Matematická analýza ve Vesmíru

Jiří Bouchala

Katedra aplikované matematiky

jiri.bouchala@vsb.cz

www.am.vsb.cz/bouchala

4. Posloupnosti reálných čísel.

Definice. Posloupností (přesněji: posloupností reálných čísel) rozumíme každou funkci, jejímž definičním oborem je množina $\mathbb{N}$.

Posloupnost, která každému $n \in \mathbb{N}$ přiřazuje číslo $a_n \in \mathbb{R}$ (a_n ... tzv. n-tý člen posloupnosti (a_n)), budeme zapisovat některým z následujících způsobů:

- $a_1, a_2, a_3, \ldots$;
- (a_n);
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Pozor!

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \neq \{a_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ ... obor hodnot posloupnosti.

Příklady posloupností.

- $\sqrt{2005}, \sqrt{2005}, \sqrt{2005}, \ldots \; ; \; a_n := \sqrt{2005}$
  ... konstantní posloupnost, tzn. že $\forall n \in \mathbb{N}: \; a_{n+1} = a_n$.
- $1, 2, 3, 4, 5, \ldots \; ; \; a_n := n$
  ... aritmetická posloupnost, tzn. že $\exists \delta \in \mathbb{R} \, \forall n \in \mathbb{N}: \; a_{n+1} = a_n + \delta$.
- $1, 2, 4, 8, 16, \ldots \; ; \; a_n := 2^{n-1}$
  ... geometrická posloupnost, tzn. že $\exists q \in \mathbb{R} \, \forall n \in \mathbb{N}: \; a_{n+1} = q \, a_n$.
- $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots \; ; \; a_n := \frac{1}{n}$
  ... harmonická posloupnost.
- $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots \; ; \; a_1 = a_2 = 1, \; \forall n \in \mathbb{N}: \; a_{n+2} := a_{n+1} + a_n$
  ... Fibonacciho posloupnost (definovaná *rekurentně*).

Problém 7. Buď (a_n) Fibonacciho posloupnost. Najděte předpis pro n-tý člen této posloupnosti a hodnotu $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

(1 bod)

4. Posloupnosti reálných čísel.

Definice.

Limity:

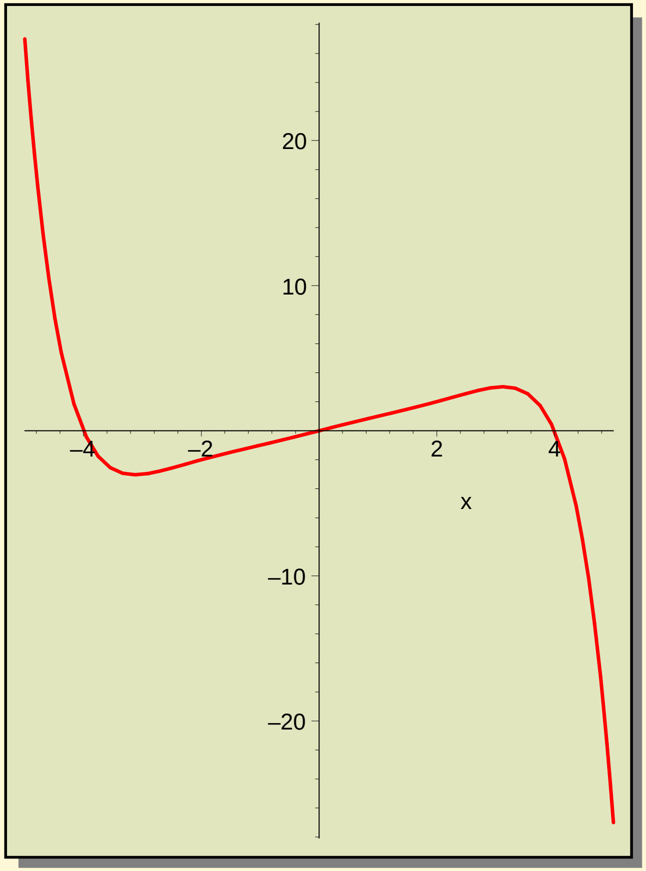
-$\lim a_n = a \in \mathbb{R}$,

-$\lim a_n = \pm\infty$,

-výpočet.

