Matematická analýza ve Vesmíru

Jiří Bouchala

Katedra aplikované matematiky

jiri.bouchala@vsb.cz

www.am.vsb.cz/bouchala

6. Diferenciál a derivace funkce.

Často je užitečné nahradit danou funkci f (alespoň lokálně, tj. na nějakém okolí) funkcí jednodušší, nejlépe lineární.
Zkusme najít lineární funkci aproximující funkci f v okolí bodu c tak, aby chyba aproximace byla malá. Přesněji: zkusme najít $k \in \mathbb{R}$ takové, aby pro malá h bylo

$$f(c+h) \doteq f(c) + kh.$$

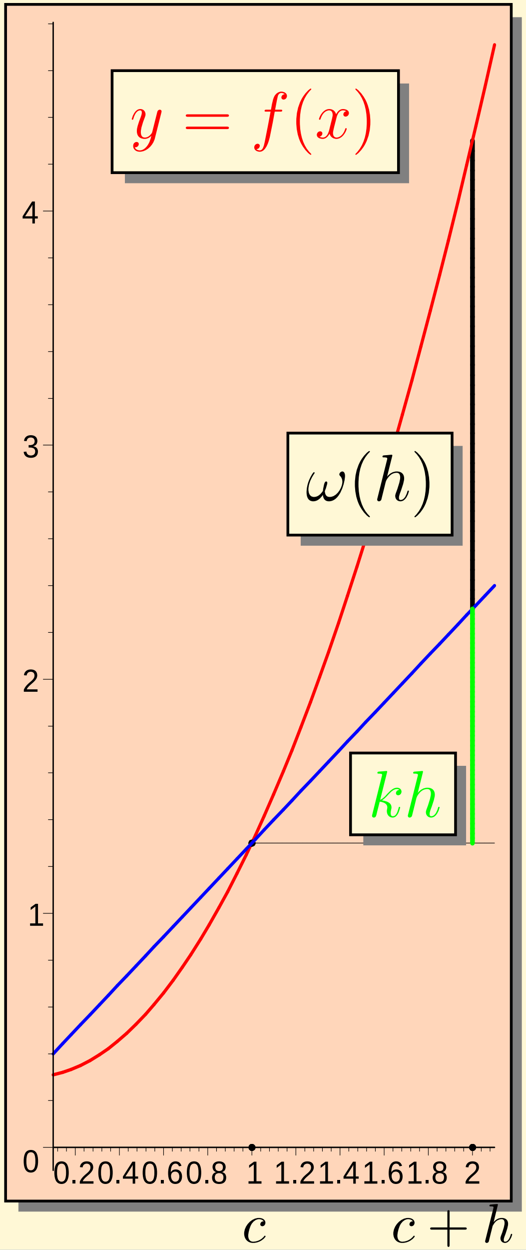
Definujme funkci $\omega(h)$ (chybu) předpisem

$$\omega(h) := f(c+h) - f(c) - kh.$$

Chceme tedy, aby pro h malá bylo $\omega(h)$ malé.
Jak malé? Mohli bychom požadovat, aby

$$\lim_{h\to 0} \omega(h) = 0.$$

To však není příliš rozumné, neboť pro spojitou funkci f by této míře přesnosti vyhovovala jakákoliv volba $k \in \mathbb{R}$.



Rozumnější je požadovat, aby $\boxed{\lim\limits_{h\to 0}\frac{\omega(h)}{h}=0,}$

tj. aby

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)-kh}{h}=\lim_{h\to 0}\Big(\frac{f(c+h)-f(c)}{h}-k\Big)=0.$$

