Ř + A + D + Y + ...

Jiří Bouchala

Katedra
aplikované
matematiky

1. 7. 2014, přednáška na MOFO 2014

Outline:

Outline:

- o čem tato přednáška mohla být, ale nebude;

Outline:

- o čem tato přednáška mohla být, ale nebude;
- o čem tato přednáška taky je;

Outline:

- o čem tato přednáška mohla být, ale nebude;
- o čem tato přednáška taky je;
- pořádné vrávorání.

- *n*-karet

- n-karet ... $d = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n}\right)$,

- n-karet ... $d = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n}\right)$,

  nekonečně karet

- n-karet ... $d = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n}\right)$,

  nekonečně karet ... $d = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n} + ...\right) = ?$

- n-karet ... $d = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n}\right)$,

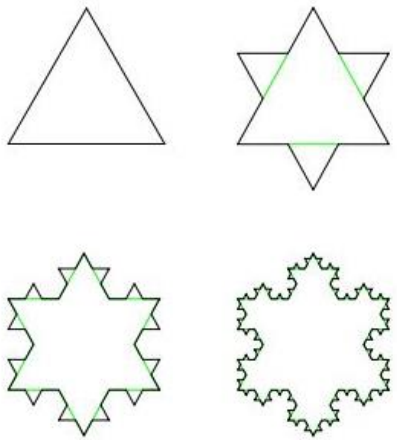
  nekonečně karet ... $d = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n} + ...\right) = ?$

- Kochova sněhová vločka

- n-karet ... $d = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n}\right)$,

  nekonečně karet ... $d = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n} + ...\right) = ?$

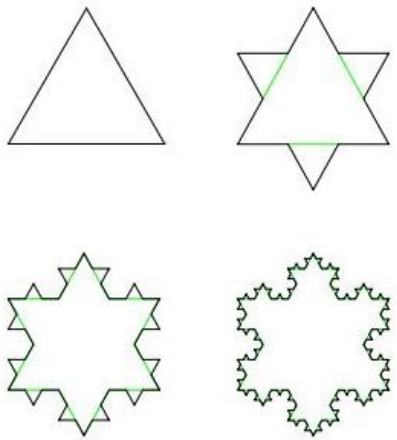
- Kochova sněhová vločka



- n-karet ... $d = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n}\right)$,

  nekonečně karet ... $d = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n} + ...\right) = ?$

- Kochova sněhová vločka

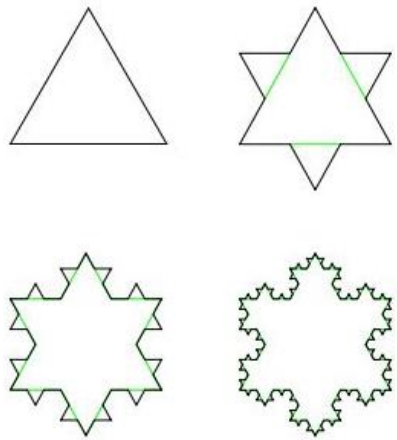


$$\text{obsah}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n\right) = \text{obsah } T_1 + \text{obsah } T_2 + \text{obsah } T_3 + ... = ?$$

- n-karet ... $d = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n}\right)$,

  nekonečně karet ... $d = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n} + ...\right) = ?$

- Kochova sněhová vločka



$$\text{obsah}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n\right) = \text{obsah } T_1 + \text{obsah } T_2 + \text{obsah } T_3 + ... = ?$$

Úloha C.

Vypočtěte obsah a délku hranice $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n\right)$.

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717...$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717...$

  $\pi = 3, 1415926...$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717...$

  $\pi = 3,1415926...$ upálení Mistra Jana Husa,

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717...$

  $\pi = 3,1415926...$ upálení Mistra Jana Husa,

  $\pi = 3,1415926...$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717...$

  $\pi = 3,1415926...$ upálení Mistra Jana Husa,

  $\pi = 3,1415926...$ narození Jana Amose Komenského,

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717...$

  $\pi = 3,1415926...$ upálení Mistra Jana Husa,

  $\pi = 3,14159266...$ narození Jana Amose Komenského,

  $\pi = 3,14159266...$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717...$