- $0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ 0,\ 0,\ -27,\ 27,\ \cdots =$
  $= f(0),\ f(1),\ f(-1),\ \ldots,\ f(n),\ f(-n),\ \ldots\ ;$

$$f(x) := \frac{x}{1260}\,(1296 - 49x^2 + 14x^4 - x^6).$$



4. Posloupnosti reálných čísel.

Definice.

Limity:

-$\lim a_n = a \in \mathbb{R}$,

-$\lim a_n = \pm\infty$,

-výpočet.

$$0,\quad 1,\quad -1,\quad 2,\quad -2,\quad 3,\quad -3,\quad 4,\quad -4,\quad \dots$$

$$\frac{0}{2},\quad \frac{1}{2},\quad -\frac{1}{2},\quad \frac{2}{2},\quad -\frac{2}{2},\quad \frac{3}{2},\quad -\frac{3}{2},\quad \frac{4}{2},\quad -\frac{4}{2},\quad \dots$$

$$\frac{0}{3},\quad \frac{1}{3},\quad -\frac{1}{3},\quad \frac{2}{3},\quad -\frac{2}{3},\quad \frac{3}{3},\quad -\frac{3}{3},\quad \frac{4}{3},\quad -\frac{4}{3},\quad \dots$$

$$\frac{0}{4},\quad \frac{1}{4},\quad -\frac{1}{4},\quad \frac{2}{4},\quad -\frac{2}{4},\quad \frac{3}{4},\quad -\frac{3}{4},\quad \frac{4}{4},\quad -\frac{4}{4},\quad \dots$$

$$\vdots$$

Definujme posloupnost (a_n):

$$(a_n) := 0,\ 1,\ \tfrac{0}{2},\ -1,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{0}{3},\ 2,\ -\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{0}{4},\ -2,\ \tfrac{2}{2},\ \dots .$$

Pak $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q}$, přičemž pro každé $q \in \mathbb{Q}$ existuje nekonečně mnoho členů posloupnosti (a_n) rovných číslu q (např. $q = 1 = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \dots$).

4. Posloupnosti reálných čísel.

Definice.

Limity:

-$\lim a_n = a \in \mathbb{R}$,

-$\lim a_n = \pm\infty$,

-výpočet.

Definice. Řekneme, že posloupnost (a_n) má limitu $a \in \mathbb{R}$ (a píšeme $\lim a_n = a$ nebo $a_n \to a$), jestliže

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0) :\ |a_n - a| < \varepsilon.$$

Má-li posloupnost (*konečnou*) limitu, říkáme, že je konvergentní. V opačném případě mluvíme o divergentní posloupnosti.

Příklady.

- $a_n := \sqrt{2005} \to \sqrt{2005}.$

Důkaz. Tvrzení je zřejmé, protože

$$a_n \to \sqrt{2005}$$
$$\Updownarrow$$
$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0) :\ \underbrace{|a_n - \sqrt{2005}|}_{=0} < \varepsilon.$$

■

4. Posloupnosti reálných čísel.
Definice.
Limity:
-$\lim a_n = a \in \mathbb{R}$,
-$\lim a_n = \pm\infty$,
-výpočet.

■ $a_n := \frac{1}{n} \to 0$.

Důkaz. Máme dokázat

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N},\, n > n_0) : \; |a_n - 0| < \varepsilon,$$

tj.

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N},\, n > n_0) : \; \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Především si všimněme, že pro $n, \varepsilon > 0$ je $\frac{1}{n} < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{\varepsilon} < n$.

Buď nyní $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ dáno (libovolně, ale pevně). Vyberme takové $n_0 \in \mathbb{N}$, aby

$$\frac{1}{\varepsilon} < n_0$$

(to určitě lze, můžeme volit – například – $n_0 = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$).

Pak

$$(\forall n \in \mathbb{N},\, n > n_0) : \; n > n_0 > \frac{1}{\varepsilon}.$$

■

4. Posloupnosti reálných čísel.

Definice.

