Matematická analýza ve Vesmíru

Jiří Bouchala

Katedra aplikované matematiky

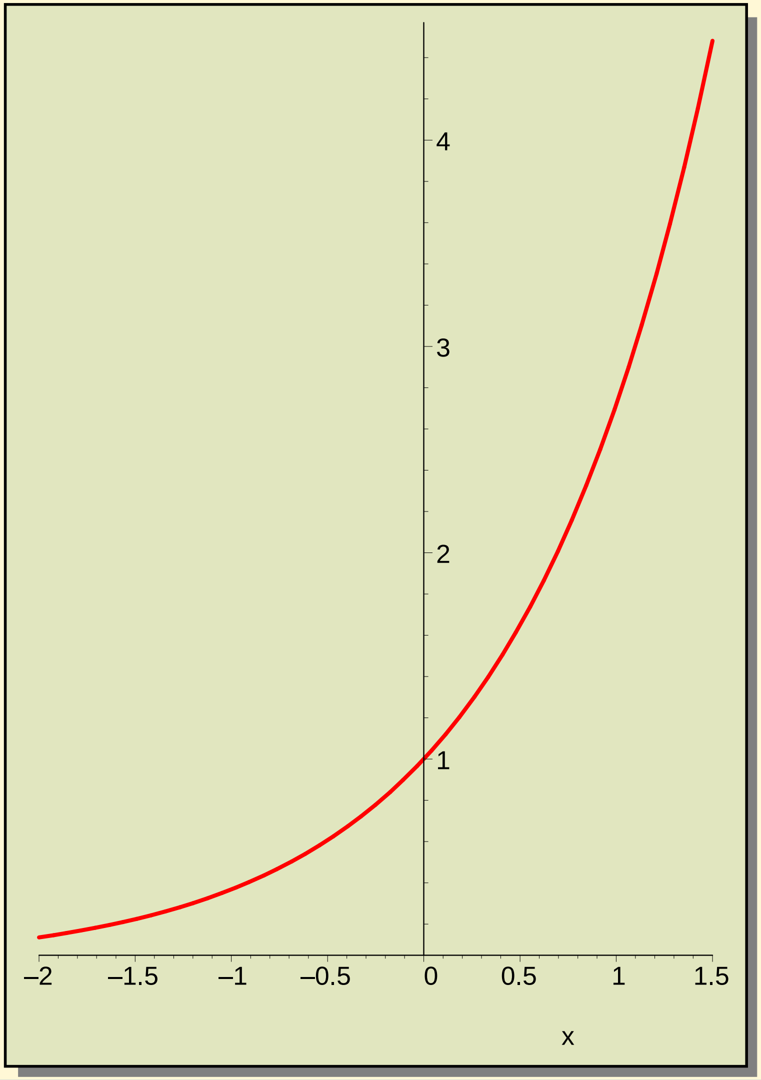
jiri.bouchala@vsb.cz

www.am.vsb.cz/bouchala

3. Elementární funkce.

Základní elementární funkce:

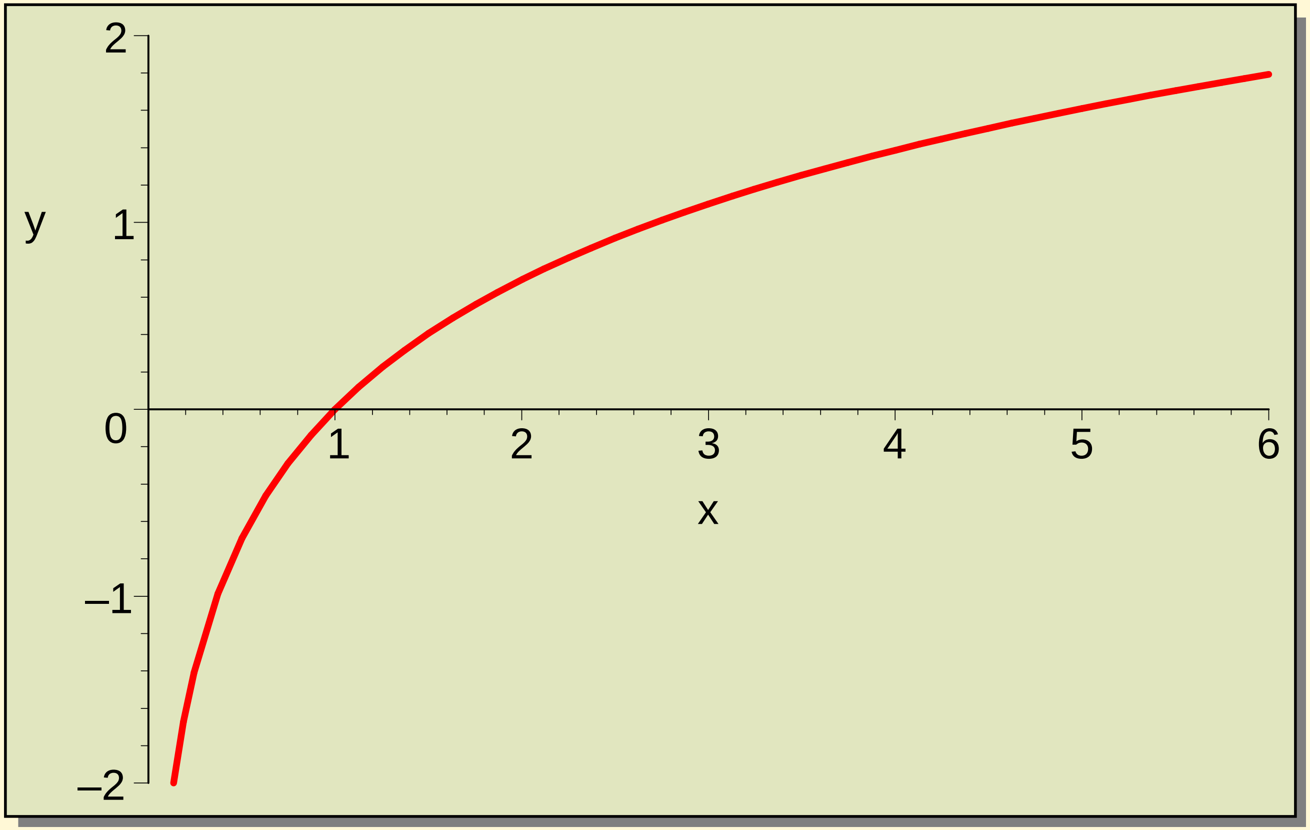
$$\mathrm{e}^{x} = \exp(x) := 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$



Základní elementární funkce:

- -exponenciální,
- -logaritmická,
- -konstantní,
- -mocninné,
- -goniometrické,
- -cyklometrické,
- -hyperbolické,
- -hyperbolomet.