  $\pi = 3,1415926...$ upálení Mistra Jana Husa,

  $\pi = 3,1415926...$ narození Jana Amose Komenského,

  $\pi = 3,1415926...$ nástup Habsburků na český trůn,

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717...$

  $\pi = 3,1415926...$ upálení Mistra Jana Husa,

  $\pi = 3,1415926...$ narození Jana Amose Komenského,

  $\pi = 3,1415926...$ nástup Habsburků na český trůn,

  $\pi = 3,1415926...$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717...$

  $\pi = 3,1415926...$ upálení Mistra Jana Husa,

  $\pi = 3,1415926...$ narození Jana Amose Komenského,

  $\pi = 3,1415926...$ nástup Habsburků na český trůn,

  $\pi = 3,1415926...$ počet Krokových dcer

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717...$

  $\pi = 3,1415926...$ upálení Mistra Jana Husa,

  $\pi = 3,1415926...$ narození Jana Amose Komenského,

  $\pi = 3,1415926...$ nástup Habsburků na český trůn,

  $\pi = 3,1415926...$ počet Krokových dcer (byly-li každé dvě různé),

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717...$

  $\pi = 3,1415926...$ upálení Mistra Jana Husa,

  $\pi = 3,1415926...$ narození Jana Amose Komenského,

  $\pi = 3,1415926...$ nástup Habsburků na český trůn,

  $\pi = 3,1415926...$ počet Krokových dcer (byly-li každé dvě různé),

  $\pi = 3,1415926...$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717...$

  $\pi = 3,1415926...$ upálení Mistra Jana Husa,

  $\pi = 3,1415926...$ narození Jana Amose Komenského,

  $\pi = 3,1415926...$ nástup Habsburků na český trůn,

  $\pi = 3,1415926...$ počet Krokových dcer (byly-li každé dvě různé),

  $\pi = 3,1415926...$ Jiří z Poděbrad druhým rokem českým králem,

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717...$

  $\pi = 3,1415926...$ upálení Mistra Jana Husa,

  $\pi = 3,1415926...$ narození Jana Amose Komenského,

  $\pi = 3,1415926...$ nástup Habsburků na český trůn,

  $\pi = 3,1415926...$ počet Krokových dcer (byly-li každé dvě různé),

  $\pi = 3,1415926...$ Jiří z Poděbrad druhým rokem českým králem,

  $\pi = 3,1415926...$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717...$

  $\pi = 3,1415926...$ upálení Mistra Jana Husa,

  $\pi = 3,1415926...$ narození Jana Amose Komenského,

  $\pi = 3,1415926...$ nástup Habsburků na český trůn,

  $\pi = 3,1415926...$ počet Krokových dcer (byly-li každé dvě různé),

  $\pi = 3,1415926...$ Jiří z Poděbrad druhým rokem českým králem,

  $\pi = 3,1415926...$ stáří Karlovy univerzity v roce 1763,

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717...$

  $\pi = 3,1415926...$ upálení Mistra Jana Husa,

  $\pi = 3,1415926...$ narození Jana Amose Komenského,

  $\pi = 3,1415926...$ nástup Habsburků na český trůn,

  $\pi = 3,1415926...$ počet Krokových dcer (byly-li každé dvě různé),

  $\pi = 3,1415926...$ Jiří z Poděbrad druhým rokem českým králem,

  $\pi = 3,1415926...$ stáří Karlovy univerzity v roce 1763,

  $\pi = 3,1415926...$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717...$

  $\pi = 3,1415926...$ upálení Mistra Jana Husa,

  $\pi = 3,1415926...$ narození Jana Amose Komenského,

  $\pi = 3,1415926...$ nástup Habsburků na český trůn,

  $\pi = 3,1415926...$ počet Krokových dcer (byly-li každé dvě různé),

  $\pi = 3,1415926...$ Jiří z Poděbrad druhým rokem českým králem,

  $\pi = 3,1415926...$ stáří Karlovy univerzity v roce 1763,

  $\pi = 3,1415926...$ objevena Amerika, jejíž armáda osvobodila roku 1945 Plzeň

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717...$

  $\pi = 3,1415926...$ upálení Mistra Jana Husa,

  $\pi = 3,1415926...$ narození Jana Amose Komenského,

  $\pi = 3,1415926...$ nástup Habsburků na český trůn,

  $\pi = 3,1415926...$ počet Krokových dcer (byly-li každé dvě různé),

  $\pi = 3,1415926...$ Jiří z Poděbrad druhým rokem českým králem,

  $\pi = 3,1415926...$ stáří Karlovy univerzity v roce 1763,

  $\pi = 3,1415926...$ objevena Amerika, jejíž armáda osvobodila roku 1945 Plzeň

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717... = ?$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717...$

  $\pi = 3,1415926...$ upálení Mistra Jana Husa,

  $\pi = 3,1415926...$ narození Jana Amose Komenského,

  $\pi = 3,1415926...$ nástup Habsburků na český trůn,

  $\pi = 3,1415926...$ počet Krokových dcer (byly-li každé dvě různé),

  $\pi = 3,1415926...$ Jiří z Poděbrad druhým rokem českým králem,

  $\pi = 3,1415926...$ stáří Karlovy univerzity v roce 1763,

  $\pi = 3,1415926...$ objevena Amerika, jejíž armáda osvobodila roku 1945 Plzeň

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717... = ?$

  $\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{9}{100000} + \frac{2}{1000000} + \frac{6}{10000000} + ...$

- $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ...$

- $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ...$

  $s = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + ...$

- $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ...$

  $s = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + ... = 0 + 0 + 0 + ...$

- $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ...$

  $s = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + ... = 0 + 0 + 0 + ... = 0$

- $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ...$

  $s = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + ... = 0 + 0 + 0 + ... = 0$

  $s = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - ...$

- $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ...$

  $s = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + ... = 0 + 0 + 0 + ... = 0$

  $s = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - ... = 1 - 0 - 0 - 0 - ...$

- $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ...$

  $s = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + ... = 0 + 0 + 0 + ... = 0$

  $s = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - ... = 1 - 0 - 0 - 0 - ... = 1$

- $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ...$

  $s = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + ... = 0 + 0 + 0 + ... = 0$

  $s = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - ... = 1 - 0 - 0 - 0 - ... = 1$

  $s = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ...)$

- $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ...$

  $s = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + ... = 0 + 0 + 0 + ... = 0$

  $s = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - ... = 1 - 0 - 0 - 0 - ... = 1$

  $s = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ...) = 1 - s$

- $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ...$

$s = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + ... = 0 + 0 + 0 + ... = 0$

$s = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - ... = 1 - 0 - 0 - 0 - ... = 1$

$s = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ...) = 1 - s \Rightarrow s = \frac{1}{2}$

- $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ...$

$s = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + ... = 0 + 0 + 0 + ... = 0$

$s = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - ... = 1 - 0 - 0 - 0 - ... = 1$

$s = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ...) = 1 - s \Rightarrow s = \frac{1}{2}$

$s = ?$

Definice.

Řadou (reálných čísel) rozumíme výraz

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{1}$$

kde pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n \in \mathbb{R}$.

Definice.

Řadou (reálných čísel) rozumíme výraz

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{1}$$

kde pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n \in \mathbb{R}$.
Číslo a_n nazýváme n-tým členem řady (1),

Definice.

Řadou (reálných čísel) rozumíme výraz

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{1}$$

kde pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n \in \mathbb{R}$.
Číslo a_n nazýváme n-tým členem řady (1), posloupnost (s_n) definovanou předpisem

$$s_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

nazýváme posloupností částečných součtů řady (1).

Existuje-li

$$\lim s_n =: s \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\},$$

nazýváme ji součtem řady (1) a píšeme

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s;$$

Existuje-li

$$\lim s_n =: s \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\},$$

nazýváme ji součtem řady (1) a píšeme

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s;$$

je-li navíc $s \in \mathbb{R}$, říkáme, že řada (1) konverguje.

- Buď $q \in (-1, 1)$. Pak pro posloupnost (s_n) částečných součtů řady

$$1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^{n-1} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$$

- Buď $q \in (-1, 1)$. Pak pro posloupnost (s_n) částečných součtů řady

$$1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^{n-1} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$$

platí, že

$$s_n = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

- Buď $q \in (-1, 1)$. Pak pro posloupnost (s_n) částečných součtů řady

$$1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^{n-1} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$$

platí, že

$$s_n = \frac{q^n - 1}{q - 1} \to \frac{0 - 1}{q - 1} = \frac{1}{1 - q},$$

- Buď $q \in (-1, 1)$. Pak pro posloupnost (s_n) částečných součtů řady

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$$

platí, že

$$s_n = \frac{q^n - 1}{q - 1} \to \frac{0 - 1}{q - 1} = \frac{1}{1 - q},$$

a proto

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \frac{1}{1 - q}.$$

- Buď $q \in (-1, 1)$. Pak pro posloupnost (s_n) částečných součtů řady

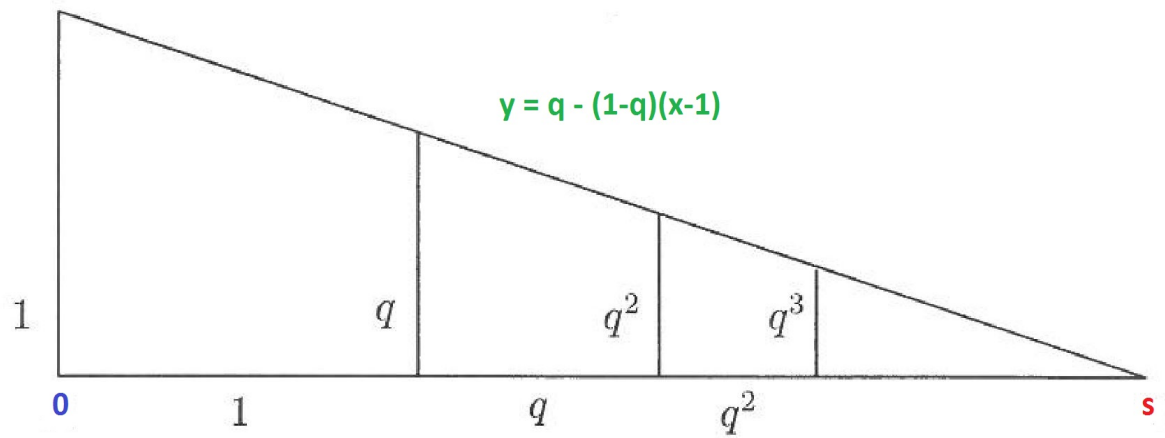
$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$$

platí, že

$$s_n = \frac{q^n - 1}{q - 1} \to \frac{0 - 1}{q - 1} = \frac{1}{1 - q},$$

a proto

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \frac{1}{1 - q}.$$



- Uvažujme řadu

$$1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}.$$

- Uvažujme řadu

$$1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+... = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}.$$

Pak posloupnost částečných součtů

$$(s_n) = 1, 0, 1, 0, 1, 0, ...$$

nemá limitu,

- Uvažujme řadu

$$1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+... = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}.$$

Pak posloupnost částečných součtů

$$(s_n) = 1, 0, 1, 0, 1, 0, ...$$

nemá limitu, a proto řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ nemá součet.

