Matematická analýza ve Vesmíru

Jiří Bouchala

Katedra aplikované matematiky

jiri.bouchala@vsb.cz

www.am.vsb.cz/bouchala

8. Průběh funkce.

Některé další vlastnosti spojitých a diferencovatelných funkcí.

Věta 8.1. Nechť funkce f je spojitá v intervalu I s krajními body $a, b \in \mathbb{R}^*$ ($a < b$). Pak platí:

- je-li $f'(x) > 0$ pro každé $x \in (a, b)$, je funkce f v intervalu I rostoucí,
- je-li $f'(x) \geq 0$ pro každé $x \in (a, b)$, je funkce f v intervalu I neklesající,
- je-li $f'(x) < 0$ pro každé $x \in (a, b)$, je funkce f v intervalu I klesající,
- je-li $f'(x) \leq 0$ pro každé $x \in (a, b)$, je funkce f v intervalu I nerostoucí,
- je-li $f'(x) = 0$ pro každé $x \in (a, b)$, je funkce f v intervalu I konstantní.

Důkaz. Dokažme třeba první z tvrzení obsažených ve větě 8.1. (ostatní tvrzení lze dokázat analogicky).

Buď x_1 a x_2 libovolné body z intervalu I takové, že $x_1 < x_2$. Máme dokázat, že $f(x_1) < f(x_2)$.

Z předpokladů plyne, že f je spojitá v $\langle x_1, x_2\rangle$ a že má všude v (x_1, x_2) derivaci. Proto (viz Lagrangeovu větu 7.2.) existuje $\xi \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$ takové, že

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi) > 0.$$

Odtud již snadno plyne, že

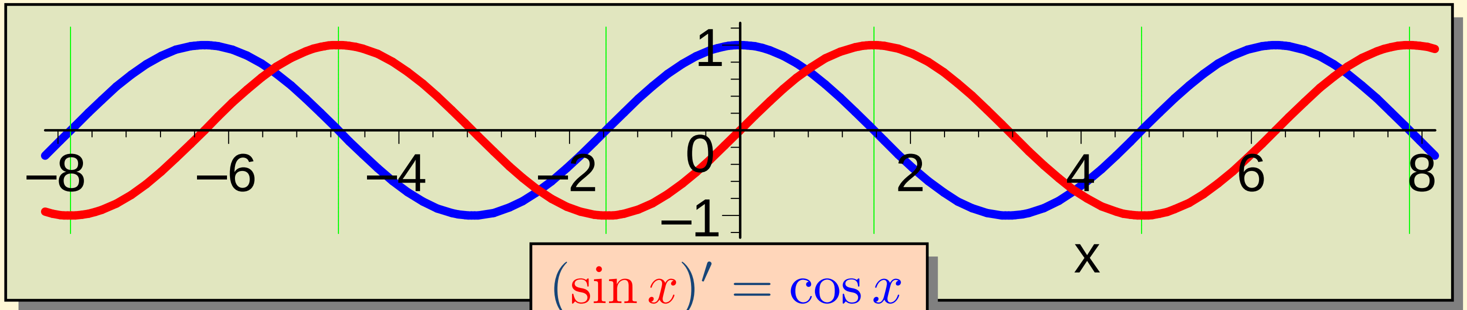
$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) > 0,$$

takže

$$f(x_1) < f(x_2).$$

■

Ilustrace.



$(\sin x)' = \cos x$

Příklad. Najděte intervaly ryzí monotonie funkce f definované předpisem

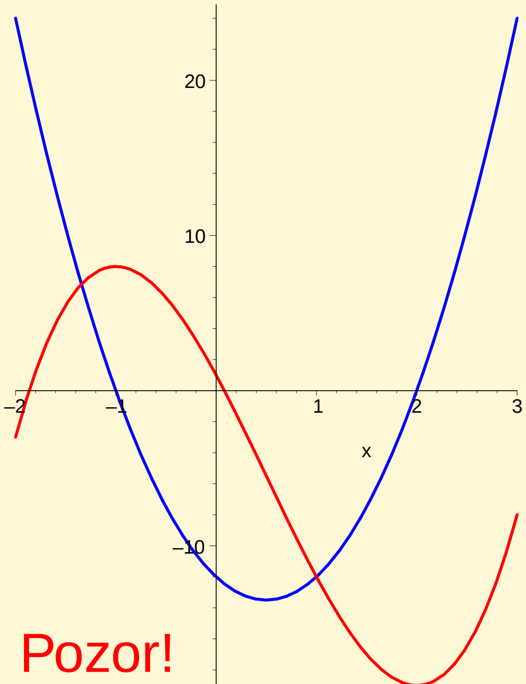
$$f(x) := 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1.$$

Řešení. Funkce f je spojitá na $\mathbb{R}$ a pro každé $x \in \mathbb{R}$ je $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2)$. Protože zřejmě platí

- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$,
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 2)$,

plyne z věty 8.1., že

- f je rostoucí na $(-\infty, -1\rangle$ a na $\langle 2, +\infty)$,
- f je klesající na $\langle -1, 2\rangle$. ■



Pozor!
f není rostoucí na $(-\infty, -1\rangle \cup \langle 2, +\infty)$.

Darbouxova vlastnost spojité funkce a její derivace.

Věta 8.2. Nechť funkce f je spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$.
Potom platí:

- je-li $f(a)f(b) < 0$, existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že $f(\xi) = 0$,
- existuje-li $f'(x)$ pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ a je-li $f'(a)f'(b) < 0$, existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že $f'(\xi) = 0$.

Důsledky.

- Je-li funkce f spojitá v intervalu J, zobrazí tento interval na jednobodovou množinu nebo na interval.
- Má-li spojitá funkce f v intervalu J všude nenulovou derivaci, je f v J ryze monotónní.