Odtud plyne, že

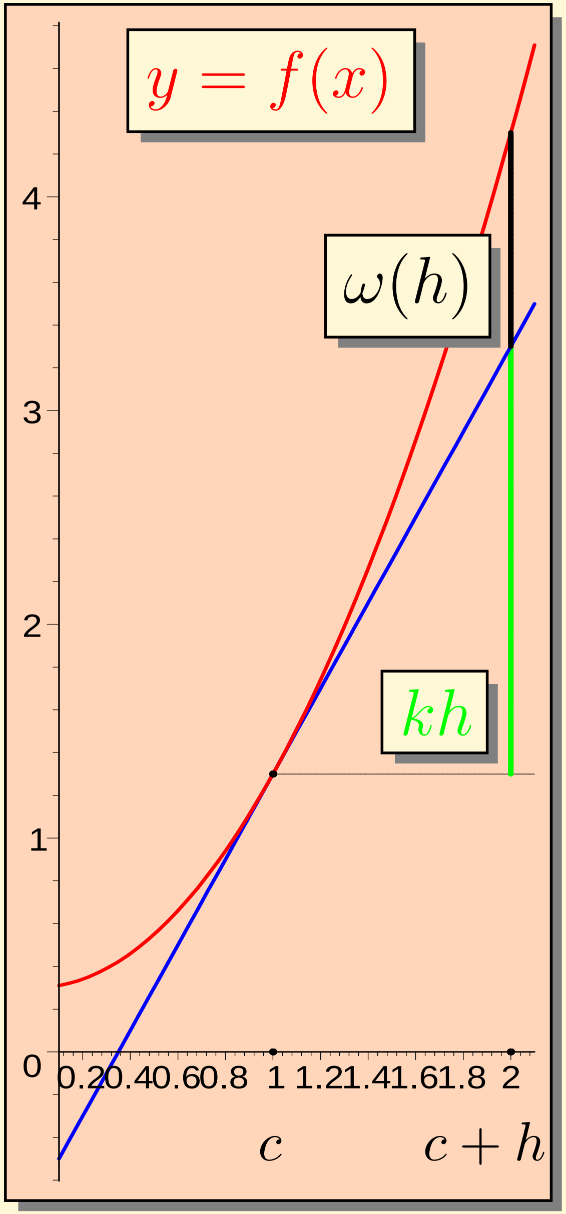
$$\boxed{k=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=:f'(c).}$$

Je-li $f'(c)\in\mathbb{R}$, budeme funkci df_c definovanou předpisem $\boxed{df_c(h):=kh=f'(c)h}$ nazývat diferenciálem funkce f v bodě c.

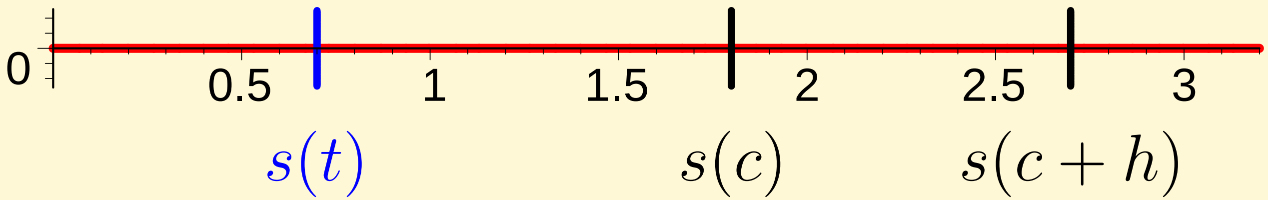
Mimochodem: přímku

$$\boxed{y=f(c)+f'(c)(x-c)}$$

pak nazýváme <u>tečnou grafu funkce</u> f sestrojenou v bodě $(c,f(c))$. (Číslo $f'(c)$ je směrnicí této tečny.)



Motivace 2.



Mějme hmotný bod pohybující se po přímce. Značme $s(t)$ jeho polohu v čase t. Průměrnou rychlost tohoto bodu v časovém intervalu $\langle c, c+h\rangle$ lze pak vyjádřit podílem

$$\frac{s(c+h)-s(c)}{h}.$$

Bude-li se h blížit k nule, bude se zřejmě tato průměrná rychlost blížit k okamžité rychlosti daného hmotného bodu v čase c, tzn.

$$\boxed{v(c) = \lim_{h\to 0} \frac{s(c+h)-s(c)}{h} =: s'(c).}$$

Definice. Buď $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$.
Existuje-li

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

značíme ji $f'(x)$ a nazýváme derivací funkce f v bodě x.

