_1,t_2)=\dfrac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}A(t)dt$ **.**

Otázky 4.3.

1. Jaké jsou možnosti pro jednoznačný a úplný popis náhodné veličiny: doba do poruchy nějakého výrobku ?

2. Které jsou v praxi nejpoužívanější číselné charakteristiky této náhodné veličiny ?

3. Jak je definována hazardní funkce (intenzita poruch), popřípadě odvoďte, jak souvisí s ostatními popisnými funkcemi náhodné veličiny: doba do poruchy ?

Úlohy k řešení 4.3.

1. Ventil vodovodního potrubí má zadánu funkci bezporuchovosti: $R(t) = e^{-0,001.t}$. Určete střední dobu do poruchy ventilu MTTF a dále určete rozptyl doby do poruchy ventilu *DX*. Dále určete *80%-tní* život ventilu $\boldsymbol{T_{0,80}}$

2. Určete *90%-tní* život $\boldsymbol{T_{0,90}}$ pro výrobek, jehož doba do poruchy se řídí Weibullovým rozdělením, s lineárně rostoucí intenzitou poruch (β = 2) a s parametrem $\lambda=10\ \left(F(t)=1-e^{-(\lambda t)^{\beta}}\right)$.

3. Doba do vybití baterie se řídí exponenciálním rozdělením $\left(F(t)=1-e^{-\frac{t}{MTTF}}\right)$.

   a) Jaká je střední doba do vybití MTTF, víme-li, že 4000 hodin přežije 1% těchto baterií?
   b) Je-li střední doba do vybití 3.150 hodin, kolik procent těchto baterií přežije 4000 hodin?

4.4. Intenzita poruch

Čas ke studiu: 25 minut

Cíl: Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- vysvětlit intenzitu poruch pomocí pravděpodobnosti
- demonstrovat intenzitu poruch graficky
- vysvětlit jednotlivé fáze života výrobku

VÝKLAD

Jaká je pravděpodobnostní interpretace intenzity poruch ?

Nechť $t > 0$, $\Delta t > 0$, $\Delta t \to 0$ a počítejme podmíněnou pravděpodobnost jevu, že se prvek porouchá (doba do poruchy je X) v časovém intervalu (t, $t + \Delta t$) za podmínky, že pracoval bez poruchy do okamžiku t. Pro tuto podmíněnou pravděpodobnost dostaneme:

$$P\left(t < X < t + \Delta t \middle| X \geq t\right) = \frac{P\left(t < X < t + \Delta t, X \geq t\right)}{P\left(X \geq t\right)} = \frac{P(t < X < t + \Delta t)}{P(X \geq t)} =$$

$$= \frac{1}{1 - F(t)} \cdot \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} \cdot \Delta t$$

pro $\Delta t \to 0$ dostáváme $\dfrac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} \to \dfrac{dF}{dt} = f(t)$,

takže:

$$P\left(t < X < t + \Delta t \middle| X \geq t\right) \approx \frac{f(t)}{1 - F(t)} \Delta t = \lambda(t).\Delta t$$

Intenzita poruch je tedy lokální charakteristikou spolehlivosti. Vyjadřuje přibližně pravděpodobnost toho, že prvek, který se neporouchal do okamžiku t, se porouchá v intervalu (t, $t + 1$).