Limity:

-$\lim a_n = a \in \mathbb{R}$,

-$\lim a_n = \pm\infty$,

-výpočet.

Cvičení. Dokažte, že

- posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} := \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ nemá limitu;
- posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} := \{-n\}_{n=1}^{\infty}$ není konvergentní.

Věta 4.1. Každá konvergentní posloupnost je omezená.

Důkaz. Máme dokázat

$$\lim a_n = a \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{R}^+ : \ \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \langle -k, k \rangle.$$

$$a_n \to a \Rightarrow (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0) : \ |a_n - a| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0) : \ |a_n - a| < 1.$$

Vezměme takové n_0 a položme

$$k = \max\{|a_1|, |a_2|, ..., |a_{n_0}|, |a| + 1\}.$$

Zřejmě $k \in \mathbb{R}^+$. Zbývá dokázat, že $\forall n \in \mathbb{N} : \ a_n \in \langle -k, k \rangle$:

$$\forall n \in \{1, 2, ..., n_0\} : \ a_n \in \{-|a_n|, |a_n|\} \subset \langle -k, k \rangle,$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0) : \ a_n \in (a - 1, a + 1) \subset \langle -k, k \rangle.$$

$\blacksquare$

Pozor!
Větu 4.1. nelze obrátit; ne každá omezená posloupnost je konvergentní (například posloupnost definovaná předpisem $a_n := (-1)^n$ nemá limitu).

Definice. Buď dána posloupnost (a_n). Posloupnost

$$\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} = a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_n}, \ldots ,$$

kde (k_n) je libovolná *rostoucí* posloupnost *přirozených čísel* (to znamená, že $\forall n \in \mathbb{N} : \ k_n < k_{n+1} \wedge k_n \in \mathbb{N}$), nazýváme posloupností vybranou z posloupnosti (a_n).

Příklad.

$$(a_n) = 1, 3, \sqrt{3}, 8, 12, 1, -2, \ldots ,$$

$$(a_{k_n}) = 1, \sqrt{3}, 1, -2, \ldots ,$$

$$(k_n) = 1, 3, 6, 7, \ldots .$$

Věta 4.2. Z každé omezené posloupnosti lze vybrat posloupnost konvergentní.

Problém 8. Dokažte následující Větu a její důsledek:

Věta. Nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ je

(i) $a_n, b_n \in \mathbb{R}$,

(ii) $a_n < b_n$,

(iii) $\langle a_{n+1}, b_{n+1}\rangle \subset \langle a_n, b_n\rangle$.

Pak

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} \langle a_n, b_n\rangle \neq \emptyset, \text{ tzn. } (\exists x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}): \; x \in \langle a_n, b_n\rangle.$$

Důsledek. Je-li navíc $\lim (b_n - a_n) = 0$, je množina $\bigcap_{n=1}^{+\infty} \langle a_n, b_n\rangle$ jednoprvková, tzn. $(\exists! x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}): \; x \in \langle a_n, b_n\rangle$.

(1–2 body)

Věta 4.3. (Bolzano – Cauchyova podmínka).
Posloupnost (a_n) je konvergentní právě tehdy, platí-li pro ni tzv. Bolzano – Cauchyova podmínka:

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, m \in \mathbb{N};\, n, m > n_0) : \ |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Definice. Posloupnost splňující Bolzano – Cauchyovu podmínku se nazývá cauchyovská.

Definice. Řekneme, že posloupnost (a_n) má limitu $+\infty$ (a píšeme $\lim a_n = +\infty$ nebo $a_n \to +\infty$), jestliže

$$(\forall k \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0):\ a_n > k.$$

Řekneme, že posloupnost (a_n) má limitu $-\infty$ (a píšeme $\lim a_n = -\infty$ nebo $a_n \to -\infty$), jestliže

$$(\forall l \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0):\ a_n < l.$$

Příklady.

- $a_n := n^3 \to +\infty$,
- $a_n := -n \to -\infty$.

Věta 4.4. Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Důkaz je velmi vhodným cvičením.

