Matematická analýza ve Vesmíru

Jiří Bouchala

Katedra aplikované matematiky

jiri.bouchala@vsb.cz

www.am.vsb.cz/bouchala

5. Limita a spojitost funkce.

Úmluva. Píšeme-li $\underline{x_0 \neq x_n \to x_0}$, myslíme tím, že $x_n \to x_0$ a že $x_n \neq x_0$ pro všechna dost velká $n \in \mathbb{N}$.

Podobně rozumějme i vztahům $\underline{x_0 < x_n \to x_0}$ a $\underline{x_0 > x_n \to x_0}$.

Definice. Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ <u>limitu</u> $a \in \mathbb{R}^*$ (a píšeme $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$), platí-li

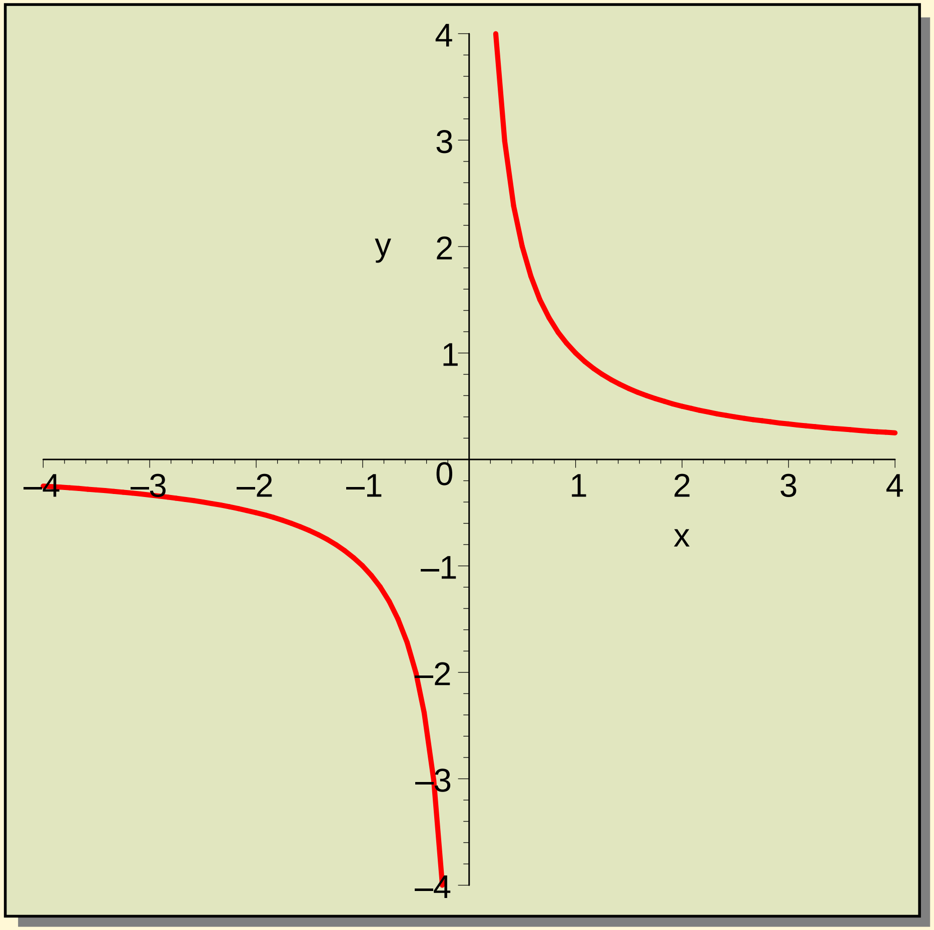
$$\boxed{x_0 \neq x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to a}$$

(tím rozumíme: pro *každou* posloupnost (x_n) takovou, že $x_0 \neq x_n \to x_0$, platí, že $f(x_n) \to a$).

Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ <u>limitu zprava</u> $a \in \mathbb{R}^*$ (píšeme $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = a$), platí-li $\boxed{x_0 < x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to a}$.

Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ <u>limitu zleva</u> $a \in \mathbb{R}^*$ (píšeme $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = a$), platí-li $\boxed{x_0 > x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to a}$.

$$f(x) := \frac{1}{x}$$



Příklady.

- $\lim_{x\to 1} f(x) = 1,$
- $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0,$
- $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0,$
- $\lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty,$
- $\lim_{x\to 0-} f(x) = -\infty,$

- $\lim_{x\to 0} f(x)$ neexistuje.