- Uvažujme řadu

$$1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+... = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}.$$

Pak posloupnost částečných součtů

$$(s_n) = 1, 0, 1, 0, 1, 0, ...$$

nemá limitu, a proto řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ nemá součet.

- Pro posloupnost (s_n) částečných součtů řady

$$1+2+3+4+...+n+... = \sum_{n=1}^{\infty} n$$

- Uvažujme řadu

$$1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}.$$

Pak posloupnost částečných součtů

$$(s_n)=1,0,1,0,1,0,\ldots$$

nemá limitu, a proto řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ nemá součet.

- Pro posloupnost (s_n) částečných součtů řady

$$1+2+3+4+\ldots+n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}n$$

platí

$$s_n=1+2+3+4+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

- Uvažujme řadu

$$1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}.$$

Pak posloupnost částečných součtů

$$(s_n)=1,0,1,0,1,0,\ldots$$

nemá limitu, a proto řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ nemá součet.

- Pro posloupnost (s_n) částečných součtů řady

$$1+2+3+4+\ldots+n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}n$$

platí

$$s_n=1+2+3+4+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)\to\infty,$$

- Uvažujme řadu

$$1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}.$$

Pak posloupnost částečných součtů

$$(s_n)=1,0,1,0,1,0,\ldots$$

nemá limitu, a proto řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ nemá součet.

- Pro posloupnost (s_n) částečných součtů řady

$$1+2+3+4+\ldots+n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}n$$

platí

$$s_n=1+2+3+4+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)\to\infty,$$

a proto

$$s=\sum_{n=1}^{\infty}n=\infty.$$

- Uvažujme řadu

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

- Uvažujme řadu

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Pak, protože pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{2^k + 1} + \frac{1}{2^k + 2} + \frac{1}{2^k + 3} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}}$$

- Uvažujme řadu

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Pak, protože pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\frac{1}{2^k+3}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}} \geq \frac{1}{2^{k+1}}\left(2^{k+1}-2^k\right)=\frac{1}{2},$$

- Uvažujme řadu

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Pak, protože pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\frac{1}{2^k+3}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}} \geq \frac{1}{2^{k+1}}\left(2^{k+1}-2^k\right)=\frac{1}{2},$$

je (Nicole Oresme, asi v r. 1350)

$$s=1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{\geq\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{8}}_{\geq\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{16}}_{\geq\frac{1}{2}}+\ldots$$

- Uvažujme řadu

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Pak, protože pro každé $k\in\mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\frac{1}{2^k+3}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}}\geq\frac{1}{2^{k+1}}\left(2^{k+1}-2^k\right)=\frac{1}{2},$$

je (Nicole Oresme, asi v r. 1350)

$$s=1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{\geq\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{8}}_{\geq\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{16}}_{\geq\frac{1}{2}}+\ldots=\infty.$$

- Uvažujme řadu

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Pak, protože pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\frac{1}{2^k+3}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}} \geq \frac{1}{2^{k+1}}\left(2^{k+1}-2^k\right)=\frac{1}{2},$$

je (Nicole Oresme, asi v r. 1350)

$$s=1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{\geq\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{8}}_{\geq\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{16}}_{\geq\frac{1}{2}}+\ldots=\infty.$$

Jinak. Předpokládejme sporem, že

$$s_n \to s \in \mathbb{R}$$

- Uvažujme řadu

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Pak, protože pro každé $k\in\mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\frac{1}{2^k+3}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}}\geq\frac{1}{2^{k+1}}\left(2^{k+1}-2^k\right)=\frac{1}{2},$$

je (Nicole Oresme, asi v r. 1350)

$$s=1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{\geq\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{8}}_{\geq\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{16}}_{\geq\frac{1}{2}}+\ldots=\infty.$$

Jinak. Předpokládejme sporem, že

$$s_n\to s\in\mathbb{R}\ \Rightarrow\ s_{2n}-s_n\to s-s=0.$$

- Uvažujme řadu

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Pak, protože pro každé $k\in\mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\frac{1}{2^k+3}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}}\geq\frac{1}{2^{k+1}}\left(2^{k+1}-2^k\right)=\frac{1}{2},$$

je (Nicole Oresme, asi v r. 1350)

$$s=1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{\geq\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{8}}_{\geq\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{16}}_{\geq\frac{1}{2}}+\ldots=\infty.$$

Jinak. Předpokládejme sporem, že

$$s_n\to s\in\mathbb{R}\ \Rightarrow\ s_{2n}-s_n\to s-s=0.$$

Současně ale

$$s_{2n}-s_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$$

- Uvažujme řadu

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Pak, protože pro každé $k\in\mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\frac{1}{2^k+3}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}}\geq\frac{1}{2^{k+1}}\left(2^{k+1}-2^k\right)=\frac{1}{2},$$

je (Nicole Oresme, asi v r. 1350)

$$s=1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{\geq\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{8}}_{\geq\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{16}}_{\geq\frac{1}{2}}+\ldots=\infty.$$

Jinak. Předpokládejme sporem, že

$$s_n\to s\in\mathbb{R}\ \Rightarrow\ s_{2n}-s_n\to s-s=0.$$

Současně ale

$$s_{2n}-s_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\geq\frac{1}{2n}(2n-n)=\frac{1}{2},$$

a to je spor.

- Uvažujme řadu

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

- Uvažujme řadu

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Pak, protože pro každé $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ platí

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k},$$

- Uvažujme řadu

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Pak, protože pro každé $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ platí

$$\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k},$$

je

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<1+\frac{1}{2\cdot 1}+\frac{1}{3\cdot 2}+\frac{1}{4\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n-1)}$$

- Uvažujme řadu

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Pak, protože pro každé $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ platí

$$\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k},$$

je

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<1+\frac{1}{2\cdot 1}+\frac{1}{3\cdot 2}+\frac{1}{4\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n-1)}=$$

$$=1+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$

- Uvažujme řadu

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Pak, protože pro každé $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ platí

$$\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k},$$

je

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<1+\frac{1}{2\cdot 1}+\frac{1}{3\cdot 2}+\frac{1}{4\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n-1)}=$$

$$=1+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=2-\frac{1}{n},$$

- Uvažujme řadu

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Pak, protože pro každé $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ platí

$$\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k},$$

je

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<1+\frac{1}{2\cdot 1}+\frac{1}{3\cdot 2}+\frac{1}{4\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n-1)}=$$

$$=1+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=2-\frac{1}{n},$$

a proto

$$2\geq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

- Uvažujme řadu

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Pak, protože pro každé $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ platí

$$\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k},$$

je

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<1+\frac{1}{2\cdot 1}+\frac{1}{3\cdot 2}+\frac{1}{4\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n-1)}=$$

$$=1+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=2-\frac{1}{n},$$

a proto

$$2\geq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

- Uvažujme řadu

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Pak, protože pro každé $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ platí

$$\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k},$$

je

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<1+\frac{1}{2\cdot 1}+\frac{1}{3\cdot 2}+\frac{1}{4\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n-1)}=$$

$$=1+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=2-\frac{1}{n},$$

a proto

$$2\geq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\doteq 1,6449\ldots\ .$$