Existuje-li

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

značíme ji $f'_+(x)$ a nazýváme derivací zprava funkce f v bodě x.

Existuje-li

$$\lim_{h \to 0-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

značíme ji $f'_-(x)$ a nazýváme derivací zleva funkce f v bodě x.

Úmluva. Nebude-li řečeno jinak, budeme *derivací* rozumět *vlastní* (tzn. *konečnou*) *derivaci*.

Pozorování.

- Existuje-li $f'(x)$ (vlastní nebo nevlastní), existuje $U(x)$ takové, že $U(x) \subset Df$.
- $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, má-li jedna strana rovnosti smysl.

Příklady.

- Je-li funkce f konstantní, je $f'(x) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Důkaz. Předpokládáme, že $\exists c \in \mathbb{R}\, \forall x \in \mathbb{R}: \; f(x) = c$, a proto pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0. \qquad \blacksquare$$

- $(\mathrm{Id}\,)' = 1$ v $\mathbb{R}$.

Důkaz. $(\mathrm{Id}\,)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)-(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1. \qquad \blacksquare$

Definice. Existuje-li číslo $k \in \mathbb{R}$ takové, že pro funkci ω definovanou předpisem

$$\omega(h) := f(c+h) - f(c) - kh$$

platí

$$\lim_{h\to 0} \frac{\omega(h)}{h} = 0,$$

říkáme, že funkce f je v bodě c diferencovatelná.

Lineární funkci df_c definovanou předpisem

$$df_c(h) := kh$$

pak nazýváme diferenciálem funkce f v bodě c.

Věta 6.1. (o existenci diferenciálu).
Funkce f je v bodě $c \in \mathbb{R}$ diferencovatelná právě tehdy, existuje-li (*konečná* **!**) derivace funkce f v bodě c.

Navíc: v takovém případě je $\forall h \in \mathbb{R}: \ df_c(h) = f'(c)h$.

Věta 6.2. (o spojitosti diferencovatelné funkce).
Je-li funkce f diferencovatelná v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, je v bodě x_0 spojitá.

Důkaz. Chceme dokázat, že

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0.$$

Uvědomme si nejdříve, že pro všechna $x, x_0 \in Df$ taková, že $x \neq x_0$, platí

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0).$$

Odtud plyne

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)\right) = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