Důkaz.
$0 \neq x_n := \frac{(-1)^n}{n} \to 0,$
ale $f(x_n) = (-1)^n n$
nemá limitu. ∎

Definice. Buď $x_0 \in \mathbb{R}$ a $\delta \in \mathbb{R}^+$. Definujme následující množiny:

- $U(x_0, \delta) := (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$
  ... okolí bodu x_0 (s poloměrem δ),
- $U^+(x_0, \delta) := \langle x_0, x_0 + \delta)$
  ... pravé okolí bodu x_0 (s poloměrem δ),
- $U^-(x_0, \delta) := (x_0 - \delta, x_0\rangle$
  ... levé okolí bodu x_0 (s poloměrem δ),
- $U(+\infty, \delta) := \{x \in \mathbb{R}^* : \ x > \frac{1}{\delta}\} = (\frac{1}{\delta}, +\infty) \cup \{+\infty\}$
  ... okolí bodu $+\infty$ (s poloměrem δ),
- $U(-\infty, \delta) := \{x \in \mathbb{R}^* : \ x < -\frac{1}{\delta}\} = (-\infty, -\frac{1}{\delta}) \cup \{-\infty\}$
  ... okolí bodu $-\infty$ (s poloměrem δ),

- $P(x_0, \delta) := U(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$
  ... prstencové okolí bodu x_0 (s poloměrem δ)

(analogicky definujeme $P^+(x_0, \delta)$, $P^-(x_0, \delta)$, $P(+\infty, \delta)$, $P(-\infty, \delta)$).

Nezáleží-li nám na velikosti okolí δ, píšeme krátce $U(x_0),\ P(x_0), \ldots$.

Věta 5.1. Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a $a \in \mathbb{R}^*$. Pak

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \;\Leftrightarrow\; \forall U(a)\, \exists P(x_0)\, \forall x \in P(x_0):\; f(x) \in U(a).$$

Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$ a $a \in \mathbb{R}^*$. Pak

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = a \;\Leftrightarrow\; \forall U(a)\, \exists P^+(x_0)\, \forall x \in P^+(x_0):\; f(x) \in U(a).$$

Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$ a $a \in \mathbb{R}^*$. Pak

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = a \;\Leftrightarrow\; \forall U(a)\, \exists P^-(x_0)\, \forall x \in P^-(x_0):\; f(x) \in U(a).$$

Všimněme si, že existence ani hodnota $\lim_{x\to x_0} f(x)$ nezávisí na tom, zda a jak je funkce f definovaná v bodě x_0; má-li však existovat, musí být funkce f definovaná (alespoň) na nějakém $P(x_0)$.

Příklad.

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^2-9}{x+3} = \lim_{x\to -3} \frac{(x-3)(x+3)}{x+3} = \lim_{x\to -3} (x-3) = -6.$$

Následující tři věty jsou důsledkem definice limity funkce a příslušných vět o limitách posloupností.

Věta 5.2. Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ nejvýše jednu limitu.

Věta 5.3. Nechť $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Potom platí:

(i) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, má-li pravá strana rovnosti smysl,

(ii) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) - \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, má-li pravá strana rovnosti smysl,

(iii) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, má-li pravá strana rovnosti smysl,

(iv) $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, má-li pravá strana rovnosti smysl.

Příklady.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-x^2)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2(x-1))=+\infty$,
- $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$.
- $\lim \sin(n\pi)=0$, ale $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin(n\pi)$ neexistuje.

Věta 5.4. Nechť

- $f, g, h: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
- $x_0, a\in\mathbb{R}^*$,
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=a$,
- $\exists P(x_0)\,\forall x\in P(x_0):\; f(x)\le h(x)\le g(x)$.

Pak

$$\lim_{x\to x_0} h(x)=a.$$

5. Limita a spojitost funkce.
Limita.
Spojitost.

Příklad.

$\lim\limits_{x\to 0} (x^2 \sin \frac{1}{x}) = 0.$

Důkaz plyne přímo z věty 5.4., protože

- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \ -x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2$,
- $\lim\limits_{x\to 0} (-x^2) = \lim\limits_{x\to 0} (x^2) = 0.$ $\blacksquare$

(Všimněme si skutečnosti, že $\lim\limits_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$ neexistuje.)