Problém 19. Dokažte tvrzení:

Nechť funkce f je spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $f(a) < 0 < f(b)$. Pak existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že $f(\xi) = 0$.

(2 body)

Poznámka k numerickému řešení rovnice $f(x) = 0$.
Buď funkce f spojitá v $\langle a, b\rangle$ a taková, že $f(a)f(b) < 0$.
Hledejme bod $\xi \in (a, b)$, pro který je $f(\xi) = 0$ (takový existuje!).

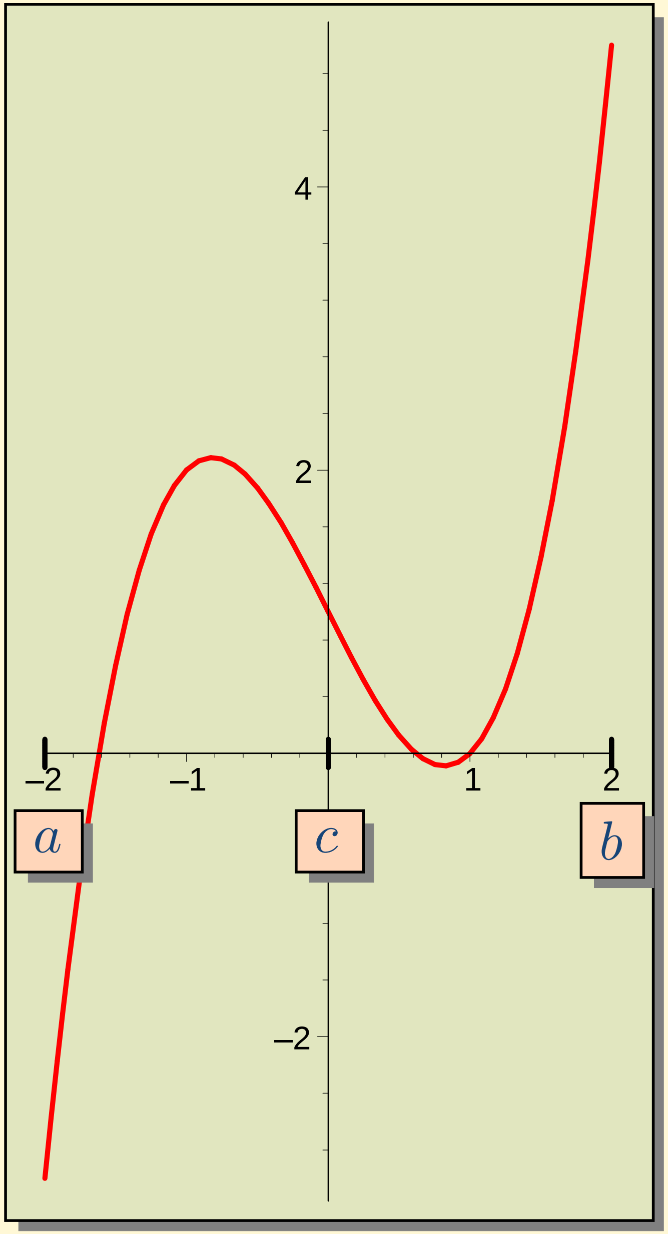
Položme $c := \frac{a+b}{2}$. Nastane právě jedna z možností:

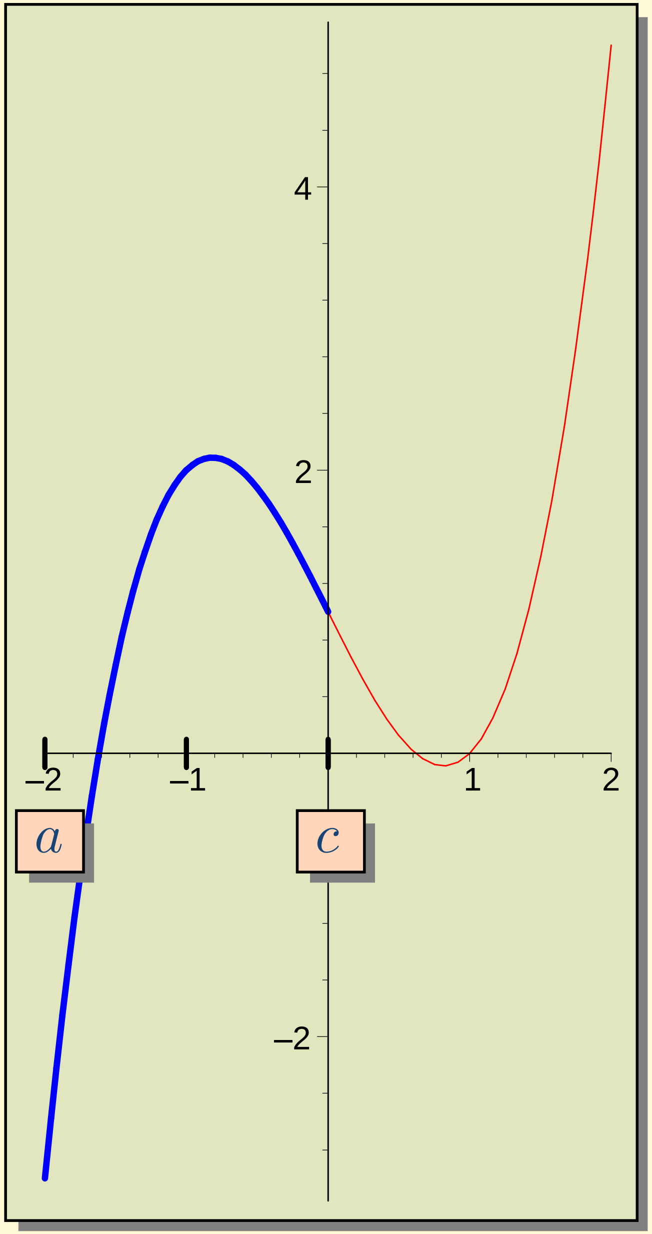
1. $f(c) = 0$,
2. $f(a)f(c) < 0$,
3. $f(c)f(b) < 0$.

