9. NÁHODNÉ PROCESY II

Čas ke studiu: 90 minut

Cíl: Naučíme se určovat pravděpodobnosti výskytu systému v jednotlivých stavech v daném čase t

VÝKLAD

9.1. Spojitý parametr Markovských procesů

Nechť

$$\{X_t : t \geq 0\}$$

reprezentuje spojitý náhodný parametr Markovova řetězce s m diskrétními stavy. Pro $t > s > 0$ a stavy i a j nechť

$$P\{X_t = j\} = p_j(t),$$

což je pravděpodobnost, že proces je ve stavu j v čase t, a

$$P\{X_t = j | X_s = i\} = p_{ij}(s,t),$$

což je pravděpodobnost, že proces je ve stavu j v čase t a byl dán procesem, který byl ve stavu i v čase s.

Pravděpodobnost $p_{ij}(s,t)$ je nazývána **přechodovou pravděpodobnostní funkcí Markovova řetězce**. Markovův řetězec je homogenní nebo stacionární (v souvislosti s časem), jestliže $p_{ij}(s,t)$ závisí pouze na časovém intervalu $t' = t - s$. To vyhovuje Chapman-Kolmogorově rovnici, která je dána

$$p_{ij}(s,t) = \sum_{stavy\ k} p_{ik}(s,u) p_{kj}(u,t)$$

pro jakýkoliv čas $t > u > s \geq 0$ a stavy i a j. Po úpravě spočívající v nahrazení $t - s$ jako t' a $u - s$ jako u' se rovnice redukuje na

$$p_{ij}(t') = \sum_{stavy\ k} p_{ik}(u') p_{kj}(t' - u'),$$

dokud je proces homogenní.

Zde $p_{ij}(t)$ může být interpretována jako pravděpodobnost, že proces přejde ze stavu *i* do stavu *j* v časovém intervalu *t*. Jestliže

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \begin{cases} 1, & pro\ \ j = i \\ 0, & pro\ \ j \neq i \end{cases},$$

říkáme, že Markovův řetězec je spojitý v $t = 0$. Budeme brát v úvahu pouze homogenní Markovovy řetězce.

Definujme dva přechody intenzit z hlediska derivací v $t = 0$, které hrají stejnou roli jako jeden krok přechodu pravděpodobností v diskrétním parametru Markovova řetězce.

Pro každý stav *i* předpokládáme

$$\frac{d}{dt} p_{ii}(t)\Big|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{1 - p_{ii}(t)}{0 - t},$$

která existuje a je konečná.

Pro všechna *i* a *j*, kde $i \neq j$, předpokládáme

$$\frac{d}{dt} p_{ij}(t)\Big|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{0 - p_{ij}(t)}{0 - t},$$

která existuje a je konečná.

Nechť

$$d_{ii} = \frac{-d}{dt} p_{ii}(t)\Big|_{t=0}$$

a pro $i \neq j$

$$d_{ij} = \frac{d}{dt} p_{ij}(t)\Big|_{t=0}.$$

Úpravami předchozích vztahů dostaneme

$$\frac{1 - p_{ii}(t)\big|_{t=0}}{t} = d_{ii} + r_i(t),$$

kde $r_i(t) \to 0$ a $t \to 0$. Potom

$$1 - p_{ii}(t) = d_{ii}t + tr_i(t) = d_{ii}t + 0(t).$$

Tato rovnice může být interpretována jako: pravděpodobnost přechodu ze stavu *i* do nějakého jiného stavu během časového intervalu *t* a je rovna $d_{ii}t + 0(t)$.

Podobně můžeme psát

$$p_{ij}(t) = d_{ij}t + 0(t).$$

Tento vztah může být interpretován jako pravděpodobnost přechodu ze stavu *i* do stavu *j* v časovém intervalu *t*, která je rovna $d_{ij}t + 0(t)$. Jako výsledek máme pro libovolné $t \geq 0$ a $h > 0$

$$p_{ij}(t+h) = p_{ij}(t)\{1 - (d_{jj}h + 0(h))\} + \sum_{k \neq j} p_{ik}(t) d_{kj} h + 0(h)$$

nebo

$$\frac{p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)}{h} = -d_{jj} p_{ij}(t) + \sum_{k \neq j} p_{ik}(t) d_{kj} + \frac{0(h)}{h}.$$

Předpokládáme, že $p'_{ij}(t)$ existuje a $h \to 0$, pak obdržíme

$$p'_{ij}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)}{h} = -d_{jj} p_{ij}(t) + \sum_{k \neq j} p_{ik}(t) d_{kj}.$$

Pro všechny stavy *i* a *j* tato rovnice dává systém diferenciálních rovnic, jejichž řešením získáme pravděpodobnosti přechodu.