Věta 5.5. Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$ a nechť $a \in \mathbb{R}^*$. Potom $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ právě tehdy, platí-li

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{x\to x_0-} f(x) = a.$$

Definice. Řekneme, že funkce f je <u>spojitá</u> v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, platí-li

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Řekneme, že funkce f je <u>spojitá zprava</u> v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, platí-li

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0).$$

Řekneme, že funkce f je <u>spojitá zleva</u> v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, platí-li

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0).$$

Nepřehlédněme, že

- ze spojitosti funkce f v bodě x_0 vyplývá existence $U(x_0)$ takového, že $U(x_0) \subset Df$,
- je-li funkce f spojitá zprava v bodě x_0, existuje $U^+(x_0)$ takové, že $U^+(x_0) \subset Df$,
- je-li funkce f spojitá zleva v bodě x_0, existuje $U^-(x_0)$ takové, že $U^-(x_0) \subset Df$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall U(a)\, \exists P(x_0)\, \forall x \in P(x_0) : \ f(x) \in U(a).$$

Věta 5.6. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a nechť $x_0 \in \mathbb{R}$.
Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) f je spojitá v bodě x_0,

(ii) $x_0 \in Df \ \wedge \ \forall U(f(x_0))\, \exists U(x_0)\, \forall x \in U(x_0) : \ f(x) \in U(f(x_0))$,

(iii) $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) : \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$,

(iv) $x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$.

Příklady.

- Konstantní funkce je spojitá v každém bodě $x_0 \in \mathbb{R}$.
- Id je spojitá v každém bodě $x_0 \in \mathbb{R}$.
- Funkce f definovaná předpisem $f(x) := |x|$ je spojitá v každém bodě $x_0 \in \mathbb{R}$.
- Funkce sgn je spojitá v každém bodě $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, není spojitá v bodě $x_0 = 0$.
- Dirichletova funkce χ není spojitá v žádném bodě.

Věta 5.7. Nechť funkce f a g jsou spojité v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Pak i funkce $f+g$, $f-g$ a fg jsou spojité v bodě x_0. Je-li navíc $g(x_0) \neq 0$, je i funkce $\frac{f}{g}$ spojitá v bodě x_0.

Důkaz. Z předpokladů

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0),$$

definice operací s funkcemi a věty 5.3. plyne, že

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} (f+g)(x) &= \lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \\ = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) &= f(x_0) + g(x_0) = (f+g)(x_0), \end{aligned}$$

neboli, že funkce $f+g$ je spojitá v bodě x_0.

(Podobně lze postupovat i v případě funkcí $f-g,\ fg, \frac{f}{g}$.)

■

5. Limita a spojitost funkce.
Limita.
Spojitost.

Věta 5.8. Nechť funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ a nechť funkce g je spojitá v bodě $f(x_0)$. Pak funkce $g \circ f$ je spojitá v bodě x_0.

Důkaz. Platí

$$x_n \to x_0 \;\Rightarrow\; f(x_n) \to f(x_0) \;\Rightarrow\; g(f(x_n)) \to g(f(x_0)),$$

a proto je (viz ekvivalenci tvrzení *(i)* a *(iv)* ve větě 5.6.) funkce $g \circ f$ spojitá v bodě x_0.

■

Definice. Řekneme, že funkce f je <u>spojitá v intervalu</u> $I \subset \mathbb{R}$, platí-li tyto podmínky:

- f je spojitá v každém vnitřním bodě intervalu I,
- patří-li počáteční bod intervalu I do intervalu I, je v něm funkce f spojitá zprava,
- patří-li koncový bod intervalu I do intervalu I, je v něm funkce f spojitá zleva.

Problém 11. Doplňte definici:

Množinu $I \subset \mathbb{R}$ nazýváme <u>intervalem</u>, platí-li … .