V 1. situaci volme $\xi := c$ (našli jsme kořen).

Nastane-li 2. nebo 3. možnost, dostaneme se do téže situace jako na začátku, ale na polovičním intervalu $\langle a, c\rangle$ nebo $\langle c, b\rangle$. Po jistém počtu takovýchto kroků (mluvíme o <u>metodě půlení intervalu</u>) buď najdeme hledaný kořen rovnice $f(x) = 0$, nebo se k němu jakkoliv blízko přiblížíme (tzn. že najdeme interval jakkoliv – předem zadané – malé délky, v němž kořen leží).

Ilustrace k metodě půlení intervalu.





8. Průběh funkce.
Intervaly ryzí monotonie.
Extrémy funkcí:
-lokální extr.,
-globální extr.
Konvexní a konkávní funkce.
Asymptoty funkce.
Vyšetření průběhu funkce.

Definice. Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$

- lokální maximum, existuje-li $P(x_0)$ takové, že
$$\forall x \in P(x_0): \ f(x) \leq f(x_0);$$

- lokální minimum, existuje-li $P(x_0)$ takové, že
$$\forall x \in P(x_0): \ f(x) \geq f(x_0);$$

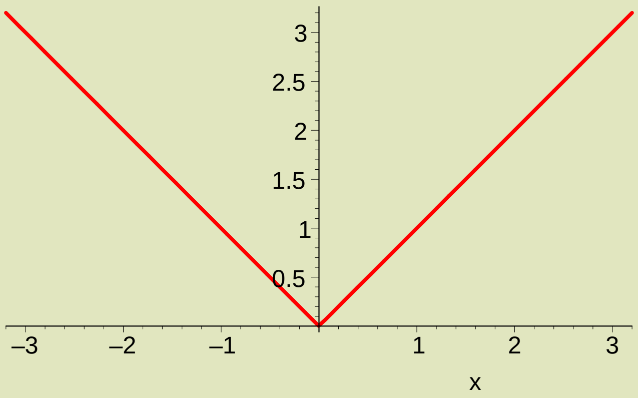
- ostré lokální maximum, existuje-li $P(x_0)$ takové, že
$$\forall x \in P(x_0): \ f(x) < f(x_0);$$

- ostré lokální minimum, existuje-li $P(x_0)$ takové, že
$$\forall x \in P(x_0): \ f(x) > f(x_0).$$

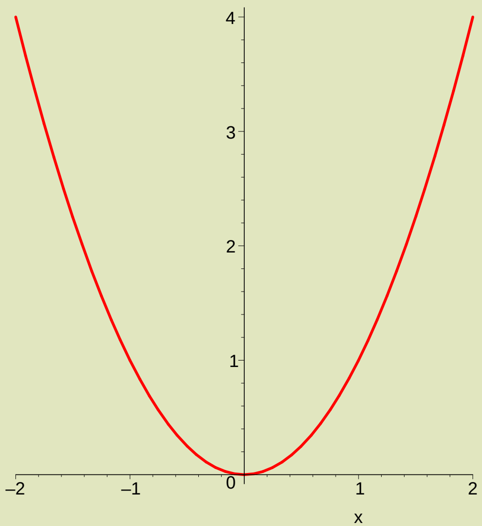
Pozorování. Má-li funkce f lokální extrém (tj. lokální maximum nebo lokální minimum) v bodě x_0, existuje $U(x_0)$ takové, že
$$U(x_0) \subset Df.$$

Příklady.

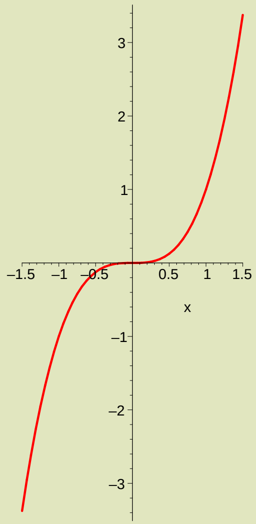
- Funkce $f(x) := |x|$ má v 0 ostré lokální minimum (všimněme si, že $f'(0)$ neexistuje).



- Funkce $f(x) := x^2$ má v 0 ostré lokální minimum (všimněme si, že $f'(0) = 0$).



- Funkce $f(x) := x^3$ nemá v 0 lokální extrém (všimněme si, že $f'(0) = 0$).



Věta 8.3. Má-li funkce f v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ lokální extrém, je buď $f'(x_0) = 0$, nebo $f'(x_0)$ neexistuje.

Důkaz. Uvědomme si, že stačí dokázat implikaci:

$0 \neq f'(x_0) \in \mathbb{R}^* \Rightarrow$ f nemá v bodě x_0 lokální extrém.

Buď například $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$ (při $f'(x_0) < 0$ lze postupovat analogicky, nebo přejít k funkci $-f$).

Odtud plyne, že

$$\exists P(x_0)\, \forall x \in P(x_0) : \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0,$$

a tudíž ($P(x_0) = P^+(x_0) \cup P^-(x_0)$):

- $f(x) > f(x_0)$ pro každé $x \in P^+(x_0)$,
- $f(x) < f(x_0)$ pro každé $x \in P^-(x_0)$.

Proto funkce f nemá v bodě x_0 lokální extrém. ∎

Věta 8.4. Nechť $f'(x_0) = 0$ a nechť $f''(x_0) > 0$. Pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum.

Nechť $f'(x_0) = 0$ a nechť $f''(x_0) < 0$. Pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum.