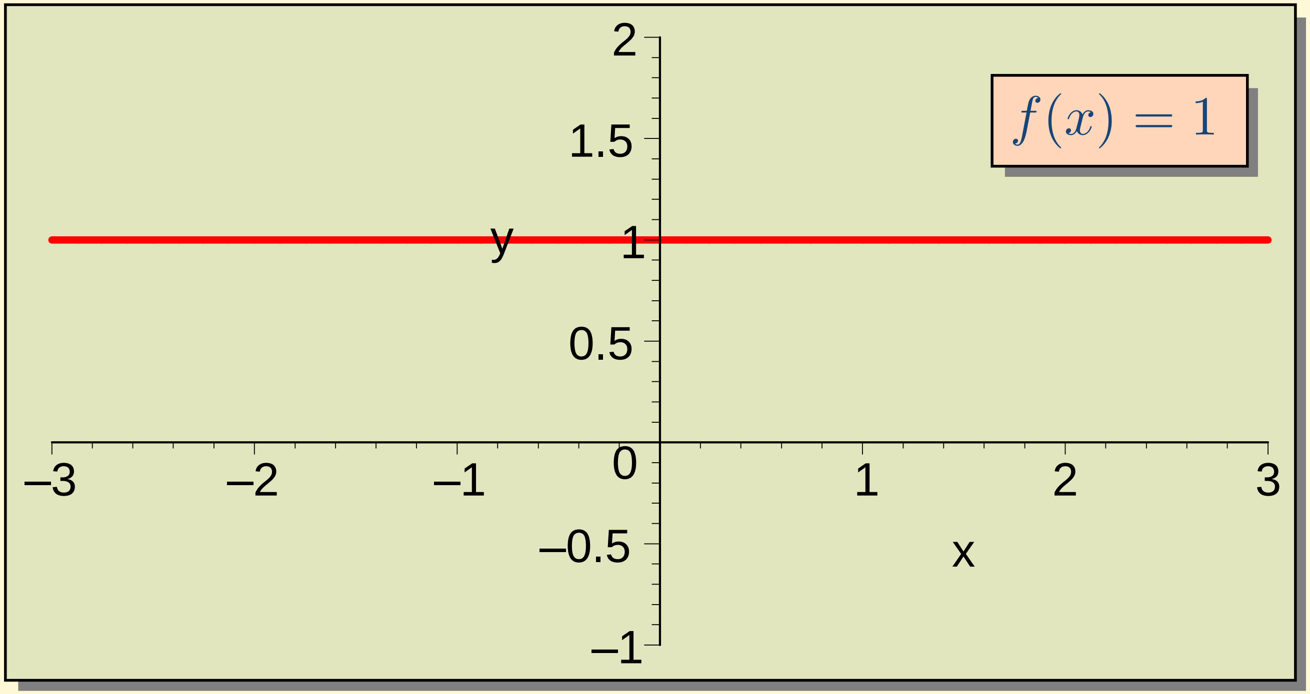
$$\boxed{\ln := \exp^{-1}}$$



Základní elementární funkce:

-exponenciální,
-logaritmická,
-konstantní,
-mocninné,
-goniometrické,
-cyklometrické,
-hyperbolické,
-hyperbolomet.

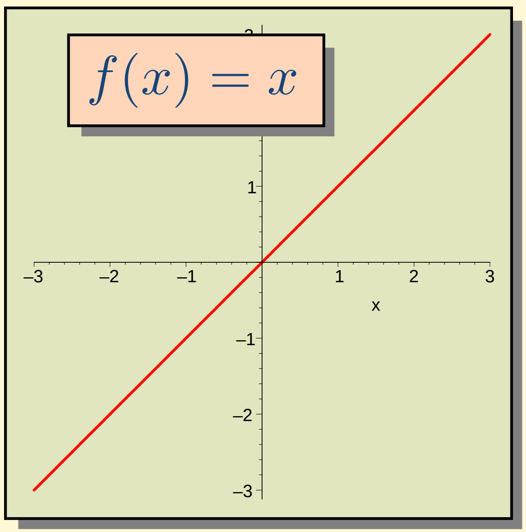
$f(x) := c$, kde $c \in \mathbb{R}$

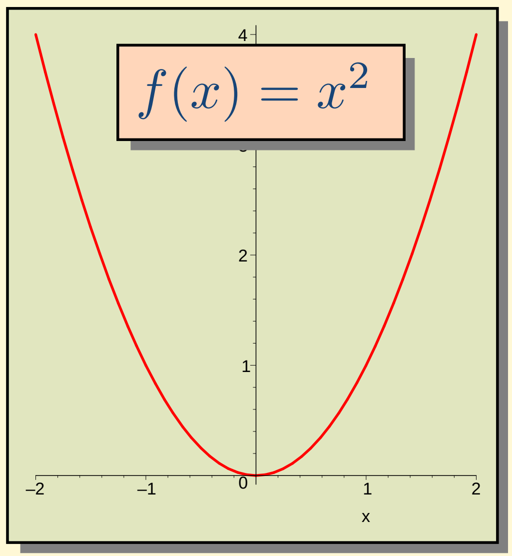


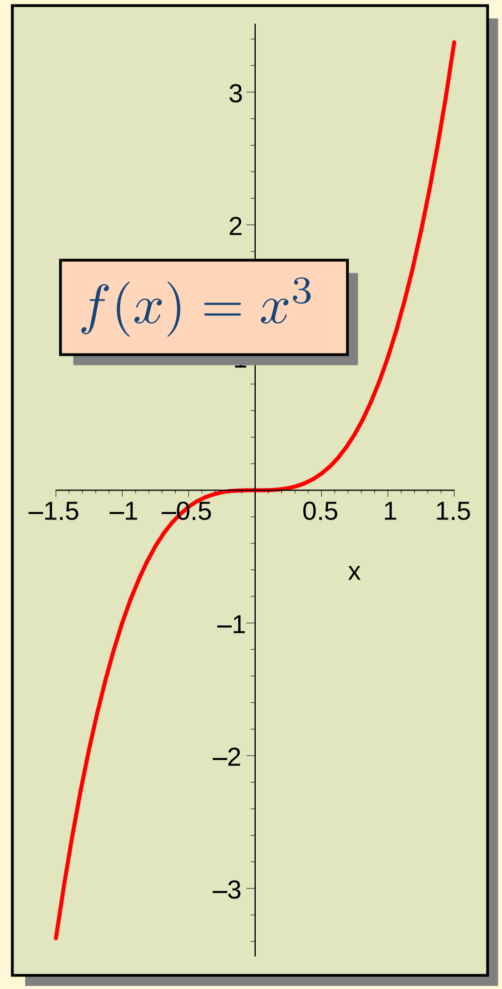
V případě, že $c = 0$, mluvíme o nulové funkci.

Mocninné funkce s přirozeným exponentem $n \in \mathbb{N}$.

$$f(x) = x^n := \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n\text{ - krát}}$$

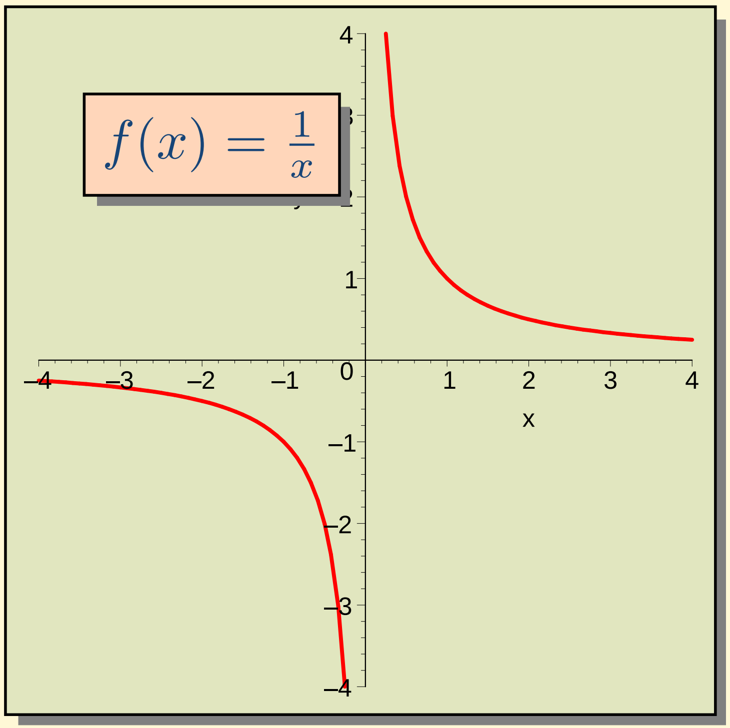


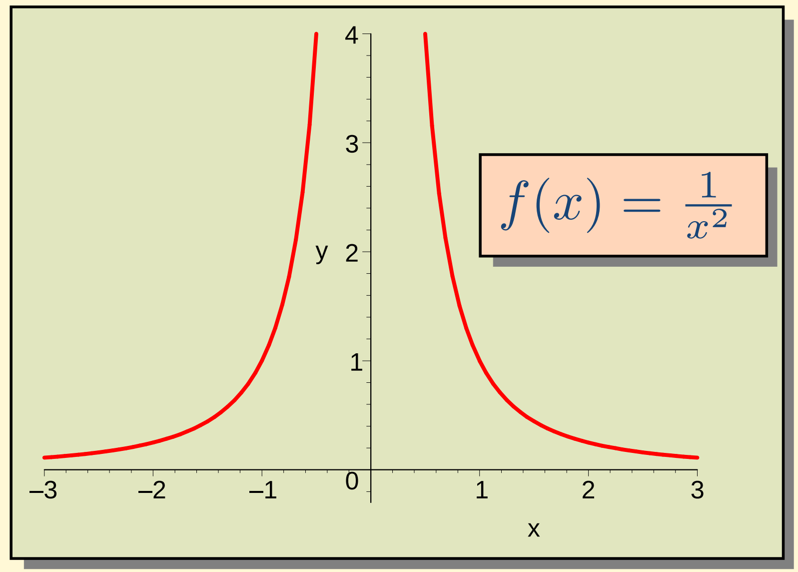




Mocninné funkce se záporným celým exponentem $-n$, kde $n \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{f(x) = x^{-n} := \frac{1}{x^n} = \frac{1}{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}}$$