- Uvažujme řadu

$$\sum_{\substack{n=1 \\ \text{„}6 \notin n\text{“}}}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

- Uvažujme řadu

$$\sum_{\substack{n=1 \\ \text{„}6 \notin n\text{“}}}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Pak

$$s = \sum_{\substack{n=1 \\ \text{„}6 \notin n\text{“}}}^{\infty} \frac{1}{n} \leq 9 \cdot 1 + 9^2 \cdot \frac{1}{10} + 9^3 \cdot \frac{1}{100} + \ldots =$$

- Uvažujme řadu

$$\sum_{\substack{n=1 \\ \text{„}6 \notin n\text{“}}}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Pak

$$s = \sum_{\substack{n=1 \\ \text{„}6 \notin n\text{“}}}^{\infty} \frac{1}{n} \leq 9 \cdot 1 + 9^2 \cdot \frac{1}{10} + 9^3 \cdot \frac{1}{100} + \ldots =$$

$$= 9 \cdot \left(1 + \frac{9}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 + \ldots\right) = 90.$$

- Nyní dokažme, že

$$\sum_{\substack{p \in \mathbb{N} \\ p \text{ je prvočíslo}}} \frac{1}{p}$$

- Nyní dokažme, že

$$\sum_{\substack{p \in \mathbb{N} \\ p \text{ je prvočíslo}}} \frac{1}{p} = \infty.$$

- Nyní dokažme, že

$$\sum_{\substack{p \in \mathbb{N} \\ p \text{ je prvočíslo}}} \frac{1}{p} = \infty.$$

Buď n libovolné přirozené číslo a buď $p_1, p_2, ..., p_k$ právě všechna prvočísla menší nebo rovna n. Pak zřejmě existuje $\alpha \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \leq \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + ... + \frac{1}{p_1^\alpha}\right)\left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + ... + \frac{1}{p_2^\alpha}\right) \cdots$$

$$\cdots \left(1 + \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k^2} + ... + \frac{1}{p_k^\alpha}\right) \leq$$

- Nyní dokažme, že

$$\sum_{\substack{p \in \mathbb{N} \\ p \text{ je prvočíslo}}} \frac{1}{p} = \infty.$$

Buď n libovolné přirozené číslo a buď $p_1, p_2, ..., p_k$ právě všechna prvočísla menší nebo rovna n. Pak zřejmě existuje $\alpha \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \leq \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + ... + \frac{1}{p_1^\alpha}\right)\left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + ... + \frac{1}{p_2^\alpha}\right) \cdots$$

$$\cdots \left(1 + \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k^2} + ... + \frac{1}{p_k^\alpha}\right) \leq$$

$$\leq \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + ...\right)\left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + ...\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k^2} + ...\right) \leq$$

- Nyní dokažme, že

$$\sum_{\substack{p \in \mathbb{N} \\ p \text{ je prvočíslo}}} \frac{1}{p} = \infty.$$

Buď n libovolné přirozené číslo a buď $p_1, p_2, ..., p_k$ právě všechna prvočísla menší nebo rovna n. Pak zřejmě existuje $\alpha \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \leq \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + ... + \frac{1}{p_1^\alpha}\right)\left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + ... + \frac{1}{p_2^\alpha}\right) \cdots$$

$$\cdots \left(1 + \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k^2} + ... + \frac{1}{p_k^\alpha}\right) \leq$$

$$\leq \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + ...\right)\left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + ...\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k^2} + ...\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{1 - \frac{1}{p_1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p_2}} \cdots \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}$$

- Nyní dokažme, že

$$\sum_{\substack{p \in \mathbb{N} \\ p \text{ je prvočíslo}}} \frac{1}{p} = \infty.$$

Buď n libovolné přirozené číslo a buď $p_1, p_2, ..., p_k$ právě všechna prvočísla menší nebo rovna n. Pak zřejmě existuje $\alpha \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \leq \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + ... + \frac{1}{p_1^\alpha}\right)\left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + ... + \frac{1}{p_2^\alpha}\right) \cdots$$

$$\cdots \left(1 + \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k^2} + ... + \frac{1}{p_k^\alpha}\right) \leq$$

$$\leq \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + ...\right)\left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + ...\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k^2} + ...\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{1 - \frac{1}{p_1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p_2}} \cdots \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} = \prod_{j=1}^{k} \left(\frac{p_j}{p_j - 1}\right)$$

- Nyní dokažme, že

$$\sum_{\substack{p \in \mathbb{N} \\ p \text{ je prvočíslo}}} \frac{1}{p} = \infty.$$

Buď n libovolné přirozené číslo a buď $p_1, p_2, ..., p_k$ právě všechna prvočísla menší nebo rovna n. Pak zřejmě existuje $\alpha \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \leq \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + ... + \frac{1}{p_1^\alpha}\right)\left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + ... + \frac{1}{p_2^\alpha}\right) \cdots$$

$$\cdots \left(1 + \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k^2} + ... + \frac{1}{p_k^\alpha}\right) \leq$$

$$\leq \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + ...\right)\left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + ...\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k^2} + ...\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{1 - \frac{1}{p_1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p_2}} \cdots \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} = \prod_{j=1}^{k} \left(\frac{p_j}{p_j - 1}\right) = \prod_{j=1}^{k} \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \leq \prod_{j=1}^{k} \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \leq \prod_{j=1}^{k} \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right) \leq \ln\left(\prod_{j=1}^{k} \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right)\right)$$

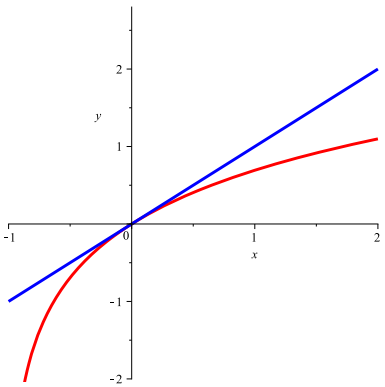
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \leq \prod_{j=1}^{k} \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right) \leq \ln\left(\prod_{j=1}^{k} \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right)\right) = \sum_{j=1}^{k} \ln\left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \leq \prod_{j=1}^{k} \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right) \leq \ln\left(\prod_{j=1}^{k} \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right)\right) = \sum_{j=1}^{k} \ln\left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right)$$

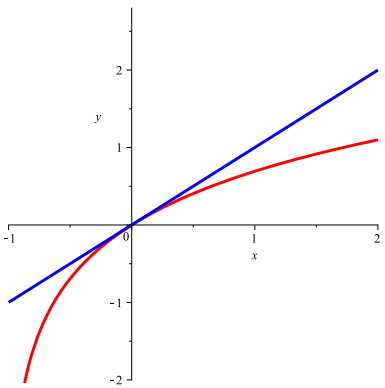
Nyní si všimněme, že pro každé $x > -1$ je $\ln(1 + x) \leq x$,



$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \leq \prod_{j=1}^{k} \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right) \leq \ln\left(\prod_{j=1}^{k} \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right)\right) = \sum_{j=1}^{k} \ln\left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right)$$

