SBÍRKA PŘÍKLADŮ Z MATEMATICKÉ ANALÝZY 1

JIŘÍ BOUCHALA

Katedra aplikované matematiky, VŠB–TU Ostrava

jiri.bouchala@vsb.cz

www.am.vsb.cz/bouchala

Předmluva

Cílem této sbírky je poskytnout studentům vhodné příklady k přemýšlení a k procvičování látky obsažené ve skriptech „Matematická analýza 1".

Tento text není ukončen. Průběžně ho měním a doplňuji. Prosím proto čtenáře o shovívavost a sdělení všech připomínek.

2. prosince 1999
Jiří Bouchala

Příklad 1.
Dokažte matematickou indukcí:

a) $\forall n \in \mathbb{N} : 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{1}{3}n(2n+1)(2n-1)$;

b) $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)} = \frac{n\cdot(n+3)}{4\cdot(n+1)\cdot(n+2)}$;

c) $(\forall n \in \mathbb{N})\,(\exists k \in \mathbb{N}) : n^3 + 3n^2 + 2n = 6k$;

d) $(\forall n \in \mathbb{N})\,(\forall q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}) : 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$;

e) $(\forall x \in \langle -1, +\infty))\,(\forall n \in \mathbb{N}) : (1+x)^n \geq 1 + nx$;

f) $\forall n \in \mathbb{N} : n > 4 \Rightarrow 2^n > n^2$.

Příklad 2.
Určete (existují-li) $\min M$, $\max M$, $\sup M$ a $\inf M$, je-li:

a) $M = \{\frac{p}{q} :\ p \in \mathbb{N} \ \wedge\ q \in \mathbb{N} \ \wedge\ p \leq q\}$;

b) $M = \{\frac{5-1999n}{5-1999n^2} :\ n \in \mathbb{N}\}$;

c) $M = \{0{,}9,\ 0{,}99,\ 0{,}999,\ 0{,}9999,\ 0{,}99999,\ \ldots\}$;

d) $M = \{x \in \mathbb{R} :\ \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}\}$.

Příklad 3.
Buď $A, B \subset \mathbb{R}^*$. Dokažte platnost následujících tvrzení:

a) $A = \emptyset \Longleftrightarrow +\infty = \inf A > \sup A = -\infty$;

b) $A \neq \emptyset \Longleftrightarrow \inf A \leq \sup A$;

c) A má alespoň dva prvky $\Longleftrightarrow \inf A < \sup A$;

d) A má nejvýše jedno supremum a nejvýše jedno infimum;

e) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$;

f) $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$;

g) $A \subset B \Longrightarrow \sup A \leq \sup B$.

Příklad 4.
Určete definiční obor funkce f dané předpisem:

a) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \sqrt{\ln(x^2 - |x|)}$;

b) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \arcsin\left(\frac{2-x}{2x+1}\right)$;

c) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \frac{1}{\arccos(\ln x^3)}$;

d) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \ln(2 - |2x^2 + 10x + 12|)$;

e) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \ln|\ln(-\ln x)|$.

Příklad 5.
Načrtněte graf funkce f dané předpisem:

a) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} |x| - 2|x+1| - x$;

b) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} -\sqrt{16 - x^2}$;

c) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \operatorname{arctg}(\operatorname{sgn} x)$;

d) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \arcsin(\sin x)$;

e) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \sin(\arcsin x)$;

f) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \cos(\arcsin x)$;

g) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \arcsin(\cos x)$.

Příklad 6.
Sestrojte graf funkce f, víte-li:
- $Df = \mathbb{R}$,
- f je lichá,
- $f(0) = 0 = f\left(\frac{3}{2}\right)$,
- f je periodická s periodou 3,
- $\forall x \in \left(0, \frac{3}{2}\right): \; f(x) = 1 - x^2$.

Vypočtěte $f(1000)$, $f(\pi)$, $f(-\sqrt{2})$.