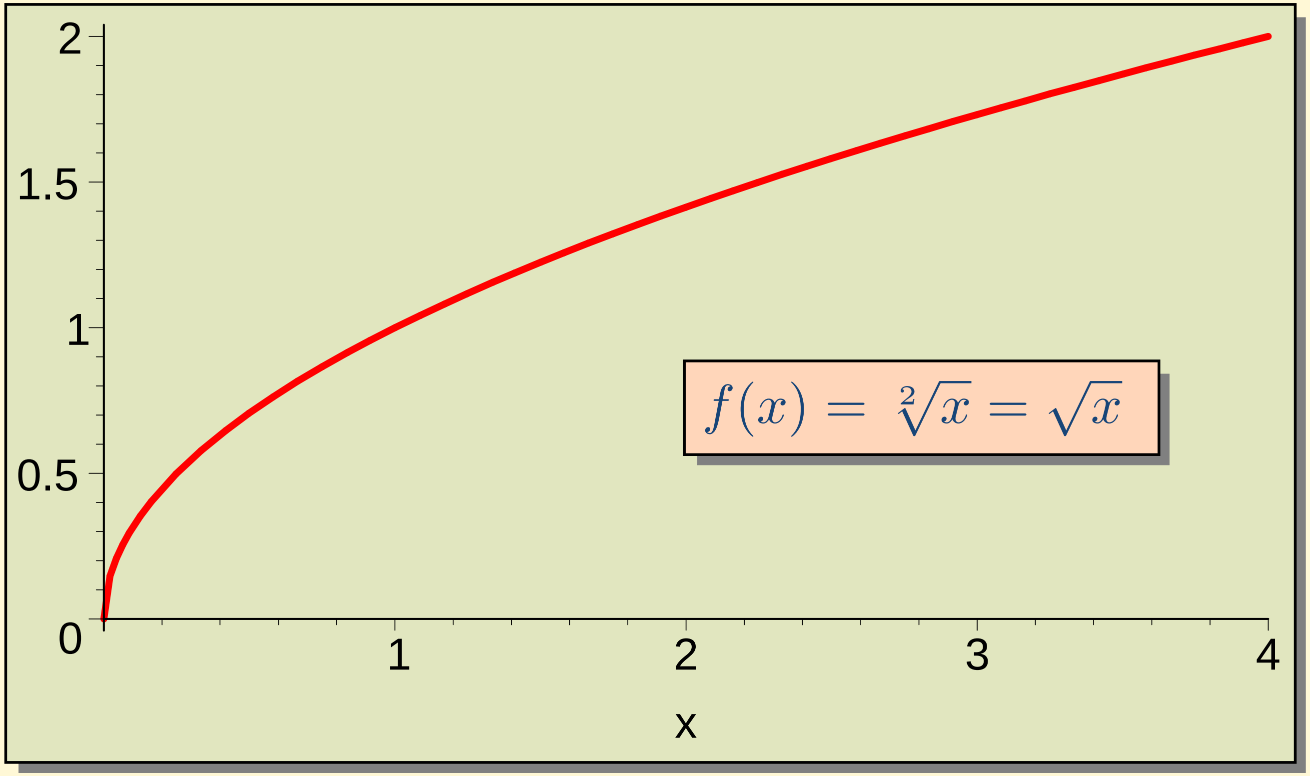




Funkce n- tá odmocnina, kde $n \in \mathbb{N}$ je sudé.

Funkci n-tá odmocnina, kde $n \in \mathbb{N}$ je sudé, definujme jako funkci inverzní k funkci $f(x) := x^n,\ Df = \langle 0, +\infty)$.
Tzn. (zapsáno symbolicky a ne zcela korektně)

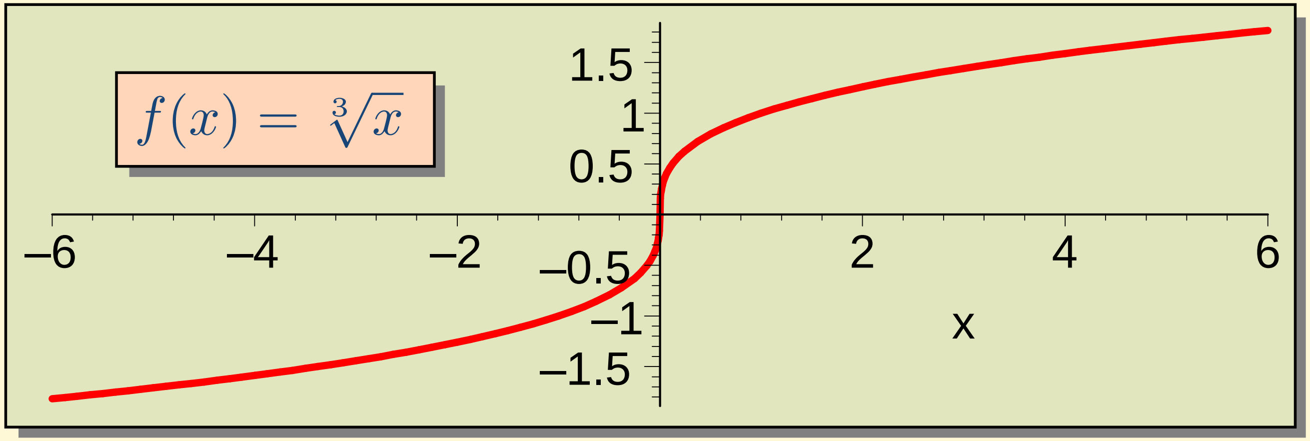
$$\boxed{\sqrt[n]{x} := \left(x^n\big|_{\langle 0,+\infty)} \right)^{-1}}$$



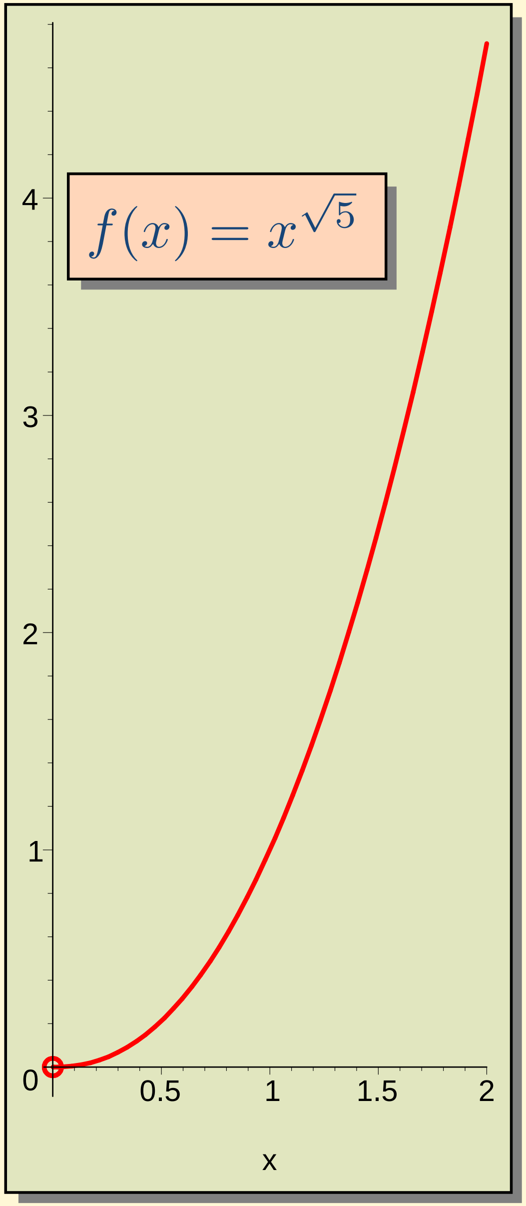
Základní elementární funkce:
- -exponenciální,
- -logaritmická,
- -konstantní,
- -mocninné,
- -goniometrické,
- -cyklometrické,
- -hyperbolické,
- -hyperbolomet.