Dodatek. Nechť

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \neq f^{(n)}(x_0).$$

Potom platí:

- je-li $n \in \mathbb{N}$ liché, funkce f nemá v bodě x_0 lokální extrém;
- je-li $n \in \mathbb{N}$ sudé a $f^{(n)}(x_0) > 0$, má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum,
- je-li $n \in \mathbb{N}$ sudé a $f^{(n)}(x_0) < 0$, má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum.

Definice. Je-li $f'(x_0) = 0$, nazýváme x_0 stacionárním bodem funkce f.

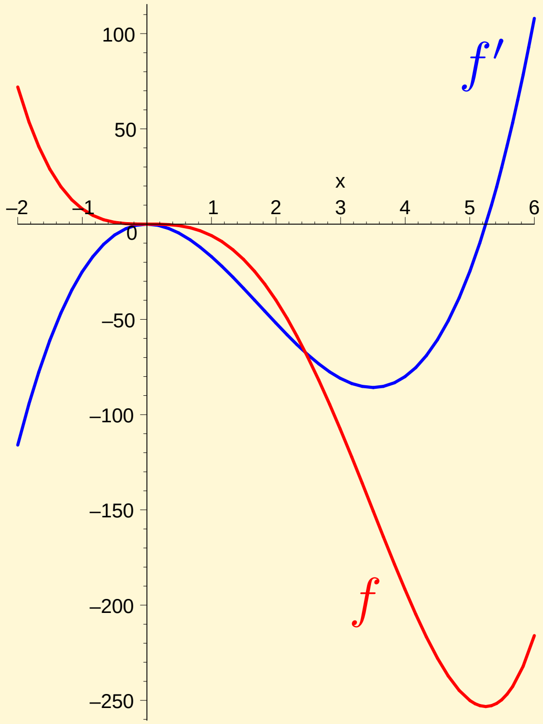
Příklad. Nalezněme všechny lokální extrémy funkce f definované předpisem

$$f(x) := x^3(x-7).$$

Řešení. Předně si uvědomme, že f je na $\mathbb{R}$ diferencovatelná, a proto (viz větu 8.3.) může mít lokální extrémy pouze ve stacionárních bodech.

Snadno se lze přesvědčit, že

- $\forall x \in \mathbb{R}: \ f'(x) = x^2(4x-21)$,
- $f'(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ \left[x = 0 \ \vee \ x = \frac{21}{4}\right]$,
- $f''(0) = 0 \neq -42 = f'''(0)$,
- $f''(\frac{21}{4}) = \frac{441}{4} > 0$,



a proto (viz větu 8.4.) má funkce f jediný lokální extrém:

f má ostré lokální minimum v bodě $\frac{21}{4}$.

Problém 20.

Najděte všechny lokální extrémy funkce

$$f(x) := x^3 + 12|x|.$$

(1 bod)

Problém 21.

V závislosti na parametru $p \in \mathbb{R}^+$ určete počet řešení rovnice

$$p^x = x.$$

(1 bod)

Definice. Řekneme, že funkce f nabývá na množině $M \subset Df$ svého maxima v bodě x_0, je-li

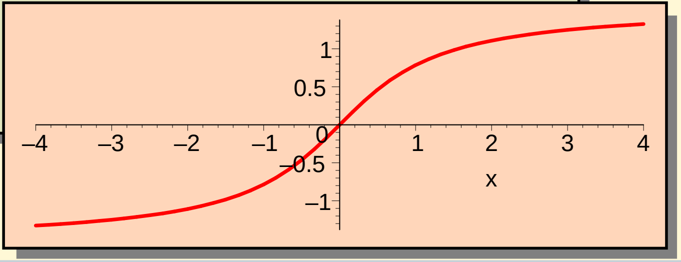
$$x_0 \in M \;\wedge\; f(x_0) = \max\{f(x) :\; x \in M\} \stackrel{\text{ozn.}}{=} \max_{x \in M} f(x).$$

Řekneme, že funkce f nabývá na množině $M \subset Df$ svého minima v bodě x_0, je-li

$$x_0 \in M \;\wedge\; f(x_0) = \min\{f(x) :\; x \in M\} \stackrel{\text{ozn.}}{=} \min_{x \in M} f(x).$$

Příklad. Buď funkce f definovaná předpisem $f(x) := \operatorname{arctg} x$. Pak

- $\min\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x)$ ani $\max\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x)$ neexistují,
- $\min\limits_{x \in \langle 0, +\infty)} f(x) = 0$, $\max\limits_{x \in \langle 0, +\infty)} f(x)$ neexistuje,
- $\min\limits_{x \in \langle -1, 1 \rangle} f(x) = -\frac{\pi}{4}$, $\max\limits_{x \in \langle -1, 1 \rangle} f(x) = \frac{\pi}{4}$.



Věta 8.5. (Weierstrassova).

Je-li funkce f spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$ ($a,\ b \in \mathbb{R},\ a < b$), existuje $\max\limits_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$ i $\min\limits_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$.

Příklady.

- Buď $f(x) := x^2$ a $M = (0, 1)$.

  Pak $\min\limits_{x\in M} f(x)$ ani $\max\limits_{x\in M} f(x)$ neexistují.

- Buď $f(x) := -x + \operatorname{sgn} x$ a $M = \langle -1, 1\rangle$.

  Pak $\min\limits_{x\in M} f(x)$ ani $\max\limits_{x\in M} f(x)$ neexistují.

- Buď $f(x) := \operatorname{sgn} x$ a $M = \mathbb{R}$.

  Pak $\min\limits_{x\in M} f(x) = -1$ a $\max\limits_{x\in M} f(x) = 1$.