Příklad 7.
Najděte (existuje-li) inverzní funkci k funkci f, je-li:

a) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} 4x + 2$;

b) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \frac{1-x}{1+x}$;

c) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \sqrt{9 - x^2}$, $Df = \langle -3, 0 \rangle$;

d) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \sqrt{9 - x^2}$, $Df = \langle 0, 3 \rangle$;

e) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \sin^2 x - \sin x - 2$, $Df = (0, \pi)$;

f) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \cos x$, $Df = \langle 11\pi, 12\pi \rangle$.

Příklad 8.
Určete, zda je funkce $f \circ g$ rostoucí (případně klesající), víte-li, že:

a) f a g jsou rostoucí funkce;

b) f a g jsou klesající funkce;

c) f je rostoucí funkce a g je klesající funkce;

d) f je klesající funkce a g je rostoucí funkce.

Příklad 9.
Najděte všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která platí:

a) $2\sin^2 x - 5\cos x + 1 = 0$;

b) $\cos x + \sin(2x) \geq 0$;

c) $\frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x} = 2\cos(2x)$;

d) $2\sin x = \sqrt{3}\operatorname{tg} x$;

e) $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x = 1 + \operatorname{tg} x$;

f) $\operatorname{tg} x + \frac{\cos x}{1+\sin x} = 2$.

Příklad 10.
Vypočtěte:

a) $\lim \left(n^4 + 5n^3 + 1\right);$

b) $\lim \left(n^4 - 5n^3 + 1\right);$

c) $\lim \dfrac{3n^2 + 6n - 1}{2n^2 - 7n + 3};$

d) $\lim \dfrac{5 - 3n}{n^2 + 16};$

e) $\lim \dfrac{\sqrt[3]{n^2 + 1} - 16n}{\sqrt[3]{n^4 + 18n}};$

f) $\lim \left(\sqrt{4n^2 - n} - 2n\right);$

g) $\lim \left(\dfrac{3n}{3n - 1}\right)^n;$

h) $\lim \left(\dfrac{2n}{3n - 1}\right)^n;$

i) $\lim \left(\dfrac{3n}{2n - 1}\right)^n;$

j) $\lim \sqrt[3n]{n};$

k) $\lim \sqrt[n]{n^4 - 2n^2 + 13n};$

l) $\lim \dfrac{6^n + 4^n - 2^n}{6^{n+1} - 3^n};$

m) $\lim \dfrac{(n + 1)! - 2 \cdot n!}{3(n + 1)! + 1};$

n) $\lim \dfrac{n \cdot \sin(n!)}{n^2 + 1};$

o) $\lim \dfrac{n^3 + 2n^2 - 3}{-3n^2 + 51};$

p) $\lim \dfrac{2^n + (-2)^n}{2 \cdot 4^n};$

q) $\lim \left(\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}\right);$

r) $\lim \left(1 + \dfrac{1}{5n}\right)^n;$

s) $\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+5};$

t) $\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{5n};$

u) $\lim \dfrac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^n}}{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{4^n}};$

v) $\lim \dfrac{1 + 2 + \cdots + n}{\sqrt[3]{8n^6 - n}};$

w) $\lim \left(\sin(\ln n) - n\right);$

x) $\lim \dfrac{2n^2 + 2n + n\sin(2n)}{n\cos(3n) + (2n + \sin(4n))^2};$

y) dalších (alespoň) 26 limit z libovolné sbírky příkladů.

Příklad 11.
Najděte geometrickou posloupnost (a_n), pro kterou platí: $a_2 - a_1 = 3$, $a_4 - a_3 = 12$.

Příklad 12.
Dokažte ekvivalenci: $\frac{1}{a_n} \to 0 \iff |a_n| \to +\infty$.

Příklad 13.
Nechť $a \in \mathbb{R}^*$ a nechť (a_n), (b_n) a (c_n) jsou takové posloupnosti, že:
$\forall n \in \mathbb{N}:\ b_n = a_{2n} \ \wedge\ c_n = a_{2n-1}$.
Dokažte, že potom platí ekvivalence: $a_n \to a \iff (b_n \to a \ \wedge c_n \to a)$.

Příklad 14.
Definujme posloupnost (a_n) rekurentně rovnostmi: $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$. Vypočtěte $\lim a_n$.

