VARIAČNÍ METODY

JIŘÍ BOUCHALA

Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Jiří Bouchala
Variační metody

ISBN

7. května 2012, 18:15

Předmluva

Výslednou podobu těchto skript ovlivnili mnozí z mých učitelů, kolegů i studentů. Všem jsem jim upřímně vděčný.

Speciálně chci poděkovat Ing. Honzovi Zapletalovi, který mi pomohl s přepsáním rukopisu, a Mgr. Petrovi Vodstrčilovi, Ph.D., který celý text pečlivě přečetl a svými připomínkami ho pomohl vylepšit.

Přál bych si, aby si čtenáři četli v tomto textu se stejným zaujetím, s jakým jsem jej psal. A prosím je o shovívavost a sdělení všech připomínek.[1]

Další v rámci projektu *Matematika pro inženýry 21. století* připravované výukové materiály lze najít na stránkách `http://mi21.vsb.cz/`. Podívejte se na ně!

V Orlové, 2012 Jiří Bouchala

[1] Všechny připomínky (výhrady, komentáře, doporučení, výhružky a dary) zasílejte (prosím) na moji e-mailovou adresu: `jiri.bouchala@vsb.cz`

Obsah

Kapitola 1

Prolog. Proč zobecňovat pojem klasického řešení.

Uvažujme pro příklad rovnici vedení tepla (v tenké tyči) s homogenními Dirichletovými podmínkami, tj. okrajovou úlohu

$$\begin{cases} -\big(p(x)y'\big)' + q(x)y = f(x) \quad \text{v} \quad (0,2), \\ y(0) = y(2) = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Řešení y popisuje stacionární rozložení teploty v tenké tyči ($y = y(x)$ je `teplota v příčném řezu`), přičemž

- p ... charakterizuje `materiál tyče`
  (souvisí s koeficientem tepelné vodivosti),
- q ... charakterizuje `výměnu tepla s okolním prostředím`
  (souvisí s koeficientem přestupu tepla),
- f ... souvisí s `tepelnými zdroji uvnitř tyče`, `teplotou vně pláště`, s `koeficientem přestupu tepla`.

Uveďme dva – fyzikálně rozumné – případy, kdy `neexistuje klasické řešení` naší úlohy:

1)

$$\begin{cases} -y'' = f(x) \quad \text{v} \quad (0,2), \\ y(0) = y(2) = 0; \end{cases} \qquad \text{kde } f(x) := \begin{cases} 2 \quad \text{pro} \quad x \in \langle 0,1), \\ -2 \quad \text{pro} \quad x \in \langle 1,2 \rangle \end{cases}$$

(rozložení zdrojů není spojité).

2)

$$\begin{cases} -\big(p(x)y'\big)' = 1 \quad \text{v} \quad (0,2), \\ y(0) = y(2) = 0; \end{cases} \qquad \text{kde } p(x) := \begin{cases} 1 \quad \text{pro} \quad x \in \langle 0,1), \\ 2 \quad \text{pro} \quad x \in \langle 1,2 \rangle \end{cases}$$

(tyč je složena ze dvou různých materiálů).

Klasické řešení (tj. hladká funkce splňující v každém bodě intervalu $(0,2)$ příslušnou rovnici a mající současně nulovou hodnotu v 0 a v 2) neexistuje, úlohy jsou však fyzikálně rozumné. Jak je tedy řešit?

Nabízí se možnost uvažovat odděleně intervaly $(0,1)$ a $(1,2)$. Ukažme si vše na prvním z příkladů (řešení druhého ponechme jako vhodné cvičení čtenářům).

$$\begin{cases} -y_1'' = 2 \quad \text{v} \quad (0,1), \\ y_1(0) = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} -y_2'' = -2 \quad \text{v} \quad (1,2), \\ y_2(2) = 0. \end{cases}$$

Odtud

$$\begin{cases} y_1(x) = c_1 + c_2 x - x^2, \\ y_1(0) = c_1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_2(x) = d_1 + d_2 x + x^2, \\ y_2(2) = d_1 + 2d_2 + 4 = 0, \end{cases}$$

takže

$$y_1(x) = c_2 x - x^2, \qquad y_2(x) = -4 - 2d_2 + d_2 x + x^2.$$

Nyní řešení na jednotlivých intervalech „složíme“:

$$y(x) := \begin{cases} y_1(x) = c_2 x - x^2 \quad \text{pro} \quad x \in (0,1), \\ y_2(x) = -4 - 2d_2 + d_2 x + x^2 \quad \text{pro} \quad x \in (1,2). \end{cases} \tag{1.2}$$

Zbývá určit hodnotu konstant c_2 a d_2.

Fyzikálně přirozený požadavek `spojitosti řešení` v bodě 1, tj. podmínka

$$y(1-) = y(1+),$$

dává

$$y(1-) = y_1(1-) = \underline{c_2 - 1} = y(1+) = y_2(1+) = \underline{-4 - 2d_2 + d_2 + 1},$$

tzn.

$$c_2 = -2 - d_2, \tag{1.3}$$

ale ve vší úplnosti bude jednoznačné řešení určeno teprve tzv. `podmínkou přechodu`:

$$p(1-)y'(1-) = p(1+)y'(1+)$$

(podle fyzikálních zákonitostí musí množství substance, která „vteče“ do bodu 1, odpovídat množství substance, která z bodu 1 „vyteče“).

V našem případě má tato podmínka tvar

$$y'(1-) = y'(1+),$$

a proto

$$y'(1-) = \underline{c_2 - 2} = y'(1+) = \underline{d_2 + 2},$$

neboli

$$c_2 = 4 + d_2. \tag{1.4}$$

Ze vztahů (1.3) a (1.4) snadno vypočteme, že $c_2 = 1$ a $d_2 = -3$, a proto (stačí dosadit do (1.2))

$$y(x) := \begin{cases} x - x^2 & \text{pro} \quad x \in \langle 0, 1 \rangle, \\ 2 - 3x + x^2 & \text{pro} \quad x \in \langle 1, 2 \rangle. \end{cases}$$

Ukázali jsme si situaci, kdy klasické řešení rozumné úlohy neexistovalo, ale kdy se nám podařilo „klasickými metodami“ najít „fyzikálně rozumné“ řešení problému. Naším cílem bude zobecnit pojem řešení diferenciální rovnice (přesněji: okrajové úlohy) i pro mnohem „divočejší“ než uvedené příklady, pro situace, kdy již s „klasickými metodami“ nevystačíme.

Naznačme si pro inspiraci, jak lze například postupovat.

Předpokládejme, že funkce u je klasickým řešením okrajové úlohy

$$\begin{cases} -u'' = f(x) \quad \text{v} \quad \langle 0,2\rangle, \\ u(0) = u(2) = 0. \end{cases} \tag{1.5}$$

To znamená, že

$$u \in C^2(\langle 0,2\rangle),\ u(0) = u(2) = 0,\ \forall x \in \langle 0,2\rangle :\ -u''(x) = f(x).$$

Pak pro každou funkci $v \in C^1(\langle 0,2\rangle)$ takovou, že $v(0) = v(2) = 0$, platí

$$\int_0^2 -u''(x)v(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

Upravíme-li integrál na levé straně pomocí per partes:

$$\int_0^2 -u''(x)v(x)\mathrm{d}x = [-u'(x)v(x)]_0^2 + \int_0^2 u'(x)v'(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 u'(x)v'(x)\mathrm{d}x,$$

zjistíme, že (klasické) řešení u okrajové úlohy (1.5) musí pro každou výše popsanou funkci v splňovat rovnost

$$\int_0^2 u'(x)v'(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)v(x)\mathrm{d}x. \tag{1.6}$$

Tento vztah, ve kterém se – všimněme si! – nevyskytuje druhá derivace řešení u, lze vzít za základ definice tzv. „slabého řešení“ příslušné okrajové úlohy.

Mimochodem: velmi často je výsledkem fyzikálních úvah (pomocí nichž se snažíme sestavit model – rovnici popisující nějaký jev) právě analogická „integrální rovnice“. K diferenciální rovnici se dostáváme za `dodatečného` předpokladu hladkosti řešení (v našem případě: $u \in C^2(\langle 0,2\rangle)$). Definovat řešení daného problému pomocí té integrální rovnice je tak v jistém smyslu přirozenější a správnější.

Tomuto soudu odpovídá i následující pozorování: ve vztahu (1.6) je již „zakódována“ dříve zmíněná podmínka přechodu (1.4).

Skutečně – dosadíme-li do tohoto vztahu

$$f(x) := \begin{cases} 2 \quad \text{pro} \quad x \in \langle 0,1), \\ -2 \quad \text{pro} \quad x \in \langle 1,2\rangle, \end{cases}$$

$$u(x) := y(x) = \begin{cases} c_2 x - x^2 & \text{pro} \quad x \in \langle 0, 1), \\ -4 - 2d_2 + d_2 x + x^2 & \text{pro} \quad x \in \langle 1, 2 \rangle, \end{cases}$$

dostaneme

$$\int_0^1 (c_2 - 2x)v'(x)\mathrm{d}x + \int_1^2 (d_2 + 2x)v'(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 2v(x)\mathrm{d}x + \int_1^2 -2v(x)\mathrm{d}x, \quad (1.7)$$

a protože

- $\int_0^1 2v(x)\mathrm{d}x = [2xv(x)]_0^1 - \int_0^1 2xv'(x)\mathrm{d}x = 2v(1) - \int_0^1 2xv'(x)\mathrm{d}x$,
- $\int_1^2 -2v(x)\mathrm{d}x = [-2xv(x)]_1^2 + \int_1^2 2xv'(x)\mathrm{d}x = 2v(1) + \int_1^2 2xv'(x)\mathrm{d}x$,

plyne ze vztahu (1.7), že

$$\int_0^1 (c_2 - 2x + 2x)v'(x)\mathrm{d}x + \int_1^2 (d_2 + 2x - 2x)v'(x)\mathrm{d}x = 4v(1),$$

$$c_2[v(x)]_0^1 + d_2[v(x)]_1^2 = 4v(1),$$

$$c_2 v(1) - d_2 v(1) = 4v(1).$$

Funkci v lze však volit tak, aby $v(1) \neq 0$, a proto lze odtud vyčíst (naší) podmínku přechodu

$$c_2 = 4 + d_2.$$

Integrály v (1.6) jsou Riemannovy integrály. Chceme-li v dalším uvažovat co nejobecnější pravé strany f, ..., musíme zobecnit pojem Riemannova integrálu. Funkcí, které jsou riemannovsky integrovatelné, je totiž „málo“; navíc Riemannův integrál „dělá problémy“ při limitních přechodech, omezuje nás do uzavřených intervalů, ... Zobecnit bude taky třeba i pojem funkce a její derivace.

V dalším se tak budeme setkávat se speciálními funkcemi:

- s funkcemi lebesgueovsky integrovatelnými,
- s funkcemi majícími „zobecněnou derivaci“.

Definicím a základním vlastnostem těchto speciálních prostorů funkcí budou věnovány první kapitoly tohoto textu.

Kapitola 2

Lebesgueova míra. Lebesgueův integrál. Prostory $L^p(\Omega)$.

2.1 Lebesgueova míra

2.1 Poznámka a motivace. Představme si tuto situaci: máme hrst mincí a chceme určit, jakou mají celkovou hodnotu. Nabízí se dva přístupy:

1) bereme minci po minci a průběžně sčítáme jednotlivé hodnoty
(1 Kč + 2 Kč + 1 Kč + 5 Kč + 5 Kč + 2 Kč + 1 Kč = 17 Kč),

2) nejdříve setřídíme mince podle hodnot, zjistíme počet mincí v jednotlivých hromádkách, a pak sečteme příslušné částky
($3 \cdot 1$ Kč + $2 \cdot 2$ Kč + $2 \cdot 5$ Kč = 17 Kč).

Podobně lze charakterizovat rozdíl mezi „riemannovským" a „lebesgueovským" přístupem k výpočtu integrálu – např. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$:

1) „riemannovské integrální součty":

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \doteq \sum_k f(x_k) \underbrace{(x_{k+1} - x_k)}_{\substack{\text{délka (míra)} \\ \text{intervalu } \langle x_k, x_{k+1} \rangle}},$$

2) „lebesgueovské integrální součty":

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \doteq \sum_k y_k \cdot \text{„míra } M_k\text{"},$$

kde

$$M_k := \{x \in \langle a, b\rangle :\ f(x) \in \langle y_k, y_{k+1})\}.$$

Takže

`potřebujeme míru!`

2.2 Definice. Buď X libovolná množina a $\mathcal{P}(X)$ systém všech jejích podmnožin.

$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ se nazývá <u>σ-algebrou</u> (na X), platí-li současně

i) $X \in \mathcal{A}$,

ii) $\forall A \in \mathcal{A} :\ X \setminus A \in \mathcal{A}$,

iii) $\left[\forall n \in \mathbb{N} :\ A_n \in \mathcal{A}\right] \ \Rightarrow\ \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Prvky $\mathcal{A}$ nazýváme <u>měřitelnými množinami</u>; množinu X spolu se σ-algebrou $\mathcal{A}$ nazýváme <u>měřitelným prostorem</u> a značíme $(X, \mathcal{A})$.

2.3 Cvičení. Buď X libovolná množina. Dokažte, že daný systém podmnožin $\mathcal{A}$ je σ-algebrou na X:

1) $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$,

2) $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$,

3) $\mathcal{A} = \{A \subset X : A$ je nejvýše spočetná množina nebo $X \setminus A$ je nejvýše spočetná množina$\}$.

2.4 Pozorování. Je-li $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$, existuje nejmenší σ-algebra (na X) obsahující $\mathcal{S}$. Mluvíme o σ-algebře <u>generované systémem</u> $\mathcal{S}$.

2.5 Definice. Buď $(X, \mathcal{A})$ měřitelný prostor. Funkce

$$\mu : \ \mathcal{A} \to \langle 0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

se nazývá mírou (na $\mathcal{A}$), platí-li

i) μ není identicky rovno $+\infty$,

ii) μ je σ-aditivní, tzn.

$$\left.\begin{array}{r} \forall n \in \mathbb{N} : \ A_n \in \mathcal{A}, \\ \forall i, j \in \mathbb{N} : \ [i \neq j \ \Rightarrow \ A_i \cap A_j = \emptyset] \end{array}\right\} \ \Rightarrow \ \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(A_n\right).$$

Množinu X spolu se σ-algebrou $\mathcal{A}$ a mírou μ nazýváme prostorem s mírou a značíme $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

2.6 Příklad.

1) $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X), \ a \in X, \ \mu(A) := \begin{cases} 1, \ a \in A, \\ 0, \ a \notin A, \end{cases}$

... tzv. Diracova míra;

2) $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X), \ \mu(A) := \begin{cases} \text{počet prvků } A, \text{ je-li } A \text{ konečná množina,} \\ +\infty, \text{ je-li množina } A \text{ nekonečná,} \end{cases}$

... tzv. aritmetická míra.

2.7 Věta (vlastnosti míry). *Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou. Pak platí*

i) $\mu(\emptyset) = 0$,

ii) $\forall A, B \in \mathcal{A} : \ \big[A \subset B \ \Rightarrow \ \mu(A) \leq \mu(B)\big]$,

iii) $\Big[(\forall n \in \mathbb{N} : \ A_n \in \mathcal{A}) \ \wedge \ (A_n \nearrow A)\Big] \ \Rightarrow \ \mu(A_n) \to \mu(A)$

$\left(\textit{symbolem } A_n \nearrow A \textit{ rozumíme, že } A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots \textit{ a že } A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$,

iv) $\Big[(\forall n \in \mathbb{N} : \ A_n \in \mathcal{A}) \ \wedge \ (A_n \searrow A) \ \wedge \ \big(\underline{\mu(A_1) < +\infty}\big)\Big] \ \Rightarrow \ \mu(A_n) \to \mu(A)$

$\left(\textit{symbolem } A_n \searrow A \textit{ rozumíme, že } A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots \textit{ a že } A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$.