Důkaz věty 8.5. Ukažme, že existuje $\max\limits_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$ (existenci minima lze prokázat obdobně). Víme (viz větu 1.2.), že existuje

$$\sup\{f(x) : x \in \langle a, b\rangle\} \stackrel{\text{ozn.}}{=} s.$$

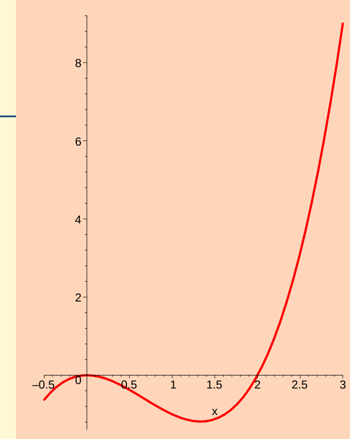
Máme dokázat, že
$$\boxed{\exists x_0 \in \langle a, b\rangle : f(x_0) = s.}$$

- Z definice suprema plyne existence takové posloupnosti (x_n), že $\boxed{x_n \in \langle a, b\rangle}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a že $\boxed{f(x_n) \to s.}$
- Z omezené posloupnosti (x_n) lze vybrat posloupnost konvergentní (viz větu 4.2.), značme ji (x_{k_n}). Tzn., že existuje $x_0 \in \mathbb{R}$ takové, že $x_{k_n} \to x_0$. Protože $\forall n \in \mathbb{N} : x_{k_n} \in \langle a, b\rangle$, musí být i $x_0 \in \langle a, b\rangle$.
- K dokončení důkazu si stačí uvědomit, že posloupnost $(f(x_{k_n}))$ je vybranou posloupností z posloupnosti $(f(x_n))$, a má proto (viz větu 4.5.) tutéž limitu s, tj. $f(x_{k_n}) \to s$. Navíc víme, že $\langle a, b\rangle \ni x_{k_n} \to x_0 \in \langle a, b\rangle$, a proto z předpokladu, že f je spojitá v $\langle a, b\rangle$, plyne $f(x_{k_n}) \to f(x_0)$. Protože žádná posloupnost nemůže mít víc než jednu limitu (viz větu 4.4.), je nutně $f(x_0) = s$. ■

Příklad. Najděme globální extrémy funkce

$$f(x) := x^3 - 2x^2$$

na množině $M = \langle -\frac{1}{2}, 3\rangle$.



Řešení. Z věty 8.5. plyne, že *hledané extrémy existují!*

- Nabývá-li f na M svého extrému v bodě x_0, je buď $x_0 \in \{-\frac{1}{2}, 3\}$, nebo $x_0 \in (-\frac{1}{2}, 3)$. Nastane-li druhá z uvedených možností, je x_0 zřejmě i lokálním extrémem, a protože f je diferencovatelná na $\mathbb{R}$, musí být $f'(x_0) = 0$ (viz větu 8.3.).
- $f'(x) = 3x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[x = 0 \ \vee \ x = \frac{4}{3}\right]$, přičemž $0, \ \frac{4}{3} \in (-\frac{1}{2}, 3)$.
- Podezřelými body, tj. body, v nichž f může mít na M extrém, jsou proto body $-\frac{1}{2}, 0, \frac{4}{3}, 3$.
- Protože f nabývá (!!!) na M svého minima i maxima, zjistíme porovnáním funkčních hodnot:
  $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{5}{8} \doteq -0,6;\ f(0) = 0;\ f(\frac{4}{3}) = -\frac{32}{27} \doteq -1,2;\ f(3) = 9,$

  že f nabývá svého maxima na M v bodě 3 a minima v bodě $\frac{4}{3}$.

Problém 22.

Dvě chodby široké 4 a 7 metrů se křižují v pravém úhlu. Zjistěte maximální délku žebříku, který lze ve vodorovné poloze přenést z jedné chodby do druhé.
(Výsledek zaokrouhlete na centimetry.)

(2 body)

Důkaz Rolleovy věty.

Jistě nastane alespoň jedna z možností:

1. existuje $x_1 \in \langle a, b\rangle$ takové, že $f(x_1) > f(a)$,
2. existuje $x_2 \in \langle a, b\rangle$ takové, že $f(x_2) < f(a)$,
3. pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ je $f(x) = f(a)$.

- Nastane-li 1. případ, vezměme $\xi \in \langle a, b\rangle$ takové, aby v něm f nabývala na $\langle a, b\rangle$ svého maxima. (Plyne z Weierstrassovy věty, že takové ξ existuje!) Pak zřejmě platí, že $f(\xi) \geq f(x_1) > f(a) = f(b)$, a proto $\xi \in (a, b)$. Odtud plyne, že f má v ξ i lokální maximum, a proto (podle předpokladu $f'(\xi)$ existuje) $f'(\xi) = 0$ (viz větu 8.3.).
- Nastane-li 2. případ, volme ξ tak, aby v něm f nabývala na $\langle a, b\rangle$ svého minima. Podobně jako v 1. případě lze ukázat, že $\xi \in (a, b)$ a že $f'(\xi) = 0$.
- Ve 3. případě je dokonce $f'(\xi) = 0$ pro každé $\xi \in (a, b)$, neboť f je v $\langle a, b\rangle$ konstantní. ■

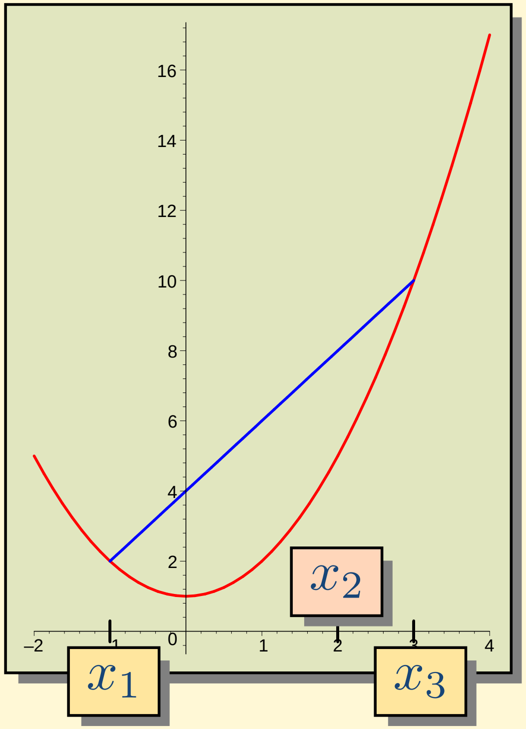
Definice. Řekneme, že funkce f je v intervalu I