Nyní si všimněme, že pro každé $x > -1$ je $\ln(1 + x) \leq x$,

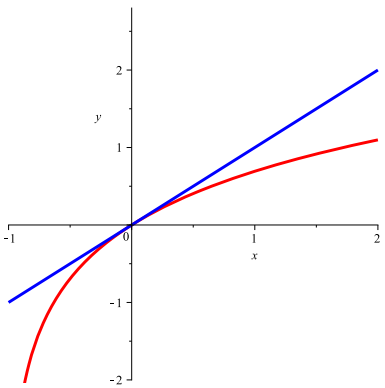


a proto $$\ln\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right) \leq \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{p_j - 1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \leq \prod_{j=1}^{k} \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right) \leq \ln\left(\prod_{j=1}^{k} \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right)\right) = \sum_{j=1}^{k} \ln\left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right)$$

Nyní si všimněme, že pro každé $x > -1$ je $\ln(1 + x) \leq x$,

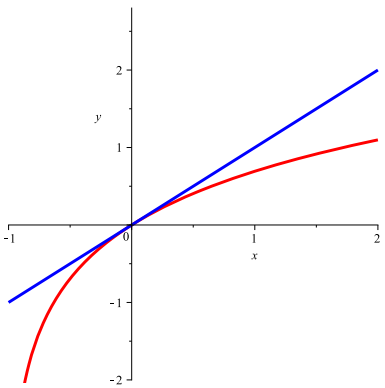


a proto $$\ln\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right) \leq \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{p_j - 1} \leq 2\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{p_j}.$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \leq \prod_{j=1}^{k} \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right) \leq \ln\left(\prod_{j=1}^{k} \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right)\right) = \sum_{j=1}^{k} \ln\left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right)$$

Nyní si všimněme, že pro každé $x > -1$ je $\ln(1 + x) \leq x$,



a proto $$\ln\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right) \leq \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{p_j - 1} \leq 2\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{p_j}.$$

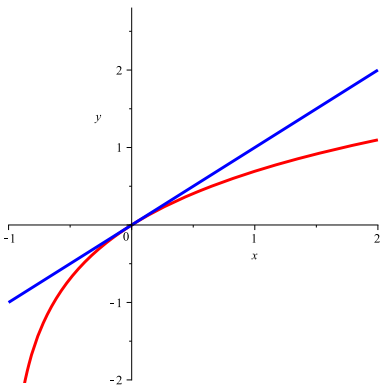
Odtud již snadno plyne

$$\sum_{\substack{p \in \mathbb{N} \\ p \text{ je prvočíslo}}} \frac{1}{p} \geq \lim\left[\frac{1}{2} \ln\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right)\right]$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \leq \prod_{j=1}^{k} \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right) \leq \ln\left(\prod_{j=1}^{k} \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right)\right) = \sum_{j=1}^{k} \ln\left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right)$$

Nyní si všimněme, že pro každé $x > -1$ je $\ln(1 + x) \leq x$,



a proto $$\ln\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right) \leq \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{p_j - 1} \leq 2\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{p_j}.$$

Odtud již snadno plyne

$$\sum_{\substack{p \in \mathbb{N} \\ p \text{ je prvočíslo}}} \frac{1}{p} \geq \lim\left[\frac{1}{2} \ln\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right)\right] = \infty.$$

Věta.

Posloupnost

$$c_n := \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n}\right) - \ln n$$

je konvergentní,

Věta.

Posloupnost

$$c_n := \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n}\right) - \ln n$$

je konvergentní, tzn. že existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim c_n = c$.

Věta.

Posloupnost

$$c_n := \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n}\right) - \ln n$$

je konvergentní, tzn. že existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim c_n = c$.

$$\left(\begin{array}{c} c \doteq 0,577215664901532860606512090082402431042159335939 92 ... \\ ... \text{ Eulerova konstanta} \end{array}\right)$$

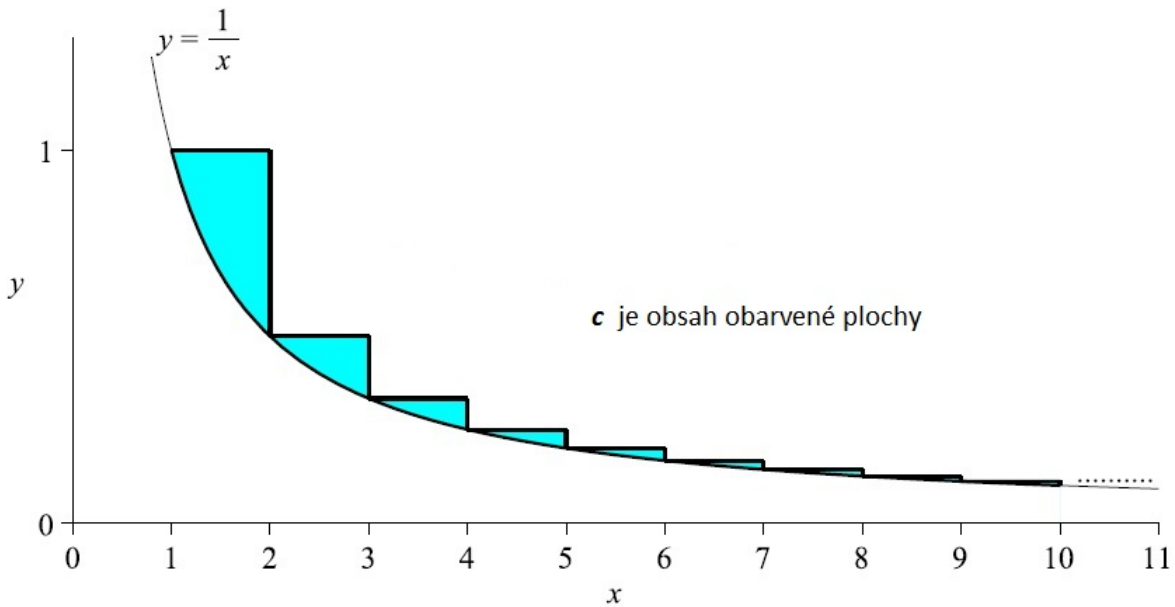
Věta.

Posloupnost

$$c_n := \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}\right) - \ln n$$

je konvergentní, tzn. že existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim c_n = c$.

$$\left(c \doteq 0,577215664901532860606512090082402431042159335939 92\ldots \right.$$
$$\left. \ldots \text{ Eulerova konstanta} \right)$$



- Určeme součet (konvergentní) řady

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

- Určeme součet (konvergentní) řady

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

$$s_{2n}=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

- Určeme součet (konvergentní) řady

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

$$s_{2n}=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

- Určeme součet (konvergentní) řady

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

$$s_{2n}=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

- Určeme součet (konvergentní) řady

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

$$s_{2n}=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=$$

$$c_n:=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}\right)-\ln n$$

- Určeme součet (konvergentní) řady

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

$$s_{2n}=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=$$

$$=(c_{2n}+\ln(2n))-(c_n+\ln n)$$

- Určeme součet (konvergentní) řady

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

$$s_{2n}=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=$$

$$=(c_{2n}+\ln(2n))-(c_n+\ln n)=c_{2n}-c_n+\ln 2,$$

- Určeme součet (konvergentní) řady

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

$$s_{2n}=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=$$

$$=(c_{2n}+\ln(2n))-(c_n+\ln n)=c_{2n}-c_n+\ln 2,$$

a proto ($c_n\to c\in\mathbb{R}$):

$$s_{2n}\to c-c+\ln 2=\ln 2$$

- Určeme součet (konvergentní) řady

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

$$s_{2n}=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=$$

$$=(c_{2n}+\ln(2n))-(c_n+\ln n)=c_{2n}-c_n+\ln 2,$$

a proto ($c_n\to c\in\mathbb{R}$):

$$s_{2n}\to c-c+\ln 2=\ln 2$$

$$s_{2n+1}=s_{2n}+\frac{1}{2n+1}\to\ln 2+0=\ln 2$$

- Určeme součet (konvergentní) řady

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

$$s_{2n}=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=$$

$$=(c_{2n}+\ln(2n))-(c_n+\ln n)=c_{2n}-c_n+\ln 2,$$

a proto ($c_n\to c\in\mathbb{R}$):

$$\left.\begin{aligned} s_{2n} &\to c-c+\ln 2=\ln 2\\ s_{2n+1}=s_{2n}+\frac{1}{2n+1} &\to \ln 2+0=\ln 2\end{aligned}\right\}\ \Rightarrow\ s_n\to\ln 2$$