2.8 Poznámka. Nepřehlédněme, že součástí tvrzení iv) věty 2.7 je i měřitelnost množiny $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

2.9 Definice. Uvažujme prostor s mírou $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Řekneme, že μ je úplná míra, platí-li

$$\forall A, B \subset X : \ \left[\mu(A) = 0, \ B \subset A \ \Rightarrow \ B \in \mathcal{A} \ \ (\Rightarrow \ \mu(B) = 0)\right].$$

2.10 Věta (o zúplnění míry). *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou. Nechť $\mathcal{A}_0$ je systém všech $E \subset X$ takových, že existují množiny $A, B \in \mathcal{A}$ tak, že*

$$A \subset E \subset B, \ \mu(B \setminus A) = 0.$$

Definujme pro $E \in \mathcal{A}_0$:

$$\mu_0(E) := \mu(A).$$

Potom $(X, \mathcal{A}_0, \mu_0)$ je prostor s úplnou mírou.[a]

[a] $(X, \mathcal{A}_0, \mu_0)$ nazýváme zúplněním $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

2.11 Pozorování. Zřejmě $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_0$ a $\mu = \mu_0$ na $\mathcal{A}$.

2.12 Věta. *Uvažujme měřitelný prostor $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B})$, kde $n \in \mathbb{N}$ a $\mathcal{B}$ je σ-algebra generovaná systémem všech otevřených podmnožin $\mathbb{R}^n$.*[a]
Pak existuje právě jedna míra λ na $\mathcal{B}$ taková, že pro každou množinu (interval)

$$W := (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \ldots \times (a_n, b_n)$$

$$(\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} : \ a_i, b_i \in \mathbb{R}, \ a_i < b_i)$$

platí

$$\lambda(W) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

[a] $\mathcal{B}$ nazýváme σ-algebrou borelovských množin.

2.13 Definice. Míra λ z předchozí věty se nazývá Lebesgueova–Borelova míra. Buď nyní $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_0, \lambda_0)$ zúplněním $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, \lambda)$. Míru λ_0 pak nazýváme Lebesgueovou mírou a systém $\mathcal{B}_0$ systémem lebesgueovsky měřitelných množin.

2.14 Úmluva. V dalším značme symbolem λ Lebesgueovu míru.

2.15 Poznámka. Dá se dokázat, že platí

$$\mathcal{B} \subsetneqq \mathcal{B}_0 \subsetneqq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n).$$

2.16 Věta (vlastnosti lebesgueovsky měřitelných množin a Lebesgueovy míry).

Platí

i)

$$E \in \mathcal{B}_0 \Leftrightarrow \Big[\big(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+\big) \left(\exists A, B \subset \mathbb{R}^n\right) : A \text{ je uzavřená, } B \text{ je otevřená,} \\ A \subset E \subset B,\ \lambda(B \setminus A) < \varepsilon \Big];$$

ii) λ *je* *invariantní vůči posunutí,*[a] *tzn.*

$$(\forall E \in \mathcal{B}_0) \, (\forall x \in \mathbb{R}^n) : \ E + x := \{y + x : \ y \in E\} \in \mathcal{B}_0, \ \lambda(E + x) = \lambda(E);$$

iii)

$$\forall E \in \mathcal{B}_0 : \ \lambda(E) = \sup \{\lambda(K) : \ K \text{ je kompakt, } K \subset E\} = \\ = \inf \{\lambda(G) : \ G \text{ je otevřená, } E \subset G\}$$

… tzv. regularita λ*;*

iv) *je-li* $M \subset \mathbb{R}^n$ *nejvýše spočetná množina, je* $\lambda(M) = 0$*;*

v) *je-li* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ***lineární*** *zobrazení, tak platí*

$$\forall A \in \mathcal{B}_0 : \ \lambda\left(T(A)\right) = \lambda(A) \cdot |\det T|.$$

[a] Dá se ukázat, že λ je jediná normalizovaná (tzn. $\lambda\left((0,1)^n\right) = 1$) borelovská (tzn. definovaná na $\mathcal{B}$) míra v $\mathbb{R}^n$ invariantní vůči posunutí.

2.17 Poznámka. Dá se dokázat, že na $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ neexistuje žádná normalizovaná míra invariantní vůči posunutí. To znamená, chceme-li míru s takovýmito vlastnostmi, budou existovat podmnožiny $M \subset \mathbb{R}^n$, které nejsou měřitelné.

Nabízí se tedy otázka, nejsou-li naše požadavky kladené na míru (viz definici 2.5) příliš „tvrdé“. Neexistuje na $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ alespoň `konečně aditivní normalizovaná` množinová funkce invariantní vůči posunutí? V roce 1920 Stefan Banach dokázal, že pro $n = 1$ nebo $n = 2$ taková funkce existuje, není ovšem určena jednoznačně. Felix Hausdorff v roce 1914 ukázal, že pro $n \geq 3$ taková funkce neexistuje vůbec.

2.2 Lebesgueův integrál

2.18 Definice. Buď

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Řekneme, že funkce f je <u>(lebesgueovsky) měřitelná</u>, platí-li současně

- $Df \in \mathcal{B}_0$,
- $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \ \{x \in \mathbb{R}^n : \ f(x) > \alpha\} \in \mathcal{B}_0$.

Řekneme, že funkce f je <u>(lebesgueovsky) měřitelná na množině</u> $M \subset Df$, je-li měřitelná funkce $f_{|M}$.

2.19 Definice. Buď $M \subset \mathbb{R}^n$. Funkci

$$\chi_M(x) := \begin{cases} 1, & x \in M, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus M, \end{cases}$$

nazýváme <u>charakteristickou funkcí</u> množiny M.

2.20 Pozorování. Platí

$$M \in \mathcal{B}_0 \ \Leftrightarrow \ \chi_M \text{ je měřitelná funkce.}$$

2.21 Definice. <u>Jednoduchou funkcí</u> (na $\mathbb{R}^n$) rozumíme (konečnou) lineární kombinaci charakteristických funkcí množin z $\mathcal{B}_0$. Jinak řečeno: funkce $s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je jednoduchou funkcí, existují-li čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ a množiny $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \mathcal{B}_0$ tak, že

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \ s(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{A_i}(x).$$

2.22 Pozorování. Výše popsaná jednoduchá funkce s je tedy `měřitelná` a $s(\mathbb{R}^n)$ je `konečná` podmnožina $\mathbb{R}$.

2.23 Definice. Definujme

$$0 \cdot \infty := 0, \ \infty \cdot 0 := 0.$$

2.24 Věta (vlastnosti měřitelných funkcí).

Platí

i) *jsou-li funkce f, g, f_k $(\forall k \in \mathbb{N})$ měřitelné (na $\mathbb{R}^n$) a je-li $\alpha \in \mathbb{R}$, jsou měřitelné i funkce: αf, $f+g$ (pokud součet má všude smysl), $|f|$, fg, $\frac{f}{g}$ (pokud g nenabývá hodnoty 0), $\max(f,g)$, $\min(f,g)$, $\sup f_k$, $\inf f_k$, $\limsup f_k$, $\liminf f_k$, $\lim f_k$ (existuje-li);*

ii) *je-li $f : \mathbb{R}^n \to \langle 0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ měřitelná funkce na $\mathbb{R}^n$, existuje posloupnost (s_k) `nezáporných` jednoduchých funkcí taková, že $s_k \nearrow f$, tzn.*

$$(\forall k \in \mathbb{N} : \ s_{k+1} \geq s_k) \ \wedge \ (\forall x \in \mathbb{R}^n : \ \lim s_k(x) = f(x))$$

(mimochodem: je-li f navíc `omezená`, lze (s_k) volit tak, že $s_k \rightrightarrows f$ na $\mathbb{R}^n$).

2.25 Definice. Nechť

$$s : \ \mathbb{R}^n \to \langle 0, \infty)$$

je `jednoduchá funkce`, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ jsou její všechny navzájem různé hodnoty a buď (pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$)

$$A_i := \{x \in \mathbb{R}^n : \ s(x) = \alpha_i\},$$

tj.

$$s = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{A_i}.$$

Pro každé $E \in \mathcal{B}_0$ definujeme

$$\int_E s \, \mathrm{d}\lambda := \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \, \lambda(A_i \cap E).$$

2.26 Definice. Nechť $f: \mathbb{R}^n \to \langle 0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ je `měřitelná funkce`.

Pro každé $E \in \mathcal{B}_0, \quad E \subset Df$, definujeme

$$\int_E f \, \mathrm{d}\lambda := \sup \left\{ \int_E s \, \mathrm{d}\lambda : \ 0 \le s \le f \text{ na } E, \ s \text{ je jednoduchá funkce} \right\}.$$

2.27 Definice. Je-li $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^*$ `měřitelná funkce`, definujeme pro každé $E \in \mathcal{B}_0, \quad E \subset Df$:

$$\int_E f \, \mathrm{d}\lambda := \int_E f^+ \, \mathrm{d}\lambda - \int_E f^- \, \mathrm{d}\lambda, \text{ má-li pravá strana smysl}$$

$$\left(f^+ := \max(f, 0), \ f^- := \max(-f, 0); \ \text{ tzn. } f = f^+ - f^-\right).$$

2.28 Označení. Někdy budeme používat i tohoto označení:

$$\int_E f \, \mathrm{d}\lambda := \int_E f(x) \, \mathrm{d}x.$$

2.29 Poznámka. Je účelné definovat integrál i pro funkce definované pouze <u>skoro všude</u> (zkráceně s. v.), tj. všude s výjimkou množiny míry nula – viz následující definici.

2.30 Definice. Je-li funkce $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^*$ měřitelná, $E \in \mathcal{B}_0, \quad E \setminus N \subset Df$, kde $\lambda(N) = 0$, definujeme

$$\int_E f \, \mathrm{d}\lambda := \int_{E \setminus N} f \, \mathrm{d}\lambda.$$

2.31 Definice. Buď $1 \le p < +\infty, \quad E \in \mathcal{B}_0$. Potom definujeme

$$\mathcal{L}^p(E) := \left\{ f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^* : \ f \text{ je měřitelná}, \ \int_E |f|^p \, \mathrm{d}\lambda < +\infty \right\}.$$

2.32 Věta (Leviho – „Lebesgue monotone convergence theorem“).

Nechť

- *pro každé $n \in \mathbb{N}$ je f_n měřitelná funkce,*
- *$f_n \nearrow f$ skoro všude v $E \in \mathcal{B}_0$,*
- *$\int_E f_1 \,\mathrm{d}\lambda > -\infty$.*

Potom platí

$$\int_E f_n \,\mathrm{d}\lambda \to \int_E f \,\mathrm{d}\lambda.$$

2.33 Příklad. Buď

$$f_n := -\frac{1}{n}, \ f := 0.$$

Potom každá z funkcí f_n je měřitelná a $f_n \nearrow f$ všude v $\mathbb{R}$, ale protože

$$\forall n \in \mathbb{N} : \int_{\mathbb{R}} f_n \,\mathrm{d}\lambda = -\infty, \quad \int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}\lambda = 0,$$

`neplatí`

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \,\mathrm{d}\lambda \to \int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}\lambda.$$

(Není splněn předpoklad $\int_{\mathbb{R}} f_1 \,\mathrm{d}\lambda > -\infty$.)

2.34 Příklad. Buď (x_n) taková posloupnost, že

$$\mathbb{Q} \cap \langle 0, 1\rangle = \{x_n : \ n \in \mathbb{N}\},$$

a buď

$$f_n := \chi_{\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}}, \ f := \chi_{\mathbb{Q} \cap \langle 0,1\rangle}.$$

Potom, protože

$$0 \leq f_n \nearrow f,$$

platí

$$\int_{\langle 0,1\rangle} f_n \,\mathrm{d}\lambda = 0 \to \int_{\langle 0,1\rangle} f \,\mathrm{d}\lambda = 0.$$

(Všimněme si, že Riemannův integrál $\int_0^1 f(x) \,\mathrm{d}x$ neexistuje.)

2.35 Věta (Lebesgueova – „Lebesgue dominated convergence theorem“).

Nechť

- *pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *je* f_n *měřitelná funkce,*
- $f_n \to f$ *skoro všude v* $E \in \mathcal{B}_0$,
- *existuje funkce* $g \in \mathcal{L}^1(E)$ *taková, že pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *je* $|f_n| \leq g$ *skoro všude v* E.

Potom platí

$$f \in \mathcal{L}^1(E), \int_E |f_n - f| \,\mathrm{d}\lambda \to 0, \int_E f_n \,\mathrm{d}\lambda \to \int_E f \,\mathrm{d}\lambda.$$

2.36 Příklad. Buď

$$f_n := n\,\chi_{(0,\frac{1}{n})},\ f := 0.$$

Potom každá z funkcí f_n je měřitelná a $f_n \to f$ všude v $\mathbb{R}$, ale protože

$$\forall n \in \mathbb{N} : \int_{\mathbb{R}} f_n \,\mathrm{d}\lambda = 1, \quad \int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}\lambda = 0,$$

`neplatí`

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \,\mathrm{d}\lambda \to \int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}\lambda$$

(neexistuje – v Lebesgueově větě požadovaná – funkce (tzv. majoranta) g).

2.37 Věta (Fatouovo lemma).

Nechť

- *pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *je* f_n *měřitelná funkce,*
- $g \in \mathcal{L}^1(E), \quad E \in \mathcal{B}_0$,
- *pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *je* $f_n \geq g$ *skoro všude v* E.

Potom platí

$$\int_E \liminf f_n \,\mathrm{d}\lambda \leq \liminf \int_E f_n \,\mathrm{d}\lambda.$$

2.38 Příklad. Buď

$$f_n := \begin{cases} \chi_{(-1,0)}, & \text{je-li } n \texttt{ liché}, \\ \chi_{(0,1)}, & \text{je-li } n \texttt{ sudé}. \end{cases}$$

Potom

$$\int_{\mathbb{R}} \liminf f_n \,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}} 0 \,\mathrm{d}\lambda = 0$$

$$\wedge$$

$$\liminf \int_{\mathbb{R}} f_n \,\mathrm{d}\lambda = \lim \int_{\mathbb{R}} f_n \,\mathrm{d}\lambda = \lim 1 = 1.$$

2.39 Věta (Fubiniova). *Nechť $p, q \in \mathbb{N}$ a nechť existuje (konečný nebo nekonečný) integrál*

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f \,\mathrm{d}\lambda.$$

Potom

- *pro s. v. $x \in \mathbb{R}^p$ existuje*

$$\int_{\mathbb{R}^q} f_x \,\mathrm{d}\lambda := \varphi(x) \quad \left(f_x(y) := f(x,y)\right),$$

- *pro s. v. $y \in \mathbb{R}^q$ existuje*

$$\int_{\mathbb{R}^p} f^y \,\mathrm{d}\lambda := \psi(y) \quad \left(f^y(x) := f(x,y)\right),$$

a platí

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f \,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}^p} \varphi \,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}^q} \psi \,\mathrm{d}\lambda,$$

tj.[a]

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f(x,y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y) \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y) \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

[a] Používáme označení

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f \,\mathrm{d}\lambda := \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f(x,y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y.$$

2.40 Věta (o substituci).

Nechť

- $G \subset \mathbb{R}^n$ *je otevřená množina,*
- $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *je takové zobrazení, že*
  - φ *je prosté na* G,
  - φ *je třídy* C^1 *na* G,
  - $\forall z \in G : \det \varphi'(z) \neq 0$,
- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^*$.

Potom

$$\int_{\varphi(G)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_G f(\varphi(t))\,|\det \varphi'(t)|\,\mathrm{d}t,$$

pokud ***jeden*** *z těchto integrálů existuje.*

2.41 Věta (o souvislosti Riemannova a Lebesgueova integrálu). *Nechť* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je* ***omezená*** *funkce na intervalu* $\langle a, b\rangle \subset \mathbb{R}$. *Pak*

i) *existuje-li* $(R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, *existuje i* $(L)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *a oba integrály se rovnají,*

ii) $(R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *existuje* $\Leftrightarrow$ *funkce* f *je spojitá skoro všude v* $\langle a, b\rangle$.[a]

[a] Tzn.

$$\exists N \subset \mathbb{R} : \left[(\lambda(N) = 0) \;\wedge\; (\forall x \in \langle a, b\rangle \setminus N : \; f \text{ je spojitá v } x) \right].$$

2.42 Definice.

Nechť

- $-\infty \le a < b \le +\infty$,
- $f : (a,b) \to \mathbb{R}$,
- $\forall x \in (a,b) : F'(x) = f(x)$.