Příklad 15.
Určete, zda daná limita existuje, a pokud ano, vypočtěte ji:

a) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \left(x^3 + 2x - 1\right)$;

b) $\displaystyle\lim_{x\to -3} \frac{\sqrt{4+x} - 1}{x+3}$;

c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}} - 1}{\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}}$;

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(2x)}{\sin(5x)}$;

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(3x)}{x^2}$;

f) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$;

g) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \left(\frac{x+2}{x-2}\right)^x$;

h) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x$, $k \in \mathbb{R}$;

i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x} - 1}$;

j) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{(x+a)(x+b)} - x\right)$, $a, b \in \mathbb{R}$;

k) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\sin(3x)}{x}$;

l) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^3}$;

m) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \ln\left|\frac{\sin x}{x}\right|$;

n) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{(1-x)^3}}{x\sqrt[3]{x^2+3}}$;

o) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 - \operatorname{tg} x}}{\sin(2x)}$;

p) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left((1-x)\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}x)\right)$;

q) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x) + \sin(5x)}{\sin(2x)}$;

r) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{e^{\sin^2 x} - \cos x}{x^2}$;

s) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x^2)}{x\sin(3x)}$;

t) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x + 1}{\cos x - 1}$;

u) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x + 1}{\sin x}$;

v) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2}\left(\sin\frac{1}{x} + 2\right)\right)$;

w) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \operatorname{arccotg} \frac{1}{x-2}$;

x) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \arccos \frac{x}{1+x^2}$.

Příklad 16.
Rozhodněte, zda je funkce f spojitá v $\mathbb{R}$, je-li:

$$f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{cases} \frac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}, & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1, -2\}, \\ -\frac{1}{2}, & \text{je-li } x = -1, \\ -\frac{1}{3}, & \text{je-li } x = -2, \\ -\frac{1}{4}, & \text{je-li } x = 1. \end{cases}$$

Příklad 17.
Vypočtěte $f'(x)$ a určete Df', je-li funkce f daná předpisem:

a) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \sqrt{x\sqrt{x}}$;

b) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} 3^x - x^2$;

c) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} |x-3|$;

d) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} |x^3|$;

e) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1-x}{1+x}$;

f) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{x-1}{3} + \frac{2}{\sqrt{2x+1}}$;

g) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1-x}{1+x}}$;

h) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{e^x}{a^x(1-\ln a)},\ a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{e\}$;

i) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} 2(\sqrt{e^x-1} - \operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1})$;

j) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} x^{\ln x}$;

k) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} (\sin x)^{\cos x}$;

l) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} x^{\frac{1}{x}}$;

m) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \ln \arcsin x$;

n) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \ln^3(\ln^2 x)$;

o) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \arcsin^3\left(\frac{x-1}{2}\right)$;

p) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \sqrt{\sin(\cos^2(\operatorname{tg} x))}$;

q) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{ax+b}{cx+d},\ a, b, c, d \in \mathbb{R},\ ad - bc \neq 0$;

r) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \ln \frac{x^x-1}{x^x}$;

s) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} x \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} + \operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x}$;

t) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \ln\cos\operatorname{arctg}\frac{e^x-e^{-x}}{2}$;

u) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\arccos x}{x} + \frac{1}{2}\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}$.

Příklad 18.
Určete – teď, když znáte l'Hospitalovo pravidlo –, zda daná limita existuje, a pokud ano, vypočtěte ji:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x^n},\ n \in \mathbb{R}^+$;

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^4 - 2x^3 - x^2 - 3x + 10}{3x^3 - 5x^2 - 2x}$;

c) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{2x^4 - x^2 - 1}$;

d) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3 + 2x^2 - x + 2}{2x^4 - x^2 - 1}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(\sin x)\sin(5x)(1 + x^5)}{\cos(4x)(5 + 6x - 5x^2)\operatorname{tg}(3x)}$;

f) $\lim\limits_{x\to 0+} x^n \ln x,\ n \in \mathbb{R}^+$;

g) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$;

h) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$;

i) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}}$;

j) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x + 6\cos(2x)}{-8x}$;

k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\sin x)}{\ln x}$;

l) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n - x}{x^n - 1},\ n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

m) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$;

n) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$;

o) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$;

p) $\lim\limits_{x\to 0} \left(x^2 e^{\frac{1}{x^2}}\right)$;

q) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n},\ n \in \mathbb{R}^+$;

r) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} x + \dfrac{1}{x - \frac{\pi}{2}}\right)$.

