Matematická analýza ve Vesmíru

Jiří Bouchala

Katedra aplikované matematiky

jiri.bouchala@vsb.cz

www.am.vsb.cz/bouchala

9. Taylorův polynom.

Taylorův polynom (aproximace funkce na okolí bodu).

Pokusme se co nejlépe aproximovat funkci f na okolí bodu x_0 polynomem p. Už víme (viz 6. kapitolu), že nejlepším polynomem nejvýše prvního stupně aproximujícím diferencovatelnou funkci f na okolí bodu x_0 je polynom

$$p(x) := f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

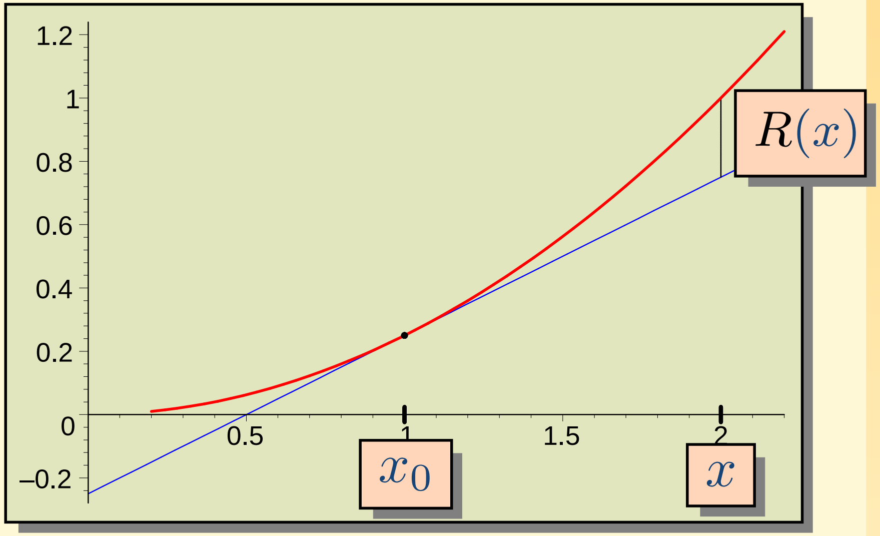
(graf p je tečnou grafu funkce f).

Taky víme, že pro funkci

$$R(x) := f(x) - p(x)$$

(tzv. chybu aproximace) pak platí

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R(x)}{x-x_0} = 0.$$



Je jistě přirozené očekávat, že při aproximaci funkce polynomem vyššího stupně než 1 se někdy může podařit uvedenou chybu aproximace zmenšit.

Zkusme najít polynom p (stupně nejvýše n-tého) tak, aby chyba aproximace R byla *v blízkosti bodu x_0 co nejmenší;* přesněji řečeno, aby pro co největší $k \in \mathbb{N}$ platilo, že

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{(x-x_0)^k} = 0. \qquad (\heartsuit)$$

(Platí-li $(\heartsuit)$, říkáme, že funkce R je v bodě x_0 nekonečně malá řádu vyššího než k.)

Všimněme si, že $(\heartsuit)$ platí, pokud

$$\boxed{R(x_0) = R'(x_0) = R''(x_0) = \cdots = R^{(k-1)}(x_0) = R^{(k)}(x_0) = 0.}$$

Důkaz.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{(x-x_0)^k} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{R'(x)}{k(x-x_0)^{k-1}} \overset{\text{l'H.}}{=} \dots \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{R^{(k-1)}(x)}{k(k-1)\dots 2(x-x_0)} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{k!} \frac{R^{(k-1)}(x) - R^{(k-1)}(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{k!} R^{(k)}(x_0) = 0.$$

■

Hledejme proto polynom p stupně nejvýše n-tého tak, aby pro co největší $k \in \mathbb{N}$ platilo:

- $R(x_0) = f(x_0) - p(x_0) = 0,$
- $R'(x_0) = f'(x_0) - p'(x_0) = 0,$
- $R''(x_0) = f''(x_0) - p''(x_0) = 0,$

$\dots$

- $R^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) - p^{(k)}(x_0) = 0.$

(Předpokládáme, že funkce f má *potřebný počet derivací* v bodě x_0.)

