BAIREOVA VĚTA

• Věta (Cantorova)

Nechť
- (X,ρ) je úplný metrický prostor,
- (M_n) je nerostoucí posloupnost neprázdných uzavřených množin v X, tzn.

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \emptyset \neq M_{n+1} \subset M_n = \overline{M_n} \subset X,$$

- $\operatorname{diam} M_n \to 0$.

Pak $\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$ je jednobodový, tzn.

$$\exists!\, x \in X : \{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$$

Důkaz.

Zvolme (pro každé $n \in \mathbb{N}$) $x_n \in M_n$ (libovolně).
Ukažme, že posloupnost (x_n) je cauchyovská:

Buď dáno $\varepsilon > 0$, pak z předpokladů ($\operatorname{diam} M_n \to 0$, $M_{n+1} \subset M_n$) plyne, že existuje n_0 takové, že

$\forall n > n_0 : \operatorname{diam} M_n < \varepsilon$. Odtud snadno plyne, že

$$\forall n, m > n_0 \; (m > n) : \rho(x_n, x_m) \leq \operatorname{diam} M_n < \varepsilon \quad \text{cbd.!}$$

Z úplnosti X proto plyne, že $\exists x \in X : x_n \to x$.

A zbývá dokázat, že $\boxed{\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n}$.

a) Dokažme, že $x \in \bigcap M_n$

Vezměme libovolné $n \in \mathbb{N}$.

Pak

$$\left.\begin{array}{l} x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots \in M_n \\ x_n \to x \\ M_n \text{ je uzavřená} \end{array}\right\} \Rightarrow x \in M_n.$$

Dokázali jsme, že $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$.

b) Buď $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$. Zbývá dokázat, že $x = y$.

Protože $\forall n \in \mathbb{N}: x, y \in M_n$, je

$0 \le \rho(x,y) \le \operatorname{diam} M_n \to 0$, a proto

$\rho(x,y) = 0$, neboli $x = y$.

Cbd

• Cvičení. Prokažte (volbou vhodných protipříkladů), že všechny uvedené předpoklady jsou nezbytné.

Definice. Buď (X,ρ) metrický prostor. Řekneme, že množina $M \subset X$ je

- řídká, je-li $\operatorname{int} \overline{M} = \emptyset$,
- 1. kategorie, je-li sjednocením spočetně mnoha řídkých množin, tzn.
$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n, \text{ kde } \forall n \in \mathbb{N}: \operatorname{int} \overline{M_n} = \emptyset,$$
- 2. kategorie, jestliže není 1. kategorie.

Příklady. Uvažujme metrický prostor $\mathbb{R}$. Pak

1) každá konečná podmnožina $\{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}$ je řídká (v $\mathbb{R}$),
2) množina $\mathbb{N}$ je řídká,
3) množina $\mathbb{Q}$ není řídká,
4) každá (nejvýše) spočetná podmnožina $\mathbb{R}$ je první kategorie, speciálně $\mathbb{Q}$ je 1. kategorie (v $\mathbb{R}$)
5) každá neprázdná otevřená podmnožina $\mathbb{R}$ je druhé kategorie.

Věta (Baireova). Nechť (X,ρ) je úplný metrický prostor. Pak každá neprázdná otevřená podmnožina X je 2. kategorie. Speciálně: X je 2. kategorie.

Důkaz. Předpokládejme sporem, že

- $\emptyset \neq U \subset X$ je otevřená množina,
- $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, kde $\operatorname{int} \overline{M_n} = \emptyset$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. (*)

Protože $\emptyset \neq U \subset X$ je otevř. množina, existuje $a \in U$ a číslo $r > 0$ takové, že

$$\overline{U(a,r)} = \{x \in X : \rho(x,a) \leq r\} \subset U.$$

Z předpokladu $\operatorname{int} \overline{M_1} = \emptyset$ plyne, že existuje bod $a_1 \in U(a,r)$ takový, že

$$\operatorname{dist}(a_1, \overline{M_1}) > 0,$$

[Rozmyslete si podrobně, proč to platí: $\operatorname{dist}(b, \overline{M_1}) = 0 \Rightarrow b \in \overline{M_1}$]

a proto i číslo r_1 takové, že

$$\overline{U(a_1,r_1)} \cap \overline{M_1} = \emptyset, \quad \overline{U(a_1,r_1)} \subset \overline{U(a,r)}, \quad 0 < r_1 < \frac{r}{2}.$$

Analogicky – k předpokladu int $\overline{M_2} = \emptyset$ vyplývá, že

$$\exists a_2 \in U(a_1, r_1) \ \exists r_2 \in \left(0, \frac{r_1}{2}\right):$$

$$\overline{U(a_2, r_2)} \cap \overline{M_2} = \emptyset, \quad \overline{U(a_2, r_2)} \subset U(a_1, r_1)$$

...

Tímto způsobem lze sestrojit posloupnost uzavřených koulí $\overline{U(a_n, r_n)}$ tak, že

$$U \supset \overline{U(a, r)} \supset \overline{U(a_1, r_1)} \supset \overline{U(a_2, r_2)} \supset \dots$$

$$\forall n \in \mathbb{N}: \overline{U(a_n, r_n)} \cap \overline{M_n} = \emptyset \qquad (**)$$

$$d_n = \operatorname{diam} \overline{U(a_n, r_n)} \longrightarrow 0$$

Z Cantorovy věty vyplývá, že

$$\exists x \in X: \quad \{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U(a_n, r_n)} \subset U$$

Jenže pro toto x má současně platit

$$x \in U = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \qquad (\text{viz } (*))$$

$$\forall n \in \mathbb{N}: \ x \notin \overline{M_n} \qquad (\text{viz } (**)).$$

A to je spor. Cbd.