Příklad 19.
Najděte (nějakou) funkci $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pro niž platí:
- f je spojitá na intervalu $\langle 0, 1\rangle$,
- $f(0) = f(1) = 2$,
- neexistuje $x \in (0, 1)$ takové, že $f'(x) = 0$.

Příklad 20.
Najděte intervaly ryzí monotonie funkce f dané předpisem:

a) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} 2x^3 + 3x^2 - 36x + 1999$;

b) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} 2\sin x + \cos(2x)$;

c) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} x^2 e^{\frac{1}{x}}$;

d) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \dfrac{x^2}{\ln x}$;

e) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \sqrt{8x - x^2}$;

f) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \arccos \dfrac{2x}{1 + x^2}$;

g) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} x^3 + 12|x|$;

h) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} e^{x^3 - 12x}$;

i) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} 2x + 3\sqrt[3]{(2 - x)^2}$;

j) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \operatorname{arctg} x - x$.

Příklad 21.
Najděte všechny lokální extrémy funkce f dané předpisem:

a) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} 6x^3 - 3x^2 + 13x + 1999;$ b) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \sin x + \cos x;$

c) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} x \operatorname{arctg} x;$ d) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} x - \dfrac{1}{x};$

e) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} |x+3| - 3|x| + 2|x-2|;$ f) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \sin^3 x + \cos^3 x;$

g) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} x(x+1)^2(x-3)^3;$ h) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} x + \sqrt{1-x};$

i) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} 4x - 3 \operatorname{tg} x;$ j) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2 - 1};$

k) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \operatorname{arctg}(\ln(1-x^2));$ l) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}.$

Příklad 22.
Najděte všechny globální extrémy funkce f na intervalu J, je-li:

a) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \sin(2x) + x,\ J = \langle 0, \pi \rangle;$ b) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \operatorname{tg} x - 4x,\ J = (-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2});$

c) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \dfrac{x^2+4}{x},\ J = (0, 3);$ d) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} x^x,\ J = (0, +\infty);$

e) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \operatorname{arctg}(\ln(1-x^2)),\ J = Df;$ f) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} x^3 - 4x^2 + 10x,\ J = (0, 8).$

Příklad 23.
Najděte obdélník daného obvodu s ($s \in \mathbb{R}^+$), jehož úhlopříčka má:
a) maximální velikost;
b) minimální velikost.

Příklad 24.
Do rotačního kužele o poloměru podstavy r a výšce h ($r, h \in \mathbb{R}^+$) je vepsán rotační válec s maximálním objemem. Určete poloměr podstavy a výšku tohoto válce.

Příklad 25.
Dvě chodby široké 3m a 7m se křižují v pravém úhlu. Zjistěte maximální délku žebříku, který je možno přenést ve vodorovné poloze z jedné chodby do druhé. (Výsledek zaokrouhlete na centimetry.)

Příklad 26.
Najděte – co největší – intervaly, na nichž je funkce f ryze konvexní (resp. ryze konkávní), a určete všechny inflexní body funkce f, je-li:

a) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} 5x^2 + 20x + \pi$; b) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} 3x^5 - 5x^4 + 13$;

c) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} x(1-x)^2$; d) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} 2 - |x^2 - 2|$;

e) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} x^2 - 1 + \sqrt[3]{x^2}$; f) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 5x + 17$;

g) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} e^{|x|}$; h) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} x - \cos x$;

i) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \dfrac{x^3}{x^2+27}$; j) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} 3 - (x+2)^{\frac{7}{5}}$;

k) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right)$; l) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} x \ln x$.