1) Buď $n = 1$. Polynom p hledejme ve tvaru $p(x) = ax + b,$ kde $a, b \in \mathbb{R}$. Je snadné nahlédnout, že první dva požadavky

$$f(x_0) = p(x_0) = ax_0 + b, \; f'(x_0) = p'(x_0) = a$$

již čísla a a b jednoznačně určují: $a = f'(x_0)$, $b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$.

Takže $p(x) = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0 = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$

(Zjištěným jistě nejsme překvapeni...)

2) Buď $n = 2$. Polynom p hledejme ve tvaru $p(x) = ax^2 + bx + c$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Přepočítejme si, že v tomto případě je polynom p určen jednoznačně požadavky:

- $f(x_0) = p(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c$,
- $f'(x_0) = p'(x_0) = 2ax_0 + b$,
- $f''(x_0) = p''(x_0) = 2a$

a že

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2.$$

3) Buď $n \in \mathbb{N}$. Polynom p hledejme ve tvaru

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n,$$

kde $a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}$. Zde je namístě poznamenat, že každý polynom nejvýše n-tého stupně je možné napsat v tomto tvaru.

Opět se lze výpočtem snadno přesvědčit, že z požadavků:

- $f(x_0) = p(x_0) = a_0$,
- $f'(x_0) = p'(x_0) = a_1$,
- $f''(x_0) = p''(x_0) = 2a_2$,

  $\dots$
- $f^{(j)}(x_0) = p^{(j)}(x_0) = j!\, a_j$,

  $\dots$
- $f^{(n)}(x_0) = p^{(n)}(x_0) = n!\, a_n$

plyne, že

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \\ = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \boxed{=: T_n(x).}$$

T_n ... <u>Taylorův polynom</u> n<u>-tého řádu funkce</u> f <u>v bodě</u> x_0.

Již víme, že funkce $\boxed{R_{n+1}(x) := f(x) - T_n(x)}$ (tzv. zbytek po n-tém členu), je v bodě x_0 nekonečně malá řádu vyššího než n, tzn. že

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Následující věta nám dá přesnější informaci o velikosti $R_{n+1}(x)$.

Věta 9.1. (Taylorova).
Nechť v nějakém $U(x_0, \delta)$ existuje (konečná) $(n+1)$-ní derivace funkce f a nechť $x \in P(x_0, \delta)$. Pak existuje ξ ležící mezi body x a x_0 takové, že

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

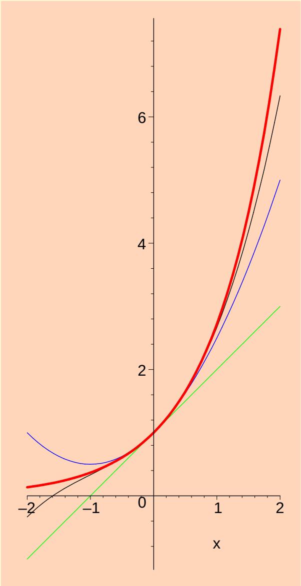
Pro jistotu uveďme, že obratem ξ *leží mezi body* x *a* x_0 rozumíme, že

- $\xi \in (x_0, x)$, je-li $x > x_0$,
- $\xi \in (x, x_0)$, je-li $x < x_0$.

Poznámky.

- Výraz $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ se nazývá Lagrangeův tvar zbytku.
- Položíme-li $h=x-x_0$, můžeme psát
$$T_n(x_0+h)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1}h+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n.$$
- Je-li $x_0=0$, dostaneme tzv. Maclaurinův polynom
$$T_n(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1}x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Příklad. Najděme Maclaurinův polynom funkce e^x.



Řešení.

Pro každé $x\in\mathbb{R}$ platí
$e^x=(e^x)'=(e^x)''=\ldots$, a proto

$$T_n(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}.$$

■

Příklad. Najděme Maclaurinův polynom funkce $\sin x$.