Funkci n-tá odmocnina, kde $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ je liché, definujme jako funkci inverzní k funkci $f(x) := x^n$.
Tzn. (zapsáno symbolicky a ne zcela korektně)

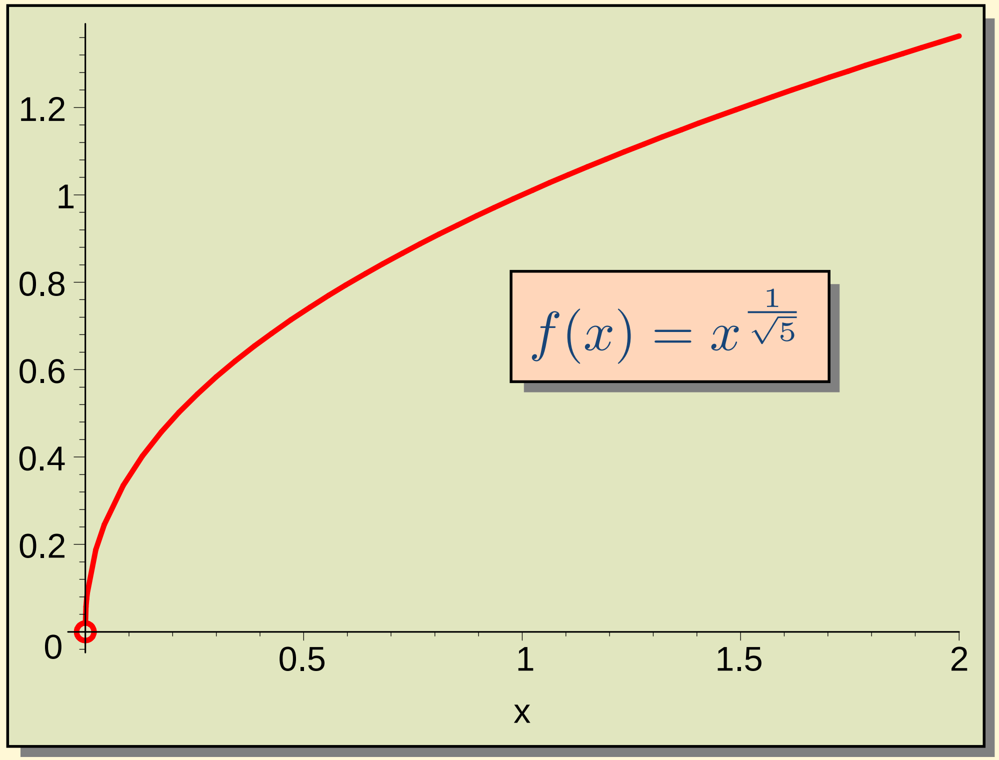
$$\boxed{\sqrt[n]{x} := \left(x^n\big|_{\mathbb{R}}\right)^{-1}}$$



Mocninné funkce s reálným exponentem $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.



$$\boxed{f(x) = x^r := \mathrm{e}^{\,r \ln x}}$$



Navíc definujme $\boxed{x^0 := 1}$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Základní elementární funkce:

Poznámka. Lze ukázat, že

$$\Big(\forall p, q \in \mathbb{Z},\ q \geq 2\Big)\Big(\forall x \in \mathbb{R}^+\Big) :\ x^{\frac{p}{q}} = e^{\frac{p}{q}\ln(x)} = \sqrt[q]{x^p}.$$

Prohlédneme-li si výše uvedené tvrzení, nabízí se otázka:

Proč tedy nedefinujeme pro taková to p a q, je-li navíc p sudé, $x^{\frac{p}{q}}$ předpisem $x^{\frac{p}{q}} := \sqrt[q]{x^p}$ i pro záporná x?

Odpověď je jasná:

Protože taková definice by nebyla korektní; dostali bychom:

$$-1 = (-1)^1 = (-1)^{\frac{2}{2}} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1.$$

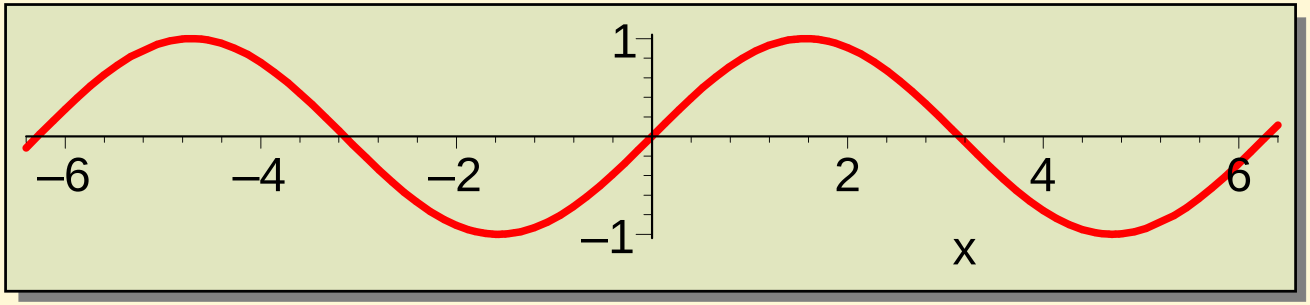
Problém 5. Dokažte tvrzení:

$$\exists a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : \; a^b \in \mathbb{Q}.$$

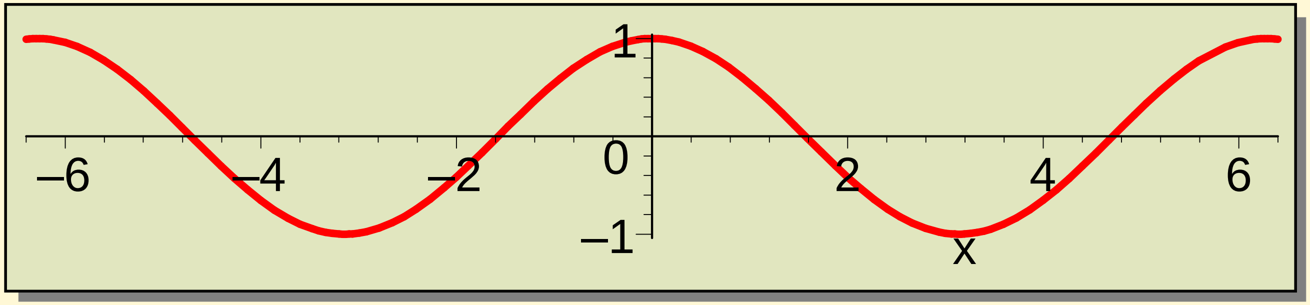
(1 bod)

Goniometrické funkce (sinus, kosinus).

$$\sin x := x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$



$$\cos x := 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$



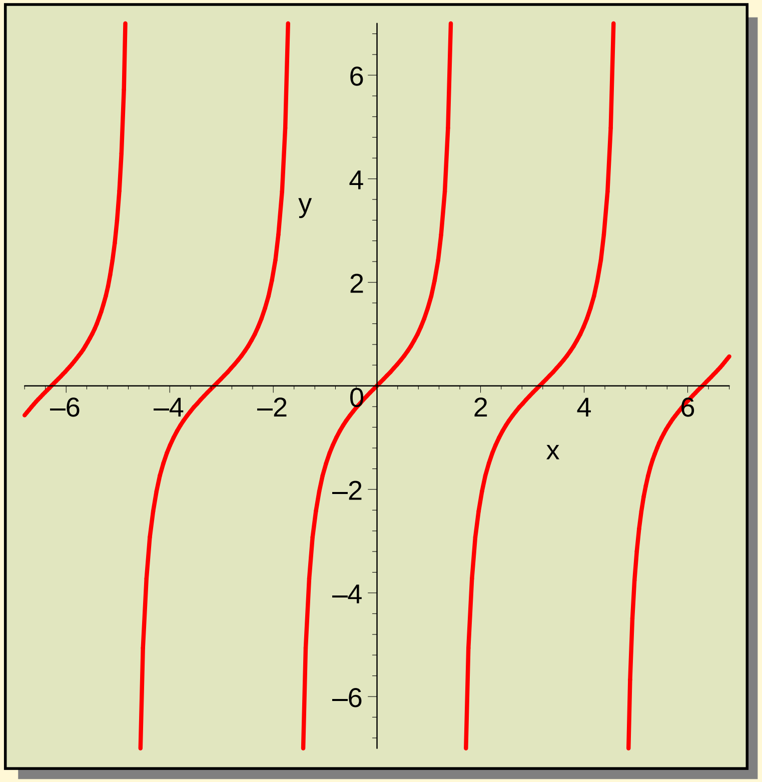
Základní elementární funkce:

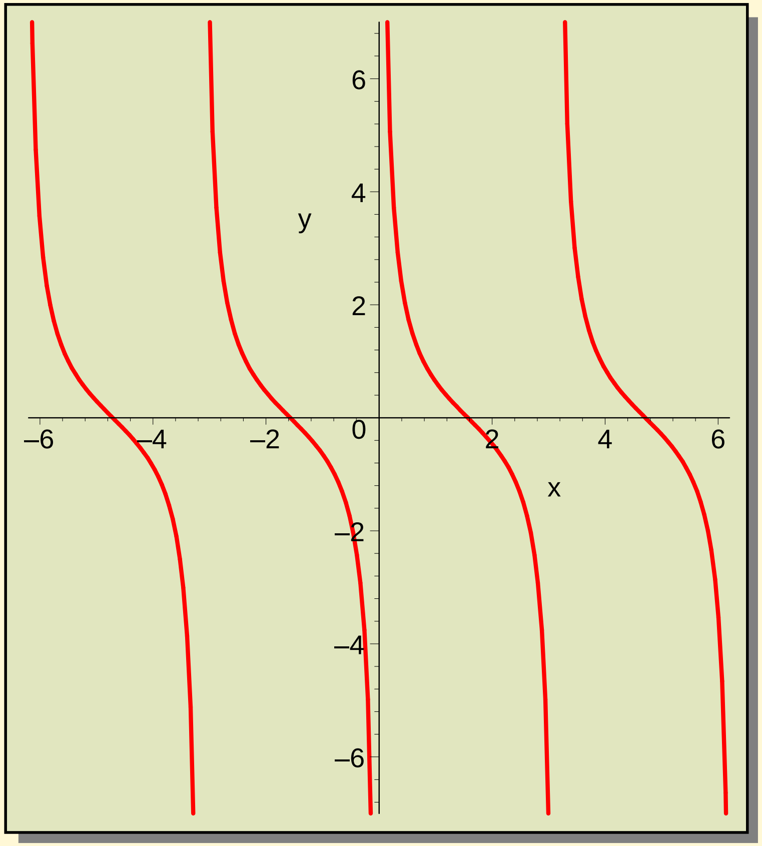
-exponenciální,
-logaritmická,
-konstantní,
-mocninné,
-goniometrické,
-cyklometrické,
-hyperbolické,
-hyperbolomet.

Goniometrické funkce (tangens, kotangens).

$$\operatorname{tg} x := \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\operatorname{cotg} x := \frac{\cos x}{\sin x}$$





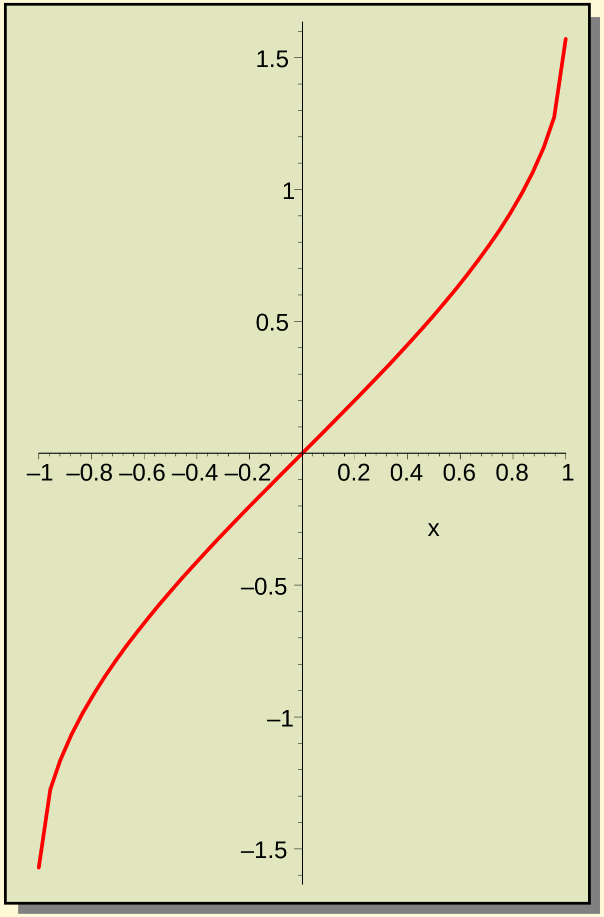
Základní elementární funkce:

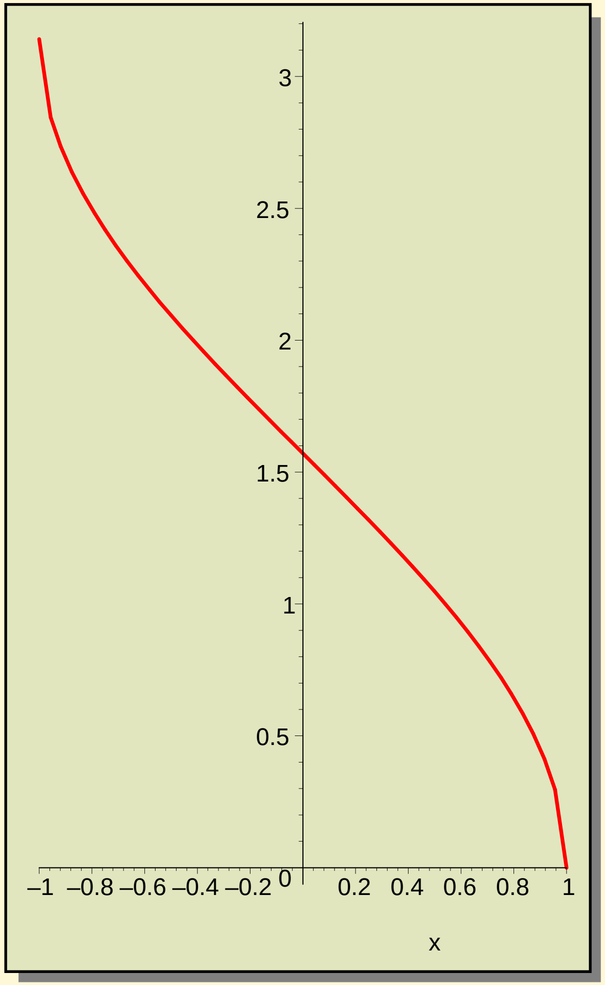
-exponenciální,
-logaritmická,
-konstantní,
-mocninné,
-goniometrické,
-cyklometrické,
-hyperbolické,
-hyperbolomet.

Cyklometrické funkce (arkussinus, arkuskosinus).

$$\arcsin := \left(\sin|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle}\right)^{-1}$$

$$\arccos := \left(\cos|_{\langle 0, \pi\rangle}\right)^{-1}$$





Základní elementární funkce:

-exponenciální,
-logaritmická,
-konstantní,
-mocninné,
-goniometrické,
-cyklometrické,
-hyperbolické,
-hyperbolomet.

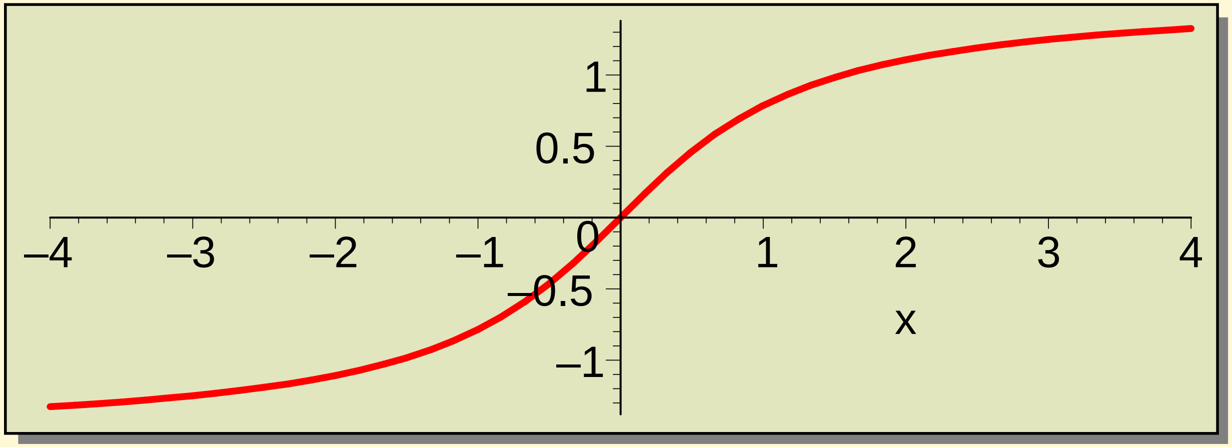
Problém 6. Znázorněte grafy funkcí definovaných předpisy

- $f_1(x) := \sin(\arcsin x)$;
- $f_2(x) := \arcsin(\sin x)$;
- $f_3(x) := \sin(-\arccos x)$;
- $f_4(x) := \arccos(\sin x)$.