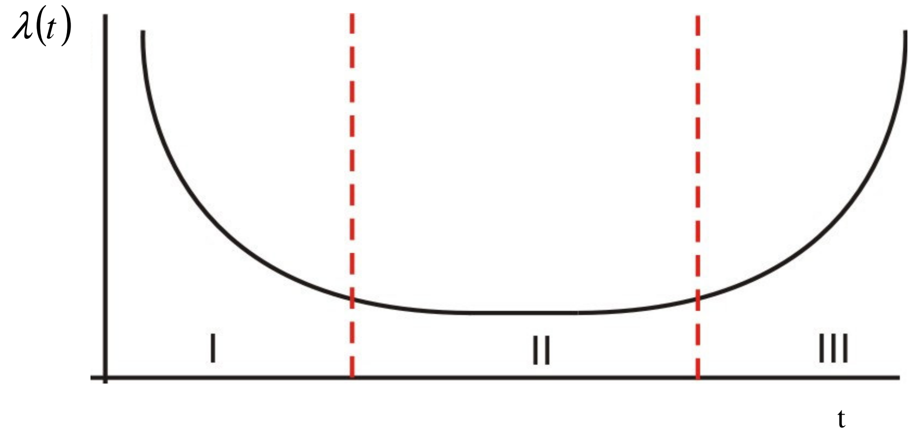
Jak vypadá nejčastější grafická interpretace intenzity poruch ?

Pokud zůstaneme u představy, že náhodná veličina X popisuje **dobu do poruchy** nějakého zařízení, pak typický tvar intenzity poruch je zobrazen na následujícím obrázku.
Křivka na tomto obrázku se nazývá **vanová křivka** a obvykle se dělí na tři úseky (I, II, III).

I. V prvním úseku křivka intenzity poruch klesá. Odpovídající časový interval se nazývá období časných poruch (období záběhu, období počátečního provozu, období osvojování nebo období dětských nemocí podle analogie s úmrtnostní křivkou člověka). Příčinou zvětšené intenzity poruch v tomto období jsou poruchy v důsledku výrobních vad, nesprávné montáže, chyb při návrhu nebo při výrobě apod.

II. Ve druhém úseku dochází k běžnému využívání zaběhnutého výrobku, k poruchám dochází většinou z vnějších příčin, nedochází k opotřebení, které by změnilo funkční vlastnosti výrobku. Intenzita poruch je v tomto období přibližně konstantní. Příslušný časový interval se nazývá období normálního užití, či stabilního života.

III. Ve třetím úseku procesy stárnutí a opotřebení mění funkční vlastnosti výrobku, projevují se nastřádané otřesy výrobku z období II (analogie s nesprávnou životosprávou člověka), trhliny materiálu a intenzita poruch vzrůstá. Příslušný časový interval se nazývá období poruch v důsledku stárnutí a opotřebení.



Poznámky:

1. *Přestože uvedená intenzita poruch je typická pro mnoho průmyslových výrobků (a jakožto křivka úmrtnosti i pro člověka), lze ji těžko vyjádřit v elegantním analytickém tvaru pro všechna tři období najednou. Při vlastní analýze spolehlivosti musíme většinou aproximovat intenzitu poruch jednoduchými analytickými funkcemi vždy po jednotlivých obdobích.*

2. *U některých výrobků chybí období I, tj. období časných poruch. Je tomu např. u dobře kontrolovaných výrobků zaběhnutých přímo u výrobce. Jsou také výrobky, které „nestárnou“ - schází období III. To jsou např. výrobky vyřazené dříve než začnou stárnout. Velmi často, zejména při řešení spolehlivosti složitých systémů, budeme jednotlivé prvky sledovat pouze v období II, ve kterém je intenzita poruch přibližně konstantní.*

3. *Intenzitou poruch je úplně popsáno rozdělení doby do poruchy a naopak. Mezi funkcí bezporuchovosti a intenzitou poruch platí vztah:* $R(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(x)dx\right)$

$$\lambda(t) = \frac{1}{R(t)}\frac{dR(t)}{dt}$$

Klasifikace monotónních intenzit poruch

V praxi vyšetřujeme intenzitu poruch po obdobích a tudíž se zabýváme studiem monotónních intenzit poruch. Proto se zavedly následující pojmy:

Rozdělení s distribuční funkcí F(t) nazýváme **MIP rozdělením** (**RIP-rozdělením** (anglicky **IFR**), **KIP-rozdělením** (anglicky **DFR**)), jestliže odpovídající intenzita poruch je monotónní (neklesající, nerostoucí). Taktéž příslušné distribuční funkce budeme označovat MIP (RIP (IFR), KIP (DFR)).