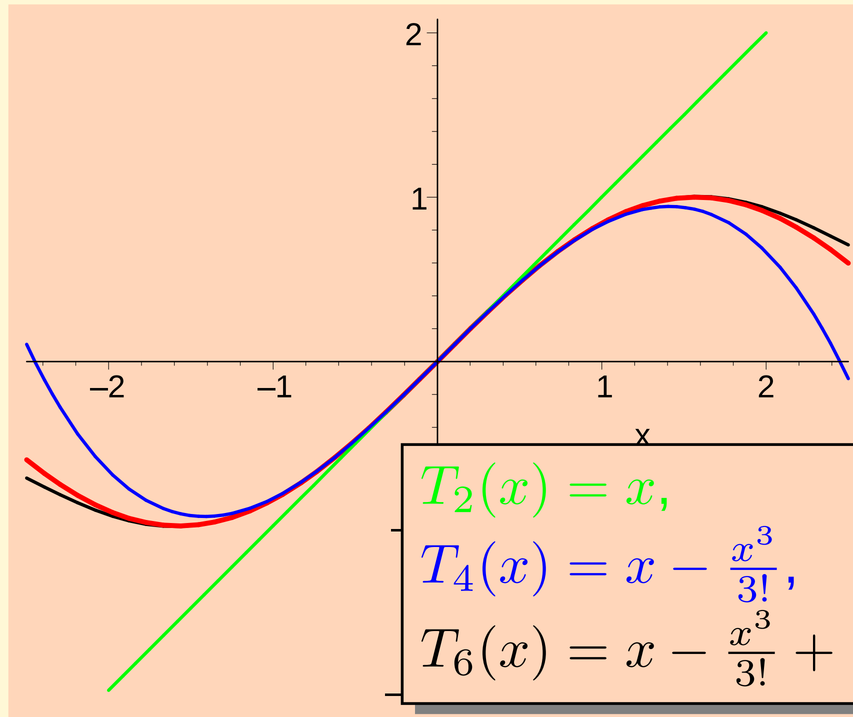
Řešení.

Platí:

- $\sin 0 = 0$,
- $\sin' 0 = \cos 0 = 1$,
- $\sin'' 0 = -\sin 0 = 0$,
- $\sin''' 0 = -\cos 0 = -1$,
- $\sin^{(4)} 0 = \sin 0 = 0$,

  $\ldots$,

a proto



$T_2(x) = x$,

$T_4(x) = x - \frac{x^3}{3!}$,

$T_6(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$.

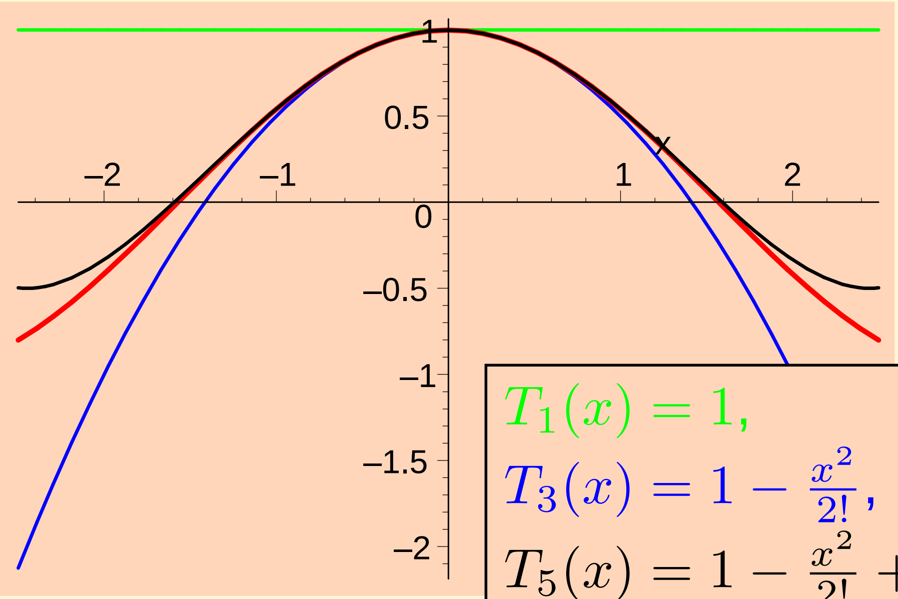
$$T_{2n+2}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Příklad. Najděme Maclaurinův polynom funkce $\cos x$.

Řešení.

Platí:

- $\cos 0 = 1$,
- $\cos' 0 = -\sin 0 = 0$,
- $\cos'' 0 = -\cos 0 = -1$,
- $\cos''' 0 = \sin 0 = 0$,
- $\cos^{(4)} 0 = \cos 0 = 1$,
- $\dots,$



$$T_1(x) = 1,$$
$$T_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2!},$$
$$T_5(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}.$$

a proto

$$T_{2n+1}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$