Poznámka k variačním metodám aneb od integrálů k derivacím a zpět

Jiří Bouchala

Katedra aplikované matematiky

jiri.bouchala@vsb.cz

21. března 2006

Rovnice vedení tepla

$$\begin{cases} -\left(p(x)y'\right)' + q(x)y = f(x) \ \text{ v } \ (0,2), \\ \qquad y(0) = y(2) = 0. \end{cases}$$

Tato rovnice popisuje (nejsou-li teploty příliš vysoké) proces *vedení tepla* v tenké tyči; přičemž

- řešení $y = y(x)$ ... teplota v příčném řezu,
- p ... charakterizuje materiál tyče (souvisí s koeficientem tepelné vodivosti),
- q ... charakterizuje výměnu tepla s okolním prostředím (souvisí s koeficientem přestupu tepla),
- f ... souvisí s tepelnými zdroji uvnitř tyče, teplotou vně pláště, s koeficientem přestupu tepla.

Uveďme dva – fyzikálně rozumné – případy, kdy neexistuje klasické řešení naší úlohy:

$$\begin{cases} -y'' = f(x) \text{ v } (0,2), \\ y(0) = y(2) = 0; \end{cases} \quad \text{kde } f(x) := \begin{cases} 2 \text{ pro } x \in \langle 0,1), \\ -2 \text{ pro } x \in \langle 1,2 \rangle \end{cases}$$

(rozložení zdrojů není spojité).

$$\begin{cases} -\big(p(x)y'\big)' = 1 \text{ v } (0,2), \\ y(0) = y(2) = 0; \end{cases} \quad \text{kde } p(x) := \begin{cases} 1 \text{ pro } x \in \langle 0,1), \\ 2 \text{ pro } x \in \langle 1,2 \rangle \end{cases}$$

(tyč je složena ze dvou různých materiálů).

Jak tyto úlohy řešit?

Nabízí se možnost uvažovat odděleně intervaly $(0,1)$ a $(1,2)$. Ukažme si vše na prvním z příkladů.

$$\begin{cases} -y_1'' = 2 \ \text{ v } \ (0,1), \\ y_1(0) = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} -y_2'' = -2 \ \text{ v } \ (1,2), \\ y_2(2) = 0. \end{cases}$$

$$y_1(x) = c_1 + c_2 x - x^2, \qquad y_2(x) = d_1 + d_2 x + x^2,$$

$$y_1(0) = c_1 = 0, \qquad y_2(2) = d_1 + 2d_2 + 4 = 0,$$

takže: $y_1(x) = c_2 x - x^2$; takže: $y_2(x) = -4 - 2d_2 + d_2 x + x^2$.

Nyní řešení na jednotlivých intervalech "složíme":

$$y(x) := \begin{cases} y_1(x) = c_2 x - x^2 \ \text{ pro } \ x \in (0,1), \\ y_2(x) = -4 - 2d_2 + d_2 x + x^2 \ \text{ pro } \ x \in (1,2). \end{cases}$$

$$c_2 = ?, \ d_2 = ?$$

$$y(x) := \begin{cases} y_1(x) = c_2 x - x^2 \ \text{ pro } \ x \in (0,1), \\ y_2(x) = -4 - 2d_2 + d_2 x + x^2 \ \text{ pro } \ x \in (1,2). \end{cases}$$

Fyzikálně přirozený požadavek spojitosti řešení v bodě 1,
tj. podmínka $y(1-) = y(1+)$, dává:

$$y(1-) = y_1(1-) = \underline{c_2 - 1} = y(1+) = y_2(1+) = \underline{-4 - 2d_2 + d_2 + 1},$$

tzn.

$$\boxed{c_2 = -2 - d_2,}$$

ale ve vší úplnosti bude jednoznačné řešení určeno teprve tzv. podmínkou přechodu: $p(1-)y'(1-) = p(1+)y'(1+)$ (podle fyzikálních zákonitostí musí množství substance, která "vteče" do bodu 1, odpovídat množství substance, která z bodu 1 "vyteče").