(Z předpokladu a věty 6.1. (o existenci diferenciálu) plyne, že

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}.)$$

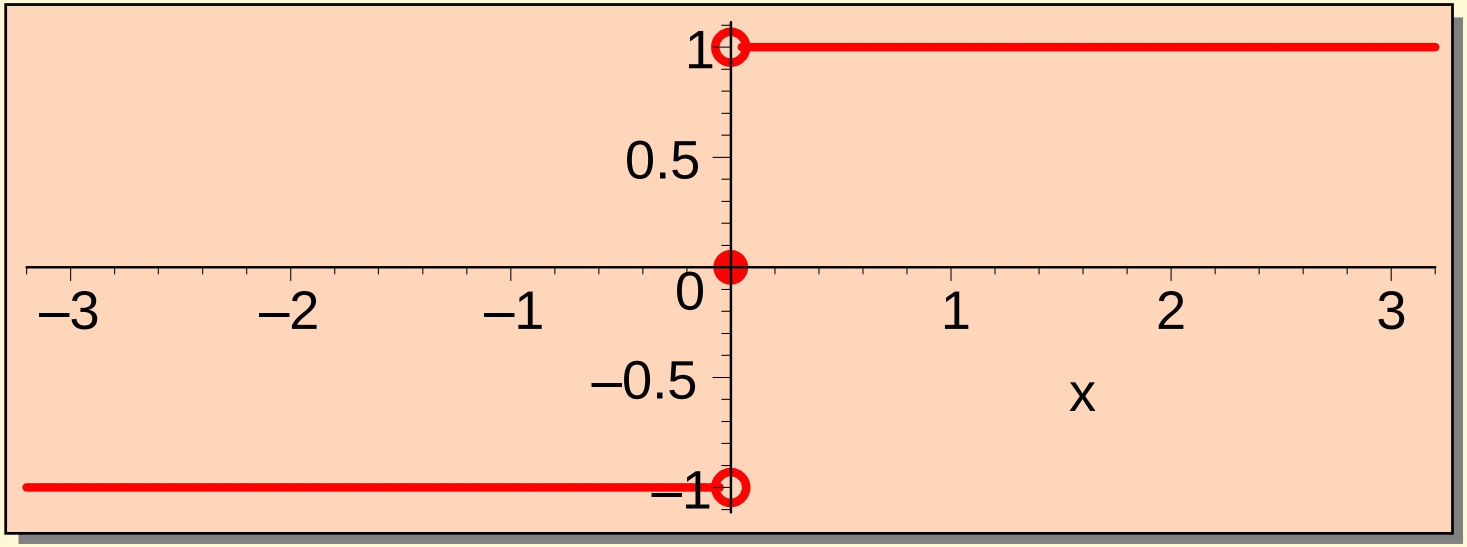
■

Příklady.

- Funkce sgn má (nevlastní) derivaci v bodě 0 (ale není v bodě 0 spojitá).

Důkaz.

$$\operatorname{sgn}'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sgn}(x) - \operatorname{sgn}(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sgn}(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty.$$

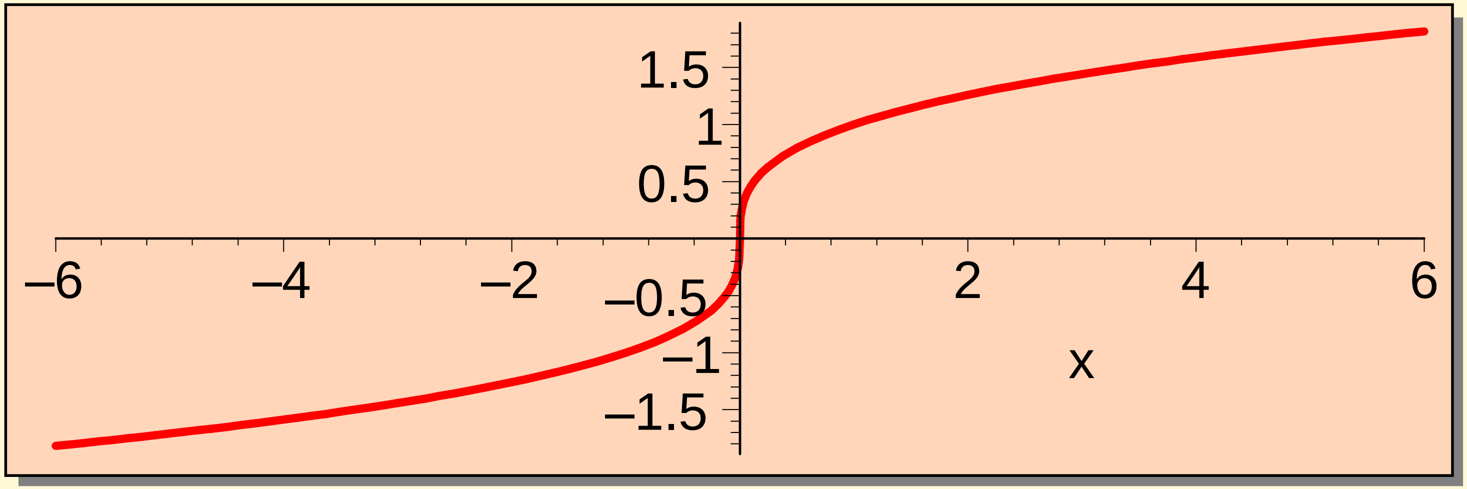


■

- Funkce $f(x) := \sqrt[3]{x}$ má (nevlastní) derivaci v bodě 0 (a je v bodě 0 spojitá).