Příklad 27.
Najděte všechny asymptoty (grafu) funkce f dané předpisem:

a) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \dfrac{x}{x-1}$; b) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \dfrac{x\sqrt{x^2-1}}{2x^2-1}$;

c) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \dfrac{x}{\sin x}$; j) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \dfrac{4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - x + 5}{2x^3 + x^2 - 2x + 1}$.

Příklad 28.
Vyšetřete průběh funkce f dané předpisem:

a) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \dfrac{4-x^2}{2x+5}$; b) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$;

c) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} x^2 e^{\frac{1}{x}}$; d) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \dfrac{\ln(x^2)}{x^2}$;

e) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \dfrac{\cos x}{2+\sin x}$; f) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \arcsin(\sin x)$;

g) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \arcsin(\cos x)$; h) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} x \operatorname{arccotg} x$;

i) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \arcsin \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$; j) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \ln(x^2 + 3x - 4)$;

k) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} e^{\frac{x-2}{2x+1}}$; l) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \arcsin(1 - \ln^2 x)$;

m) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \sin x + \cos^2 x$; n) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \ln(3 + 2x - x^2)$;

o) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} e^{\frac{2x+1}{x-2}}$; p) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \dfrac{x^4}{x^3-2}$;

q) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} |x|e^{-|x-1|}$; r) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2-1}$;

s) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} x^x$; t) $f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \ln(x + \sqrt{x^2+1}$.

Příklad 29.
Vyšetřete průběh funkce f dané předpisem:

a) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \dfrac{x^3}{6} + x^2;$

b) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} x^3 - 3x + 2;$

c) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} x^4 - 6x^2 + 5;$

d) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} x^3(x-3)^2;$

e) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} x^5 - 5x^4 + 5x^3;$

f) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} x^2 + \dfrac{1}{x^2};$

g) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \dfrac{1}{x} + 4x^2;$

h) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x+2};$

i) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \dfrac{x^3}{2-x};$

j) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \dfrac{2x+3}{(x+1)^2};$

k) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \dfrac{2-x^2}{x+3};$

l) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \dfrac{x^4}{(x-1)^3};$

m) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \dfrac{x^3}{2(x+1)^2};$

n) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} x \cdot \sqrt{1-x};$

o) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \sqrt{x^2 - x^4};$

p) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \sqrt[3]{x^3 - 8};$

q) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2};$

r) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} e^{-x^2};$

s) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \sqrt{x^4 - x^2};$

t) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} x + e^{-x};$

u) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} x - 2 \cdot \ln x;$

v) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \ln \dfrac{x+2}{x-2};$

x) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \dfrac{x^3}{3-x^2};$

A) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \sqrt[3]{x^2} e^{-x};$

B) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \arcsin \dfrac{1+x}{1-x};$

C) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} x + \operatorname{arccotg}(2x);$

D) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \sin x - \ln(\sin x);$

E) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \arccos x + \sqrt{1-x^2};$

F) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} e^{\operatorname{tg} x};$

G) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} x + \ln(\cos x);$

H) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \dfrac{\ln |x|}{x};$

I) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}};$

J) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \dfrac{x^2}{\ln x};$

K) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \dfrac{\sin x}{2 - \cos x};$

L) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} 2x - \operatorname{tg} x;$

M) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \dfrac{e^x}{x};$

N) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} e^{x^2 - x};$

O) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} e^{\frac{1}{x}} - x;$

P) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} x \cdot \ln x;$

Q) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} x + \sin x;$

R) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \ln(\cos x);$

S) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \ln(x^2 + 1);$

T) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \ln |4 - x^2|;$

U) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \sqrt{x e^{-x}};$

V) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} 1 - \sqrt[3]{(x-2)^2};$

X) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} e^{\frac{1+x}{1-x}}.$

Příklad 30.
Určete Maclaurinův polynom n – tého řádu funkce f dané předpisem:

a) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} (1+x)^s \ (s \in \mathbb{R})$;

b) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \cosh x$;

c) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \ln(1+7x)$.

Příklad 31.
Určete Taylorův polynom n – tého řádu funkce f v bodě x_0, je-li:

a) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \sqrt[3]{x^2},\ x_0 = 1,\ n = 3$;

b) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} x^x - 1,\ x_0 = 1,\ n = 3$;

c) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2},\ x_0 = 0,\ n = 3$;

d) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \operatorname{tg} x,\ x_0 = 0,\ n = 5$;

e) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \ln\cos x,\ x_0 = 0,\ n = 6$.