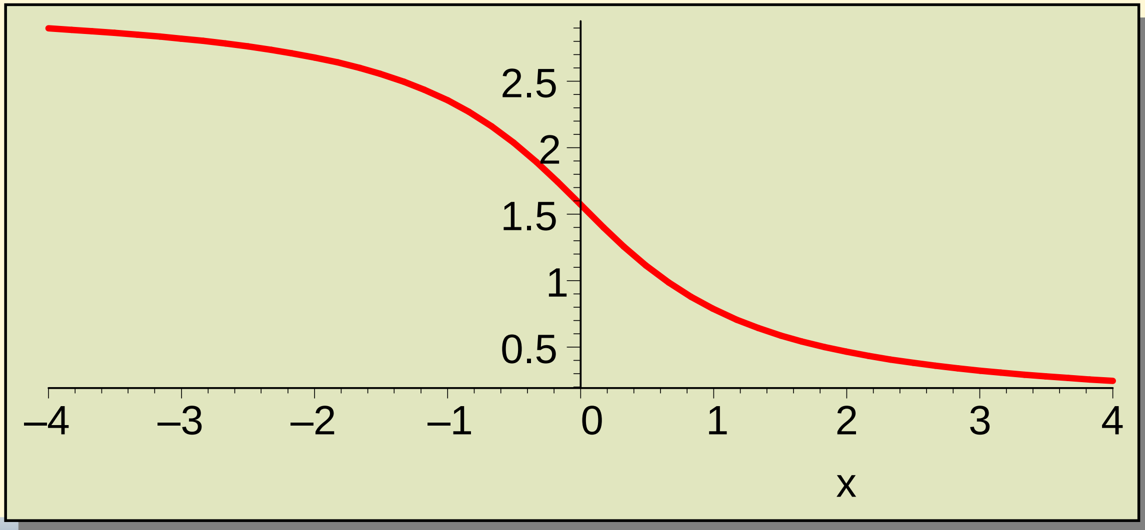
(1 bod)

Cyklometrické funkce (arkustangens, arkuskotangens).

$$\operatorname{arctg} := \left(\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}\right)^{-1}$$



$$\operatorname{arccotg} := \left(\operatorname{cotg}|_{(0,\pi)}\right)^{-1}$$



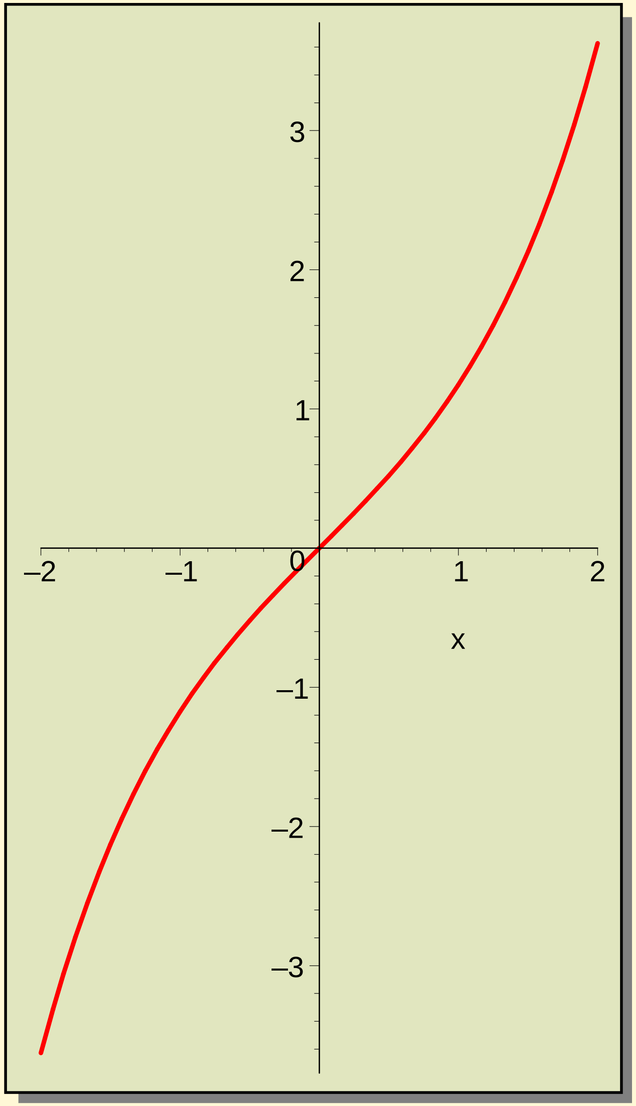
Základní elementární funkce:

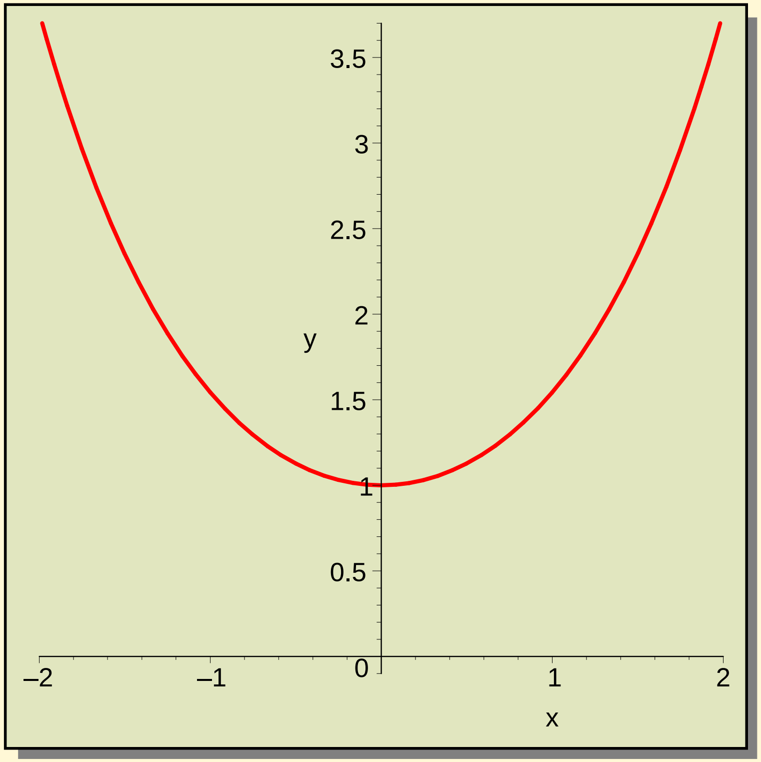
- -exponenciální,
- -logaritmická,
- -konstantní,
- -mocninné,
- -goniometrické,
- -cyklometrické,
- -hyperbolické,
- -hyperbolomet.