Věta 4.5. (o limitě vybrané posloupnosti). Nechť $\lim a_n = a \in \mathbb{R}^*$ a nechť (a_{k_n}) je posloupnost vybraná z posloupnosti (a_n). Pak $\lim a_{k_n} = a$.

Tato věta je velice šikovná například při argumentaci, že nějaká posloupnost nemá limitu.

Příklad. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} := \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ nemá limitu.

Důkaz. Díky předchozí větě stačí najít dvě vybrané posloupnosti s různou limitou. A to je snadné:

- pro vybranou posloupnost *sudých* členů platí
$$a_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \to 1,$$
- pro vybranou posloupnost *lichých* členů platí
$$a_{2n-1} = (-1)^{2n-1} = -1 \to -1.$$

■

Věta 4.6. (o limitě monotónní posloupnosti). Nechť (a_n) je *neklesající* posloupnost. Pak

$$\lim a_n = \sup\{a_n : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Nechť (a_n) je *nerostoucí* posloupnost. Pak

$$\lim a_n = \inf\{a_n : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Důkaz. Předpokládejme – například – že posloupnost (a_n) je neklesající. (Je-li posloupnost (a_n) nerostoucí, lze postupovat analogicky, a nebo lze využít skutečnosti, že posloupnost $(-a_n)$ je neklesající.)

Označme $s = \sup\{a_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ a rozdělme důkaz na dvě části.

(i) Nejdříve uvažujme situaci, kdy $s = +\infty$ (tzn. že posloupnost (a_n) není shora omezená). Máme dokázat, že potom $\lim a_n = +\infty$,

4. Posloupnosti reálných čísel.

Definice.

Limity:

-$\lim a_n = a \in \mathbb{R}$,

-$\lim a_n = \pm\infty$,

-výpočet.

tzn.

$$(\forall k \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N},\, n > n_0) : \; a_n > k.$$

Buď $k \in \mathbb{R}$ dáno. Pak $k < +\infty = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, a proto existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n_0} > k$. Odtud a z předpokladu monotonie (a_n) pak plyne dokazované tvrzení, neboť pro každé $\mathbb{N} \ni n > n_0$ je

$$a_n \geq a_{n_0} > k.$$

(ii) Je-li $s \in \mathbb{R}$ (tzn. že posloupnost (a_n) je shora omezená), máme dokázat, že

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N},\, n > n_0) : \; s - \varepsilon < a_n < s + \varepsilon.$$

Buď $\varepsilon > 0$ dáno. Protože $s - \varepsilon < s = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n_0} > s - \varepsilon$. Z monotonie (a_n) a skutečnosti, že supremum je horním odhadem, pak pro každé $n \in \mathbb{N}$, které je větší než n_0, plyne:

$$s - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq s < s + \varepsilon.$$

■

Příklady.

- Dá se ukázat, že posloupnost (a_n), kde $a_n := (1+\frac{1}{n})^n$, je rostoucí a shora omezená. Proto existuje (a konečná!) $\lim a_n$. Lze dokázat, že platí

$$\boxed{\lim\,(1+\tfrac{1}{n})^n = \mathrm{e}} \doteq 2,718281828459045\ldots\ .$$

- Posloupnost (a_n), kde

$$a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n},$$

je zřejmě rostoucí, a proto *existuje* její *limita*. Protože však pro každé $n \in \mathbb{N}$ je

$$|a_{2n} - a_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} n = \frac{1}{2},$$

není posloupnost (a_n) cauchyovská, a tudíž *neexistuje* její *konečná limita* (viz Větu 4.3). Zjistili jsme, že

$$\boxed{\lim\,\left(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots+\tfrac{1}{n}\right) \overset{\text{ozn.}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty.}$$

- Posloupnost (a_n), kde

$$a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2},$$

je zřejmě *rostoucí*. Všimneme-li si, že pro každé $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ platí

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k\cdot(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k},$$

získáme pro každé $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ odhad

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \frac{1}{2\cdot 1} + \frac{1}{3\cdot 2} + \frac{1}{4\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n-1)} =$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n},$$

z něhož plyne, že posloupnost (a_n) je *shora omezená*.