Důkaz.

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty.$$



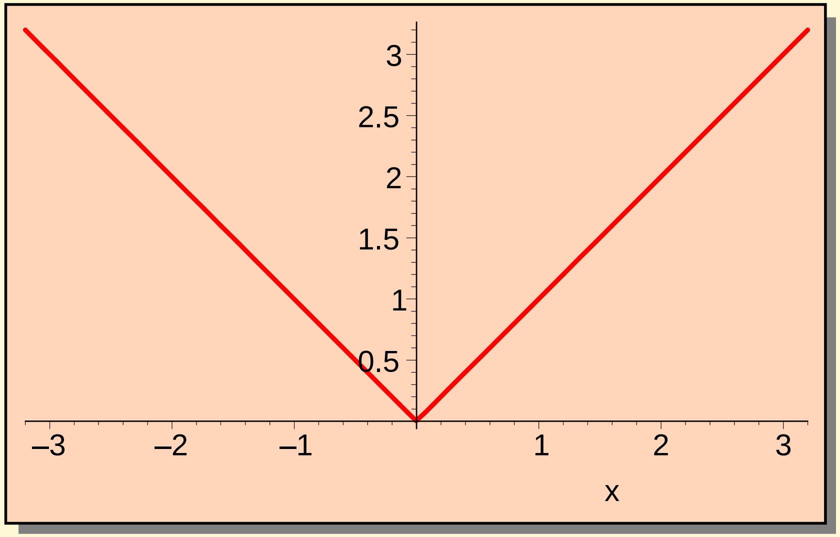
■

- Funkce $f(x) := |x|$ je spojitá v bodě 0 (ale $f'(0)$ neexistuje).

Důkaz. Snadno lze spočítat, že

$$f'_+(0) = 1 \text{ a } f'_-(0) = -1,$$

a proto $f'(0)$ neexistuje (viz větu 5.5).



∎

Věta 6.3. (o derivaci $+$, $-$, $\cdot$, $:$).
Nechť $x \in \mathbb{R}$. Pak platí

(i) $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$,
pokud má pravá strana rovnosti smysl.

(ii) $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
existují-li konečné derivace $f'(x)$ a $g'(x)$.

(iii) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$,
existují-li konečné derivace $f'(x)$ a $g'(x)$ a je-li $g(x) \neq 0$.

Důkaz *(i)*.

$$(f \pm g)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(f\pm g)(x+h) - (f\pm g)(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \pm \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] = f'(x) \pm g'(x),$$

má-li $f'(x) \pm g'(x)$ smysl (viz větu 5.3.). $\blacksquare$

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Důkaz *(ii)*.

$$\boxed{(fg)'(x)} = \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \pm \frac{f(x)g(x+h)}{h}\right] =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h) + f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] =$$

$f'(x), g'(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow g$ je spojitá v $x \Rightarrow \lim\limits_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$

$$\boxed{= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).}$$

■

Důkaz *(iii)*.

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x)} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{g(x+h)g(x)}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x) - f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)\right] =$$

$$\boxed{= \frac{1}{g^2(x)}[f'(x)g(x) - f(x)g'(x)].}$$

■

Věta 6.4. (o derivaci složené funkce).
Nechť $x \in \mathbb{R}$ a nechť existují *konečné* derivace $f'(x)$ a $g'(f(x))$. Potom je

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Příklady.

- $\forall x \in \mathbb{R}: \ \sin' x = \cos x.$

Důkaz. Nejdříve si připomeňme, že $\forall x \in \mathbb{R}: \ \sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ a že $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, a proto pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\sin' x = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\cos x \frac{\sin h}{h} - \sin x \frac{1-\cos h}{h}\right] = \lim_{h \to 0} \left[\cos x \frac{\sin h}{h} - \sin x \frac{2\sin^2 \frac{h}{2}}{h}\right] =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\cos x \frac{\sin h}{h} - \sin x \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \sin \frac{h}{2}\right] = \cos x \cdot 1 - \sin x \cdot 1 \cdot 0 = \cos x.$$

■

Pro přehlednost budeme někdy psát – ne zcela korektně – $(f(x))'$ místo správného $f'(x)$.