V našem případě má tato podmínka tvar $y'(1-) = y'(1+)$, a proto
$y'(1-) = \underline{c_2 - 2} = y'(1+) = \underline{d_2 + 2}$, neboli $\boxed{c_2 = 4 + d_2.}$

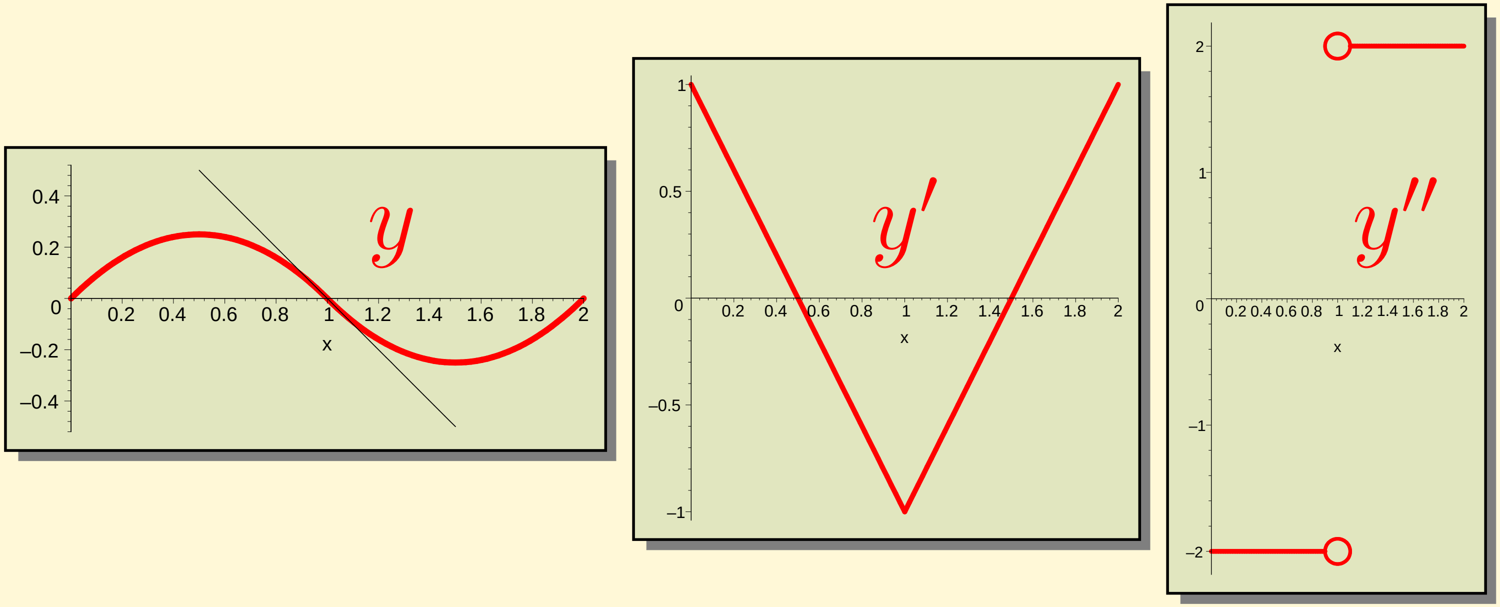
Rovnice vedení tepla

- okrajová úloha a její klasické řešení
- **podmínka přechodu**
- zobecněné řešení.

Literatura.