Proto existuje $\lim a_n \in \mathbb{R}$. Dá se dokázat, že

$$\boxed{\lim \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right) \overset{\text{ozn.}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \doteq 1,6449\ldots\,.}$$

Věta 4.7. Nechť $\lim a_n = a \in \mathbb{R}^*$ a $\lim b_n = b \in \mathbb{R}^*$. Potom platí:

(i) $\lim |a_n| = |a|$,

(ii) $\lim (a_n \pm b_n) = a \pm b$, má-li pravá strana rovnosti smysl,

(iii) $\lim (a_n b_n) = ab$, má-li pravá strana rovnosti smysl,

(iv) $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, má-li pravá strana rovnosti smysl a je-li $b_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$,

(v) $\lim \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}$, je-li $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $a \in \mathbb{R}$ a $a_n \geq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Poznámky k větě 4.7.

- Každé z uvedených tvrzení obsahuje informaci (samozřejmě za předpokladu, že příslušná operace s čísly a a b je definovaná, tj. že má pravá strana smysl):
  - že příslušná limita existuje,
  - jak ji vytvořit z čísel a a b.

- Pozor, tvrzení *(i)* nelze pro $a \neq 0$ obrátit; neplatí:

$$\lim |a_n| \text{ existuje} \Rightarrow \lim a_n \text{ existuje}$$

(jako protipříklad nám dobře poslouží posloupnost $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$). Na druhou stranu, přímo z defininice limity plyne, že: $\boxed{\lim a_n = 0 \Leftrightarrow \lim |a_n| = 0.}$

- Pozor! Nemá-li v rovnostech v *(ii), (iii), (iv)* pravá strana smysl, neznamená to nutně, že příslušná limita neexistuje. Prohlídněme si následující čtyři příklady:

  - $$\left.\begin{aligned} a_n &:= 2n \to +\infty \\ b_n &:= n \to +\infty \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_n - b_n = n \to +\infty,$$

  - $$\left.\begin{aligned} a_n &:= n \to +\infty \\ b_n &:= 2n \to +\infty \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_n - b_n = -n \to -\infty,$$

  - $$\left.\begin{aligned} a_n &:= n \to +\infty \\ b_n &:= n - a \to +\infty \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_n - b_n = a \to a$$

    ($a \in \mathbb{R}$ lze volit libovolně),

4. Posloupnosti reálných čísel.
Definice.
Limity:
-$\lim a_n = a \in \mathbb{R}$,
-$\lim a_n = \pm\infty$,
-výpočet.

- $\left.\begin{array}{l} a_n := n \to +\infty \\ b_n := n - (-1)^n \to +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow a_n - b_n = (-1)^n$

... nemá limitu.

Uvedené příklady taky ukazují, proč není rozumné definovat $(+\infty) - (+\infty)$. Podobné příklady lze najít i pro ostatní operace.

Úmluva.
Napíšeme-li $V(n)$ platí pro všechna dost velká $n \in \mathbb{N}$, rozumíme tím, že $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}; n > n_0) : \ V(n)$.

Pozorování.

- $a_n \to a \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \ |a_n - a| < \varepsilon$ pro všechna dost velká $n \in \mathbb{N}$.
- Nechť existuje limita posloupnosti (a_n) a nechť (b_n) je taková posloupnost, že $a_n = b_n$ pro všechna dost velká $n \in \mathbb{N}$. Pak $\lim b_n = \lim a_n$.

Řekli jsme si, že posloupností rozumíme funkci, jejímž definičním oborem je $\mathbb{N}$. Bude velmi užitečné tuto definici rozšířit.

Definice. V dalším budeme nazývat posloupnostmi i funkce definované (pouze) na množině $\mathbb{N} \setminus K$, kde $K \subset \mathbb{N}$ je nějaká konečná množina.

Výše uvedené definice limity zůstávají (beze změny!) v platnosti i při tomto zobecnění pojmu posloupnosti.

Příklady.

- $\lim \frac{1}{n-3} = 0$ (přestože $\frac{1}{n-3}$ není pro $n = 3$ definováno),
- $\lim \frac{1+2n+n^3}{(n-13)(n-2005)} = +\infty$ (a to přesto, že čísla 13 a 2005 nepatří do definičního oboru příslušné posloupnosti).