Hyperbolické funkce (sinus hyperbolický, kosinus hyperbolický).

$$\sinh x := \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x := \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$



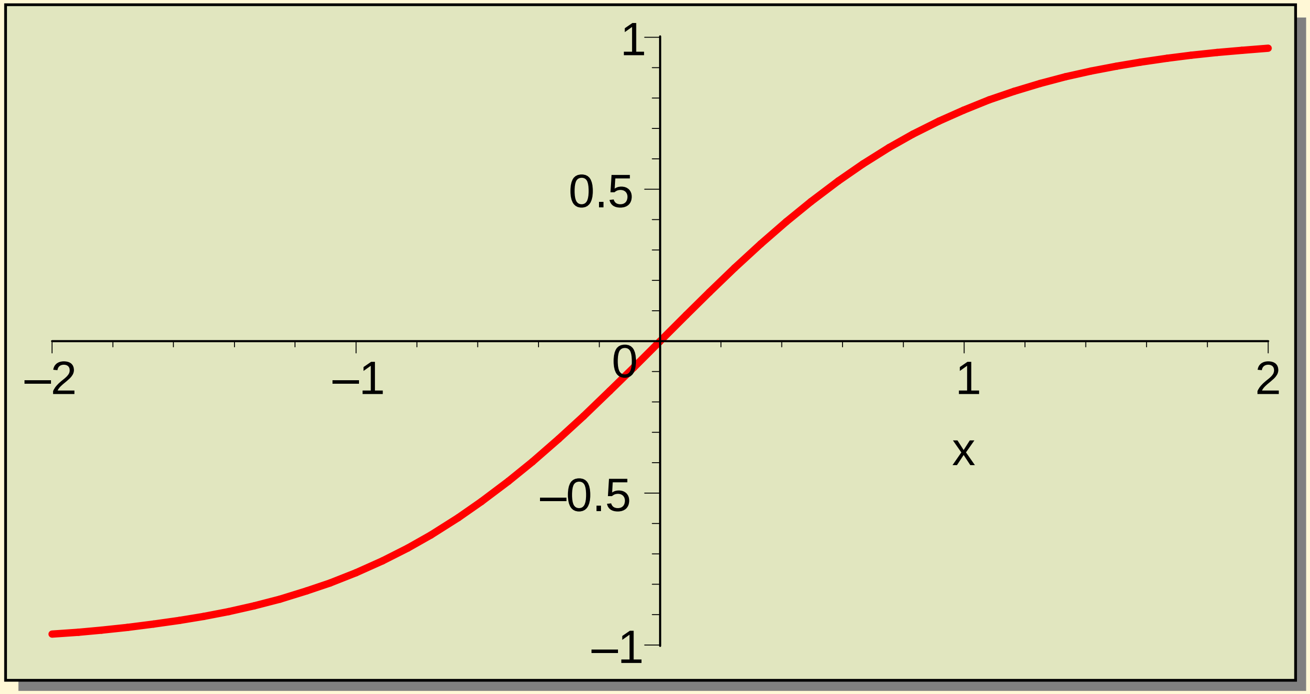


Základní elementární funkce:

-exponenciální,
-logaritmická,
-konstantní,
-mocninné,
-goniometrické,
-cyklometrické,
-hyperbolické,
-hyperbolomet.

Hyperbolické funkce (tangens hyperbolický).

$$\operatorname{tgh} x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

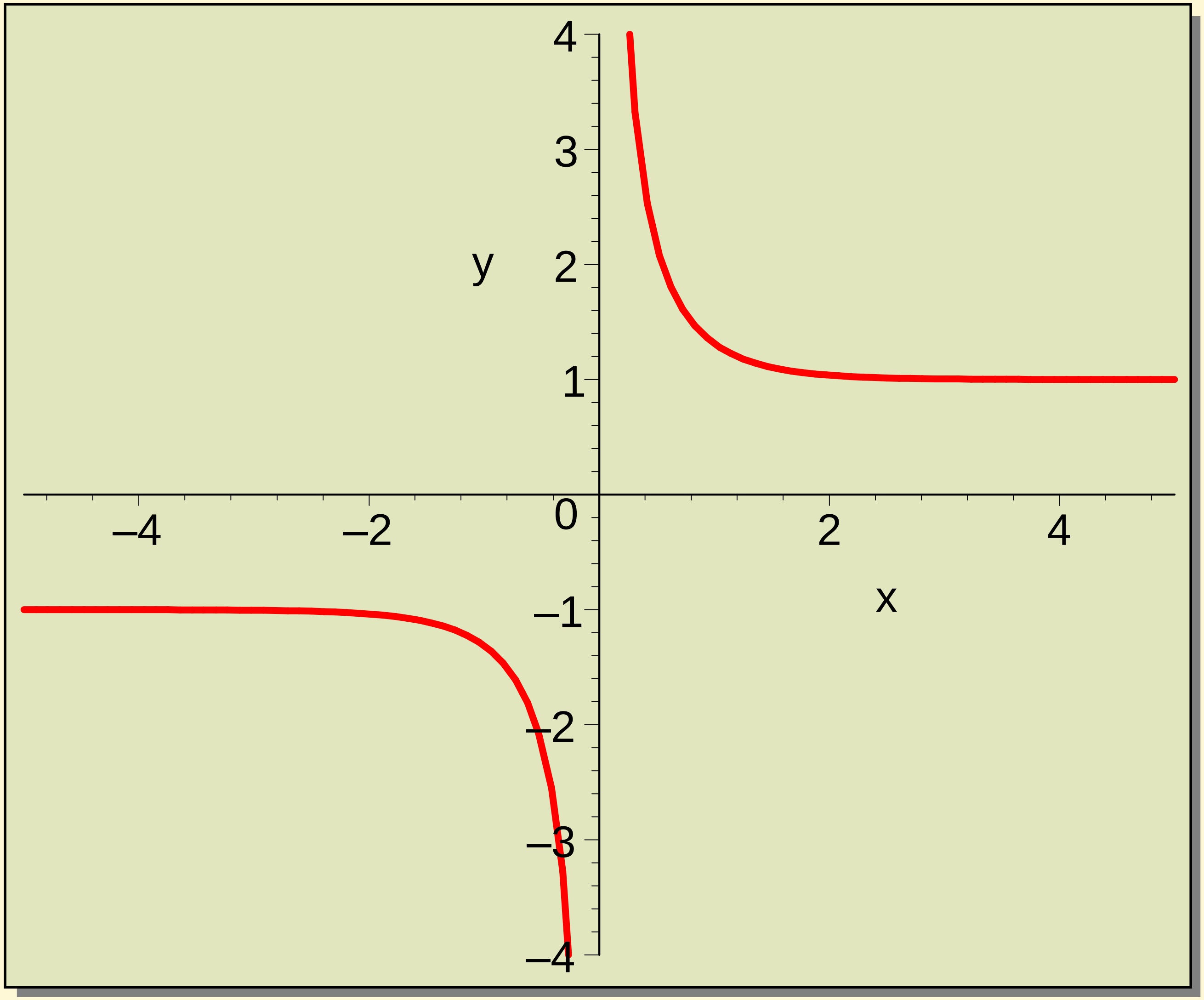


Základní elementární funkce:

- -exponenciální,
- -logaritmická,
- -konstantní,
- -mocninné,
- -goniometrické,
- -cyklometrické,
- -hyperbolické,
- -hyperbolomet.

Hyperbolické funkce (kotangens hyperbolický).