Teď už snadno dopočítáme, že $c_2 = 1$ a $d_2 = -3$, a proto

$$y(x) := \begin{cases} x - x^2 \ \text{pro} \ x \in \langle 0,1\rangle, \\ 2 - 3x + x^2 \ \text{pro} \ x \in \langle 1,2\rangle. \end{cases}$$



Předpokládejme, že funkce u je klasickým řešením okrajové úlohy

$$\boxed{\begin{cases} -u'' = f(x) \ \text{v} \ \langle 0, 2\rangle, \\ u(0) = u(2) = 0. \end{cases}}$$

To znamená, že

$$u \in C^2(\langle 0, 2\rangle),\ u(0) = u(2) = 0,\ \forall x \in \langle 0, 2\rangle :\ -u''(x) = f(x).$$

Pak pro každou funkci $v \in C^1(\langle 0, 2\rangle)$ takovou, že $v(0) = v(2) = 0$, platí:

$$\int_0^2 -u''(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Upravíme-li integrál na levé straně pomocí per partes:

$$\int_0^2 -u''(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [-u'(x)v(x)]_0^2 + \int_0^2 u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x,$$

zjistíme, že (klasické) řešení u okrajové úlohy

$$\boxed{\begin{cases} -u'' = f(x) \text{ v } \langle 0, 2\rangle, \\ u(0) = u(2) = 0. \end{cases}}$$

musí pro každou výše popsanou funkci v splňovat rovnost:

$$\boxed{\int_0^2 u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)v(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Tento vztah, ve kterém se – všimněme si! – nevyskytuje druhá derivace řešení u, lze vzít za základ definice slabého řešení příslušné okrajové úlohy.

Mimochodem: velmi často je výsledkem fyzikálních úvah (pomocí nichž se snažíme sestavit model – rovnici popisující nějaký jev) právě analogická "integrální rovnice". K diferenciální rovnici se dostáváme za dodatečného předpokladu hladkosti řešení (v našem případě: $u \in C^2(\langle 0, 2\rangle)$). Definovat řešení daného problému pomocí té integrální rovnice je tak v jistém smyslu přirozenější a správnější.

Všimněme si ještě jedné věci: ve vztahu

$$\boxed{\int_0^2 u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)v(x)\,\mathrm{d}x.}$$

je již "zakódována" dříve zmíněná podmínka přechodu.

Skutečně – dosadíme-li do tohoto vztahu

$$f(x) := \begin{cases} 2 \text{ pro } x \in \langle 0,1), \\ -2 \text{ pro } x \in \langle 1,2\rangle, \end{cases}$$

$$u(x) := y(x) = \begin{cases} c_2 x - x^2 \text{ pro } x \in (0,1), \\ -4 - 2d_2 + d_2 x + x^2 \text{ pro } x \in (1,2), \end{cases}$$

dostaneme

$$\int_0^1 (c_2 - 2x)v'(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (d_2 + 2x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 2v(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 -2v(x)\,\mathrm{d}x,$$

a protože

- $\int_0^1 2v(x)\,\mathrm{d}x = [2xv(x)]_0^1 - \int_0^1 2xv'(x)\,\mathrm{d}x = 2v(1) - \int_0^1 2xv'(x)\,\mathrm{d}x,$
- $\int_1^2 -2v(x)\,\mathrm{d}x = [-2xv(x)]_1^2 + \int_1^2 2xv'(x)\,\mathrm{d}x = 2v(1) + \int_1^2 2xv'(x)\,\mathrm{d}x,$

plyne ze vztahu

$$\int_0^1 (c_2 - 2x)v'(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (d_2 + 2x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 2v(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 -2v(x)\,\mathrm{d}x,$$

že

$$\int_0^1 (c_2 - 2x + 2x)v'(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (d_2 + 2x - 2x)v'(x)\,\mathrm{d}x = 4v(1),$$

$$c_2[v(x)]_0^1 + d_2[v(x)]_1^2 = 4v(1),$$

$$c_2 v(1) - d_2 v(1) = 4v(1);$$

a protože funkci v lze volit tak, aby $v(1) \neq 0$, plyne odtud (naše) podmínka přechodu

$$\boxed{c_2 = 4 + d_2.}$$

Rovnice vedení tepla

- okrajová úloha a její klasické řešení
- podmínka přechodu
- **zobecněné řešení.**

Literatura.

Stanislav Míka, Alois Kufner:
Okrajové úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice,
SNTL, Praha, 1981.

Děkuji Vám za pozornost!