■ $\forall x \in \mathbb{R}: \ \cos' x = -\sin x$.

Důkaz. Z věty 6.4. a předchozího příkladu plyne, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$(\cos x)' = \left(\sin(\tfrac{\pi}{2} - x)\right)' = \sin'(\tfrac{\pi}{2} - x)\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right)' =$$

$$= \cos(\tfrac{\pi}{2} - x)(0 - 1) = -\sin x.$$

■

■ $\forall x \in D(\operatorname{tg}): \ \operatorname{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Důkaz. Z věty 6.3. a předchozích příkladů plyne, že pro každé $x \in D(\operatorname{tg})$ platí

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

■

- $\forall x \in D(\operatorname{cotg}):\ \operatorname{cotg}' x = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Důkaz.

$$\forall x \in D(\operatorname{cotg}):\ (\operatorname{cotg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

- $\forall x \in \mathbb{R}:\ (\mathrm{e}^{x})' = \mathrm{e}^{x}$.

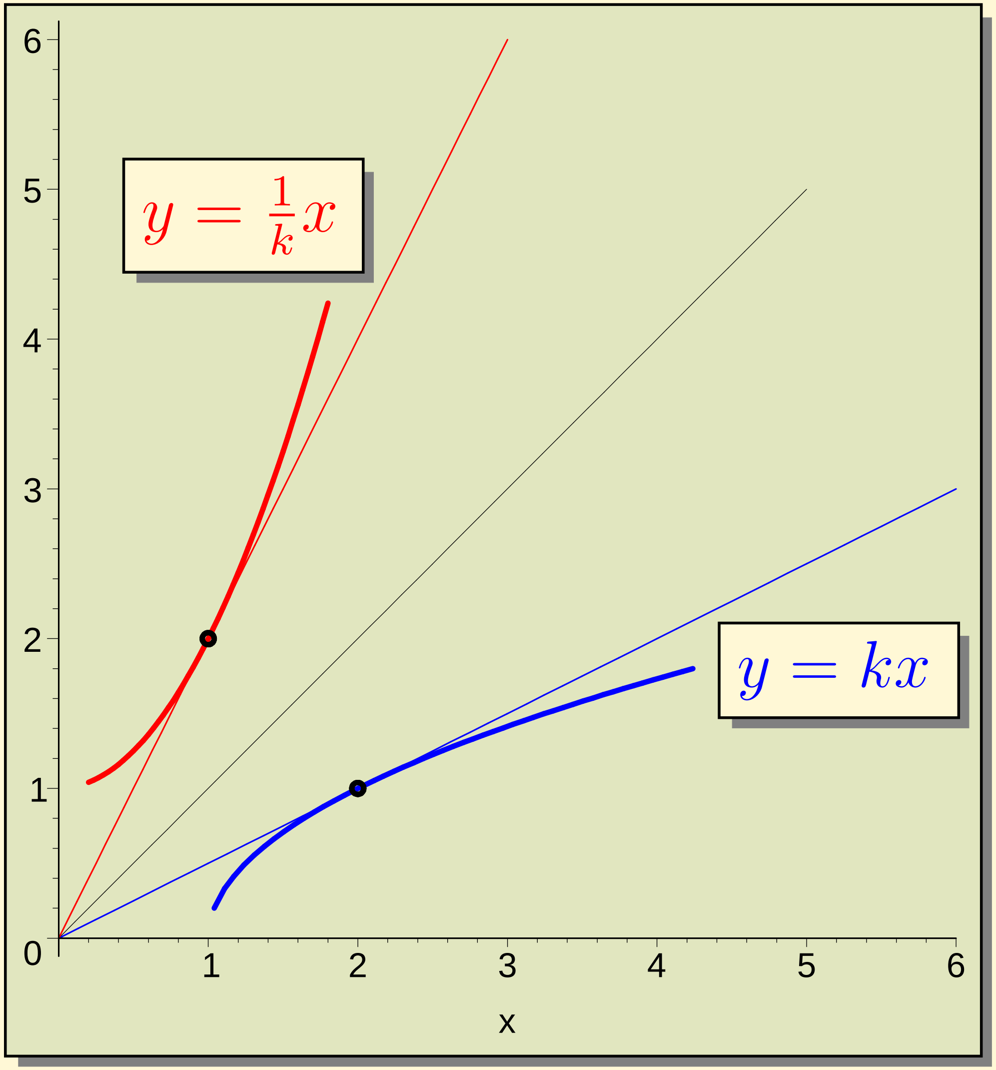
(Toto tvrzení ponechme bez důkazu...)