- Určeme součet (konvergentní) řady

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

$$s_{2n}=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=$$

$$=(c_{2n}+\ln(2n))-(c_n+\ln n)=c_{2n}-c_n+\ln 2,$$

a proto ($c_n\to c\in\mathbb{R}$):

$$\left.\begin{aligned} s_{2n} &\to c-c+\ln 2=\ln 2\\ s_{2n+1}=s_{2n}+\frac{1}{2n+1} &\to \ln 2+0=\ln 2\end{aligned}\right\}\ \Rightarrow\ s_n\to\ln 2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

- Zjistili jsme, že

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots=\ln 2 \doteq 0,6931471806.$$

- Zjistili jsme, že

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots=\ln 2 \doteq 0,6931471806.$$

- Podobnou technikou lze dokázat, že

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\ldots$$

- Zjistili jsme, že

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots=\ln 2 \doteq 0,6931471806.$$

- Podobnou technikou lze dokázat, že

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\ldots=\frac{3}{2}\ln 2 \doteq 1.039720771.$$

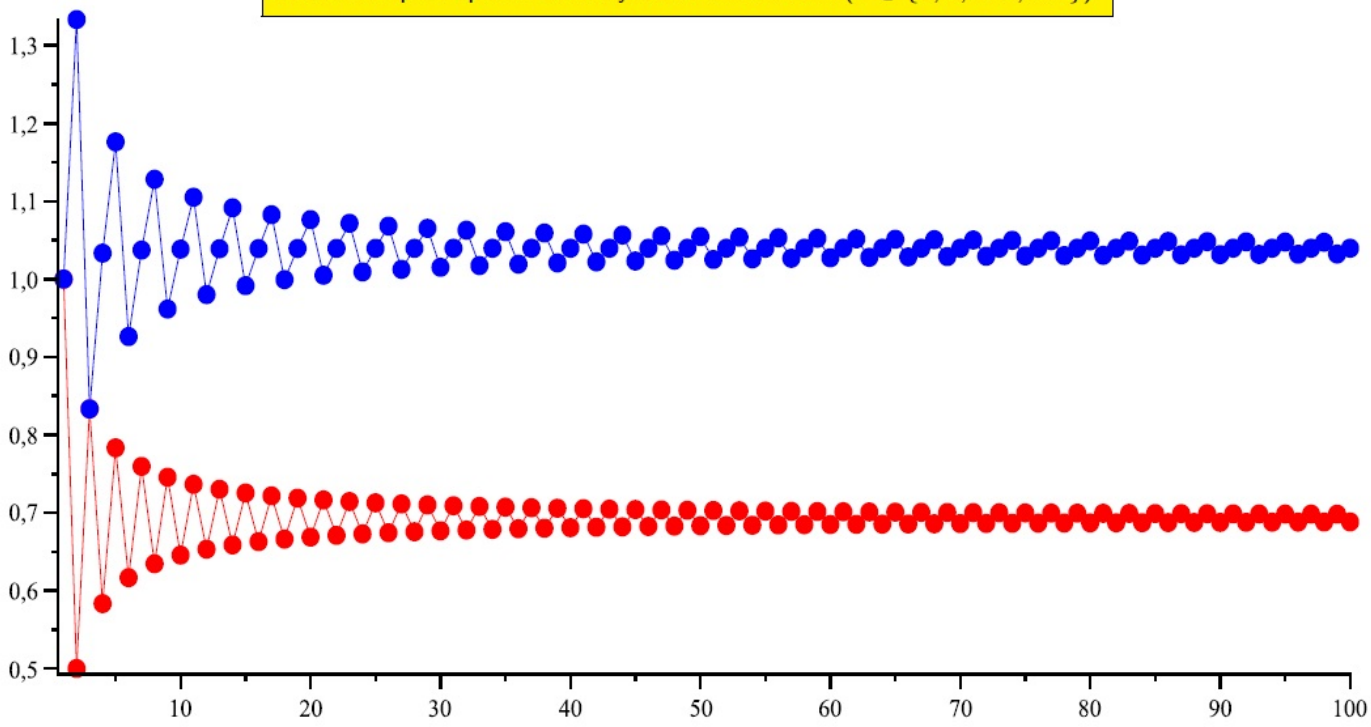
- Zjistili jsme, že

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots=\ln 2\doteq 0,6931471806.$$

- Podobnou technikou lze dokázat, že

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\ldots=\frac{3}{2}\ln 2\doteq 1.039720771.$$

Znázornění posloupnosti částečných součtů obou řad ($n\in\{1,2,\ldots,100\}$):



Věta.

Nechť

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}\,, \ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty.$$

Věta.

Nechť

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}\,, \ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty.$$

Pak

- pro každé $s \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ existuje bijekce $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taková, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = s;$$

Věta.

Nechť

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}\,, \ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty.$$

Pak

- pro každé $s \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ existuje bijekce $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taková, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = s;$$

- existuje bijekce $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taková, že součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\psi(n)}$ neexistuje.

Věta.

Nechť

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty.$$

Pak

- pro každé $s \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ existuje bijekce $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taková, že