- ryze konvexní, platí-li

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in I;\ x_1 < x_2 < x_3 :\ f(x_2) < f(x_1) + \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}(x_2-x_1).$$

- konvexní, platí-li

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in I;\ x_1 < x_2 < x_3 :\ f(x_2) \leq f(x_1) + \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}(x_2-x_1).$$



$$y = f(x_1) + \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}(x - x_1)$$

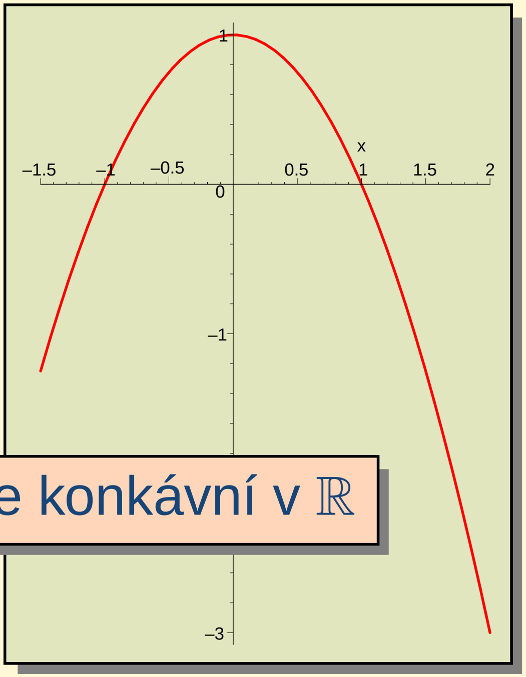
Definice. Řekneme, že funkce f je v intervalu I

- ryze konkávní, platí-li

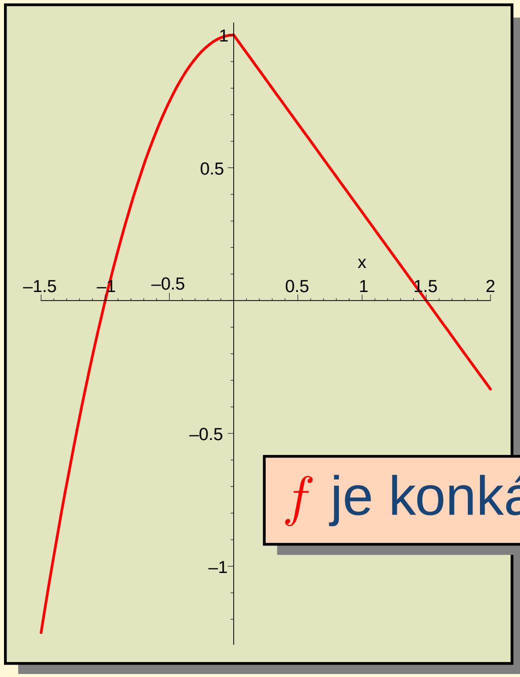
$$\forall x_1, x_2, x_3 \in I;\ x_1 < x_2 < x_3 :\ f(x_2) > f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1).$$

- konkávní, platí-li

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in I;\ x_1 < x_2 < x_3 :\ f(x_2) \geq f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1).$$



f je ryze konkávní v $\mathbb{R}$



f je konkávní v $\mathbb{R}$

Věta 8.6. Nechť funkce f je spojitá v intervalu I a nechť v každém vnitřním bodě x intervalu I existuje $f''(x)$. Pak platí:

- f je konvexní v I právě tehdy, je-li $f''(x) \geq 0$ v každém vnitřním bodě x intervalu I;
- f je konkávní v I právě tehdy, je-li $f''(x) \leq 0$ v každém vnitřním bodě x intervalu I;

- je-li $f''(x) > 0$ v každém vnitřním bodě x intervalu I, je f ryze konvexní v I;
- je-li $f''(x) < 0$ v každém vnitřním bodě x intervalu I, je f ryze konkávní v I.

Poznámka. Je užitečné si uvědomit:

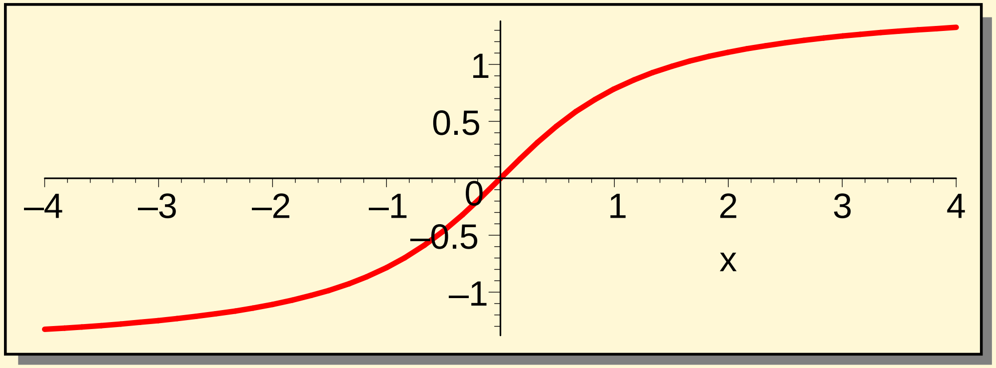
- je-li $f''(x) > 0$ pro každé $x \in I$, je funkce f' v I rostoucí,
- je-li $f''(x) < 0$ pro každé $x \in I$, je funkce f' v I klesající.