(1 bod)

Problém 12. Riemannova funkce je definovaná předpisem

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{je-li } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{n}, & \text{je-li } x = \frac{m}{n}, \text{ kde } m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \\ & \text{a čísla } m \text{ a } n \text{ jsou nesoudělná.} \end{cases}$$

Dokažte, že

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} : \lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$$

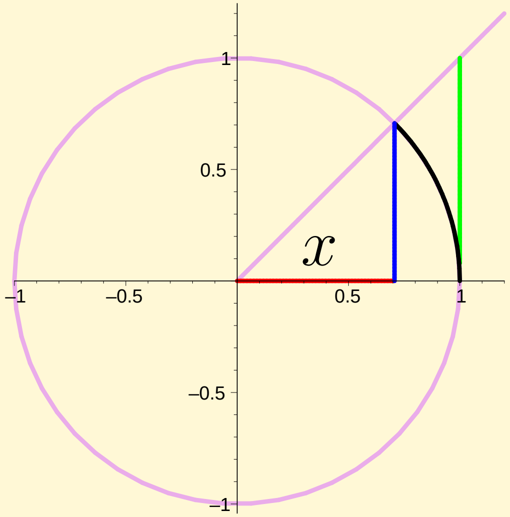
(Odtud již snadno vyplývá, že Riemannova funkce je spojitá v každém iracionálním bodě a že není spojitá v žádném racionálním bodě.)

(1 bod)

Věta 5.9. Nechť funkce f je kterákoliv ze základních elementárních funkcí a nechť $I \subset Df$ je interval. Pak f je spojitá v I.

Příklad.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$



Důkaz.

$$\forall x \in (0, \tfrac{\pi}{2}) \colon \; \frac{\cos x \sin x}{2} \le \frac{x}{2} \le \frac{\operatorname{tg} x}{2}.$$

Odtud plyne, že

$$\forall x \in (0, \tfrac{\pi}{2}) : \; \cos x \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{\cos x},$$

a protože kosinus je sudá a sinus lichá funkce, platí taky

$$\forall x \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \setminus \{0\} : \; \cos x \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{\cos x}.$$

Protože $\lim_{x \to 0} \cos x = 1 = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x}$ (funkce $\cos x$ a $\frac{1}{\cos x}$ jsou spojité v bodě 0), je $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (viz větu 5.4.). ∎

Věta 5.10. (o limitě složené funkce).

Nechť $x_0,\, a,\, b \in \mathbb{R}^*$ a nechť platí

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a,$
- $\lim\limits_{y\to a} g(y) = b,$
- $\boxed{\exists P(x_0)\,\forall x \in P(x_0):\;\; f(x) \neq a}$ nebo $\boxed{g \text{ je spojitá v bodě } a.}$

Potom

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = b.$$

Varovné příklady.

- $f(x) := 0,\; g(x) := \frac{1}{x^2} \Rightarrow \left[\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0 \wedge \lim\limits_{y\to 0} g(y) = +\infty\right],$
  ale $\lim\limits_{x\to 1} g(f(x))$ neexistuje, protože $D(g\circ f) = \emptyset$.
- $f(x) := 0,\; g(x) := \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 1918, & x = 0, \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0, \\ \lim\limits_{y\to 0} g(y) = +\infty, \end{array}\right]$
  ale $\lim\limits_{x\to 1} g(f(x)) = \lim\limits_{x\to 1} g(0) = \lim\limits_{x\to 1} 1918 = 1918 \neq +\infty.$

Příklady.

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(\sqrt{5}x)}{\sqrt{5}x} = 1,$

  protože

  - $\lim\limits_{x\to 0} (\sqrt{5}x) = 0,$
  - $\lim\limits_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1,$
  - $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \ \sqrt{5}x \neq 0.$

- $\lim\limits_{x\to 0} \cos\left(x^2 \sin \frac{1}{x}\right) = 1,$

  protože

  - $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$ (viz příklad za větou 5.4.),
  - funkce kosinus je spojitá v bodě 0 (tzn. $\lim\limits_{y\to 0} \cos y = 1$).

  (Všimněme si, že $\forall P(0)\, \exists x \in P(0) : \ x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$.)

Problém 13. Buď $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Vypočtěte

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin(\sin x))}{\cos(\frac{\pi}{2}\cos x)}\, x^k.$$

(1–2 body)

Problém 14. Dokažte, že každá nekonstantní funkce f, pro niž platí

$$\exists T \in \mathbb{R}^+ \,\forall x \in Df : \ f(x) = f(x+T) = f(x-T) \qquad (\heartsuit)$$

a která je spojitá alespoň v jednom bodě, má nejmenší periodu.

Nápověda:
nejdříve dokažte, že ze vztahu $(\heartsuit)$ *vyplývá platnost implikace*

$$I := \inf\{p \in \mathbb{R}^+ : \ p \textit{ je periodou } f\} > 0 \ \Rightarrow\ I \textit{ je periodou } f.$$

(2 body)