Poznámka:

MIP … monotónní intenzita poruch
RIP … rostoucí intenzita poruch
KIP … klesající intenzita poruch

Jaká je intenzita poruch systému složeného z n nezávislých prvků?

Věta:

Nechť se systém skládá z n nezávislých prvků s dobami do poruchy X_1, …, X_n a odpovídajícími intenzitami poruch $\lambda_1(t)$, …, $\lambda_n(t)$, a nechť doba do poruchy systému je $t_{\min} = \min(X_1, \ldots, X_n)$. Nechť $\lambda_{\min}(t)$ je intenzita poruch systému. Potom:

$$\lambda_{\min}(t) = \lambda_1(t) + \ldots + \lambda_n(t)$$

Důkaz:

Nechť $R_{\min}(t)$ označuje funkci bezporuchovosti systému. Zřejmě:

$$R_{\min}(t) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t),$$

kde $R_i(t)$ jsou funkce bezporuchovosti jednotlivých prvků.

Využitím vztahu $\lambda(t) = -\dfrac{d(\ln R(t))}{dt}$ dostáváme:

$$\lambda_{\min}(t) = -\frac{d(\ln R_{\min}(t))}{dt} = -\frac{d\left(\ln \prod_{i=1}^{n} R_i(t)\right)}{dt} = -\frac{d\left(\sum_{i=1}^{n} \ln R_i(t)\right)}{dt} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{d(\ln R_i(t))}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t)$$

Reprodukční vlastnost Weibullova rozdělení

Jak jsme se dozvěděli, flexibilita Weibullova rozdělení umožňuje aproximovat širokou třídu rozdělení s monotónní intenzitou poruch. Takováto rozdělení se v technické praxi vyskytují poměrně často.

Weibullovo rozdělení má tuto reprodukční vlastnost:

Věta:

Nechť X_1, …, X_n jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s rozdělením $W(\Theta, \beta)$.

Potom náhodná veličina $X_{\min} = \min(X_1, \ldots, X_n)$ má rozdělení $W\left(\frac{\Theta}{n^{\frac{1}{\beta}}}, \beta\right)$.

Důkaz:

Je-li $R_1(t)$ funkce bezporuchovosti náhodné veličiny X_1 a $R_{\min}(t)$ funkce bezporuchovosti náhodné veličiny $X_{\min}$, pak platí:

$$R_{\min}(t) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t) = R_1^n(t)$$

V našem případě je tedy:

$$F_i(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\Theta}\right)^{\beta}}; \qquad t > 0;\ \Theta > 0;\ \beta > 0 \qquad \Rightarrow \qquad R_i(t) = e^{-\left(\frac{t}{\Theta}\right)^{\beta}}; \qquad t > 0;\ \Theta > 0;\ \beta > 0$$

$$\Rightarrow \qquad R_{\min}(t) = R_i^n(t) = e^{-n \cdot \left(\frac{t}{\Theta}\right)^{\beta}} = e^{-\left(\frac{t}{\frac{\Theta}{n^{\frac{1}{\beta}}}}\right)^{\beta}}; \qquad t > 0;\ \Theta > 0;\ \beta > 0\,,$$

což je funkce bezporuchovosti rozdělení $W\left(\frac{\Theta}{n^{\frac{1}{\beta}}}, \beta\right)$.

Řešený příklad

Životnost turbíny je dána životností funkčně nejslabší lopatky, protože moderní turbíny pracují s vysokými rychlostmi a porucha jedné lopatky má obvykle za následek zničení lopatkového kola, což je spojené s dalšími rozsáhlými škodami. Modelování životnosti lopatek má proto značný význam. Nechť doba do poruchy lopatky je náhodná veličina s Weibullovým rozdělením s parametrem tvaru 1,5 a parametrem měřítka 50. Jaké rozdělení má doba do poruchy turbíny (20 lopatek)?