Definice. Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 inflexi, existuje-li (konečná) derivace $f'(x_0)$ a $P(x_0) = P^+(x_0) \cup P^-(x_0)$ takové, že

- buď f je ryze konvexní v $P^-(x_0)$ a ryze konkávní v $P^+(x_0)$,
- anebo f je ryze konkávní v $P^-(x_0)$ a ryze konvexní v $P^+(x_0)$.

Jinak řečeno: f má inflexi v bodě, v němž existuje vlastní derivace a v němž se mění ryzí konvexita na ryzí konkávnost nebo naopak.

Příklad. Funkce $f(x) := \operatorname{arctg} x$ má v bodě 0 inflexi.



Cvičení. Dokažte tvrzení:

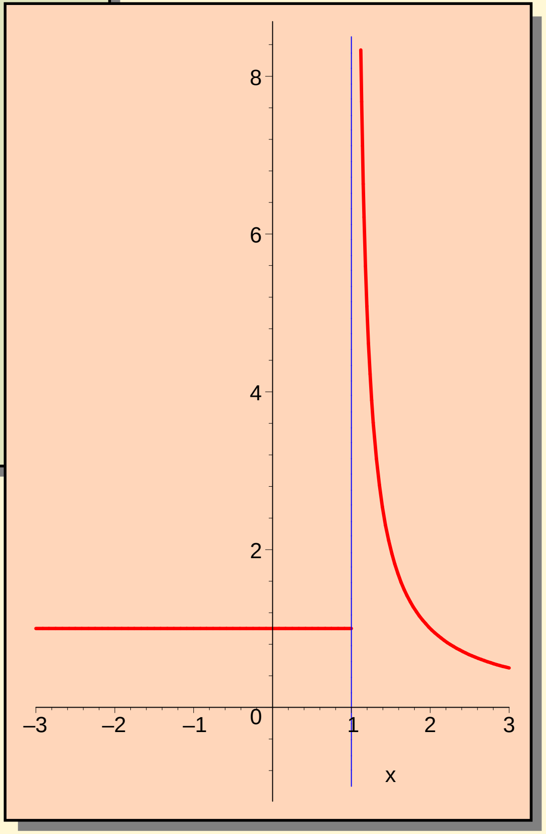
Má-li funkce f inflexi v bodě x_0 a existuje-li $f''(x_0)$, je $f''(x_0) = 0$.

Definice. Řekneme, že přímka $x = x_0$ ($x_0 \in \mathbb{R}$) je <u>svislou asymptotou funkce</u> f, je-li alespoň jedna z jednostranných limit funkce f v bodě x_0 nevlastní (tj. rovna $+\infty$ nebo $-\infty$).

Příklad. Přímka $\boxed{x = 1}$ je svislou asymptotou funkce f definované předpisem

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \leq 1, \\ \frac{1}{x-1}, & x > 1. \end{cases}$$

$$(\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} \frac{1}{x-1} = +\infty.)$$



Definice. Řekneme, že přímka $y = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$) je

- asymptotou funkce f v $+\infty$, je-li $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) - (ax+b)\big) = 0$,
- asymptotou funkce f v $-\infty$, je-li $\lim\limits_{x\to-\infty} \big(f(x) - (ax+b)\big) = 0$.

Příklad. Buď funkce f definovaná předpisem

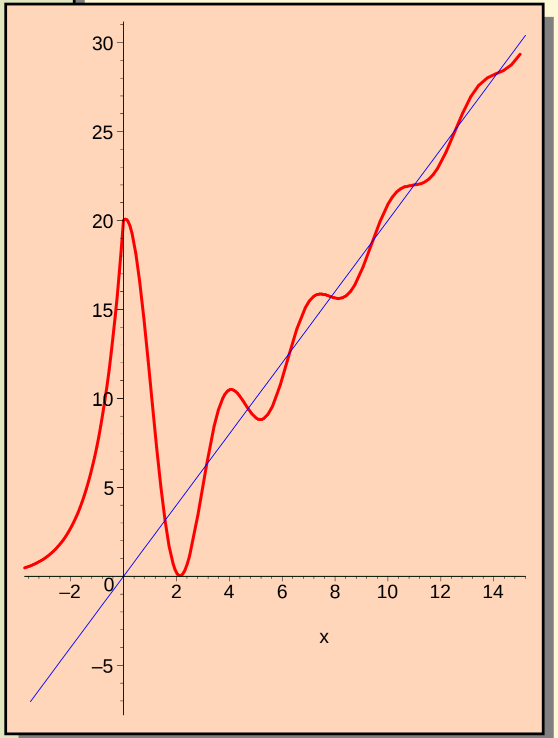
$$f(x) := \begin{cases} 20\,\mathrm{e}^{\,x}, & x \le 0, \\ 2x + \dfrac{10\sin(2x)}{x}, & x > 0. \end{cases}$$

Pak

- $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - 0) = \lim\limits_{x\to-\infty} (20\,\mathrm{e}^{\,x}) = 0$,
- $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - 2x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{10\sin(2x)}{x} = 0$,

a proto

- přímka $\boxed{y = 0}$ je asymptotou f v $-\infty$,
- přímka $\boxed{y = 2x}$ je asymptotou f v $+\infty$.



Pozorování. Předpokládejme, že přímka $y = ax + b$ je asymptotou funkce f v $+\infty$; tzn. že

$$\lim_{x\to+\infty} \big(f(x)-(ax+b)\big) = 0.$$

Odtud plyne, že

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax) = b} \; (\in \mathbb{R}!),$$

a proto

$$0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)-ax}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - a\right),$$

takže

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a} \; (\in \mathbb{R}!).$$

(Obdobné vztahy lze odvodit i pro asymptotu f v $-\infty$.)

Věta 8.7. (o existenci asymptoty v $+\infty$ a v $-\infty$).

Přímka $y = ax + b$ je asymptotou funkce f v $+\infty$ právě tehdy, platí-li:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}$,
- $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}$.