K získání bezpodmínečných stavových pravděpodobností $p'_i(t)$ pro každý stav i přijmeme stejný důvod, který byl již použit v odvození předcházejících rovnic. Takže máme

$$p_i(t+h) = p_i(t)(1 - d_{ii}h) + \sum_{j \neq i} p_j(t) d_{ji} h + 0(h),$$

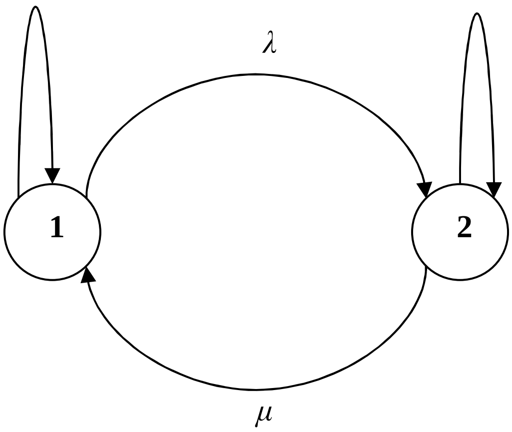
ze které získáme

$$p'_i(t) = -d_{ii} p_i(t) + \sum_{j \neq i} p_j(t) d_{ji}.$$

Tento výraz definuje systém rovnic, který je lineární z hlediska Laplaceovy transformace proměnných a může být řešen standardními technikami.

9.2. Ilustrace

Uvažujme systém zobrazený na obrázku, jenž se pohybuje mezi stavy 1 a 2. Rozložení přechodu v čase ze stavu 1 do stavu 2 je $\lambda e^{-\lambda t}$ a ze stavu 2 do stavu 1 $\mu e^{-\mu t}$. Úkolem bude určit pravděpodobnost, že systém bude ve stavu 1, popř. 2 v jakémkoliv daném čase *t*.



Z předchozího textu víme, že

$$d_{ii} = \frac{-d}{dt} p_{ii}(t)\Big|_{t=0} .$$

Výraz $p_{11}(t)$ je pro nás neznámý. Avšak může být určen z ekvivalentních relací.

Pravděpodobnost, že systém zůstane ve stavu i v $t = 0^+$, je dána tím, že systém je ve stavu i v $t = 0$

$$d_{ii} = -\frac{d}{dt} .$$

Podobně pravděpodobnost, že systém přejde ze stavu i do stavu j v $t = 0^+$ je dána tím, že je systém ve stavu i v $t = 0$

$$d_{ij} = \frac{d}{dt} .$$

Dále

$$d_{11} = -\frac{d}{dt}\left(e^{-\lambda t}\right)\Big|_{t=0} = \lambda$$
$$d_{12} = -\frac{d}{dt}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)\Big|_{t=0} = \lambda$$

a podobně

$$d_{22} = \mu$$
$$d_{21} = \mu .$$

Dále můžeme psát

$$p'_{ij}(t) = -d_{jj} p_{ij}(t) + \sum_{k \neq j} p_{ik}(t) d_{kj} \ ,$$

použitím Laplaceovy transformace obdržíme

$$sP_{ij}(s) - P_{ij}(0) = -d_{jj} P_{ij}(s) + \sum_{k \neq j} P_{ik}(s) d_{kj} \ ,$$

kde

$$P_{ij}(0) = 1 \text{ pro } i = j \text{ a } P_{ij}(0) = 0 \text{ pro } i \neq j \ .$$

Potom

$$\begin{aligned} sP_{11}(s) - 1 &= -\lambda P_{11}(s) + \mu P_{12}(s) \\ sP_{12}(s) &= -\mu P_{12}(s) + \lambda P_{11}(s) \\ sP_{22}(s) - 1 &= -\mu P_{22}(s) + \lambda P_{21}(s) \\ sP_{21}(s) &= -\lambda P_{21}(s) + \mu P_{22}(s). \end{aligned}$$

Zapsáno v maticové formě

$$\begin{vmatrix} s+\lambda & -\mu & 0 & 0 \\ -\lambda & s+\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s+\mu & -\lambda \\ 0 & 0 & -\mu & s+\lambda \end{vmatrix} \begin{vmatrix} P_{11}(s) \\ P_{12}(s) \\ P_{22}(s) \\ P_{21}(s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} .$$

Po vyřešení a provedení inverzní transformace získáme

$$\begin{aligned} p_{11}(t) &= \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t} \\ p_{12}(t) &= \frac{\lambda}{\lambda+\mu} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t} \\ p_{22}(t) &= \frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t} \\ p_{21}(t) &= \frac{\mu}{\lambda+\mu} - \frac{\mu}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t} \end{aligned} .$$