Příklad 32.
Pomocí Taylorovy věty vypočtěte přibližně (s chybou menší než 10^{-4}):

a) $\sqrt[10]{1010}$;

b) $\sqrt{\pi}$;

c) $\operatorname{arctg} 1,7$;

d) $\frac{1}{\sqrt[3]{\mathrm{e}}}$;

e) $(1,1)^{1,2}$.

Příklad 33.
Rozviňte funkci f podle mocnin $(x-c)$, je-li:

a) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} x^4 - 3x^2 - 10x + 11,\ c = 2$;

b) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} x^3 - 2x + 5,\ c = 100$;

c) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} x^7 + x^5 + x^3 + 2000,\ c = -1$.

Příklad 34.
Vypočtěte:

a) $\displaystyle\int \pi x^{2000}\ \mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int \sqrt{x^3}\ \mathrm{d}x$; c) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{x\sqrt[4]{x}} - 3\frac{\sqrt{x}}{x\sqrt[3]{x}}\right) \mathrm{d}x$;

d) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^3}\mathrm{d}x$; e) $\displaystyle\int \frac{x(\sqrt[3]{x} - x^2\sqrt{x})}{\sqrt[5]{x}}\mathrm{d}x$; f) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3}\mathrm{d}x$.

Příklad 35.
Vypočtěte integrací per partes:

a) $\displaystyle\int (x^2+x)e^x\ \mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int (x^2-6)\cos x\ \mathrm{d}x$; c) $\displaystyle\int \sin^3 x\ \mathrm{d}x$;

d) $\displaystyle\int \ln^2 x\ \mathrm{d}x$; e) $\displaystyle\int x \operatorname{arctg} x\ \mathrm{d}x$; f) $\displaystyle\int \sqrt{x}\ln^2 x\ \mathrm{d}x$.

Příklad 36.
Najděte rekurentní vzorce pro výpočet integrálů: $\int \sin^n x\ \mathrm{d}x$, $\int \cos^n x\ \mathrm{d}x$ $(n \in \mathbb{N})$.

Příklad 37.
Vypočtěte pomocí první substituční metody:

a) $\displaystyle\int (1-\pi x)^{2000}\ \mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int \sin(\sqrt{5}x)\cos(\sqrt{5}x)\ \mathrm{d}x$; c) $\displaystyle\int \frac{7x^2}{\sqrt{1+x^3}}\mathrm{d}x$;

d) $\displaystyle\int x\sqrt{3x^2+1}\ \mathrm{d}x$; e) $\displaystyle\int \frac{x^9}{(1+x^5)^3}\mathrm{d}x$; f) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}\arccos^3 x}\mathrm{d}x$.

Příklad 38.
Vypočtěte pomocí uvedené substituce:

a) $\displaystyle\int x\sqrt[3]{1-x}\ \mathrm{d}x,\ \ \sqrt[3]{1-x} = t$; b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3+2x-x^2}},\ \ \frac{x-1}{2} = t$;

c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x}},\ \ \sqrt[3]{x} = t$; d) $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x,\ \ \sqrt{x} = t$;

e) $\displaystyle\int (\ln^3 x + \ln x)\ \mathrm{d}x,\ \ \ln x = t$; f) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\mathrm{d}x,\ \ \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = t$.

Příklad 39.
Vypočtěte:

a) $\displaystyle\int \frac{3x}{(x+1)(x-6)}\,\mathrm{d}x;$ b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)(x+2)};$

c) $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x^2(x-1)(x+1)^2}\,\mathrm{d}x;$ d) $\displaystyle\int \frac{3x-4}{(x-2)(x-1)^3}\,\mathrm{d}x;$

e) $\displaystyle\int \frac{5x^3-15x^2+15x-3}{x^3-8x^2+17x-10}\,\mathrm{d}x;$ f) $\displaystyle\int \frac{x^2+2x-3}{(x^2+2x+3)(x+1)^2}\,\mathrm{d}x;$

g) $\displaystyle\int \frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)}\,\mathrm{d}x;$ h) $\displaystyle\int \frac{3x^2-2x+7}{(x^2+3)(1-x)^2}\,\mathrm{d}x;$

i) $\displaystyle\int \frac{x^4-x^3+3x^2+5x}{2x^4-2x^3-6x^2+10x-4}\,\mathrm{d}x;$ j) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4(x^2+1)};$

k) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4};$ l) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x;$

m) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x;$ n) $\displaystyle\int \frac{x^3}{1+x^4}\,\mathrm{d}x;$

o) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+x^2+x};$ p) $\displaystyle\int \frac{4x^2-16x+12}{(x-2)^2(x^2-2x+2)^2}\,\mathrm{d}x;$

q) $\displaystyle\int \frac{3x-1}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x;$ r) $\displaystyle\int \frac{5x+1}{x^2-4x+7}\,\mathrm{d}x;$

s) $\displaystyle\int \frac{x+2}{(x^2+3x+3)^2}\,\mathrm{d}x;$ t) $\displaystyle\int \frac{x^4-x+1}{x^3-1}\,\mathrm{d}x;$

u) $\displaystyle\int \frac{6x^2+x-14}{x^3+x^2-4x-4}\,\mathrm{d}x;$ v) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^3-4x^2+8x-5}\,\mathrm{d}x;$

w) $\displaystyle\int \frac{x^2-4}{x^3+6x^2+12x+7}\,\mathrm{d}x;$ x) $\displaystyle\int \frac{x^2-2}{x^3+4x^2+7x+4}\,\mathrm{d}x;$

y) $\displaystyle\int \frac{x^2+3}{x^3-6x^2+13x-8}\,\mathrm{d}x;$ z) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^6-1}.$

Příklad 40.
Vypočtěte:

a) $\displaystyle\int \cos^5 x\,\mathrm{d}x;$ b) $\displaystyle\int \sin^3 x\cdot\cos^2 x\,\mathrm{d}x;$

c) $\displaystyle\int \sin^4 x\,\mathrm{d}x;$ d) $\displaystyle\int \cos^3 x\cdot\sin(2x)\,\mathrm{d}x;$

e) $\displaystyle\int \sin^5\frac{x}{2}\cdot\cos^3\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x;$ f) $\displaystyle\int \sin^4 x\cdot\cos^4 x\,\mathrm{d}x;$

g) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{4\sin x-7\cos x-7};$ h) $\displaystyle\int \frac{2+\cos x}{1+2\cos x}\,\mathrm{d}x;$

i) $\displaystyle\int \frac{\cos^5 x}{\sin^4 x}\,\mathrm{d}x;$ j) $\displaystyle\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}\,\mathrm{d}x.$

Příklad 41.
Vypočtěte:

a) $\displaystyle\int x \cdot \sqrt{2x-8}\ \mathrm{d}x;$ b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x}}{x}\ \mathrm{d}x;$

c) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\ \mathrm{d}x;$ d) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\ \mathrm{d}x;$

e) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}};$ f) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+\sqrt[4]{x})^3 \cdot \sqrt{x}};$

g) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x-2)\cdot \sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}};$ h) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[4]{x^5}}\ \mathrm{d}x.$

Příklad 42.
Vypočtěte:

a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x^2+2x+2}};$ b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\cdot\sqrt{2+x-x^2}};$

c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{2+x^2}\ \mathrm{d}x;$ d) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3\cdot\sqrt{x^2+9}};$

e) $\displaystyle\int \sqrt{3+4x+x^2}\ \mathrm{d}x;$ f) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\ \mathrm{d}x;$

g) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-4x+3}};$ h) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)\cdot\sqrt{4x-x^2-3}};$

i) $\displaystyle\int \frac{x+8}{\sqrt{2x^2+12x+18}}\ \mathrm{d}x;$ j) $\displaystyle\int \frac{x}{(1+x)\cdot\sqrt{1-x-x^2}}\ \mathrm{d}x.$

Příklad 43.
Vypočtěte:

a) $\displaystyle\int_{-8}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}};$ b) $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{1} \frac{4}{1+x^2}\ \mathrm{d}x;$

c) $\displaystyle\int_0^{3\pi} x\sin x\ \mathrm{d}x;$ d) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} x\mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x;$

e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos^2 x\ \mathrm{d}x;$ f) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \arccos x\ \mathrm{d}x;$

g) $\displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}} |\ln x|\ \mathrm{d}x;$ h) $\displaystyle\int_1^9 x\cdot\sqrt[3]{1-x}\ \mathrm{d}x;$

i) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{4-x}}\ \mathrm{d}x;$ j) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\ \mathrm{d}x;$

k) $\displaystyle\int_4^{10} \frac{x}{\sqrt{x^2-9}}\,\mathrm{d}x$;

l) $\displaystyle\int_0^{\sqrt[5]{2}} \frac{x^9}{(1+x^5)^3}\,\mathrm{d}x$;

m) $\displaystyle\int_1^{2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3+2x-x^2}}$;

n) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{3+2\sin x}$;

o) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}^2}^{\sqrt{\mathrm{e}}} \frac{\sqrt{2+\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x$;

p) $\displaystyle\int_1^{3} \frac{\mathrm{d}x}{x\cdot\sqrt{x^2+5x+1}}$;

q) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{\mathrm{d}x}{(2x^2+1)\cdot\sqrt{x^2+1}}$;

r) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{3\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin x}}\,\mathrm{d}x$.

Příklad 44.
Vypočtěte obsah plochy ohraničené křivkami:

a) $y = x^5,\ x = 2,\ y = -3x$;

b) $x = 2y^2,\ y = 3x - 3$;

c) $y = -1,\ y = -1 - \sqrt{1-(x-2)^2}$;

d) $y = \arcsin x,\ y = \frac{\pi}{2},\ x = -1$;

e) $3|x| + |y| = 2$;

f) $x = y^2,\ xy = 1,\ y = 2$.

Příklad 45.
Vypočtěte délku křivky:

a) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y = x^2\ \wedge\ 0\le x\le 3\}$;

b) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y = \ln x\ \wedge\ \sqrt{3}\le x\le \sqrt{8}\}$;

c) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y = \arcsin x + \sqrt{1-x^2}\ \wedge\ -\frac{1}{2}\le x\le \frac{1}{2}\}$;

d) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y = \sqrt{x^3}\ \wedge\ 0\le x\le 4\}$;

e) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y = 3-2x-5x^2\ \wedge\ -1\le x\le 3\}$;

f) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y = \sqrt{1-x^2}\}$.

Příklad 46.
Vypočtěte:

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x \cdot \ln^2 x}$; b) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3 + x}$;

c) $\displaystyle\int_1^{3} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-1)^3}}$; d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{x^2+1}{x \cdot \sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$;

e) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^3}$; f) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{(2-x) \cdot \sqrt{1-x^2}}$.

Příklad 47.
Rozhodněte o konvergenci integrálu:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt[3]{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$;

c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt[4]{x^2+2000}}\,\mathrm{d}x$; d) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4+1}}\,\mathrm{d}x$.

Literatura

[1] J. Bouchala, *Matematická analýza 1*, VŠB–TU, Ostrava, 1998.
[2] J. Charvát, M. Hála, Z. Šibrava, *Příklady k Matematice I*, ČVUT, Praha, 1992.
[3] J. Eliaš, J. Horváth, J. Kajan, *Zbierka úloh z vyššej matematiky (2. časť)*, Alfa, Bratislava, 1969.
[4] L. Zajíček, *Vybrané úlohy z matematické analýzy pro 1. a 2. ročník*, Matfyzpress, Praha, 1998.
[5] J. Veselý, *Matematická analýza pro učitele (první díl)*, Matfyzpress, Praha, 1997.
[6] J. Veselý, *Matematická analýza pro učitele (druhý díl)*, Matfyzpress, Praha, 1997.
[7] K. Rektorys a spol., *Přehled užité matematiky I a II*, Prometheus, Praha, 1995.