Přímka $y = ax + b$ je asymptotou funkce f v $-\infty$ právě tehdy, platí-li:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}$,
- $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}$.

Uvědomme si, že tvrzení věty v sobě obsahuje i návod, jak asymptoty dané funkce v $+\infty$ a v $-\infty$ hledat.

Příklad. Najděme všechny asymptoty funkce f definované předpisem $f(x) := \frac{x}{\operatorname{arctg} x}$.

Řešení. Funkce f je zřejmě spojitá v každém bodě svého definičního oboru $Df = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a protože navíc platí

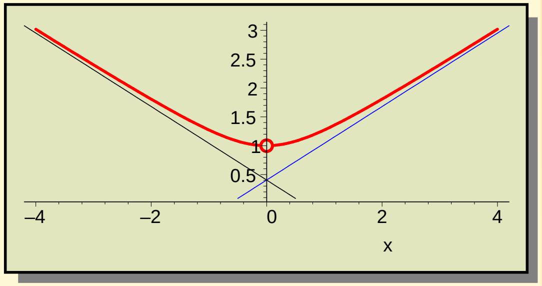
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{arctg} x} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{1}{1+x^2}} = 1,$$

neexistuje žádná svislá asymptota funkce f. Navíc, protože

- $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\operatorname{arctg} x} = \frac{1}{\pm\frac{\pi}{2}} = \pm\frac{2}{\pi}$,
- $\lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - (\pm\frac{2}{\pi}x)\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x(\pi\mp 2\operatorname{arctg} x)}{\pi \operatorname{arctg} x} =$
  $= \left(\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\pi \operatorname{arctg} x}\right)\left(\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\pi\mp 2\operatorname{arctg} x}{\frac{1}{x}}\right) \overset{\text{l'H.}}{=} \left(\pm\frac{2}{\pi^2}\right)(\pm 2) = +\frac{4}{\pi^2}$,

plyne z věty 8.7., že

- přímka $y = \frac{2}{\pi}x + \frac{4}{\pi^2}$ je asymptotou f v $+\infty$,
- přímka $y = -\frac{2}{\pi}x + \frac{4}{\pi^2}$ je asymptotou f v $-\infty$.



Vyšetřit průběh funkce znamená určit

- definiční obor funkce;
- body (a intervaly!), v nichž je funkce spojitá;
- zda je funkce sudá nebo lichá; zda je funkce periodická;
- jednostranné limity v krajních bodech definičního oboru a v bodech nespojitosti funkce;
- derivaci funkce;
- intervaly ryzí monotonie funkce;
- intervaly ryzí konvexity a ryzí konkávnosti funkce; body, v nichž má funkce inflexi;
- asymptoty funkce;
- případně další vlastnosti funkce (například: funkční hodnoty ve významných bodech, jednostranné derivace ve významných bodech, průsečíky s osami, ...);

a nakreslit graf funkce se všemi podstatnými kvalitativními rysy.

Příklad. Vyšetřeme průběh funkce f definované předpisem

$$f(x) := \arcsin \frac{2x}{1+x^2}.$$

Řešení.

Snadno lze ověřit, že platí:

- $Df = \mathbb{R}$,
- f je v $\mathbb{R}$ spojitá,
- f je lichá,
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$,
- $\forall x \in \langle 0, 1) : \ f'(x) = \frac{2}{1+x^2}$,

  $\forall x \in (1, +\infty) : \ f'(x) = -\frac{2}{1+x^2}$,
- $\forall x \in \langle 0, 1) : \ f''(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$,

  $\forall x \in (1, +\infty) : \ f''(x) = \frac{4x}{(1+x^2)^2}$,
- $f(0) = 0, \ f(1) = \frac{\pi}{2}, \ f'(0) = 2, \ f'_+(1) = -1, \ f'_-(1) = 1.$

Nyní si promysleme správnost následujících úsudků:

- f je spojitá v $\mathbb{R}$, a proto f nemá žádnou svislou asymptotu;
- f je lichá a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, a proto

  přímka $y = 0$ je asymptotou f v $+\infty$ i v $-\infty$;
- f je spojitá v $\mathbb{R}$, f je lichá, $\forall x \in \langle 0, 1) : \; f'(x) > 0$, $\forall x \in (1, +\infty) : \; f'(x) < 0$, a proto f je rostoucí v intervalu $\langle -1, 1\rangle$

  a klesající v intervalech: $(-\infty, -1\rangle, \; \langle 1, +\infty)$;
- f je spojitá v $\mathbb{R}$, f je lichá, $\forall x \in (0, 1) : \; f''(x) < 0$, $\forall x \in (1, +\infty) : \; f''(x) > 0$, a proto

  f je ryze konvexní v intervalech: $\langle -1, 0\rangle, \; \langle 1, +\infty)$

  a ryze konkávní v intervalech: $(-\infty, -1\rangle, \; \langle 0, 1\rangle$;

  protože navíc $f'(0) \in \mathbb{R}$, má f v 0 inflexi.

Zjistili jsme:

- f je spojitá v $\mathbb{R}$,
- f je lichá,
- přímka $y = 0$ je asymptotou f v $+\infty$ i v $-\infty$;
- f je rostoucí v intervalu $\langle -1, 1\rangle$
  a klesající v intervalech: $(-\infty, -1\rangle,\ \langle 1, +\infty)$;
- f je ryze konvexní v intervalech: $\langle -1, 0\rangle,\ \langle 1, +\infty)$
  a ryze konkávní v intervalech: $(-\infty, -1\rangle,\ \langle 0, 1\rangle$;
- $f(0) = 0,\ f(1) = \frac{\pi}{2},\ f'(0) = 2,\ f'_+(1) = -1,\ f'_-(1) = 1.$

K dokončení úkolu zbývá nakreslit graf funkce f: