Matematická analýza ve Vesmíru

Jiří Bouchala

Katedra aplikované matematiky

jiri.bouchala@vsb.cz

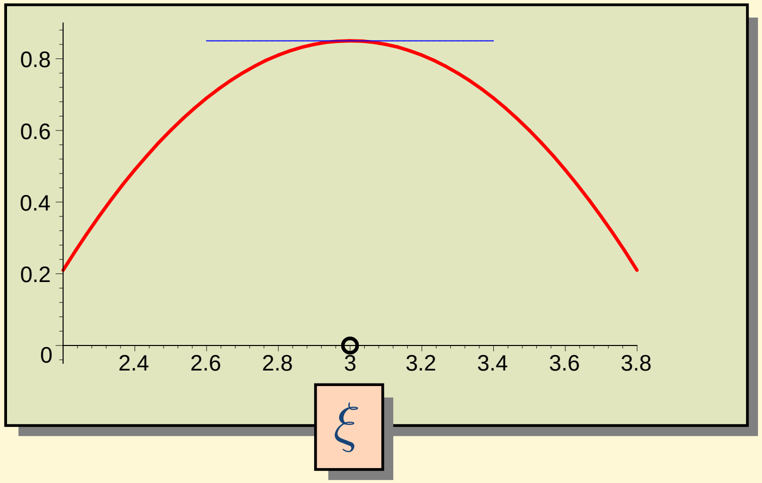
www.am.vsb.cz/bouchala

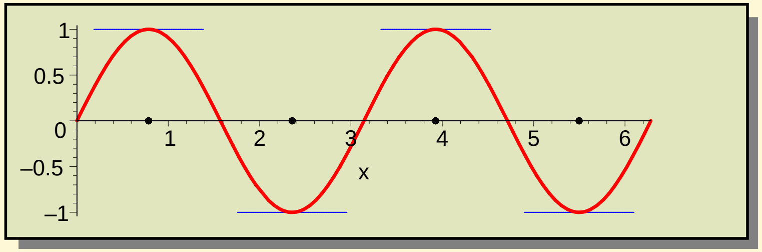
7. Základní věty diferenciálního počtu.

Věta 7.1. (Rolleova).
Nechť funkce f je spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť má všude v (a, b) derivaci; nechť $f(a) = f(b)$. Potom existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že $f'(\xi) = 0$.

Důkaz provedeme později.

Ilustrace.

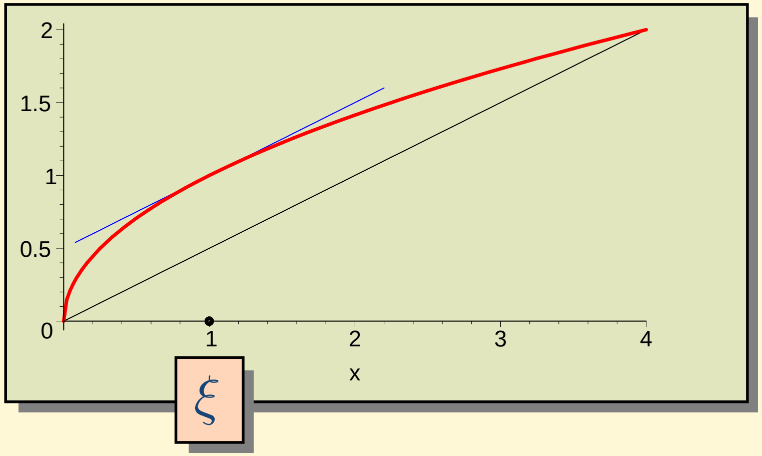


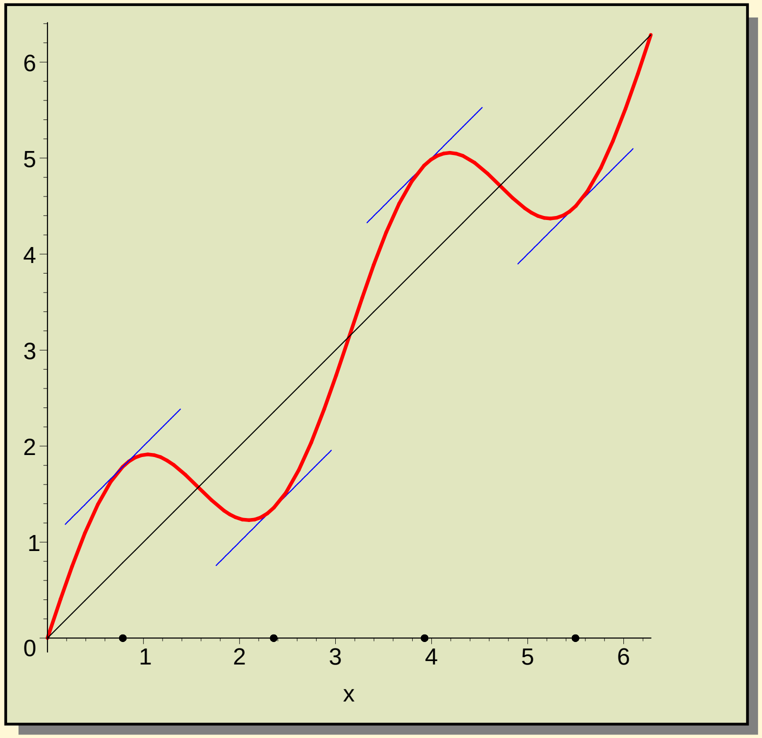


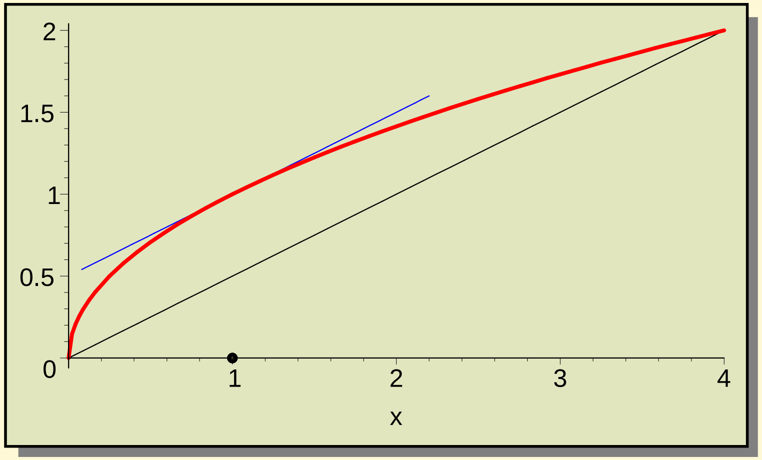
Věta 7.2. (Lagrangeova věta o střední hodnotě). Nechť funkce f je spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť má všude v (a, b) derivaci. Potom existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že

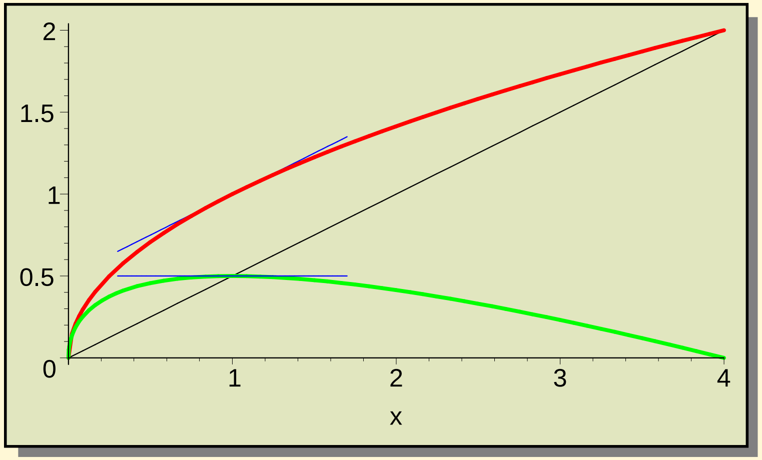
$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Ilustrace.









Důkaz věty 7.2. Definujme funkci F předpisem

$$F(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Z předpokladů plyne, že F je v $\langle a,b\rangle$ spojitá a má v (a,b) derivaci. Protože navíc platí, že $F(a) = F(b)\ (= f(a))$, existuje (viz Rolleovu větu) $\xi \in (a,b)$ takové, že $F'(\xi) = 0$. Protože pro každé $x \in (a,b)$ je

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

plyne z $F'(\xi) = 0$, že $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. ∎

Věta 7.3. (Cauchyova věta o střední hodnotě). Nechť funkce f a g jsou spojité v intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť mají všude v (a, b) derivaci; nechť g' je všude v (a, b) *konečná* a *nenulová*. Potom existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Důkaz. Předně si všimněme, že $g(b)-g(a) \neq 0$. (Kdyby $g(a) = g(b)$, existoval by – viz Rolleovu větu – bod $\xi \in (a, b)$ takový, že $g'(\xi) = 0$; a to je ve sporu s předpokladem.) Definujme nyní funkci F předpisem

$$F(x) := f(x)\big(g(b) - g(a)\big) - g(x)\big(f(b) - f(a)\big).$$

Snadno lze ověřit, že tato funkce splňuje všechny předpoklady Rolleovy věty. Proto existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že $F'(\xi) = 0$, neboli, že

$$0 = f'(\xi)\big(g(b) - g(a)\big) - g'(\xi)\big(f(b) - f(a)\big).$$

Odtud, protože $g'(\xi) \neq 0$ a $g(b) - g(a) \neq 0$, plyne

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

■

Problém 17. Vypočtěte

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3}.$$

(1 bod)

Věta 7.4. (l'Hospitalovo pravidlo).
Nechť

- $x_0,\, a \in \mathbb{R}^*$,
- buď $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, nebo $\lim\limits_{x\to x_0} |g(x)| = +\infty$,
- $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a$.

Potom
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a.$$

(Je-li $x_0 \in \mathbb{R}$, platí analogické tvrzení i pro limity zprava a zleva.)

Důkaz provedeme pouze pro speciální případ, kdy předpokládáme, že $x_0 \in \mathbb{R}$ a že
$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{x\to x_0+} g(x) = 0.$$

Jinak řečeno, dokážeme pouze implikaci

$$\left.\begin{array}{c}\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+} g(x) = 0, \\ \lim\limits_{x\to x_0+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = a \in \mathbb{R}^*,\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to x_0+} \frac{f(x)}{g(x)} = a.$$

Nejdříve dodefinujme (případně pozměňme) funkce f a g v bodě x_0 tak, že položíme $f(x_0) = g(x_0) = 0$ (tím nijak nezměníme existenci ani hodnotu vyšetřované limity, neboť ta na chování funkcí f a g v bodě x_0 nezávisí). Dále si uvědomme, že z předpokladu $\lim\limits_{x\to x_0+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a$ plyne existence $\delta > 0$ takového, že pro každé $x \in (x_0, x_0+\delta)$ existují $f'(x), g'(x) \in \mathbb{R}$ a navíc $g'(x) \neq 0$. Odtud plyne (viz větu 6.2.), že funkce f a g jsou v $\langle x_0, x_0+\delta)$ spojité, a proto (viz větu 7.3.) platí:

$$\forall x \in (x_0, x_0+\delta)\, \exists \xi \in (x_0, x) : \ \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-0}{g(x)-0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Odtud již snadno vyplýva, že

$$\lim_{x\to x_0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi\to x_0+} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = a.$$

■

Příklady.

- $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{3x} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{3} = \frac{1}{3}.$$

- $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}.$$

- $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-2x^2+x-1}{2x^2+3x+1} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-4x+1}{4x+3} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{6x-4}{4} = +\infty.$$

- Pozor! $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) = 1$,

  ale $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x+\sin x)'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+\cos x}{1}$ neexistuje.

- $$\lim_{x\to 0+} (x\ln x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} (-x) = 0.$$

- $$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0+}\frac{x-\sin x}{x\sin x}\overset{\text{l'H.}}{=}\lim_{x\to 0+}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}\overset{\text{l'H.}}{=}$$
$$\overset{\text{l'H.}}{=}\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=0.$$

- $$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}^{\,1}=\mathrm{e}\,,$$
protože (viz větu 5.10.)
  - $\forall x\in\mathbb{R}^+:\ \left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}$,
  - $$\lim_{x\to+\infty}\left(x\ln(1+\tfrac{1}{x})\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\frac{x+1}{x})}{\frac{1}{x}}\overset{\text{l'H.}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=1,$$
  - exponenciální funkce je v bodě 1 spojitá.

7. Základní věty diferenciálního počtu.
Rolleova věta.
Lagrangeova v.
Cauchyova v.
l'Hospitalovo p.

Problém 18. Vypočtěte

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}.$$

(1 bod)

Důležité pozorování.
Je-li funkce f spojitá zprava v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ a existuje-li $\lim\limits_{x \to x_0+} f'(x)$, je

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x \to x_0+} f'(x).$$

(Analogické tvrzení platí i pro $f'_-(x_0)$.)

Příklad. Buď funkce f definovaná předpisem

$$f(x) := |\sin x|.$$

Rozhodněte, zda existuje $f'(0)$.

Řešení. Funkce f je zřejmě spojitá v $\mathbb{R}$, a proto

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0+} f'(x) = \lim_{x \to 0+} (\sin x)' = \lim_{x \to 0+} \cos x = 1,$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0-} f'(x) = \lim_{x \to 0-} (-\sin x)' = \lim_{x \to 0-} (-\cos x) = -1.$$

Protože $f'_+(0) \neq f'_-(0)$, derivace $f'(0)$ neexistuje. ■

Varovný příklad.

$$+\infty = \operatorname{sgn}'(0) = \operatorname{sgn}'_+(0) \neq \lim_{x\to 0+} \operatorname{sgn}' x = \lim_{x\to 0+} 0 = 0.$$