Věta 6.5. (o derivaci inverzní funkce).

Nechť funkce f je spojitá a ryze monotónní v intervalu $I \subset \mathbb{R}$; nechť x je vnitřním bodem intervalu $f(I)$ a nechť existuje $f'(f^{-1}(x))$. Pak existuje $(f^{-1})'(x)$ a platí

$$(f^{-1})'(x) = \begin{cases} \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\,, & \text{je-li } f'(f^{-1}(x)) \neq 0, \\ +\infty\,, & \text{je-li } f'(f^{-1}(x)) = 0 \text{ a funkce } f \text{ je v } I \text{ rostoucí}, \\ -\infty\,, & \text{je-li } f'(f^{-1}(x)) = 0 \text{ a funkce } f \text{ je v } I \text{ klesající}. \end{cases}$$

Ilustrace.



Příklady.

- $\forall x \in \mathbb{R}^+ : \ \ln' x = \frac{1}{x}$.

Důkaz.

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ : \ \ln' x = \frac{1}{\exp'(\ln x)} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x}.$$

- Buď $n \in \mathbb{N}$. Pak $\forall x \in \mathbb{R} : \ (x^n)' = nx^{n-1}$.

Důkaz provedeme indukcí.

(i) $\forall x \in \mathbb{R} : \ (x)' = \mathrm{Id}'(x) = 1.$

(ii) Máme dokázat implikaci

$$\big[n \in \mathbb{N} \ \wedge \ \forall x \in \mathbb{R} : \ (x^n)' = nx^{n-1}\big]$$
$$\Downarrow$$
$$\big[\forall x \in \mathbb{R} : \ (x^{n+1})' = (n+1)x^n\big].$$

$$(x^{n+1})' = (x^n x)' = (x^n)' x + x^n x' = nx^{n-1} x + x^n = (n+1)x^n.$$

6. Diferenciál a derivace funkce.
Motivace.
Definice
– derivace,
– diferenciálu.
Výpočet derivace.

■ Buď $-n \in \mathbb{N}$. Pak $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}: \ (x^n)' = nx^{n-1}$.

Důkaz.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}: \ (x^n)' = \left(\tfrac{1}{x^{-n}}\right)' = \frac{(1)'x^{-n} - 1(x^{-n})'}{(x^{-n})^2} =$$

$$= \frac{-(-n)x^{-n-1}}{x^{-2n}} = nx^{-n-1-(-2n)} = nx^{n-1}.$$

■

■ Buď $r \in \mathbb{R}$. Pak $\forall x \in \mathbb{R}^+: \ (x^r)' = rx^{r-1}$.

Důkaz.

$$\forall x \in \mathbb{R}^+: \ (x^r)' = (e^{r \ln x})' = e^{r \ln x}(r \ln x)' = x^r r \tfrac{1}{x} = rx^{r-1}.$$

■

■ Nechť $x \in \mathbb{R}$ a nechť f a g jsou takové funkce, že platí $f(x) > 0$; $f'(x)$, $g'(x) \in \mathbb{R}$. Pak platí

$$\left(f(x)^{g(x)}\right)' = \left(e^{g(x) \ln f(x)}\right)' = e^{g(x) \ln f(x)}(g(x) \ln f(x))' =$$

$$= f(x)^{g(x)}\left[g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)}\right].$$

Problém 15. Buď $n \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$. Definujme funkci f předpisem $\boxed{f(x) := \sqrt[n]{x}}$. Zjistěte, pro která $x \in \mathbb{R}$ existuje $f'(x)$, a vypočtěte ji.

(1 bod)

■ $\forall x \in (-1,1): \ \arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Důkaz.
Protože pro každé $x \in (-1,1)$ je $\arcsin x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a funkce kosinus je na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ kladná, platí pro každé $x \in (-1,1)$

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

■

■ $\forall x \in (-1,1): \ \arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Důkaz.
Protože pro každé $x \in (-1,1)$ je $\arccos x \in (0,\pi)$ a funkce sinus je na intervalu $(0,\pi)$ kladná, platí pro každé $x \in (-1,1)$

$$\arccos' x = \frac{1}{\cos'(\arccos x)} = \frac{-1}{\sin(\arccos x)} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

■

- $\forall x \in \mathbb{R}: \ \operatorname{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2}$.

Důkaz.
Nejdříve si všimněme, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ je $\operatorname{arctg} x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a že pro každé $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ je $\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$.

Odtud (a z předchozího) již snadno plyne, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{\operatorname{tg}'(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)}} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

∎

- $\forall x \in \mathbb{R}: \ \operatorname{arccotg}' x = -\frac{1}{1+x^2}$.

Důkaz. Nejdříve si všimněme, že $\forall x \in \mathbb{R}: \ \operatorname{arccotg} x \in (0, \pi)$ a že pro každé $x \in (0, \pi)$ je $\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = 1 + \operatorname{cotg}^2 x$.

Proto pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\operatorname{arccotg}' x = \frac{1}{\operatorname{cotg}'(\operatorname{arccotg} x)} = \frac{1}{\frac{-1}{\sin^2(\operatorname{arccotg} x)}} = \frac{-1}{1+\operatorname{cotg}^2(\operatorname{arccotg} x)} = \frac{-1}{1+x^2}.$$

∎

Definice. Derivací funkce f rozumíme funkci f' definovanou předpisem

$$f'(x) := f'(x).$$

Podobně definujeme i funkce f'_+ a f'_-.

Definice. Řekneme, že funkce f je na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ s krajními body $a, b \in \mathbb{R}^*$ $(a < b)$

- diferencovatelná, platí-li tyto tři podmínky:
  - $\forall x \in (a, b): \ f'(x) \in \mathbb{R}$,
  - je-li $a \in I$, je $f'_+(a) \in \mathbb{R}$,
  - je-li $b \in I$, je $f'_-(b) \in \mathbb{R}$;
- spojitě diferencovatelná, platí-li tyto tři podmínky:
  - funkce f' je spojitá v (a, b),
  - je-li $a \in I$, je funkce f'_+ spojitá zprava v bodě a,
  - je-li $b \in I$, je funkce f'_- spojitá zleva v bodě b.

Problém 16. Buď funkce f definovaná předpisem

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{je-li } x \neq 0, \\ 0, & \text{je-li } x = 0. \end{cases}$$

Rozhodněte, zda je funkce f

- diferencovatelná na $\mathbb{R}$,
- spojitě diferencovatelná na $\mathbb{R}$.

(1 bod)

Definice. Buď $n \in \mathbb{N}$. Definujme funkci $(n+1)$-ní derivace funkce f indukcí

$$f^{(n+1)} := \left(f^{(n)}\right)'.$$

Navíc definujme funkci $f^{(0)}$ předpisem

$$f^{(0)}(x) := f(x).$$

Příklad. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

- $\sin^{(0)} x = \sin x$,
- $\sin' x = \cos x$,
- $\sin'' x = (\sin' x)' = (\cos x)' = -\sin x$,
- $\sin''' x = (\sin'' x)' = (-\sin x)' = -\cos x$,
- $\sin^{(4)} x = (\sin''' x)' = (-\cos x)' = \sin x$,
- $\sin^{(5)} x = (\sin^{(4)} x)' = (\sin x)' = \cos x$,

  ... .