Nyní najdeme bezpodmínečné stavy pravděpodobností $p_i(t)$ pro každý stav *i*. Můžeme tedy psát

$$p'_j(t) = -d_{jj} p_j(t) + \sum_{j \neq i} p_i(t) d_{ij} \ .$$

Po použití Laplaceovy transformace na obou stranách rovnice získáme

$$sP_j(s) - p_j(0) = -d_{jj}P_j(s) + \sum_{i \neq j} d_{ij}P_i(s),$$

tj.

$$P_j(s) = \frac{1}{s + d_j}\left[p_j(0) + \sum_{i \neq j} P_i(s) d_{ij} \right].$$

Vezmeme $p_1 = 0$ a $p_2 = q = 1 - p$. Máme

$$\begin{aligned} d_{11} &= \lambda \\ d_{12} &= \lambda \\ d_{22} &= \mu \\ d_{21} &= \mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_1(s) &= \frac{1}{s+\lambda}\left[p + \mu P_2(s)\right] \\ P_2(s) &= \frac{1}{s+\mu}\left[q + \lambda P_1(s)\right] \end{aligned}$$

na řešení,

$$\begin{aligned} P_1(s) &= \frac{(s+\mu)p + \mu q}{s(s+\mu+\lambda)} \\ P_2(s) &= \frac{q(s+\lambda) + \lambda p}{s(s+\mu+\lambda)} \end{aligned}$$

po inverzní transformaci získáme

$$\begin{aligned} p_1(t) &= \frac{1}{\lambda+\mu}\left[\mu - \left(\mu - (\mu+\lambda)pe^{-(\mu+\lambda)t}\right)\right] \\ p_2(t) &= \frac{1}{\lambda+\mu}\left[\lambda + \left(\mu - (\mu+\lambda)pe^{-(\mu+\lambda)t}\right)\right]. \end{aligned}$$

9.3. Matice hustoty přechodu

Matice $A = \left\| d_{ij} \right\|$ se nazývá **matice hustoty přechodu** nebo **matice míry přechodu procesu**. Tato matice má následující vlastnosti:

1. její nediagonální prvky jsou nezáporné a diagonální prvky jsou záporné,
2. suma prvků v každém řádku je rovna nule, suma nediagonálních prvků je rovna sumě diagonálních prvků s opačným znaménkem.

Pro systém uvažovaný v předchozí ilustraci bude systém diferenciálních rovnic v maticové formě vypadat následovně:

$$\left|p_{11}'(t), p_{12}'(t), p_{22}'(t), p_{21}'(t)\right| = \left|p_{11}(t), p_{12}(t), p_{22}(t), p_{21}(t)\right| \begin{vmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ \mu & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & \mu \\ 0 & 0 & \lambda & -\lambda \end{vmatrix},$$

kde

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ \mu & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & \mu \\ 0 & 0 & \lambda & -\lambda \end{vmatrix}$$

je matice hustoty přechodu *A*.

Také pro bezpodmínečný stav pravděpodobností máme

$$\left|p_1'(t), p_2'(t)\right| = \left|p_1(t), p_2(t)\right| \begin{vmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{vmatrix}.$$

Zde je matice míry přechodu *A*

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{vmatrix}.$$

Σ Shrnutí kapitoly 9.

Nechť

$$\{X_t : t \geq 0\}$$

reprezentuje spojitý náhodný parametr Markovova řetězce s m diskrétními stavy. Pro $t > s > 0$ a stavy i a j nechť

$$P\{X_t = j\} = p_j(t),$$

což je pravděpodobnost, že proces je ve stavu j v čase t, a

$$P\{X_t = j | X_s = i\} = p_{ij}(s,t),$$

což je pravděpodobnost, že proces je ve stavu j v čase t a byl dán procesem, který byl ve stavu i v čase s.

Pravděpodobnost $p_{ij}(s,t)$ je nazývána **přechodovou pravděpodobnostní funkcí Markovova řetězce**.

Předpokládáme, že $p'_{ij}(t)$ existuje a $h \to 0$, pak:

$$p'_{ij}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)}{h} = -d_{jj}\,p_{ij}(t) + \sum_{k\neq j} p_{ik}(t) d_{kj} \ .$$

Pro všechny stavy i a j tato rovnice dává systém diferenciálních rovnic, jejichž řešením získáme pravděpodobnosti přechodu.

K získání bezpodmínečných stavových pravděpodobností $p'_i(t)$ pro každý stav i přijmeme stejný důvod, který byl již použit v odvození předcházejících rovnic. Takže máme

$$p_i(t+h) = p_i(t)(1 - d_{ii}h) + \sum_{j\neq i} p_j(t) d_{ji} h + o(h),$$

ze které získáme

$$p'_i(t) = -d_{ii}\,p_i(t) + \sum_{j\neq i} p_j(t) d_{ji} \ .$$

Tento výraz definuje systém rovnic, který je lineární z hlediska Laplaceovy transformace proměnných, a může být řešen standardními technikami.