Existují-li `konečné` limity

$$F(b-) := \lim_{x\to b-} F(x), \; F(a+) := \lim_{x\to a+} F(x),$$

nazýváme jejich rozdíl Newtonovým integrálem funkce f na (a,b); tj.

$$(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b-) - F(a+) =: \big[F(x)\big]_a^b \in \mathbb{R}.$$

2.43 Věta (o souvislosti Newtonova a Lebesgueova integrálu).

Platí

i) *existují-li* $(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *a* $(L)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, *je*

$$(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (L)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

ii)

$$\left.\begin{array}{r} f \in \mathcal{L}^1((a,b)) \\ f \text{ je spojitá na } (a,b) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ existuje } (N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

iii) *existuje-li* $(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, *je* f *měřitelná. Pokud navíc neexistuje* $(L)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, *neexistuje ani* $(N)\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

2.44 Příklad.

$$(N)\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}, \quad (L)\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \text{ neexistuje}, \quad (N)\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x \text{ neexistuje}.$$

2.3 Prostory $L^p(\Omega)$

2.45 Věta (vlastnosti $\mathcal{L}^1(E)$). *Buď $E \in \mathcal{B}_0$, pak platí*

i) *je-li $f \in \mathcal{L}^1(E)$, je f (na E) konečná skoro všude,*

ii) *jsou-li $f, g \in \mathcal{L}^1(E)$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, je $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^1(E)$ a platí*

$$\int_E (\alpha f + \beta g) \, \mathrm{d}\lambda = \alpha \int_E f \, \mathrm{d}\lambda + \beta \int_E g \, \mathrm{d}\lambda,$$

iii) *je-li $f \in \mathcal{L}^1(E)$, je $|f| \in \mathcal{L}^1(E)$ a platí*

$$\left| \int_E f \, \mathrm{d}\lambda \right| \leq \int_E |f| \, \mathrm{d}\lambda$$

(tzn. že Lebesgueův integrál je <u>absolutně konvergentní</u>),

iv) *jsou-li $f, g \in \mathcal{L}^1(E)$, jsou i $\max(f, g), \min(f, g) \in \mathcal{L}^1(E)$,*

v) *je-li f měřitelná a taková, že pro nějaké $g \in \mathcal{L}^1(E)$ je $|f| \leq g$ skoro všude v E, je $f \in \mathcal{L}^1(E)$.*

2.46 Věta (Hölderova a Minkowského nerovnost).
Buď $E \in \mathcal{B}_0$; $p, q \in (1, +\infty)$;

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad (p, q \text{ ... tzv. } \underline{\textit{sdružené exponenty}}).$$

Pak platí

(H) jsou-li $f \in \mathcal{L}^p(E)$, $g \in \mathcal{L}^q(E)$, je $fg \in \mathcal{L}^1(E)$ a platí

$$\int_E fg \, \mathrm{d}\lambda \le \left(\int_E |f|^p \, \mathrm{d}\lambda \right)^{1/p} \left(\int_E |g|^q \, \mathrm{d}\lambda \right)^{1/q},$$

(M) jsou-li $f, g \in \mathcal{L}^p(E)$, je $f + g \in \mathcal{L}^p(E)$ a platí

$$\left(\int_E |f+g|^p \, \mathrm{d}\lambda \right)^{1/p} \le \left(\int_E |f|^p \, \mathrm{d}\lambda \right)^{1/p} + \left(\int_E |g|^p \, \mathrm{d}\lambda \right)^{1/p}.$$

2.47 Pozorování a definice. Buď $E \in \mathcal{B}_0$, $1 \le p < +\infty$. Vlastnosti prostoru $\mathcal{L}^p(E)$ se standardně definovaným součtem a násobkem a funkcionálem

$$\|f\|_p := \left(\int_E |f|^p \, \mathrm{d}\lambda \right)^{1/p}$$

připomínají strukturu normovaného lineárního prostoru, nicméně o normovaný lineární prostor se nejedná.[1] Abychom mohli „pracovat“ v teorii normovaných lineárních prostorů, přiřadíme každé funkci $f \in \mathcal{L}^p(E)$ třídu funkcí

$$[f] := \{ g \in \mathcal{L}^p(E) : \ g = f \text{ skoro všude v } E \}$$

a definujeme

$$L^p(E) := \{ [f] : \ f \in \mathcal{L}^p(E) \}.$$

Potom

$$\left(L^p(E), +, -, \| \cdot \|_{L^p(E)} \right),$$

kde

$$[f] + [g] := [f+g], \ \alpha[f] := [\alpha f] \ (\alpha \in \mathbb{R}), \ \|[f]\|_{L^p(E)} := \|f\|_p,$$

[1] To si rozmyslete podrobně!

je normovaný lineární prostor.[1]

V matematické literatuře je běžné nerozlišovat `funkce` a `třídy funkcí`. Intuitivně: `funkce lišící se na množině míry nula považujeme za totožné.`

Zobecněme prostory $L^p(E)$ i pro případ $p = \infty$.

2.48 Definice. Buď $E \in \mathcal{B}_0$. Symbolem $L^\infty(E)$ značme množinu všech měřitelných funkcí f (přesněji: tříd funkcí skoro všude na E navzájem rovných), pro něž existuje $M \in \mathbb{R}$ takové, že $|f(x)| \le M$ pro s. v. $x \in E$ (tj. $|f| \le M$ skoro všude v E). Nejmenší konstanta M s touto vlastností se nazývá $\underline{L^\infty\text{-normou}}$ funkce f, tzn.

$$\|f\|_{L^\infty(E)} := \operatorname*{ess\,sup}_E |f| := \inf_{\substack{N\subset E\\ \lambda(N)=0}} \sup_{x\in E\setminus N} |f(x)|.$$

2.49 Věta (vlastnosti $L^p(\Omega)$). *Nechť Ω je neprázdná **oblast** v $\mathbb{R}^n$ (tj. **otevřená** a **souvislá** množina).*

Pak platí

i) $\forall p \in \langle 1, +\infty) \cup \{+\infty\}:$ $L^p(\Omega)$ *je **Banachův prostor**,*

ii) $L^2(\Omega)$ *se skalárním součinem*

$$(u, v) := \int_\Omega uv \,\mathrm{d}\lambda = \int_\Omega u(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

*je **Hilbertův prostor**,*

iii) *je-li* $1 \le p < +\infty$, *je* $C^\infty(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ ***hustou podmnožinou*** $L^p(\Omega)$,

iv) *je-li* $1 < p_1 < p_2 < +\infty$ *a současně* $\lambda(\Omega) < +\infty$, *je*

$$L^\infty(\Omega) \subset L^{p_2}(\Omega) \subset L^{p_1}(\Omega) \subset L^1(\Omega).$$

2.50 Cvičení. Dokažte tvrzení iv) věty 2.49

[1] Výše uvedené definice operací $+, -, \|\cdot\|_{L^p(E)}$ jsou korektní, nezávisí totiž na výběru reprezentantů.

Kapitola 3

Zobecněné funkce (distribuce), zobecněné derivace.

Buď Ω `neprázdná oblast` v $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$).

Definujme množinu $\mathcal{D}(\Omega)$ – tzv. prostor testovacích funkcí – jako množinu všech funkcí $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, pro něž platí

- $\operatorname{supp}\varphi := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n :\ \varphi(x) \neq 0\}} \subset \Omega$
  ($\operatorname{supp}\varphi$ ... tzv. nosič funkce φ),
- $\operatorname{supp}\varphi$ je kompakt v $\mathbb{R}^n$
  (tj. omezená a uzavřená množina).

Všimněme si: uvažujeme-li na $\mathcal{D}(\Omega)$ standardním způsobem definovaný součet a násobek funkcí, tzn. definujeme-li pro každé $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$ a $c \in \mathbb{R}$

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(x) := \varphi_1(x) + \varphi_2(x), \quad (c\varphi_1)(x) := c\,\varphi_1(x),$$

je $\mathcal{D}(\Omega)$ vektorovým prostorem.

V dalším budeme používat tohoto označení:

- $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n) \in \mathbb{R}^n,$ kde $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,
  ... multiindex;
- $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$
  ... délka multiindexu;

- $u: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ u \in C^{|\alpha|}(\Omega)$:

$$D^\alpha u := \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

3.1 Příklad. Pro $n = 3,\ \alpha = (3, 0, 2)$ a $u \in C^5(\Omega)$ je

$$D^\alpha u = \frac{\partial^5 u}{\partial x^3 \partial z^2} = \frac{\partial^5 u}{\partial z^2 \partial x^3} = \frac{\partial^5 u}{\partial x \partial z \partial x^2 \partial z} = \ldots,$$

protože derivace 5. řádu jsou pro funkci

$$u \in C^{|\alpha|}(\Omega) = C^5(\Omega)$$

záměnné.

3.2 Definice. Buď (φ_n) posloupnost v $\mathcal{D}(\Omega)$ a $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Řekneme, že posloupnost (φ_n) konverguje v $\mathcal{D}(\Omega)$ k funkci φ, a píšeme

$$\underline{\varphi_n \to \varphi \text{ v } \mathcal{D}(\Omega)},$$

jestliže existuje `kompakt` $K \subset \Omega$ takový, že:

- pro každé $n \in \mathbb{N}$:
$$\operatorname{supp} \varphi_n \subset K,\ \operatorname{supp} \varphi \subset K,$$
- pro každý multiindex α:
$$D^\alpha \varphi_n \rightrightarrows D^\alpha \varphi \text{ v } K.$$

3.3 Poznámka. Dá se ukázat, že prostor $\mathcal{D}(\Omega)$ `není metrizovatelný`, tzn. že `neexistuje` žádná metrika ϱ na $\mathcal{D}(\Omega)$ taková, aby platilo

$$\varphi_n \to \varphi \text{ v } \mathcal{D}(\Omega) \iff \varrho(\varphi_n, \varphi) \to 0 \text{ (v } \mathbb{R}).$$

3.4 Definice. Prostor všech spojitých lineárních funkcionálů na $\mathcal{D}(\Omega)$ nazýváme prostorem <u>distribucí</u> na Ω a značíme $\mathcal{D}^*(\Omega)$, tzn.

$$F \in \mathcal{D}^*(\Omega) \Leftrightarrow \bullet\; F : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R},$$

$$\bullet\; \varphi_n \to \varphi \text{ v } \mathcal{D}(\Omega) \;\Rightarrow\; F(\varphi_n) \to F(\varphi),$$

$$\bullet\; \left.\begin{array}{c} \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega) \\ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow F(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1 F(\varphi_1) + c_2 F(\varphi_2).$$

3.5 Označení. Je-li $F \in \mathcal{D}^*(\Omega)$ a $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, budeme používat i značení

$$\langle F, \varphi \rangle := F(\varphi).$$

3.6 Definice. Řekneme, že funkce f patří do $L^1_{loc}(\Omega)$, pokud

$$(\forall x \in \Omega)\,(\exists U(x) \subset \Omega) :\; f \in L^1(U(x)).$$

3.7 Poznámka. Dá se ukázat, že $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ právě tehdy, jestliže pro každý kompakt $K \subset \Omega$ platí, že $f \in L^1(K)$.

3.8 Příklad. Definujme funkce f a g předpisy

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{x}}, \; g(x) := \frac{1}{x}.$$

Pak

$$f \in L^1(0,1), \text{ a proto i } f \in L^1_{loc}(0,1),$$

$$g \in L^1_{loc}(0,1), \text{ ale } g \notin L^1(0,1).$$

3.9 Poznámka. Buď

$$f \in L^1_{loc}(\Omega)$$

a definujme zobrazení

$$F : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$$

předpisem:[1]

$$F(\varphi) := \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

[1] Uvedený (Lebesgueův) integrál za daných předpokladů existuje!

Pak $F \in \mathcal{D}^*(\Omega)$.

Buď nyní $G \in \mathcal{D}^*(\Omega)$ taková distribuce, že pro nějakou funkci $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ platí

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \langle G, \varphi \rangle = \int_\Omega g(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pak

$$F = G \Leftrightarrow f = g \text{ s. v. v } \Omega.$$

Lze tedy ztotožnit $F \sim f$; získáme tak inklusi

$$L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}^*(\Omega).$$

3.10 Definice. Distribuci $F \in \mathcal{D}^*(\Omega)$ nazveme <u>regulární</u>, existuje-li $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ taková, že

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \langle F, \varphi \rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

3.11 Příklad. Buď $a \in \Omega$. Definujme distribuci δ_a předpisem

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle := \varphi(a).$$

Pak δ_a (tzv. <u>Diracova funkce</u> nebo <u>Diracova distribuce</u>) `není regulární` distribucí. Tzn.

$$\mathcal{D}(\Omega) \subsetneqq L^1_{loc}(\Omega) \subsetneqq \mathcal{D}^*(\Omega).$$

3.12 Pozorování. Buď

$$f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}^*(\mathbb{R})$$
$$\left(\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \langle f, \varphi \rangle = \int_\mathbb{R} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

Pak platí taky

$$f' \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}^*(\mathbb{R})$$
$$\left(\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \langle f', \varphi \rangle = \int_\mathbb{R} f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

Navíc

$$(\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}))\left(\exists a \in \mathbb{R}^+\right) : \operatorname{supp}\varphi \subset \langle -a, a \rangle,$$

a proto

$$\langle f', \varphi \rangle = \int_{-a}^{a} f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{[f(x)\varphi(x)]_{-a}^{a}}_{=0} - \int_{-a}^{a} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\langle f, \varphi' \rangle.$$

Zobecníme nyní pojem derivace z $\mathcal{D}(\Omega)$ na $\mathcal{D}^*(\Omega)$.

3.13 Definice. Buď

$$F \in \mathcal{D}^*(\Omega).$$

(Zobecněnou) derivací distribuce F podle i-té proměnné rozumíme distribuci

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} \in \mathcal{D}^*(\Omega)$$

definovanou předpisem

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle := -\left\langle F, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle.$$

Obecně definujeme pro každý multiindex α distribuci

$$D^\alpha F \in \mathcal{D}^*(\Omega)$$

předpisem

$$\langle D^\alpha F, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle F, D^\alpha \varphi \rangle.$$

3.14 Věta. *Nechť*

$$f \in C^k(\Omega) \quad (\subset L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}^*(\Omega))$$

a nechť α je takový multiindex, že $|\alpha| = k$. Potom pro každé $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ platí[a]

$$\langle D^\alpha f, \varphi \rangle = \int_\Omega (D^\alpha f)(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

[a] Tzn. „zobecněná“ derivace = derivaci „klasické“.

3.15 Příklad. Uvažujme Heavisideovu funkci

$$\eta(x) := \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Pak

$$\eta \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}^*(\mathbb{R})$$

a pro každé $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ platí

$$\langle \eta', \varphi \rangle = -\langle \eta, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} \eta(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^\infty \varphi'(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\left[\varphi(x)\right]_0^\infty = -(\varphi(\infty) - \varphi(0)) = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle,$$

a proto[1]

$$\eta' = \delta_0.$$

[1]Derivací je třeba rozumět derivaci ve `smyslu distribucí` – viz definici 3.13.

Kapitola 4

Sobolevovy prostory.

Buď
$$\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$
kde $n \in \mathbb{N}$, `omezená` oblast a buď
$$k \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ 1 \leq p < \infty.$$

Uvažujme vektorový prostor $C^\infty(\overline{\Omega})$ a na něm normu
$$\|u\|_{k,p} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \,\mathrm{d}x \right)^{1/p}.$$

4.1 Příklad.
$$\|u\|_{1,p} = \left(\int_\Omega \left(|u(x)|^p + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right|^p \right) \mathrm{d}x \right)^{1/p},$$
$$\|u\|_{2,p} = \left(\int_\Omega \left(|u(x)|^p + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right|^p + \sum_{i,j=1}^n \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right|^p \right) \mathrm{d}x \right)^{1/p}.$$

4.2 Definice. Sobolevův prostor
$$W^{k,p}(\Omega)$$
definujeme jako zúplnění prostoru
$$\left(C^\infty(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{k,p} \right).$$

4.3 Pozorování.

$$L^2(\Omega) = W^{0,2}(\Omega) \supset W^{1,2}(\Omega) \supset W^{2,2}(\Omega) \supset \dots \, .$$

4.4 Pozorování. Buď $u \in W^{k,2}(\Omega)$. Pak existuje posloupnost (u_n) v $C^\infty(\overline{\Omega})$ taková, že $u_n \to u$ ve $W^{k,2}(\Omega)$, a proto je posloupnost (u_n) `cauchyovská` ve $W^{k,2}(\Omega)$. Uvažujme nyní libovolný multiindex α takový, že $|\alpha| \le k$. Protože platí

$$\|D^\alpha u_n - D^\alpha u_m\|_{L^2(\Omega)} \le \|u_n - u_m\|_{k,2},$$

je posloupnost $(D^\alpha u_n)$ `cauchyovská` v `(úplném!)` prostoru $L^2(\Omega)$. Existuje proto funkce $f_\alpha \in L^2(\Omega)$ taková, že

$$D^\alpha u_n \to f_\alpha \text{ v } L^2(\Omega).$$

Dá se dokázat, že pro takto získané funkce f_α platí [1]

$$f_\alpha = D^\alpha f_{(0,0,\dots,0)} = D^\alpha u.$$

Zjistili jsme tedy, že

$$W^{k,2}(\Omega) \subset \widetilde{W}^{k,2}(\Omega),$$

kde $\widetilde{W}^{k,2}(\Omega)$ je definováno jako množina všech funkcí $u \in L^2(\Omega)$ takových, že pro každý multiindex α, $|\alpha| \le k$, je zobecněná (distributivní) derivace $D^\alpha u$ prvkem $L^2(\Omega)$.

Situaci lze zobecnit. Platí

$$W^{k,p}(\Omega) \subset \widetilde{W}^{k,p}(\Omega) := \left\{u \in L^p(\Omega) : \; D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ pro každý multiindex } \alpha, |\alpha| \le k\right\}.$$

[1] Pozor, opět derivací myslíme derivaci ve smyslu distribucí.

4.5 „Definice“. Buď $1 < n \in \mathbb{N}$. Řekneme, že `omezená` oblast

$$\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

je oblast s lipschitzovskou hranicí, lze-li její hranici pokrýt **`konečným`** počtem okolí tak, že pro kterékoliv z těchto okolí $\mathcal{U}$ existují

- kartézský systém souřadnic $\big(\underbrace{y_1, y_2, \dots, y_{n-1}}_{=:\, y'}, y_n\big) =: (y', y_n)$,
- $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}^+$,
- funkce $a :\ \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$,

tak, že

- $\Gamma := \mathcal{U} \cap \partial\Omega = \{(y', y_n) :\ \|y'\| < \delta,\ y_n = a(y')\}$,
- $\mathcal{U}^+ := \{(y', y_n) :\ \|y'\| < \delta,\ a(y') < y_n < a(y') + \varepsilon\} \subset \Omega$,
- $\mathcal{U}^- := \{(y', y_n) :\ \|y'\| < \delta,\ a(y') - \varepsilon < y_n < a(y')\} \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$,
- funkce a je lipschitzovsky spojitá na $\{y' :\ \|y'\| < \delta\}$, tzn. že existuje $L \in \mathbb{R}^+$ takové, že pro každé $y', z' \in \mathbb{R}^{n-1}$ platí

$$(\|y'\| < \delta \ \wedge\ \|z'\| < \delta) \ \Rightarrow\ |a(y') - a(z')| \leq L\,\|y' - z'\|.$$

V $\mathbb{R}$ nazýváme oblastí s lipschitzovskou hranicí každou omezenou oblast, tj. každý omezený otevřený interval.

4.6 Poznámka. Dá se ukázat: je-li Ω oblast s lipschitzovskou hranicí, existuje pro „s. v. $x \in \partial\Omega$“ jednotkový vektor

$$\nu(x) = (\nu_1(x), \nu_2(x), \dots, \nu_n(x)) \in \mathbb{R}^n$$

vnější normály $\partial\Omega$ v bodě x.

Souřadnice

$$\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

`jednotkových` vektorů vnějších normál jsou na $\partial\Omega$ `omezené` „`měřitelné`“ funkce.

4.7 Věta. *Je-li Ω oblast s* ***lipschitzovskou hranicí****, je*

$$W^{k,p}(\Omega) = \widetilde{W}^{k,p}(\Omega).$$

4.8 Úmluva. V dalším předpokládejme, že $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je oblast s lipschitzovskou hranicí.

4.9 Věta. *Platí*

$$W^{k,2}(\Omega) = \widetilde{W}^{k,2}(\Omega)$$

se skalárním součinem

$$(u, v) := \sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega D^\alpha u(x)\, D^\alpha v(x)\, \mathrm{d}x$$

je ***separabilní Hilbertův*** *prostor.*

4.10 Lemma. *Platí*

$$C_0^\infty(\overline{\Omega}) := \{\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega}) : \operatorname{supp}\varphi \subset \Omega\} \subsetneq \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{k,p}} \subsetneq W^{k,p}(\Omega).$$

4.11 Definice. *Sobolevův prostor*

$$W_0^{k,p}(\Omega)$$

definujeme jako uzávěr množiny $C_0^\infty(\Omega)$ v prostoru $W^{k,p}(\Omega)$, tj.

$$W_0^{k,p}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{k,p}} = \Big\{ u \in W^{k,p}(\Omega) : \text{ existuje posl. } (u_n) \text{ v } C_0^\infty(\Omega) \text{ taková, že } u_n \to u \text{ v } W^{k,p}(\Omega) \Big\}.$$

4.12 Věta (Friedrichsova). *Funkcionál $\|\cdot\|_{k,p,0}$ definovaný předpisem*

$$\|u\|_{k,p,0} := \left(\sum_{|\alpha| = k} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p}$$

je na prostoru $W_0^{k,p}(\Omega)$ ***normou ekvivalentní*** *s normou $\|\cdot\|_{k,p}$.*

Poznámka k důkazu, přesněji k ekvivalenci norem $\|\cdot\|_{k,p,0}$ a $\|\cdot\|_{k,p}$ na $W_0^{k,p}(\Omega)$.

Je zřejmé, že
$$\forall u \in W_0^{k,p}(\Omega): \ \|u\|_{k,p,0} \leq \|u\|_{k,p}.$$
Ukažme si, pro jednoduchost pouze ve speciálním případě:
$$n = 1,\ k = 1,\ \Omega = (a,b),\ \text{kde } a,b \in \mathbb{R};\ a < b,$$
platnost tzv. Friedrichsovy nerovnosti
$$\left(\exists s \in \mathbb{R}^+\right) \left(\forall u \in W_0^{k,p}(\Omega)\right): \ \|u\|_{k,p} \leq s\|u\|_{k,p,0},$$
tzn.
$$\left(\exists s \in \mathbb{R}^+\right) \left(\forall u \in W_0^{1,p}(a,b)\right): \ \left(\int_a^b |u|^p \,\mathrm{d}x + \int_a^b |u'|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \leq s \left(\int_a^b |u'|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$
Vzhledem k tomu, že
$$W_0^{1,p}(a,b) = \overline{C_0^\infty(a,b)}^{\|\cdot\|_{1,p}},$$
stačí dokázat
$$\left(\exists c \in \mathbb{R}^+\right) \left(\forall \varphi \in C_0^\infty(\langle a,b\rangle)\right): \ \underline{\int_a^b |\varphi(x)|^p \,\mathrm{d}x \leq c \int_a^b |\varphi'(x)|^p \,\mathrm{d}x}.$$
Buď $\varphi \in C_0^\infty(\langle a,b\rangle)$. Pak pro každé $x \in (a,b)$ platí
$$\varphi(x) = \int_a^x \varphi'(t) \,\mathrm{d}t.$$
Odtud pomocí Hölderovy nerovnosti (viz větu 2.46) snadno získáme nerovnosti[1]
$$|\varphi(x)|^p = \left|\int_a^x \varphi'(t)\cdot 1 \,\mathrm{d}t\right|^p \leq \int_a^x |\varphi'(t)|^p \,\mathrm{d}t \cdot \left(\int_a^x 1 \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{p}{q}} \leq \int_a^b |\varphi'(t)|^p \,\mathrm{d}t \cdot (b-a)^{\frac{p}{q}},$$
a proto
$$\underline{\int_a^b |\varphi(x)|^p \,\mathrm{d}x} \leq \int_a^b |\varphi'(x)|^p \,\mathrm{d}x \cdot (b-a)^{\frac{p}{q}} \cdot \int_a^b 1 \,\mathrm{d}x = \underline{\underbrace{(b-a)^p}_{=:c} \int_a^b |\varphi'(x)|^p \,\mathrm{d}x}.$$
$\square$

[1] Samozřejmě q je zvoleno tak, aby
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ \text{tzn. } q := \frac{p}{p-1}.$$

4.13 Příklad.

$$\|u\|_{1,2,0} = \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right)^2 \mathrm{d}x \right)^{1/2} = \sqrt{\int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x}.$$

4.14 Poznámka. O hodnotách funkce $u \in L^p(\Omega)$ na hranici $\partial\Omega$ jistě nemá smysl mluvit, protože (n-rozměrná) Lebesgueova míra hranice $\partial\Omega$ je rovná nule a funkce lišící se na množině míry nula představují tentýž prvek prostoru $L^p(\Omega)$.

Ukážeme si, že pro $u \in W^{1,p}(\Omega)$ je situace jiná: každému takovému prvku lze `jednoznačně` a `rozumně` přiřadit funkci $f_u \in L^p(\partial\Omega)$ – tzv. stopu u – tak, že zobrazení $u \mapsto f_u$ bude přirozeným rozšířením pojmu restrikce funkce na hranici.

4.15 „Definice“. Uvažujme $1 < n \in \mathbb{N}$ a $1 \leq p < \infty$ a připomeňme si, že $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je oblast s lipschitzovskou hranicí, tzn. že existuje konečný počet m kartézských systémů souřadnic

$$\big(\underbrace{y_{1\,r}, y_{2\,r}, \dots y_{n-1\,r}}_{=:\, y'_r}, y_{n\,r} \big) := (y'_r, y_{n\,r}),$$

čísel ε_r, δ_r a lipschitzovsky spojitých funkcí a_r příslušných vlastností.[a]

Řekneme, že funkce

$$f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$$

patří do $L^p(\partial\Omega)$, pokud pro každé $r \in \{1, 2, \dots, m\}$ patří funkce

$$y'_r \mapsto f(y'_r, a_r(y'_r))$$

do prostoru $L^p\left(\{y'_r : \|y'_r\| < \delta_r\}\right)$.
Navíc: v takovém případě pak definujeme

$$\|f\|_{L^p(\partial\Omega)} := \left(\sum_{r=1}^m \int_{\{y'_r :\, \|y'_r\| < \delta_r\}} |f(y'_r, a_r(y'_r))|^p \, \mathrm{d}y'_r \right)^{1/p}.$$

[a] Viz „definici“ oblasti s lipschitzovskou hranicí 4.5.

4.16 Poznámka. Hranici $\partial\Omega$ je možno popsat nekonečně mnoha uvažovanými způsoby. Dá se však ukázat, že „odpovídající“ prostory $L^p(\partial\Omega)$ jsou totožné (obsahují stejné funkce) a „odpovídající“ normy $\|\cdot\|_{L^p(\partial\Omega)}$ jsou navzájem ekvivalentní.

4.17 Věta (o stopách). *Existuje právě jedno* ***spojité*** *a* ***lineární*** *zobrazení*

$$T: W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$$

takové, že pro každé $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ *je*

$$Tu = u_{|\partial\Omega}.$$

(Prvek $Tu \in L^p(\partial\Omega)$ *nazýváme* *<u>stopou funkce</u>* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *.)*

4.18 Pozorování. Buď $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Pak pro každý multiindex $\alpha, |\alpha| \le k-1$, platí

$$D^\alpha u \in W^{1,p}(\Omega),$$

a proto existuje $T(D^\alpha u)$.

Navíc se dá ukázat, že

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{k,p}} = \left\{u \in W^{k,p}(\Omega) : \forall\alpha, |\alpha| \le k-1, \text{ platí, že } T(D^\alpha u) = 0\right\};$$

speciálně

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \left\{u \in W^{1,p}(\Omega) : T(u) = 0\right\}.$$

Skutečnost, že $\emptyset \ne \Omega \subset \mathbb{R}^n$ je omezená oblast s lipschitzovskou hranicí nám umožní zavést na $\partial\Omega$ „plošný" integrál.

4.19 Lemma (o rozdělení jedničky). *Buď*

- $F \subset \mathbb{R}^n$ ***kompakt***,
- $G_1, G_2, \ldots, G_m \subset \mathbb{R}^n$ ***otevřené*** *množiny,*
- $F \subset \bigcup_{r=1}^{m} G_r$.

  (Říkáme, že $\{G_r\}_{r=1}^m$ *je* *<u>otevřené pokrytí</u>* *kompaktu* F*.)*

Potom existují funkce $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *takové, že*

- $(\forall x \in \mathbb{R}^n)\, (\forall r \in \{1, 2, \ldots, m\}) : \; 0 \le \varphi_r(x) \le 1,$
- $\forall r \in \{1, 2, \ldots, m\} : \; (\varphi_r \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \operatorname{supp}\varphi_r \subset G_r),$
- $\forall x \in F : \; \sum_{r=1}^{m} \varphi_r(x) = 1.$

4.20 „Definice“. Vraťme se k situaci popsané při „definici“ 4.15 prostoru $L^p(\partial\Omega)$ a definujme pro každé $r \in \{1, 2, \dots, m\}$

$$G_r := \{(y'_r, y_{n\,r}) : \|y'_r\| < \delta_r,\ a_r(y'_r) - \varepsilon_r < y_{n\,r} < a_r(y'_r) + \varepsilon_r\}\,.$$

Buď $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ nějaké rozdělení jedničky příslušné otevřenému pokrytí $\{G_r\}_{r=1}^m$ hranice $\partial\Omega$. Pro funkci $f \in L^1(\partial\Omega)$ definujeme

$$\int_{\partial\Omega} f(x)\,\mathrm{d}s := \sum_{r=1}^{m} \int_{\{y'_r\colon \|y'_r\|<\delta_r\}} f(y'_r, a_r(y'_r))\,\varphi_r(y'_r, a_r(y'_r))\,\sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\partial a_r}{\partial y_{i\,r}}(y'_r)\right)^2}\,\mathrm{d}y'_r.$$

(Dá se ukázat, že tato definice nezávisí na popisu hranice $\partial\Omega$ ani na rozdělení jedničky na $\partial\Omega$.)

4.21 Věta (Greenova).

i) *Nechť $1 < n \in \mathbb{N}$ a nechť $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ je oblast s lipschitzovskou hranicí. Pak pro každé $u, v \in W^{1,2}(\Omega)$ a $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ platí*

$$\int_\Omega u\,\frac{\partial v}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\,v\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} T(u)\,T(v)\,\nu_i\,\mathrm{d}s$$

$\big(\nu_i = \nu_i(x)$ *… i-tá složka jednotkového vektoru vnější normály k $\partial\Omega$ v $x\big)$.*

ii) *Buď $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Pak $W^{1,2}(a,b) \subset C(\langle a, b\rangle)$ a navíc*

$$\forall u, v \in W^{1,2}(a,b) : \int_a^b uv'\,\mathrm{d}x = -\int_a^b u'v\,\mathrm{d}x + \underbrace{u(b)v(b) - u(a)v(a)}_{=:\,[uv]_a^b}.$$

(Opět nepřehlédněme, že derivacemi vyskytujícími se v Greenově větě rozumíme derivace ve smyslu distribucí.)

4.22 Definice. Řekneme, že normovaný lineární prostor X je spojitě vnořen do normovaného lineárního prostoru Y, a píšeme

$$X \hookrightarrow Y,$$

pokud platí současně

- $X \subset Y$,
- $(\exists c \in \mathbb{R}^+)\,(\forall x \in X): \ \|x\|_Y \leq c\|x\|_X$.

4.23 Věta (o spojitém vnoření). *Buď*

$$\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

omezená oblast s lipschitzovskou hranicí. Pak platí

i) *je-li buď*

$$kp < n,\ 1 \leq q \leq q^* := \frac{np}{n-pk},$$

nebo

$$kp = n,\ 1 \leq q < \infty,$$

je

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

$$\textit{tzn.}\ \left(\exists c \in \mathbb{R}^+\right)\left(\forall u \in W^{k,p}(\Omega)\right): \ \|u\|_{L^q(\Omega)} \leq c\|u\|_{k,p};$$

ii) *je-li*

$$kp > n,$$

je

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega}),$$

$$\textit{tzn.}\ \left(\exists c \in \mathbb{R}^+\right)\left(\forall u \in W^{k,p}(\Omega)\right): \ \|u\|_{C(\overline{\Omega})} := \max_{\overline{\Omega}} |u| \leq c\|u\|_{k,p}.$$

4.24 Definice. Řekneme, že normovaný lineární prostor X je <u>kompaktně vnořen</u> do normovaného lineárního prostoru Y, a píšeme

$$X \hookrightarrow\hookrightarrow Y,$$

pokud platí současně

- $X \subset Y$,
- z každé omezené posloupnosti v $(X, \|\cdot\|_X)$ lze vybrat podposloupnost konvergentní v $(Y, \|\cdot\|_Y)$.

4.25 Pozorování.

i) $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y \;\Rightarrow\; X \hookrightarrow Y$,

ii) $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y \;\Rightarrow\; \Big[x_n \rightharpoonup x \text{ v } X \;\Rightarrow\; x_n \to x \text{ v } Y\Big]$.

4.26 Věta (o kompaktním vnoření). *Buď*

$$\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

omezená oblast s lipschitzovskou hranicí. Pak platí

i) *je-li buď*

$$n > 1,\ kp < n,\ \frac{1}{q} > \frac{1}{p} - \frac{k}{n},$$

nebo

$$n > 1,\ kp = n,\ 1 < q < \infty,$$

je

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega);$$

ii) *je-li*

$$n \geq 1,\ kp > n,$$

je

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C(\overline{\Omega}).$$

Kapitola 5

Slabá řešení lineárních eliptických úloh.

Uvažujme nejdříve Dirichletovu úlohu pro Poissonovu rovnici

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \quad \text{v } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{na } \partial\Omega, \end{cases}$$

kde $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ je omezená oblast s lipschitzovskou hranicí, $f \in C(\Omega)$, a předpokládejme, že $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ je (klasickým) řešením tohoto problému.

Pak pro každou funkci $v \in C_0^\infty(\overline{\Omega}) := \{\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega}) : \operatorname{supp}\varphi \subset \Omega\}$ platí

$$\int_\Omega -\Delta u\, v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f\, v \,\mathrm{d}x.$$

Odtud, protože díky Greenově větě 4.21 platí [1]

$$\int_\Omega -\Delta u\, v \,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n \left(\int_\Omega -\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\, v \,\mathrm{d}x \right) = \sum_{i=1}^n \left(\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \,\mathrm{d}x \right) + \sum_{i=1}^n \left(-\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}\, v\, \nu_i \,\mathrm{d}s \right) =$$

$$= \int_\Omega \nabla u \nabla v \,\mathrm{d}x - \underbrace{\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, v \,\mathrm{d}s}_{=0, \text{ protože } v \in \mathbb{C}_0^\infty(\overline{\Omega})} = \int_\Omega \nabla u \nabla v \,\mathrm{d}x,$$

dostáváme

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f\, v \,\mathrm{d}x.$$

Všimněme si, že tento výraz má dobrý smysl nejen pro výše specifikované funkce u, v a f, ale i pro

$$u,\, v \in W^{1,2}(\Omega) \text{ a } f \in L^2(\Omega).$$

[1] Symbolem $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ opět značíme jednotkový vektor vnější normály k $\partial\Omega$.

Dostáváme se tak k možnému zobecnění pojmu „řešení“ dané rovnice; navíc, uvažujeme-li pouze $u \in W_0^{1,2}(\Omega) = \{u \in W^{1,2}(\Omega) : Tu = 0\}$,[1] dostaneme i přirozené zobecnění okrajové podmínky „$u = 0$ na $\partial\Omega$“.

5.1 Definice. Řekneme, že funkce $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ je slabým řešením Dirichletovy úlohy

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \quad \text{v } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{na } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.1}$$

kde $f \in L^2(\Omega)$, platí-li pro každé $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f\, v \, \mathrm{d}x.$$

5.2 Věta. *Existuje právě jedno slabé řešení úlohy* (5.1).

Důkaz. Už víme, že $W_0^{1,2}(\Omega)$ se skalárním součinem

$$(u,v) := \sum_{|\alpha|\le 1} \int_\Omega D^\alpha u\, D^\alpha v \, \mathrm{d}x = \int_\Omega u\, v \, \mathrm{d}x + \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x =$$
$$= \int_\Omega u\, v \, \mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla u \nabla v \, \mathrm{d}x$$

je Hilbertův prostor.

Z Friedrichsovy věty 4.12 vyplývá, že `skalární součin`

$$((u,v)) := \int_\Omega \nabla u \nabla v \, \mathrm{d}x$$

indukuje na $W_0^{1,2}(\Omega)$ normu $\|\cdot\|_{1,2,0}$, která je ekvivalentní s normou $\|\cdot\|_{1,2}$.

Dále si všimněme, že funkcionál $F : W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definovaný předpisem

$$F(v) := \int_\Omega f\, v \, \mathrm{d}x$$

je na $W_0^{1,2}(\Omega)$:

- lineární – tj. zřejmé,

[1] Operátorem T myslíme operátor stop.

- spojitý – k tomu stačí ukázat, že je omezený:[1]

$$|F(v)| = \left| \int_\Omega f\, v \,\mathrm{d}x \right| \le \sqrt{\int_\Omega f^2 \,\mathrm{d}x} \sqrt{\int_\Omega v^2 \,\mathrm{d}x} \le \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{1,2} \le$$

$$\le \|f\|_{L^2(\Omega)}\, c\, \|v\|_{1,2,0}.$$

To znamená, že

$$F \in \left(W_0^{1,2}(\Omega)\right)^* = \left(W_0^{1,2}(\Omega), \|\cdot\|_{1,2,0}\right)^*.$$

Nyní stačí aplikovat Rieszovu větu o reprezentaci, z níž plyne

$$\left(\exists!\, u \in W_0^{1,2}(\Omega)\right) \left(\forall v \in W_0^{1,2}(\Omega)\right) : \; F(v) = ((u,v)).$$

□

Nyní se pokusíme o zobecnění pojmu „řešení okrajové úlohy" i pro složitější problémy, než byla Dirichletova úloha pro Poissonovu rovnici. Budeme se zabývat úlohami typu

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f \text{ v } \Omega, \\ \qquad + \\ \text{okrajové podmínky na } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.2}$$

kde

- $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ je omezená oblast s lipschitzovskou hranicí,
- $f \in L^2(\Omega)$,
- $\mathcal{L}$ je diferenciální operátor $2k$-tého řádu v (tzv. divergentním) tvaru:

$$(\mathcal{L}u)(x) := \sum_{|\alpha|,|\beta| \le k} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \left(a_{\alpha,\beta}(x) D^\beta u(x)\right),$$

- $a_{\alpha,\beta} \in L^\infty(\Omega)$ pro všechny multiindexy α, β, pro jejichž délky platí $|\alpha|, |\beta| \le k$.

5.3 Poznámka. Uvědomme si: v případě klasického řešení úlohy (5.2) potřebujeme `diferencovatelnost` k-`tého řádu` funkcí $a_{\alpha,\beta}$ a `diferencovatelnost` $2k$-`tého řádu` funkce u. Po „triku" $\int_\Omega \mathcal{L}u\, v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x$ a aplikaci Greenovy věty na levé straně rovnosti vystačíme pouze s `diferencovatelností` k-`tého řádu` funkce u.

[1] První z uvedených nerovností je Hölderova nerovnost (viz 2.46), poslední nerovnost vyplývá z Fridrichsovy věty 4.12.

Operátoru $\mathcal{L}$ přiřaďme bilineární formu[1]

$$a(u,v) := \sum_{|\alpha|,|\beta|\le k} \int_\Omega a_{\alpha,\beta}(x) D^\beta u(x) D^\alpha v(x)\,\mathrm{d}x \tag{5.3}$$

a všimněme si, že bilineární forma (5.3) je dobře definovaná a spojitá na

$$W^{k,2}(\Omega) \times W^{k,2}(\Omega);$$

platí totiž (opět využíváme Hölderovu nerovnost 2.46)

$$\left| \int_\Omega a_{\alpha,\beta}(x) D^\beta u(x) D^\alpha v(x)\,\mathrm{d}x \right| \le \|a_{\alpha,\beta}\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega \left|D^\beta u\right| \left|D^\alpha v\right|\,\mathrm{d}x \le$$

$$\le \|a_{\alpha,\beta}\|_{L^\infty(\Omega)} \sqrt{\int_\Omega \left|D^\beta u\right|^2\,\mathrm{d}x} \sqrt{\int_\Omega \left|D^\alpha v\right|^2\,\mathrm{d}x} \le \|a_{\alpha,\beta}\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{k,2} \|v\|_{k,2},$$

a protože všech možných kombinací α a β takových, že $|\alpha|, |\beta| \le k$, je konečně mnoho, existuje $c > 0$ takové, že

$$|a(u,v)| = \left| \sum_{|\alpha|,|\beta|\le k} \int_\Omega a_{\alpha,\beta}(x) D^\beta u(x) D^\alpha v(x)\,\mathrm{d}x \right| \le c \|u\|_{k,2} \|v\|_{k,2}.$$

5.4 Příklad.

$$\mathcal{L}u := -\mathrm{div}\,(\nabla u) = -\Delta u = \sum_{i=1}^n -\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \sum_{i,j=1}^n (-1)^1 \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,j}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right),$$

kde

$$a_{i,j}(x) := \begin{cases} 1, & \text{je-li } i = j, \\ 0, & \text{je-li } i \ne j; \end{cases}$$

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u\, \nabla v\,\mathrm{d}x.$$

[1] Nepřehlédněme, že pro $a_{\alpha,\beta} \in C^k(\overline{\Omega})$ a $u, v \in C_0^{2k}(\overline{\Omega})$ je

$$a(u,v) = \int_\Omega (\mathcal{L}u)(x) v(x)\,\mathrm{d}x.$$

5.5 Příklad.

$$\mathcal{L}u := -\mathrm{div}\,\left(p(x)\nabla u\right) + q(x)u = \sum_{i=1}^{n} -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + q(x)u,$$

$$a(u,v) = \int_\Omega \big(p(x)\nabla u\, \nabla v + q(x)u\, v\big)\, \mathrm{d}x.$$

Dále buď:

- $\mathcal{V}$ lineární podmnožina $C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ taková, že
$$C_0^\infty(\overline{\Omega}) \subset \mathcal{V} \subset C^\infty(\overline{\Omega})$$
a označme V uzávěr $\mathcal{V}$ v prostoru $W^{k,2}(\Omega)$ (zřejmě $W_0^{k,2}(\Omega) \subset V \subset W^{k,2}(\Omega)$),
- $b:\ W^{k,2}(\Omega) \times W^{k,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ spojitá bilineární forma,
- $g \in V^*$ takové, že $\forall v \in W_0^{k,2}(\Omega):\ g(v) = 0$,
- $u_0 \in W^{k,2}(\Omega)$.

Pomocí V, b, g a u_0 budeme modelovat příslušné okrajové podmínky na $\partial\Omega$.

5.6 Definice. Budiž
$$((u,v)) := a(u,v) + b(u,v).$$
Řekneme, že funkce $u \in W^{k,2}(\Omega)$ je slabým řešením okrajové úlohy, jestliže

i) $u - u_0 \in V$,

ii) $\forall v \in V:\ ((u,v)) = \int_\Omega f(x)v(x)\,\mathrm{d}x + g(v)$.

Taky v následujících příkladech Ω označuje omezenou oblast s lipschitzovskou hranicí.

5.7 Příklad (slabé řešení Dirichletovy úlohy).
Uvažujme Dirichletovu úlohu

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(p(x)\nabla u) + q(x)u &= f(x) \quad \text{v } \Omega, \\ u &= h(x) \quad \text{na } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.4}$$

a předpokládejme, že

- $f \in L^2(\Omega)$,
- $p,\ q \in L^\infty(\Omega)$,
- existuje $u_0 \in W^{1,2}(\Omega)$ takové, že $Tu_0 = h \in L^2(\partial\Omega)$.

Funkci $u \in W^{1,2}(\Omega)$ nazveme slabým řešením úlohy Dirichletovy úlohy (5.4), je-li

- $u - u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$,
- $\forall v \in W_0^{1,2}(\Omega) : \displaystyle\int_\Omega \big(p(x)\nabla u\,\nabla v + q(x)u\,v\big)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f\,v\,\mathrm{d}x.$

Zde

$$V \ := W_0^{1,2}(\Omega),$$

$$a(u,v) := \int_\Omega \left(p(x)\nabla u\,\nabla v + q(x)u\,v\right)\,\mathrm{d}x,$$

$$b(u,v) := 0,\ \ g(v) := 0.$$

5.8 Pozorování. Jsou-li slabé řešení u i „data“ úlohy (5.4) „dost hladké“, je

- $0 = T(u - u_0) = Tu - Tu_0 = u|_{\partial\Omega} - h \ \Rightarrow\ u(x) = h(x)$ pro „skoro všechna“ $x \in \partial\Omega$ (a viz okrajovou podmínku z úlohy (5.4)),
- $\forall v \in W_0^{1,2}(\Omega) :\ Tv = 0$, a proto taky (opět užíváme Greenovu větu 4.21)

  $$\int_\Omega f\,v\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \left(p(x)\nabla u\,\nabla v + q(x)u\,v\right)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \left(-\mathrm{div}\,(p(x)\nabla u)v + q(x)u\,v\right)\,\mathrm{d}x.$$

  Odtud

  $$\forall v \in W_0^{1,2}(\Omega) :\ \int_\Omega \big(-\mathrm{div}\,(p(x)\nabla u) + q(x)u - f(x)\big)v\,\mathrm{d}x = 0$$

  $$\Downarrow$$

  $$-\mathrm{div}\,(p(x)\nabla u) + q(x)u = f(x) \text{ skoro všude v } \Omega$$

  (a viz diferenciální rovnici z úlohy (5.4)).

`Závěr:` jsou-li slabé řešení u i další „data“ problému (5.4) dost hladká, je

$$\text{slabé řešení} \equiv \text{klasické řešení}.$$

5.9 Příklad (slabé řešení Neumannovy úlohy).
Uvažujme Neumannovu úlohu

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\mathrm{div}\,(p(x)\nabla u) + q(x)u &=& f(x) & \text{v } \Omega, \\ p(x)\dfrac{\partial u}{\partial \nu} &=& h(x) & \text{na } \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{5.5}$$

kde

- $f \in L^2(\Omega)$,
- $p,\, q \in L^\infty(\Omega)$,
- $h \in L^2(\partial\Omega)$.

Funkci $u \in W^{1,2}(\Omega)$ nazveme slabým řešením Neumannovy úlohy (5.5), je-li

$$\forall v \in W^{1,2}(\Omega) : \int_\Omega \big(p(x)\nabla u\,\nabla v + q(x)u\,v\big)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f\,v\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h\,Tv\,\mathrm{d}s.$$

Zde

$$\begin{aligned} V &:= W^{1,2}(\Omega), \\ a(u,v) &:= \int_\Omega \big(p(x)\nabla u\,\nabla v + q(x)u\,v\big)\,\mathrm{d}x, \\ b(u,v) &:= 0,\ \ g(v) := \int_{\partial\Omega} h\,Tv\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Všimněme si, že $u_0 \in W^{1,2}(\Omega)$ není třeba zadávat, podmínka i) z definice 5.6 je splněna pro všechna $u, u_0 \in W^{1,2}(\Omega)$.

5.10 Pozorování. Jsou-li slabé řešení u i ostatní „data“ úlohy (5.5) „dost hladké“, vyplývá ze vztahu

$$\forall v \in W^{1,2}(\Omega) : \int_\Omega p(x)\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x + \int_\Omega q(x)u\,v\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f\,v\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h\,Tv\,\mathrm{d}s,$$

protože (viz Greenovu větu 4.21)

$$\int_\Omega p(x)\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)v\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} p(x)\underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\nu_i}_{=\frac{\partial u}{\partial \nu}}\,Tv\,\mathrm{d}s,$$

že pro každé $v \in W^{1,2}(\Omega)$ je

$$\int_\Omega \big(-\operatorname{div}(p(x)\nabla u) + q(x)u - f(x)\big) v \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \left(p(x)\frac{\partial u}{\partial \nu} - h(x) \right) Tv \,\mathrm{d}s = 0.$$

Odtud

- $$\forall v \in C_0^\infty(\overline{\Omega}) : \int_\Omega \big(-\operatorname{div}(p(x)\nabla u) + q(x)u - f(x)\big) v \,\mathrm{d}x = 0$$
  $$\Downarrow$$
  $$-\operatorname{div}(p(x)\nabla u) + q(x)u = f(x) \text{ skoro všude v } \Omega$$
  (a viz diferenciální rovnici z úlohy (5.5)),
- $$\forall v \in W^{1,2}(\Omega) : \int_{\partial\Omega} \big(p(x)\frac{\partial u}{\partial \nu} - h(x)\big) Tv \,\mathrm{d}s = 0$$
  $$\Downarrow$$
  $$p(x)\frac{\partial u}{\partial \nu} = h(x) \text{ „skoro všude“ na } \partial\Omega$$
  (a viz okrajovou podmínku z úlohy (5.5)).

5.11 Příklad (slabé řešení Newtonovy úlohy).
Uvažujme Newtonovu úlohu

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\operatorname{div}(p(x)\nabla u) + q(x)u &=& f(x) & \text{v } \Omega, \\ \sigma(x)u + p(x)\dfrac{\partial u}{\partial \nu} &=& h(x) & \text{na } \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{5.6}$$

kde

- $f \in L^2(\Omega)$,
- $p,\ q \in L^\infty(\Omega)$,
- $0 \neq \sigma \in L^\infty(\partial\Omega)$[1],
- $h \in L^2(\partial\Omega)$.

[1] $s \in L^\infty(\Omega) \Leftrightarrow s$ je omezená a „měřitelná“ na $\partial\Omega$

Funkci $u \in W^{1,2}(\Omega)$ nazveme slabým řešením Newtonovy úlohy (5.6), platí-li

$\forall v \in W^{1,2}(\Omega):$

$$\int_\Omega (p(x)\nabla u\,\nabla v + q(x)u\,v)\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \sigma(x)Tu\,Tv\,\mathrm{d}s = \int_\Omega f\,v\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h\,Tv\,\mathrm{d}s.$$

Zde

$$\begin{aligned} V &:= W^{1,2}(\Omega), \\ a(u,v) &:= \int_\Omega \big(p(x)\nabla u\,\nabla v + q(x)u\,v\big)\,\mathrm{d}x, \\ b(u,v) &:= \int_{\partial\Omega} \sigma(x)Tu\,Tv\,\mathrm{d}s,\ \ g(v) := \int_{\partial\Omega} h\,Tv\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Funkci $u_0 \in W^{1,2}(\Omega)$ opět není třeba zadávat.

5.12 Pozorování. Podobně jako u obou předchozích příkladů lze (pomocí Greenovy věty 4.21) ukázat, že pro „dost hladké“ slabé řešení u a „data“ Newtonovy úlohy (5.6) platí

$\forall v \in W^{1,2}(\Omega):$

$$\int_\Omega (-\operatorname{div}(p(x)\nabla u) + q(x)u - f(x))v\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \left(p(x)\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma(x)Tu - h(x)\right) Tv\,\mathrm{d}s = 0,$$

a proto

$$-\operatorname{div}(p(x)\nabla u) + q(x)u = f(x) \text{ skoro všude v } \Omega,$$

$$p(x)\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma(x)\underbrace{Tu}_{=u} = h(x) \text{ „skoro všude“ na } \partial\Omega.$$

5.13 Příklad (slabé řešení smíšené úlohy).
Uvažujme smíšenou úlohu

$$\left\{ \begin{aligned} -\operatorname{div}(p(x)\nabla u) + q(x)u &= f(x) && \text{v } \Omega, \\ u &= h_1(x) && \text{na } \Gamma_1, \\ p(x)\frac{\partial u}{\partial \nu} &= h_2(x) && \text{na } \Gamma_2, \\ \sigma(x)u + p(x)\frac{\partial u}{\partial \nu} &= h_3(x) && \text{na } \Gamma_3, \end{aligned} \right. \tag{5.7}$$

kde hranice $\partial\Omega$ je rozdělena na tři vzájemně disjunktní „měřitelné“ části $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ a navíc

- $f \in L^2(\Omega)$,
- $p,\ q \in L^\infty(\Omega)$,
- $0 \neq \sigma \in L^\infty(\Gamma_3)$,
- $u_0 \in W^{1,2}(\Omega)$ je taková funkce, že $Tu_0 = h_1$ „skoro všude" na Γ_1,
- $h_2 \in L^2(\Gamma_2)$,
- $h_3 \in L^2(\Gamma_3)$.

Buď

$$V := \left\{ v \in W^{1,2}(\Omega) :\ Tv = 0 \text{ na } \Gamma_1 \right\}.$$

Řekneme, že funkce $u \in W^{1,2}(\Omega)$ je slabým řešením smíšené úlohy (5.7), je-li

- $u - u_0 \in V$,
- $\forall v \in V$:

$$\overbrace{\int_\Omega \left(p(x)\nabla u\,\nabla v + q(x)u\,v\right)\,\mathrm{d}x}^{=:\,a(u,v)} + \overbrace{\int_{\Gamma_3} \sigma(x)Tu\,Tv\,\mathrm{d}s}^{=:\,b(u,v)} =$$

$$= \int_\Omega f\,v\,\mathrm{d}x + \underbrace{\int_{\Gamma_2} h_2(x)Tv\,\mathrm{d}s + \int_{\Gamma_3} h_3(x)Tv\,\mathrm{d}s}_{=:\,g(v)}.$$

5.14 Pozorování. Všimněme si, že smíšená úloha v sobě zahrnuje jako speciální případy všechny tři předchozí úlohy:

- $\Gamma_1 = \partial\Omega,\ \Gamma_2 = \Gamma_3 = \emptyset,\ V = W_0^{1,2}(\Omega)$ ... úloha (5.4),
- $\Gamma_2 = \partial\Omega,\ \Gamma_1 = \Gamma_3 = \emptyset,\ V = W^{1,2}(\Omega)$ ... úloha (5.5),
- $\Gamma_3 = \partial\Omega,\ \Gamma_1 = \Gamma_2 = \emptyset,\ V = W^{1,2}(\Omega)$ ... úloha (5.6).

5.15 Cvičení. Dokažte, že jsou-li slabé řešení i „data" úlohy (5.7) „dost hladká", je

$$\text{slabé řešení} \equiv \text{klasické řešení}.$$

5.16 Příklad (slabé řešení problému přechodu – transmise).
Buď

- $\Omega = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \ \|(x_1, \dots, x_n)\| < 1\}$,
- $\Omega^+ = \Omega \cap \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \ x_n > 0\}$,
- $\Omega^- = \Omega \setminus \overline{\Omega^+}$,
- $\Gamma = \Omega \cap \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \ x_n = 0\}$.

Slabým řešením problému přechodu:

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
-\alpha \Delta u &=& f(x) \text{ v } \Omega^+, \\
-\beta \Delta u &=& f(x) \text{ v } \Omega^-, \\
u &=& h(x) \text{ na } \partial\Omega, \\
u && \text{je spojitá na } \Gamma, \\
\alpha \dfrac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0+) &=& \beta \dfrac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0-) \\
&& \text{pro každé } (x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \in \Gamma,
\end{array}
\right.
\tag{5.8}
$$

kde

- $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}^+$,
- $f \in L^2(\Omega)$,
- existuje funkce $u_0 \in W^{1,2}(\Omega)$ tak, že $Tu_0 = h \in L^2(\partial\Omega)$,

rozumíme funkci $u \in W^{1,2}(\Omega)$ takovou, že

- $u - u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$,
- $\forall v \in W_0^{1,2}(\Omega) : \ \alpha \displaystyle\int_{\Omega+} \nabla u \, \nabla v \, \mathrm{d}x + \beta \int_{\Omega-} \nabla u \, \nabla v \, \mathrm{d}x = \int_{\Omega} f(x) v \, \mathrm{d}x.$

Zde

$$
V := W_0^{1,2}(\Omega),
$$

$$
a(u,v) := \alpha \int_{\Omega+} \nabla u \, \nabla v \, \mathrm{d}x + \beta \int_{\Omega-} \nabla u \, \nabla v \, \mathrm{d}x,
$$

$$
b(u,v) := 0, \ \ g(v) := 0.
$$

5.17 Pozorování. Jsou-li slabé řešení u a „data“ (5.8) „dost hladká“, je

- $0 = T(u - u_0) = Tu - Tu_0 = u|_{\partial\Omega} - h \;\Rightarrow\; u(x) = h(x)$ pro „skoro všechna“ $x \in \partial\Omega$,
- $\forall v \in W_0^{1,2}(\Omega)$:

$$\alpha \int_{\Omega+} \nabla u \, \nabla v \,\mathrm{d}x + \beta \int_{\Omega-} \nabla u \, \nabla v \,\mathrm{d}x = \int_{\Omega+} f(x) v \,\mathrm{d}x + \int_{\Omega-} f(x) v \,\mathrm{d}x$$

$$\Downarrow \text{ viz Greenovu větu 4.21}$$

$$-\alpha \int_{\Omega^+} \Delta u \, v \,\mathrm{d}x + \alpha \int_{\partial\Omega^+} \frac{\partial u}{\partial \nu^+} T v \,\mathrm{d}s - \beta \int_{\Omega^-} \Delta u \, v \,\mathrm{d}x + \beta \int_{\partial\Omega^-} \frac{\partial u}{\partial \nu^-} T v \,\mathrm{d}s = \\ = \int_{\Omega^+} f(x) v \,\mathrm{d}x + \int_{\Omega^-} f(x) v \,\mathrm{d}x.$$

Odtud

- $\forall v \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $\operatorname{supp} v \subset \Omega^+$:

$$\int_{\Omega^+} (-\alpha \Delta u - f(x)) v \,\mathrm{d}x = 0 \;\Rightarrow\; -\alpha \Delta u = f(x) \text{ skoro všude v } \Omega^+,$$

- $\forall v \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $\operatorname{supp} v \subset \Omega^-$:

$$\int_{\Omega^-} (-\beta \Delta u - f(x)) v \,\mathrm{d}x = 0 \;\Rightarrow\; -\beta \Delta u = f(x) \text{ skoro všude v } \Omega^-,$$

a proto pro každé $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ platí

$$\alpha \int_{\partial\Omega^+} \frac{\partial u}{\partial \nu^+} T v \,\mathrm{d}s + \beta \int_{\partial\Omega^-} \frac{\partial u}{\partial \nu^-} T v \,\mathrm{d}s = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{\Gamma} \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial \nu^+} + \beta \frac{\partial u}{\partial \nu^-} \right) T v \,\mathrm{d}s = 0,$$

neboli

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0+) = \beta \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0-)$$

pro „skoro všechna“ $(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \in \Gamma$. (Díky předpokladu hladkosti slabého řešení u platí tato podmínka přechodu dokonce pro každé $(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \in \Gamma$.)

5.18 Věta (Laxovo-Milgramovo lemma).
Nechť

- H *je Hilbertův prostor se skalárním součinem* $(\cdot, \cdot)$ *a indukovanou normou*

$$\| \cdot \| = \sqrt{(\cdot, \cdot)},$$

- $B : H \times H \to \mathbb{R}$ *je bilineární forma, která je*
    - *spojitá, tzn. že existuje* $k > 0$ *takové, že*

$$\forall u, v \in H : |B(u, v)| \leq k \|u\| \|v\|,$$

    - H*-eliptická, tzn. že existuje* $c > 0$ *takové, že*

$$\forall u \in H : B(u, u) \geq c \|u\|^2,$$

- $F \in H^*$.

Pak existuje **právě jeden prvek** $w \in H$ *takový, že*

$$\forall v \in H : F(v) = B(w, v).$$

Navíc platí

$$\|w\| \leq \frac{1}{c} \|F\|_{H^*}.$$

Důkaz. Buď $u \in H$ libovolný bod. Uvažujme funkcionál

$$G(v) := B(u, v).$$

Pak zřejmě $G \in H^*$, a proto existuje (viz Rieszovu větu o reprezentaci) právě jeden prvek $Au \in H$ takový, že

$$\underline{\forall v \in H :} G(v) = \underline{B(u, v) = (Au, v)}.$$

Prohlédněme si nyní podrobněji zobrazení

$$A : H \to H.$$

Platí:

- $\mathcal{D}(A) = H, \ A(H) \subset H,$

- A je zřejmě *lineární*,
- A je *spojité* na H, protože

$$\forall u \in H: \ \|Au\|^2 = (Au, Au) = B(u, Au) \le k \|u\| \|Au\|$$

(využili jsme spojitosti bilineární formy B), a proto

$$\forall u \in H: \ \|Au\| \le k \|u\|.$$

- A je *prosté* zobrazení (a tudíž existuje $A^{-1}: A(H) \to H$), protože díky linearitě zobrazení A a H-elipticitě bilineární formy B platí

$$\underline{Au_1 = Au_2}$$

$$\Downarrow$$

$$A(u_1 - u_2) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$c\|u_1 - u_2\|^2 \le B(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = (A(u_1 - u_2), u_1 - u_2) = (0, u_1 - u_2) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\|u_1 - u_2\| = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{u_1 = u_2}.$$

- $\forall u \in H: \ c\|u\|^2 \le B(u, u) = (Au, u) \le \|Au\| \|u\|$, a proto[1]

$$\forall u \in H: \ c\|u\| \le \|Au\|. \tag{5.9}$$

- $A(H)$ je *uzavřená podmnožina* H. Dokažme to. Buď $(u_n) \subset H$ a $y \in H$ takové, že $\underline{Au_n \to y}$. Pak posloupnost (Au_n) je cauchyovská v H, a jelikož (viz (5.9))

$$c\|u_n - u_m\| \le \|A(u_n - u_m)\| = \|Au_n - Au_m\|,$$

je v (**`úplném prostoru`**) H cauchyovská i posloupnost (u_n). Existuje proto $x \in H$ takové, že $u_n \to x$. Odtud a ze spojitosti A pak plyne, že $Au_n \to Ax$. Protože současně předpokládáme $Au_n \to y$, je nutně $Ax = \underline{y \in A(H)}$.

[1] Dokazujeme vlastně spojitost A^{-1}.

- $A(H) = H$. Důkaz tohoto tvrzení proveďme sporem. Předpokládejme, že existuje prvek $z \in H \setminus A(H)$, a buď $u = z - Pz$, kde P je ortogonální projekce na uzavřený lineární podprostor $A(H)$. Pak $\underline{u \neq 0}$ a $\forall y \in A(H) : (u, y) = 0$. Speciálně pro $y = Au$:

$$0 = (u, Au) = (Au, u) = B(u, u) \geq c \|u\|^2 \;\Rightarrow\; \underline{u = 0},$$

a to je spor.

Nyní se vraťme k funkcionálu $F \in H^*$. Z Rieszovy věty o reprezentaci vyplývá, že existuje právě jeden prvek $t \in H$ takový, že

$$\forall v \in H : \; F(v) = (t, v), \quad \|t\| = \|F\|_{H^*}.$$

Protože $A : H \to H$ je *prosté* a *na*, existuje právě jedno $w \in H$ takové, že $t = Aw$. Proto

$$\underline{\forall v \in H : \; F(v)} = (t, v) = (Aw, v) \underline{= B(w, v)}.$$

Navíc (viz (5.9))

$$\|w\| \leq \frac{1}{c}\|Aw\| = \frac{1}{c}\|t\| = \frac{1}{c}\|F\|_{H^*}.$$

□

5.19 Věta (o existenci a jednoznačnosti slabého řešení).
Uvažujme situaci z definice slabého řešení okrajové úlohy (5.6).
Je-li forma $((u, v))$ navíc V-eliptická, tzn. existuje-li $c > 0$ takové, že

$$\forall v \in V : \; ((v, v)) \geq c \|v\|_{k,2}^2,$$

existuje právě jedno slabé řešení okrajové úlohy.
Navíc existuje $j > 0$ takové, že pro toto slabé řešení $u \in W^{k,2}(\Omega)$ platí[a]

$$\|u\|_{k,2} \leq j \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{V^*} + \|u_0\|_{k,2} \right).$$

[a] Tj. vlastně spojitá závislost slabého řešení na pravé straně a okrajových podmínkách.

Důkaz. Volíme-li

- $H := V$,
- $B(u, v) := ((u, v))$,

- $F(v) := \int_\Omega f\, v \,\mathrm{d}x + g(v) - ((u_0, v)) \in H^*$,

jsou splněny všechny předpoklady Laxova-Milgramova lemmatu 5.19, a proto

$$(\exists!\, w \in V)(\forall v \in V):\ B(w,v) = ((w,v)) = F(v),$$

$$\|w\|_{k,2} \le \frac{1}{c}\, \|F\|_{V^*}.$$

Nyní položme

$$u = u_0 + w.$$

Pak

i) $u - u_0 = w \in V$,

ii) $\forall v \in V:$

$$\begin{aligned} ((u,v)) &= ((u_0 + w, v)) = ((u_0, v)) + ((w,v)) = ((u_0,v)) + F(v) = \\ &= \int_\Omega f\, v \,\mathrm{d}x + g(v). \end{aligned}$$

Navíc ze spojitosti bilineární formy $((u,v))$ plyne, že existuje $\ell > 0$ takové, že

$$\forall u, v \in V:\ |((u,v))| \le \ell\, \|u\|_{k,2}\, \|v\|_{k,2},$$

a proto

$$\begin{aligned} \|u\|_{k,2} &= \|u_0 + w\|_{k,2} \le \|u_0\|_{k,2} + \|w\|_{k,2} \le \|u_0\|_{k,2} + \frac{1}{c}\|F\|_{V^*} \le \\ &\le \|u_0\|_{k,2} + \frac{1}{c}\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{V^*} + \ell\|u_0\|_{k,2}\right) \le \\ &\le j\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{V^*} + \|u_0\|_{k,2}\right), \end{aligned}$$

kde

$$j = \max\left\{\frac{1}{c}, 1 + \frac{\ell}{c}\right\} > 0.$$

□

5.20 Příklad. Uvažujme dříve uvedenou smíšenou úlohu (5.7). Dá se dokázat, že

♠ je-li Γ_1 neprázdná podmnožina $\partial\Omega$ „kladné míry“, tak funkcionál definovaný předpisem

$$\|v\|_{1,2,0} := \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

je na prostoru V normou ekvivalentní s normou $\|\cdot\|_{1,2}$.[1]

♣ je-li Γ_3 neprázdná podmnožina $\partial\Omega$ „kladné míry“, platí tato verze tzv. Friedrichsovy nerovnosti: existuje $k > 0$ takové, že

$$\forall v \in W^{1,2}(\Omega): \ \|v\|_{1,2}^2 \le k \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 \, \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_3} |Tv|^2 \, \mathrm{d}s \right).$$

Předpokládejme nyní navíc, že existují čísla p_0, $\sigma_0 > 0$ taková, že

- $p(x) \ge p_0 > 0$ pro skoro všechna $x \in \Omega$,
- $\sigma(x) \ge \sigma_0 > 0$ pro „skoro všechna“ $x \in \Gamma_3$,
- $q(x) \ge 0$ pro skoro všechna $x \in \Omega$.

Pak pro každé $v \in V$ platí

$$\begin{aligned}
((v,v)) = \int_\Omega p(x)|\nabla v|^2 + q(x)v^2 \, \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_3} \sigma(x)|Tv|^2 \, \mathrm{d}s \ge \\
\ge p_0 \int_\Omega |\nabla v|^2 \, \mathrm{d}x + \sigma_0 \int_{\Gamma_3} |Tv|^2 \, \mathrm{d}s \ge \\
\ge \min\{p_0, \sigma_0\} \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 \, \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_3} |Tv|^2 \, \mathrm{d}s \right),
\end{aligned}$$

a proto za předpokladu ♠ nebo ♣ existuje $c > 0$ takové, že

$$\forall v \in V: \ ((v,v)) \ge c\,\|v\|_{1,2}^2,$$

neboli bilineární forma je V-eliptická.

Zjistili jsme: za situace ♠ nebo ♣ má smíšená úloha (5.7) právě jedno slabé řešení. Speciálně: Dirichletova úloha (5.4) a Newtonova úloha (5.6) mají právě jedno slabé řešení; toto řešení je spojitě závislé na pravé straně a okrajových podmínkách.

Problémem zůstává řešitelnost Neumannovy úlohy (5.5). Uvažujeme-li například speciální případ, kdy $q \equiv 0$, tj. okrajovou úlohu

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\mathrm{div}\,(p(x)\nabla u) & = & f(x) & \text{v } \Omega, \\ p(x)\dfrac{\partial u}{\partial \nu} & = & h(x) & \text{na } \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{5.10}$$

kde funkce p opět splňuje podmínku

$$p(x) \ge p_0 > 0 \text{ pro skoro všechna } x \in \Omega,$$

[1] Je-li $\Gamma_1 = \partial\Omega$, stačí si nalistovat Friedrichsovu větu 4.12.

není bilineární forma

$$((u,v)) = \int_\Omega p(x)\nabla u\,\nabla v\,\mathrm{d}x$$

V-eliptická.[1] (Například pro $v \equiv 1 \in W^{1,2}(\Omega)$ je $\|v\|_{1,2} > 0$ a současně $((v,v)) = 0$.)

K tomu si všimněme:

- $v \equiv 1 \in W^{1,2}(\Omega)$, a proto (má-li existovat slabé řešení) musí být
$$\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h(x)\,\mathrm{d}s = 0;$$
- je-li $u \in W^{1,2}(\Omega)$ slabým řešením Neumannovy úlohy (5.10), je zřejmě i každá funkce
$$u_c(x) := u(x) + c,$$
kde $c \in \mathbb{R}$, slabým řešením (5.10).

Dá se dokázat:

je-li splněn i dodatečný předpoklad

$$\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h(x)\,\mathrm{d}s = 0,$$

existuje nekonečně mnoho slabých řešení Neumannovy úlohy

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(p(x)\nabla u) &=& f(x) & \text{v } \Omega, \\ p(x)\dfrac{\partial u}{\partial \nu} &=& h(x) & \text{na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Navíc: jsou-li u_1 a u_2 slabá řešení této úlohy, existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$u_1(x) = u_2(x) + c \text{ pro skoro všechna } x \in \Omega.$$

5.21 Poznámka (regularita slabého řešení). Ukázali jsme si na několika příkladech, že za jistých předpokladů o hladkosti slabého řešení a „dat“ úlohy, je slabé řešení již řešením klasickým.

Je přirozená otázka, zda a jakým způsobem závisí hladkost slabého řešení okrajové úlohy na kvalitě (hladkosti) určujících funkcí úlohy (tj. pravé strany a okrajových podmínek), případně na kvalitě oblasti Ω.

[1] V tomto případě je $V = W^{1,2}(\Omega)$.

Speciálně, jaké musejí být určující funkce a oblast Ω, aby slabé řešení okrajové úlohy bylo již řešením klasickým. To je problematika tzv. regularity slabých řešení, problematika velice obtížná, která obsahuje celou řadu dosud otevřených problémů. (Mimochodem – týká se jí i 19. a 20. Hilbertův problém.)

Uveďme si pro ilustraci alespoň jeden z dosažených výsledků. Uvažujme okrajovou úlohu:

$$\begin{cases} -(p(x)u')' = f(x) \text{ v } (0,1), \\ \\ \qquad u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{5.11}$$

kde

- $f \in L^2(0,1)$,
- $p \in L^\infty(0,1)$,
- $\exists p_0 \in \mathbb{R} :\ 0 < p_0 \leq p(x)$ pro skoro všechna $x \in (0,1)$.

Už víme, že existuje právě jedno slabé řešení této úlohy – tj. funkce $u \in W_0^{1,2}(0,1)$ taková, že

$$\forall v \in W_0^{1,2}(0,1) : \int_0^1 p(x)u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dokážeme následující větu.

5.22 Věta. *Je-li navíc*

- $p \in C^{k+1}(\langle 0,1\rangle)$,
- $f \in W^{k,2}(0,1)$,

kde $k \in \{0,1,2,3,\dots\}$, *platí pro slabé řešení okrajové úlohy* (5.11), *že*

$$u \in W^{k+2,2}(0,1).$$

5.23 Pozorování. Je-li navíc

- $p \in C^2(\langle 0,1\rangle)$,
- $f \in W^{1,2}(0,1)$,

je (díky větě 5.22) $u \in W^{3,2}(0,1)$, a proto (viz větu 4.23)

$$u'' \in W^{1,2}(0,1) \subset C(\langle 0,1\rangle),$$

neboli slabé řešení je `i` řešením klasickým.

Důkaz věty 5.22. Postupujme ve dvou krocích.

1) Nejdříve předpokládejme, že
$$p(x) \equiv 1.$$
Pro slabé řešení $u \in W_0^{1,2}(0,1)$ úlohy (5.11) pak platí
$$\forall v \in W_0^{1,2}(0,1) = \overline{C_0^\infty(0,1)} : \int_0^1 u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$
Tento vztah nám však (mimo jiné) říká, že
$$-u'' = f \text{ ve smyslu distribucí.}$$
Je-li tedy[1]
$$f \in W^{k,2}(0,1) = \left\{v \in L^2(0,1) : \ v',\ v'',\ \ldots,\ v^{(k)} \in L^2(0,1)\right\},$$
je
$$u \in W^{k+2,2}(0,1).$$

2) Nyní předpokládejme, že
$$p \in C^{k+1}(\langle 0,1\rangle),$$
$$\forall x \in \langle 0,1\rangle : \ 0 < p_0 \le p(x),$$
$$f \in W^{k,2}(0,1).$$
Pak
$$\forall w \in W_0^{1,2}(0,1) : \quad v := \frac{w}{p} \in W_0^{1,2}(0,1),$$
a proto pro slabé řešení u úlohy (5.11) platí

$\underline{\forall w \in W_0^{1,2}(0,1) :}$
$$\begin{aligned}\underline{\int_0^1 u'(x)w'(x)\,\mathrm{d}x} &= \int_0^1 u'(x)(p(x)v(x))'\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_0^1 p(x)u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 u'(x)p'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_0^1 f(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 u'(x)p'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_0^1 \big(f(x) + u'(x)p'(x)\big)\frac{w(x)}{p(x)}\,\mathrm{d}x = \underline{\int_0^1 \tilde{f}(x)w(x)\,\mathrm{d}x},\end{aligned}$$

[1] V následujícím vztahu se jedná – pochopitelně – o derivace ve smyslu distribucí.

kde
$$\tilde{f}(x) := \frac{1}{p(x)}\big(f(x) + u'(x)p'(x)\big).$$
Odtud ale plyne, že u je slabým řešením úlohy
$$\begin{cases} -u'' = \tilde{f}(x) \text{ v } (0,1), \\ \quad u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$
a proto (viz bod 1)):
$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{p(x)}\left(f(x) + u'(x)p'(x)\right) \in W^{k,2}(0,1) \quad \Rightarrow \quad u \in W^{k+2,2}(0,1).$$
Nyní si stačí rozmyslet tento „sled“ implikací (podrobněji lze provést indukcí):
$$u \ \in W_0^{1,2}(0,1) \ \Rightarrow \ u' \in L^2(0,1) \ \Rightarrow \ \tilde{f} \in L^2(0,1) = W^{0,2}(0,1) \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ u \in W^{2,2}(0,1) \ \Rightarrow \ u' \in W^{1,2}(0,1) \ \Rightarrow \ \tilde{f} \in W^{1,2}(0,1) \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u \in W^{3,2}(0,1) \ \Rightarrow \ \ldots \ \Rightarrow u \in W^{k+2,2}(0,1).$$
$\square$

5.1 Vztah k variačnímu počtu

Uvažujme situaci z definice slabého řešení okrajové úlohy (viz stranu 43) a předpokládejme `navíc`:

- $u_0 = 0$, $g = 0$ (tzn. homogenní okrajové podmínky),
- bilineární forma $((u, v))$ je V-eliptická, tzn.

$$(\exists c > 0)\,(\forall v \in V):\ \ ((v, v)) \geq c\|v\|_{k,2}^2,$$

- bilineární forma $((u, v))$ je na V symetrická, tzn.

$$\forall u, v \in V:\ \ ((u, v)) = ((v, u)).$$

5.24 Věta. *Za výše uvedených předpokladů jsou následující výroky ekvivalentní.*

1) *$u \in V$ je slabým řešením okrajové úlohy, tzn.*

$$\forall v \in V:\ \ ((u, v)) = \int_\Omega f\, v \,\mathrm{d}x;$$

2) *funkcionál*[a]

$$J(v) := ((v, v)) - 2\int_\Omega f\, v \,\mathrm{d}x$$

nabývá svého minima na V v bodě u, tzn.

$$u \in V \ \wedge\ \min_{v \in V} J(v) = J(u).$$

[a] Funkcionál J je často označován jako kvadratický funkcionál, popř. jako funkcionál energie.

Důkaz.

a) Dokažme nejdříve implikaci 1) $\Rightarrow$ 2). Buď $u \in V$ slabým řešením a buď $v \in V$ libovolný bod. Označme

$$z = v - u.$$

Pak

$$\begin{aligned}
J(v) = J(u+z) &= ((u+z,u+z)) - 2\int_\Omega f(u+z)\,\mathrm{d}x = \\
&= ((u,u)) + 2((u,z)) + ((z,z)) - 2\int_\Omega f\,u\,\mathrm{d}x - 2\int_\Omega f\,z\,\mathrm{d}x = \\
&= ((u,u)) - 2\int_\Omega f\,u\,\mathrm{d}x + ((z,z)) = J(u) + ((z,z)) \geq \\
&\geq J(u) + c\|z\|_{k,2}^2 \geq J(u).
\end{aligned}$$

V předchozích vztazích jsme využili symetrie a V-elipticity bilineární formy $((\cdot,\cdot))$ a faktu, že u je slabým řešením okrajové úlohy.

b) Nyní dokažme implikaci $\underline{2) \Rightarrow 1)}$. Buď $u \in V$ taková funkce, že

$$J(u) = \min_{v\in V} J(v),$$

a buď $z \in V$ libovolný bod. Pak pro každé $t \in \mathbb{R}$ platí

$$h(t) := J(u+tz) \geq J(u) = h(0),$$

tzn. že funkce h nabývá na $\mathbb{R}$ svého minima v bodě 0, a proto: existuje-li $h'(0)$, je $h'(0) = 0$. Z definice funkce h vyplývá, že pro každé $t \in \mathbb{R}$ je

$$\begin{aligned}
h(t) &= ((u+tz,u+tz)) - 2\int_\Omega f(u+tz)\,\mathrm{d}x = \\
&= ((u,u)) + 2t((u,z)) + t^2((z,z)) - 2\int_\Omega f\,u\,\mathrm{d}x - 2t\int_\Omega f\,z\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

neboli že h je kvadratickou funkcí. Proto

$$h'(0) = 0 = 2((u,z)) - 2\int_\Omega f\,z\,\mathrm{d}x.$$

Zjistili jsme, že

$$\forall z \in V:\ ((u,z)) = \int_\Omega f\,z\,\mathrm{d}x,$$

tudíž u je slabým řešením (naší) okrajové úlohy.

□

5.2 Metody diskretizace

Vraťme se zpět k situaci z věty 5.24 na straně 60, tzn. předpokládáme, že forma

$$((\cdot,\cdot)) : \; W^{k,2}(\Omega) \times W^{k,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$$

je

- spojitá,
- symetrická,
- V-eliptická ($W_0^{k,2}(\Omega) \subset V = \overline{V} \subset W^{k,2}(\Omega)$).

K dané funkci $f \in L^2(\Omega)$ hledáme funkci $u \in V$ takovou, aby

$$\forall v \in V : \;\; ((u,v)) = \int_\Omega f\, v \,\mathrm{d}x. \tag{5.12}$$

Už víme, že tato úloha má právě jedno řešení.

Nejdříve si všimněme, že forma $((\cdot,\cdot))$ definuje (za výše uvedených předpokladů) `skalární součin` na prostoru V; navíc z V-elipticity a spojitosti bilineární formy $((\cdot,\cdot))$ dostáváme, že

$$(\exists c_1,\, c_2 > 0)\, (\forall v \in V) : \;\; c_1 \|v\|_{k,2}^2 \leq ((v,v)) \leq c_2 \|v\|_{k,2}^2,$$

a proto normy $\|\cdot\| := \sqrt{((\cdot,\cdot))}$ a $\|\cdot\|_{k,2}$ jsou na V `ekvivalentní`.

Odtud a z předpokladu, že $(V, \|\cdot\|_{k,2})$ je uzavřený podprostor $W^{k,2}(\Omega)$, plyne:

$(V, \|\cdot\|)$ je `separabilní Hilbertův prostor`.

5.25 Věta. *Buď $\{e_1, e_2, \ldots, e_j, \ldots\}$ ortonormální báze V vzhledem ke skalárnímu součinu $((\cdot,\cdot))$. Pak řešení úlohy (5.12) má tvar*

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\int_\Omega f\, e_j \,\mathrm{d}x \right) e_j .$$

Důkaz. Nechť u je řešením úlohy (5.12) (existuje!). Pak pro každé $j \in \mathbb{N}$ platí

$$((u, e_j)) = \int_\Omega f\, e_j \,\mathrm{d}x,$$

a proto (viz definici ortonormální báze v [2])

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} ((u, e_j))e_j = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\int_\Omega f\, e_j \, \mathrm{d}x \right) e_j. \tag{5.13}$$

□

5.2.1 Ritzova metoda

Už víme, že $u \in V$ je řešením úlohy (5.12) právě tehdy, je-li

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v),$$

kde

$$J(v) := ((v, v)) - 2 \int_\Omega f\, v \, \mathrm{d}x.$$

Pokusme se o takovouto aproximaci u:

Buď $\{e_1, e_2, \ldots\}$ ortonormální báze V $\big($vzhledem k $((\cdot, \cdot))\big)$. Hledejme funkci

$$u_m \in \mathrm{Lin}\,\{e_1, \ldots, e_m\} =: V_m$$

takovou, aby

$$J(u_m) = \min_{v \in V_m} J(v).$$

Protože

$$u_m \in V_m \;\Leftrightarrow\; \big[\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R} : \; u_m = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j\, e_j\big],$$

hledáme vlastně minimum funkce

$$h(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) := J\left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j\, e_j \right) \text{ na } \mathbb{R}^m.$$

Všimněme si, že

$$h(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \left(\left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j\, e_j, \sum_{j=1}^{m} \alpha_j\, e_j \right)\right) - 2 \int_\Omega f \sum_{j=1}^{m} \alpha_j\, e_j \, \mathrm{d}x =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \alpha_j^2 - 2 \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \int_\Omega f\, e_j \, \mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{m} \Bigg(\underbrace{\alpha_j^2 - 2\alpha_j \int_\Omega f\, e_j \, \mathrm{d}x}_{\to\infty \text{ pro } |\alpha_j| \to \infty} \Bigg),$$

a proto ($h \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$) minimum h na R^m existuje, a to v bodě $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, pro který platí

$$\forall j \in \{1, \dots, m\} : \ \frac{\partial h}{\partial \alpha_j}(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = 2\alpha_j - 2\int_\Omega f\, e_j \,\mathrm{d}x = 0.$$

To znamená, že pro aproximaci u_m platí

$$u_m = \sum_{j=1}^{m} \left(\int_\Omega f\, e_j \,\mathrm{d}x \right) e_j.$$

Nepřehlédněme, že $u_m \in V_m$ je vlastně součtem prvních m členů Fourierovy řady funkce u (viz (5.13)), což mimo jiné znamená

$$\|u - u_m\| = \inf_{z \in V_m} \|u - z\|,$$

$$u_m \to u \text{ ve } (V, \|\cdot\|),$$

a proto – díky ekvivalenci norem $\|\cdot\|$ a $\|\cdot\|_{k,2}$ – taky

$$u_m \to u \text{ ve } (V, \|\cdot\|_{k,2}).$$

Všimněme si ještě jedné věci, v bodě $u_m \in V_m$ má J minimum na V_m. Tato skutečnost je `nezávislá` na volbě báze podprostoru V_m.

Buď

$$\{v_1, v_2, \dots, v_j, \dots\}$$

báze (ne nutně ortonormální) prostoru V, tzn.

- $(\forall v \in V)\,(\exists (c_n) \subset \mathbb{R}) : v = \sum_{j=1}^{\infty} c_j\, v_j := \lim_{m \to \infty} \sum_{j=1}^{m} c_j\, v_j$,
- $\forall j \in \mathbb{N} : \ v_1, \dots, v_j$ jsou lineárně nezávislé,

a označme

$$V_m = \mathrm{Lin}\,\{v_1, \dots, v_m\}.$$

Pak (jak už víme)

$$\exists!\, u_m \in V_m : \ J(u_m) = \min_{v \in V_m} J(v).$$

Ukažme si – podobně jako před chvílí – jak lze toto

$$u_m = \sum_{j=1}^{m} c_j\, v_j \in V_m$$

najít. Buď

$$\tilde{h}(c_1,\ldots,c_m) := J\left(\sum_{j=1}^m c_j\, v_j\right) = \sum_{i=1}^m c_i \left(\sum_{\ell=1}^m c_\ell((v_i,v_\ell))\right) - 2\sum_{j=1}^m c_j \int_\Omega f\, v_j\,\mathrm{d}x.$$

Pak

$$\forall j\in\{1,\ldots,m\}:\ \frac{\partial\tilde{h}}{\partial c_j}(c_1,\ldots,c_m) =$$

$$= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^m c_i((v_i,v_j)) + \frac{\partial}{\partial c_j}\left(c_j\sum_{\ell=1}^m c_\ell((v_j,v_\ell))\right) - 2\int_\Omega f\, v_j\,\mathrm{d}x =$$

$$= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^m c_i((v_i,v_j)) + \sum_{\ell=1}^m c_\ell((v_j,v_\ell)) + c_j((v_j,v_j)) - 2\int_\Omega f\, v_j\,\mathrm{d}x =$$

$$= 2\sum_{i=1}^m c_i((v_i,v_j)) - 2\int_\Omega f\, v_j\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall j\in\{1,\ldots,m\}:\ \sum_{i=1}^m c_i((v_i,v_j)) = \int_\Omega f\, v_j\,\mathrm{d}x. \tag{5.14}$$

Z této soustavy určíme (a `jednoznačně!`) hledaná čísla $c_1,\ldots,c_m$. Dokázali jsme následující větu.

5.26 Věta. *Buď $\{v_1,v_2,\ldots,v_m,\ldots\}$ báze prostoru V a buď pro každé $m\in\mathbb{N}$*

$$u_m := \sum_{j=1}^m c_j\, v_j,$$

kde $c_1,\ldots,c_m\in\mathbb{R}$ jsou řešením soustavy (5.14).

Pak

$$u := \lim u_m$$

je řešením úlohy (5.12).

V praktických aplikacích je (pro omezenou oblast Ω) velmi obtížné sestrojit bázi prostoru V, a tím i příslušné konečně dimenzionální podprostory V_m. Tuto nesnáz částečně řeší tzv. Galerkinova metoda, kterou si popíšeme v následující části. Poznamenejme ještě, že Galerkinovu metodu by šlo – na rozdíl od Ritzovy metody – použít i pro případ `nesymetrické` bilineární formy $((\cdot,\cdot))$.

5.2.2 Galerkinova metoda

5.27 Definice. Buď

$$\{V_h\}_{h\in(0,1)}$$

třída konečně rozměrných podprostorů V.

Říkáme, že

$$\underline{V_h \to V \text{ pro } h \to 0+}\,,$$

jestliže

$$\forall v \in V: \lim_{h\to 0+} (\operatorname{dist}[V_h, v]) = 0,$$

kde

$$\operatorname{dist}[V_h, v] := \inf_{z\in V_h} \|v - z\|_{k,2}.$$

5.28 Příklad. Je-li $\{v_1,\ldots,v_m,\ldots\}$ báze V, $V_m = \operatorname{Lin}\{v_1,\ldots,v_m\}$, lze jako příklad uvedeného systému $\{V_h\}_{h\in(0,1)}$ s vlastností $V_h \to V$ pro $h \to 0+$ uvažovat

$$V_h := V_m \;\text{ pro }\; \frac{1}{m+1} \le h < \frac{1}{m}.$$

5.29 Věta. *Buď u řešením úlohy (5.12) a nechť $V_h \to V$ pro $h \to 0+$.*
Potom pro každé $h \in (0,1)$ existuje právě jedno $u_h \in V_h$ takové, že

i) *pro každé $h \in (0,1)$ platí*

$$\forall v \in V_h: \;((u_h, v)) = \int_\Omega f\, v\,\mathrm{d}x,$$

ii)

$$\lim_{h\to 0+} u_h = u \;(ve\; W^{k,2}(\Omega)),$$

tzn.

$$(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists\delta > 0)\,(\forall h \in (0,\delta)): \;\|u - u_h\|_{k,2} < \varepsilon.$$

Důkaz.[1]

a) Buď $h \in (0,1)$ a $V_h = \operatorname{Lin}\{v_1, v_2, \dots, v_{m_h}\}$, kde $v_1, \dots, v_{m_h}$ jsou lineárně nezávislé. Funkci $u_h \in V_h$ hledejme ve tvaru

$$u_h = \sum_{i=1}^{m_h} c_i \, v_i,$$

kde $c_1, \dots, c_{m_h} \in \mathbb{R}$.

Zřejmě platí, že funkce u_h má vlastnost

$$\forall v \in V_h : \ ((u_h, v)) = \int_\Omega f \, v \, \mathrm{d}x$$

právě tehdy, je-li (volme $v = v_j$)

$$\forall j \in \{1, \dots, m_h\} : \ \sum_{i=1}^{m_h} c_i((v_i, v_j)) = \int_\Omega f \, v_j \, \mathrm{d}x.$$

Dostáváme tak stejnou soustavu rovnic (s `právě jedním řešením` $c_1, \dots, c_{m_h}$) jako při Ritzově metodě (viz (5.14)).

b) Zbývá nám dokázat tvrzení ii). Buď

- $u \in V$ řešením úlohy (5.12), tzn.

$$\forall v \in V : \ ((u, v)) = \int_\Omega f \, v \, \mathrm{d}x, \tag{5.15}$$

- $u_h \in V_h \subset V$ takové, že

$$\forall v \in V_h : \ ((u_h, v)) = \int_\Omega f \, v \, \mathrm{d}x, \tag{5.16}$$

  (takové u_h, jak již víme, existuje právě jedno!),

- $v_h \in V_h$ libovolný bod.

Pak existují konstanty c_1, $c_2 > 0$ (nezávislé na u, u_h, v_h!!) takové, že

$$\begin{aligned} c_1 \|u - u_h\|_{k,2}^2 &\le ((u - u_h, u - u_h)) = ((u - u_h, u - u_h)) + \overbrace{((u - u_h, \underbrace{u_h - v_h}_{\in V_h \subset V}))}^{=0 \text{ (viz (5.15) a (5.16))}} = \\ &= ((u - u_h, u - u_h + u_h - v_h)) = ((u - u_h, u - v_h)) \le \\ &\le c_2 \|u - u_h\|_{k,2} \|u - v_h\|_{k,2}, \end{aligned}$$

[1] Díky, Dalibore!

a proto

$$\|u - u_h\|_{k,2} \leq \frac{c_2}{c_1}\|u - v_h\|_{k,2}.$$

Odtud a z předpokladu $V_h \to V$ pro $h \to 0+$ již snadno plyne, že

$$\lim_{h \to 0+} u_h = u.$$

$\square$

5.30 Poznámka. Při speciální konstrukci prostorů V_h, tedy jako speciální případ Galerkinovy metody, dostaneme tzv. metodu konečných prvků. Podstatou této metody je speciální volba prvků báze $v_1, \ldots, v_{m_h} \in V_h$ tak, aby matice

$$A = ((v_i, v_j))_{i,j=1}^{m_h}$$

měla málo nenulových prvků, navíc rozmístěných okolo diagonály (mluvíme pak o pásové řídké matici). To je podstatné při praktickém (numerickém) řešení „velkých" soustav (tj. pro „velké" m_h).

Literatura

[1] R. Blaheta: *Matematické modelování a metoda konečných prvků*, http://mi21.vsb.cz/, 2012.

[2] J. Bouchala: *Úvod do funkcionální analýzy*, http://mi21.vsb.cz/, 2012.

[3] J. Franců: *The methods for solving operator equations with applications to mathematical physics*, Proceedings of the seminar IMAMM 94, ZČU Plzeň, 1994.

[4] S. Fučík, A. Kufner: *Nelineární diferenciální rovnice*, SNTL, Praha, 1978.

[5] S. Fučík, J. Milota: *Matematická analýza II*, skripta MFF UK, Praha, 1980.

[6] O. John, J. Nečas: *Rovnice matematické fyziky*, skripta MFF UK, Praha, 1977.

[7] J. Kačur: *Vybrané kapitoly z matematickej fyziky I*, skripta MFF Univerzity Komenského, Bratislava, 1988.

[8] J. Lukeš: *Zápisky z funkcionální analýzy*, skripta MFF UK, Praha, 1998.

[9] J. Lukeš, J. Malý: *Míra a integrál*, skripta MFF UK, Praha, 1993.

[10] S. Míka, A. Kufner: *Okrajové úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice*, SNTL, Praha, 1981.

[11] S. Míka, A. Kufner: *Parciální diferenciální rovnice I, stacionární rovnice*, SNTL, Praha, 1983.

[12] J. Nečas: *Direct methods in the theory of elliptic equations*, Springer-Verlag, Berlin, 2012.

[13] K. Rektorys: *Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky*, Academia, Praha, 1999.

[14] K. Rektorys: *Metoda časové diskretizace a parciální diferenciální rovnice*, SNTL, Praha, 1985.

[15] K. Rektorys: *Matematika V. Obyčejné a parciální diferenciální rovnice s okrajovými podmínkami*, skripta FSv ČVUT, Praha, 1989.

[16] M. Renardy, R.C. Rogers: *An introduction to partial differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1993.

[17] E. Zeidler: *Applied functional analysis, applications to mathematical physics*, Springer-Verlag, New York, 1995.

[18] E. Zeidler: *Applied functional analysis, main principles and their applications*, Springer-Verlag, New York, 1995.

Rejstřík