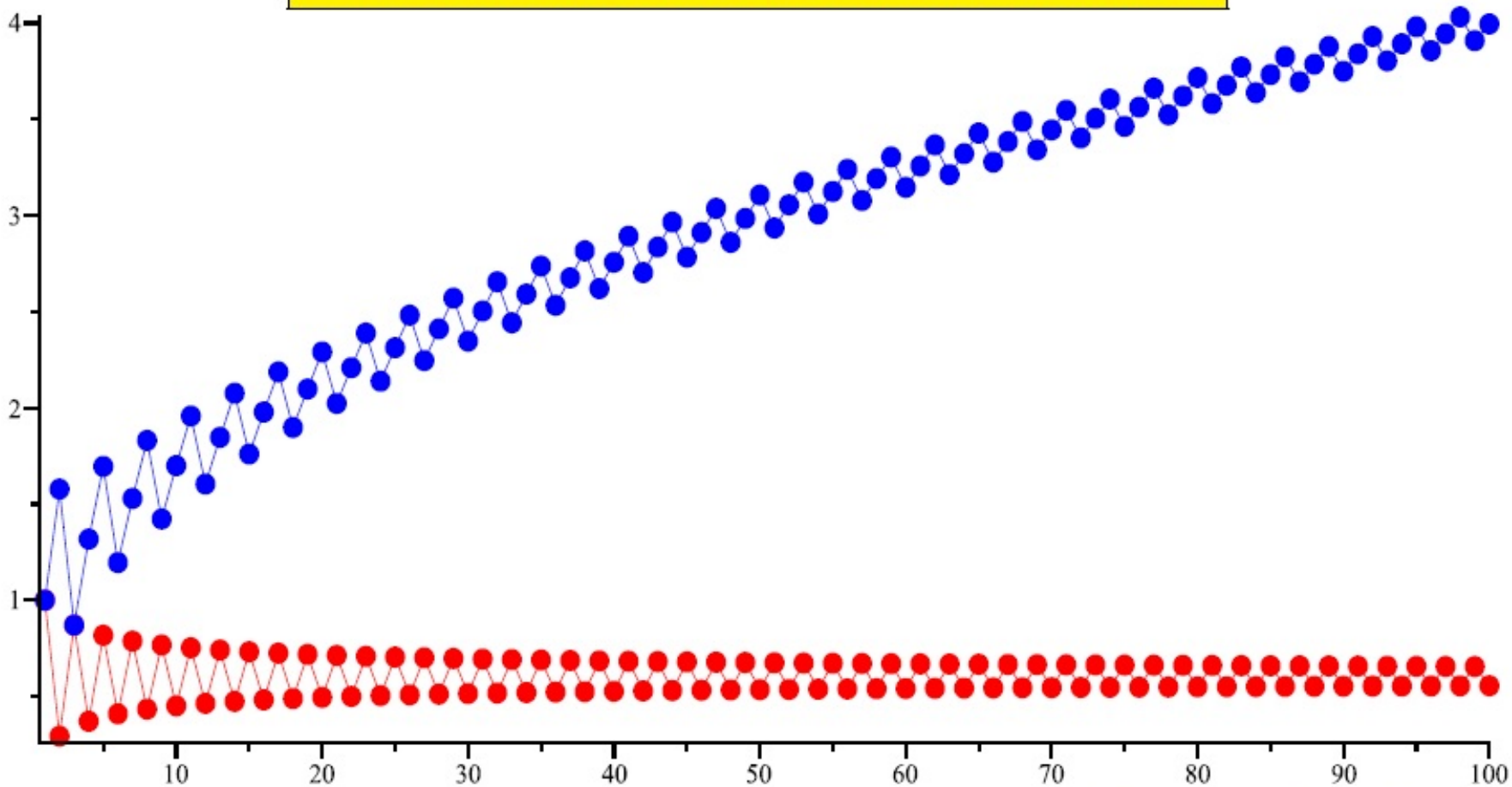
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = s;$$

- existuje bijekce $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taková, že součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\psi(n)}$ neexistuje.

(Vhodným přerovnáním neabsolutně konvergentní řady lze získat jakýkoliv výsledek.)

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \dots \neq 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \dots$$

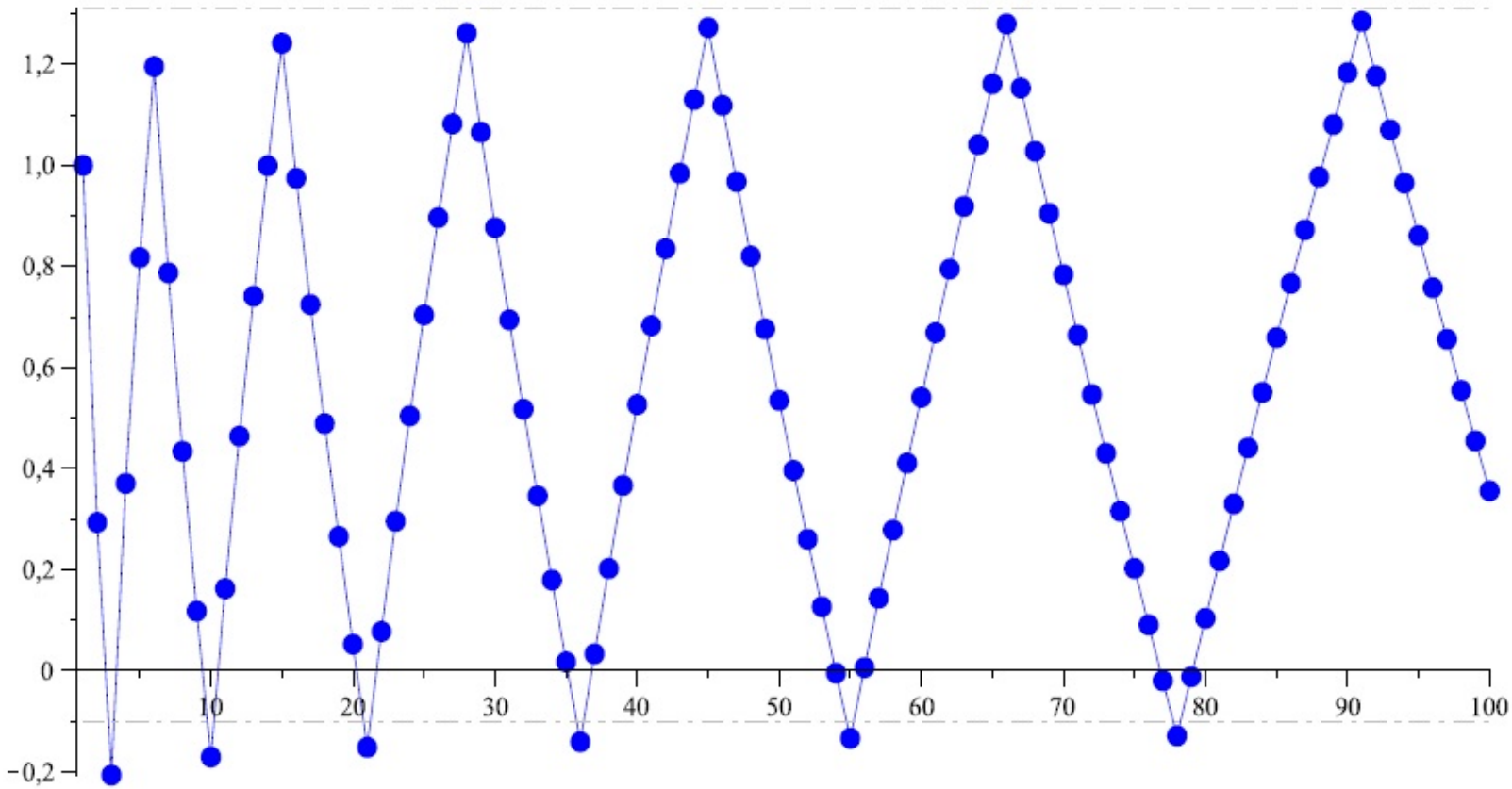
Znázornění posloupnosti částečných součtů obou řad ($n \in \{1, 2, \dots, 100\}$):



(další přerovnání řady $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{8}}+\frac{1}{\sqrt{9}}-\frac{1}{\sqrt{10}}+\dots$)

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{8}}-\frac{1}{\sqrt{10}}-\frac{1}{\sqrt{12}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{11}}+\frac{1}{\sqrt{13}}+\frac{1}{\sqrt{15}}+\frac{1}{\sqrt{17}}-\dots$$

Znázornění posloupnosti částečných součtů přerovnané řady ($n \in \{1, 2, \dots, 100\}$):



Věta.

Nechť

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \in \mathbb{R}$$

Věta.

Nechť

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \in \mathbb{R}$$

a buď

$$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ bijekce.}$$

Věta.

Nechť

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \in \mathbb{R}$$

a buď

$$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ bijekce.}$$

Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$$

Věta.

Nechť

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \in \mathbb{R}$$

a buď

$$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ bijekce.}$$

Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} \in \mathbb{R}.$$

Věta.

Nechť

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \in \mathbb{R}$$

a buď

$$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ bijekce.}$$

Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} \in \mathbb{R}.$$

(Součet absolutně konvergentní řady a řady vzniklé jejím přerovnáním je stejný.)

- $\left(\frac{9}{10}\right)^1 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 - \left(\frac{9}{10}\right)^4 + \left(\frac{9}{10}\right)^5 - \left(\frac{9}{10}\right)^6 + \ldots$

- $\left(\frac{9}{10}\right)^1 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 - \left(\frac{9}{10}\right)^4 + \left(\frac{9}{10}\right)^5 - \left(\frac{9}{10}\right)^6 + \ldots = \frac{9}{19} \doteq 0,4736842105$

- $\left(\frac{9}{10}\right)^1 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 - \left(\frac{9}{10}\right)^4 + \left(\frac{9}{10}\right)^5 - \left(\frac{9}{10}\right)^6 + \ldots = \frac{9}{19} \doteq 0,4736842105$

  $\left(\frac{9}{10}\right)^1 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^5 + \left(\frac{9}{10}\right)^7 - \left(\frac{9}{10}\right)^4 + \ldots$

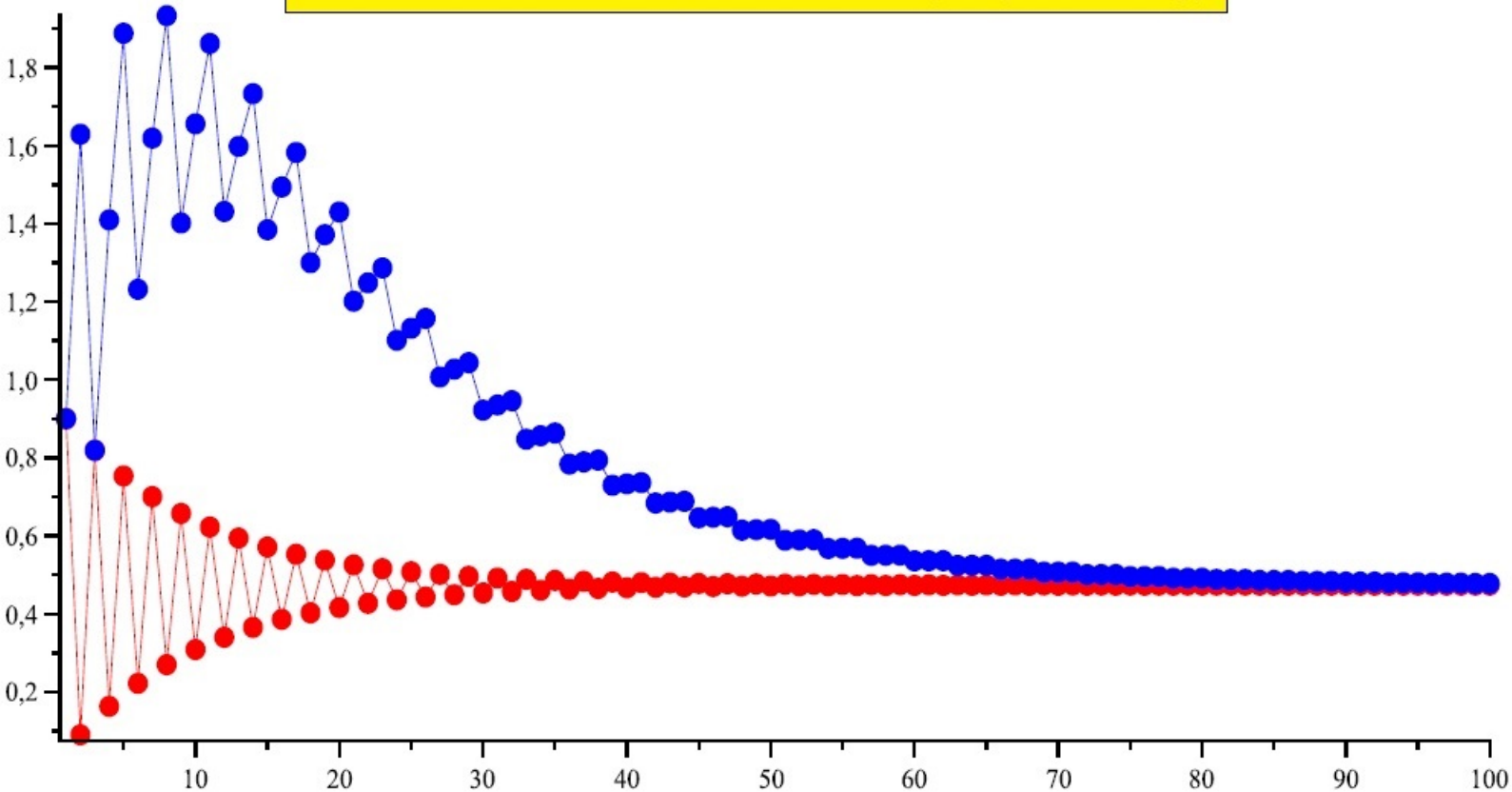
- $\left(\frac{9}{10}\right)^1 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 - \left(\frac{9}{10}\right)^4 + \left(\frac{9}{10}\right)^5 - \left(\frac{9}{10}\right)^6 + \ldots = \frac{9}{19} \doteq 0,4736842105$

  $\left(\frac{9}{10}\right)^1 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^5 + \left(\frac{9}{10}\right)^7 - \left(\frac{9}{10}\right)^4 + \ldots = \frac{9}{19}$

- $\left(\frac{9}{10}\right)^1 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 - \left(\frac{9}{10}\right)^4 + \left(\frac{9}{10}\right)^5 - \left(\frac{9}{10}\right)^6 + \ldots = \frac{9}{19} \doteq 0,4736842105$

$\left(\frac{9}{10}\right)^1 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^5 + \left(\frac{9}{10}\right)^7 - \left(\frac{9}{10}\right)^4 + \ldots = \frac{9}{19}$

Znázornění posloupnosti částečných součtů obou řad ($n \in \{1, 2, \ldots, 100\}$):



Literatura a zdroje

J. Veselý
Matematická analýza pro učitele
Matfyzpress, Praha 1997

Literatura a zdroje

J. Veselý
Matematická analýza pro učitele
Matfyzpress, Praha 1997

E. Calda, HgS
Základy patamatematiky
Prometheus, Praha 2005

Literatura a zdroje

J. Veselý
Matematická analýza pro učitele
Matfyzpress, Praha 1997

E. Calda, HgS
Základy patamatematiky
Prometheus, Praha 2005

J. Bouchala, P. Vodstrčil
O přerovnávání řad
http://am.vsb.cz/osma

Literatura a zdroje

J. Veselý
Matematická analýza pro učitele
Matfyzpress, Praha 1997

E. Calda, HgS
Základy patamatematiky
Prometheus, Praha 2005

J. Bouchala, P. Vodstrčil
O přerovnávání řad
http://am.vsb.cz/osma

P. Vodstrčil
... ten, co umí (nejen) s Maplem
Katedra aplikované matematiky (už nějaký čas)