Problém 9. Definujme posloupnost (a_n) rekurentně rovnostmi:

$$a_1 := \sqrt{2},\ a_{n+1} := \sqrt{2 + a_n}.$$

Rozhodněte, zda existuje $\lim a_n$, a pokud ano, vypočtěte ji.

(1 bod)

Problém 10. Buď $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Definujme posloupnost (a_n) rekurentně rovnostmi:

$$a_{n+2} := \frac{a_n + a_{n+1}}{2}.$$

Rozhodněte, zda existuje $\lim a_n$, a pokud ano, vypočtěte ji.

(1 bod)

Věta 4.8. (o limitním přechodu v nerovnostech). Nechť (a_n), (b_n) a (c_n) jsou posloupnosti a nechť $\lim a_n = a \in \mathbb{R}^*$ a $\lim b_n = b \in \mathbb{R}^*$. Potom platí:

(i) je-li $a < b$, je $a_n < b_n$ pro všechna dost velká $n \in \mathbb{N}$;

(ii) je-li $a_n \le b_n$ pro všechna dost velká $n \in \mathbb{N}$, je $a \le b$;

(iii) je-li $a_n \le c_n \le b_n$ pro všechna dost velká $n \in \mathbb{N}$ a současně $a = b$, existuje $\lim c_n$ a platí $\lim c_n = a = b$;

(iv) je-li $a_n \le c_n$ (resp. $c_n \le b_n$) pro všechna dost velká $n \in \mathbb{N}$ a současně $a = +\infty$ (resp. $b = -\infty$), je $\lim c_n = +\infty$ (resp. $\lim c_n = -\infty$).

Příklady.

- $a_n := \frac{\sin(2005n^3 - \ln n + e^{3n})}{n} \longrightarrow 0.$

Důkaz plyne snadno z tvrzení *(iii)* věty 4.8. a skutečnosti, že

$$0 \leftarrow -\frac{1}{n} \le \frac{\sin(2005n^3 - \ln n + e^{3n})}{n} \le \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

■

■ $a_n := \sqrt[n]{n} \to 1.$

Důkaz. Definujme posloupnost (h_n) rovnostmi:

$$\sqrt[n]{n} = 1 + h_n,\ n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Zřejmě stačí dokázat (viz tvrzení *(ii)* věty 4.7.), že $h_n \to 0$.

Uvědomme si nejdřív, že $h_n \geq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.
Z odhadu

$$n = (1 + h_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_n^k \geq \binom{n}{2} h_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} h_n^2,$$

který platí pro každé $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N},\ n > 1$, platí

$$0 \leftarrow \frac{2}{n-1} \geq h_n^2 \geq 0 \to 0.$$

Proto $h_n^2 \to 0$ (viz tvrzení *(iii)* věty 4.8.),

a tedy i $h_n = |h_n| = \sqrt{h_n^2} \to 0$ (viz tvrzení *(v)* věty 4.7.). ■

4. Posloupnosti reálných čísel.
Definice.
Limity:
-lim $a_n = a \in \mathbb{R}$,
-lim $a_n = \pm\infty$,
-výpočet.

Cvičení. Buď posloupnost (a_n) definovaná předpisem

$$a_n := q^n, \text{ kde } q \in \mathbb{R}.$$

Dokažte, že

- $\lim a_n$ neexistuje, je-li $q \leq -1$,
- $\lim a_n = 0$, je-li $|q| < 1$,
- $\lim a_n = 1$, je-li $q = 1$,
- $\lim a_n = +\infty$, je-li $q > 1$.

Věta 4.9. Nechť $\lim a_n = 0$ a nechť $a_n > 0$ pro všechna dost velká $n \in \mathbb{N}$. Pak $\lim \frac{1}{a_n} = +\infty$.

Nechť $\lim a_n = 0$ a nechť $a_n < 0$ pro všechna dost velká $n \in \mathbb{N}$. Pak $\lim \frac{1}{a_n} = -\infty$.