Jestliže turbína má 20 lopatek s dobami do poruchy X_1, …, X_{20}, pak $X_{\min} = \min(X_1, \ldots, X_{20})$ je doba do poruchy turbíny.

Do okamžiku poruchy pracují lopatky přibližně nezávisle na sobě, proto má doba do poruchy turbíny Weibullovo rozdělení $W\left(\frac{\Theta}{n^{\frac{1}{\beta}}}, \beta\right)$.

$\Theta = 50$; $\beta = 1{,}5$; n = 20 $\Rightarrow$ *Doba do poruchy turbíny Weibullovo rozdělení* $W(6{,}8;1{,}5)$.

Shrnutí kapitoly 4.4.

Intenzita poruch je lokální charakteristikou spolehlivosti, je mírou **pravděpodobnosti** toho, že výrobek, který se neporouchal do okamžiku *t*, se porouchá v okamžiku bezprostředně následujícím po *t*. Intenzitou poruch je úplně popsáno pravděpodobnostní rozdělení doby do poruchy a naopak.

Vanová křivka je typická závislost intenzity poruch na čase. Na ní rozlišujeme tři charakteristická období života výrobku: období **časných poruch**, období **stabilního života** a období **stárnutí**.

Rozdělení s distribuční funkcí F(t) nazýváme **MIP rozdělením** (**RIP-rozdělením** (anglicky **IFR**), **KIP-rozdělením** (anglicky **DFR**)), jestliže odpovídající intenzita poruch je monotónní (neklesající, nerostoucí). Taktéž příslušné distribuční funkce budeme označovat MIP (RIP (IFR), KIP (DFR)).

Intenzitu poruch systému složeného z n nezávislých prvků určíme podle následující věty:

Nechť se systém skládá z n nezávislých prvků s dobami do poruchy $X_1, \ldots, X_n$ a odpovídajícími intenzitami poruch $\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)$, a nechť doba do poruchy systému je $t_{\min} = \min(X_1, \ldots, X_n)$. Nechť $\lambda_{\min}(t)$ je intenzita poruch systému. Potom:

$$\lambda_{\min}(t) = \lambda_1(t) + \ldots + \lambda_n(t)$$

Jako **reprodukční vlastnost Weibullova rozdělení** označujeme to, že jsou-li $X_1, \ldots, X_n$ nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s rozdělením $W(\Theta, \beta)$. Potom náhodná veličina $X_{\min} = \min(X_1, \ldots, X_n)$ má rozdělení $W\left(\frac{\Theta}{n^{\frac{1}{\beta}}}, \beta\right)$.

Otázky 4.4.

1. Charakterizujte intenzitu poruch pomocí pravděpodobnosti. Pravděpodobnost jakého jevu popisuje ?

2. Co je to vanová křivka ? Co je to období časných poruch ?

3. Jaký je vztah mezi intenzitou poruch a funkcí bezporuchovosti ?

4. Jak klasifikujeme pravděpodobnostní rozdělení na základě monotónní intenzity poruch?

5. Co je to reprodukční vlastnost Weibullova rozdělení?

4.5. Zálohování

Čas ke studiu: 15 minut

Cíl: Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- charakterizovat podstatu zálohování
- rozlišit různé druhy zálohování a jednoduše je popsat
- formulovat základní zásadu pro zálohování

VÝKLAD

Jaká je podstata zálohování a jaké druhy zálohování rozlišujeme ?

Zálohování je jedna ze základních metod zvyšování spolehlivosti, která umožňuje (alespoň teoreticky) neomezeně zvyšovat spolehlivost systémů. Podstata zálohování spočívá v tom, že se k prvku (tzv. hlavnímu) přidá jeden nebo více záložních prvků, které při poruše hlavního prvku tento prvek nahrazují.

Podle toho, v jakém režimu se nachází záložní prvek, dělíme zálohování do několika skupin. Jestliže záložní prvek pracuje ve stejném režimu jako prvek hlavní, mluvíme o **zatížené záloze („horké rezervě“)**. Jestliže záložní prvek plní svou funkci v mírnějším režimu než prvek hlavní, mluvíme o **odlehčené záloze**. Jestliže se záložní prvek nachází v režimu, ve kterém se nemůže porouchat, mluvíme o **nezatížené záloze („studené rezervě“)**. Ve většině skutečných zálohovaných systémů se setkáme s odlehčenou zálohou.

Důležitou součástí zálohovaných systémů je zařízení, které v případě poruchy hlavního prvku uvede do činnosti na místo hlavního prvku prvek záložní. Obecně se takové zařízení nazývá **přepínač**. V jednodušších modelech zálohování se předpokládá, že přepínač je absolutně spolehlivý. V reálných systémech však tomu tak nebývá, a proto při přesnější analýze je nutno v modelu počítat i s nespolehlivostí přepínačů.

Jak lze jednoduše popsat dva základní typy zálohování ?

Proveďme nyní srovnání dob do poruchy zálohovaného systému se zatíženými a nezatíženými zálohami. Předpokládejme, že přepínač je absolutně spolehlivý, a že všechny prvky pracují na sobě nezávisle. Porouchaný prvek je okamžitě nahrazen prvkem záložním. Nechť X_1 je doba do poruchy hlavního prvku, a nechť $X_2, \dots, X_n$ jsou doby do poruchy n - 1 záložních prvků.

Doba do poruchy zálohovaného systému se zatíženými zálohami je:

$$X_{\max} = \max(X_1, \dots, X_n)$$

a **doba do poruchy zálohovaného systému s nezatíženými zálohami** je:

$$X^{(n)} = X_1 + \dots + X_n.$$

Vzhledem k tomu, že $X_{\max} \leq X^{(n)}$, je zálohovaný systém s nezatíženými zálohami vždy výhodnější než zálohovaný systém se zatíženými zálohami.

Shrnutí kapitoly 4.5.

Základním problémem zálohování systémů je, zda zálohovat jednotlivé prvky systému nebo zda zálohovat celý systém identickým záložním systémem. Toto jsou extrémní případy, mezi kterými existuje široká škála možností zálohování. Některé bloky (tj. části systému) je možno zálohovat identickými bloky, jiné pak zálohovat po prvcích apod. Obecně lze snadno ukázat, že zálohování prvků vede vždy k vyšší spolehlivosti než zálohování bloků.

Podstata zálohování spočívá v tom, že se k prvku (tzv. hlavnímu) přidá jeden nebo více záložních prvků, které při poruše hlavního prvku tento prvek nahrazují. Záložní prvky mohou pracovat buď jako horké nebo studené rezervy.

Zálohovaný systém s nezatíženými zálohami vždy výhodnější (spolehlivější) než zálohovaný systém se zatíženými zálohami.

Zálohování prvků vede vždy k vyšší spolehlivosti než zálohování bloků.

Otázky 4.5.

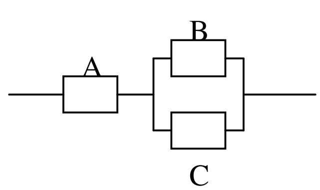
1. Charakterizujte podstatu zálohování.

2. Co je to horká rezerva? Co je to studená rezerva ?

3. Jaká jsou základní pravidla pro zálohování ?

Úlohy k řešení 4.5.

1. Systém na obrázku je funkční pokud funguje součástka A a nejméně jedna ze součástek B a C. Nechť pro jednotlivé součástky byly naměřeny následující doby do poruchy (A, B, C) = (400, 200, 300 hodin). Předpokládáme, že systém pracuje nezávisle na okolních podmínkách.



   a) Nechť součástka C pracuje v režimu studená rezerva. Po kolika hodinách dojde k poruše systému ?
   b) Nechť součástka C pracuje v režimu horká rezerva. Po kolika hodinách dojde k poruše systému ?