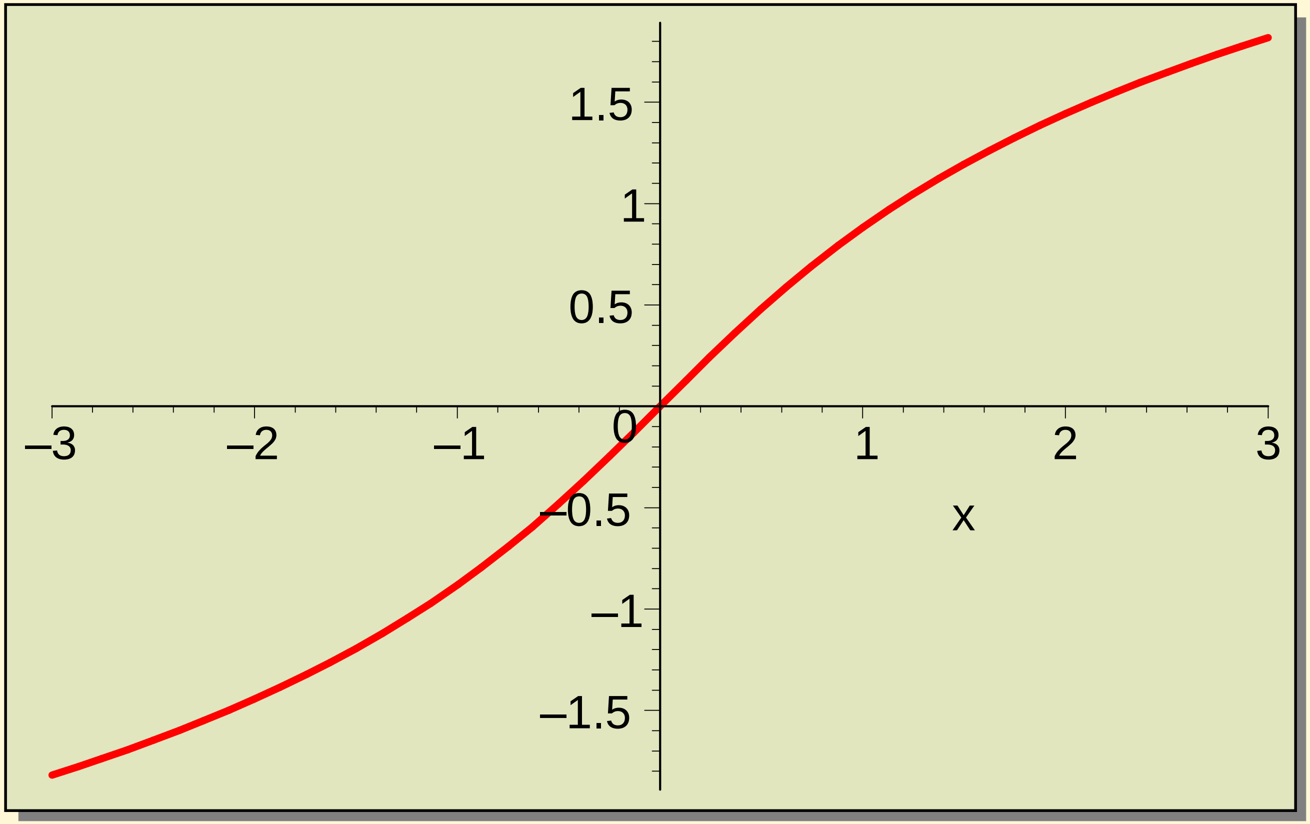
$$\operatorname{cotgh} x := \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$$



Základní elementární funkce:

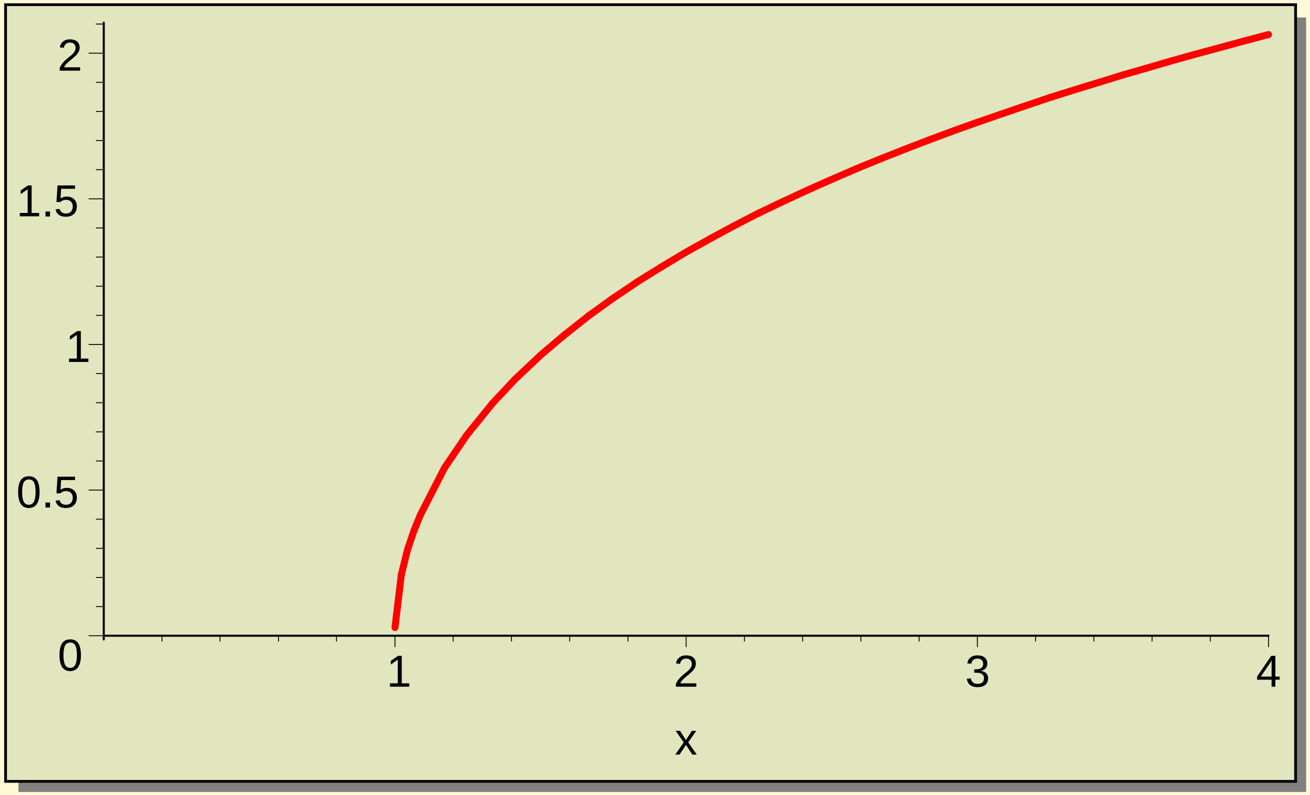
- -exponenciální,
- -logaritmická,
- -konstantní,
- -mocninné,
- -goniometrické,
- -cyklometrické,
- -hyperbolické,
- -hyperbolomet.

$$\boxed{\operatorname{arg}\sinh := (\sinh)^{-1}}$$



Hyperbolometrické funkce (argument kosinu hyperbolického).

$$\boxed{\operatorname{arg}\cosh := \left(\cosh|_{\langle 0,+\infty)}\right)^{-1}}$$

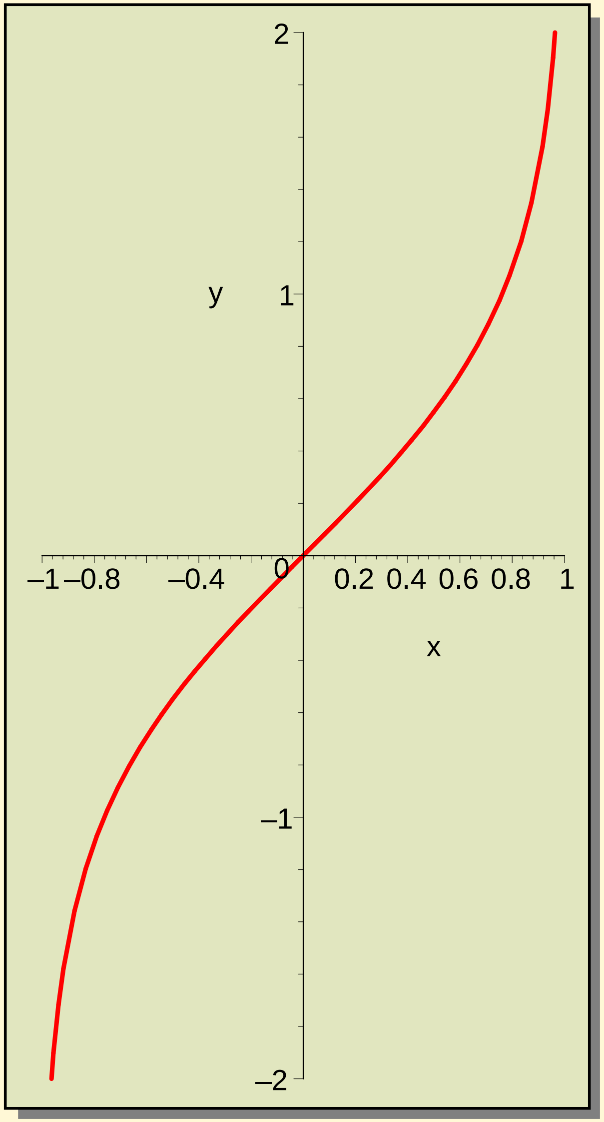


Základní elementární funkce:

- -exponenciální,
- -logaritmická,
- -konstantní,
- -mocninné,
- -goniometrické,
- -cyklometrické,
- -hyperbolické,
- -hyperbolomet.

Hyperbolometrické funkce (argument tangenty hyperbolické).

$$\arg\operatorname{tgh} := (\operatorname{tgh})^{-1}$$

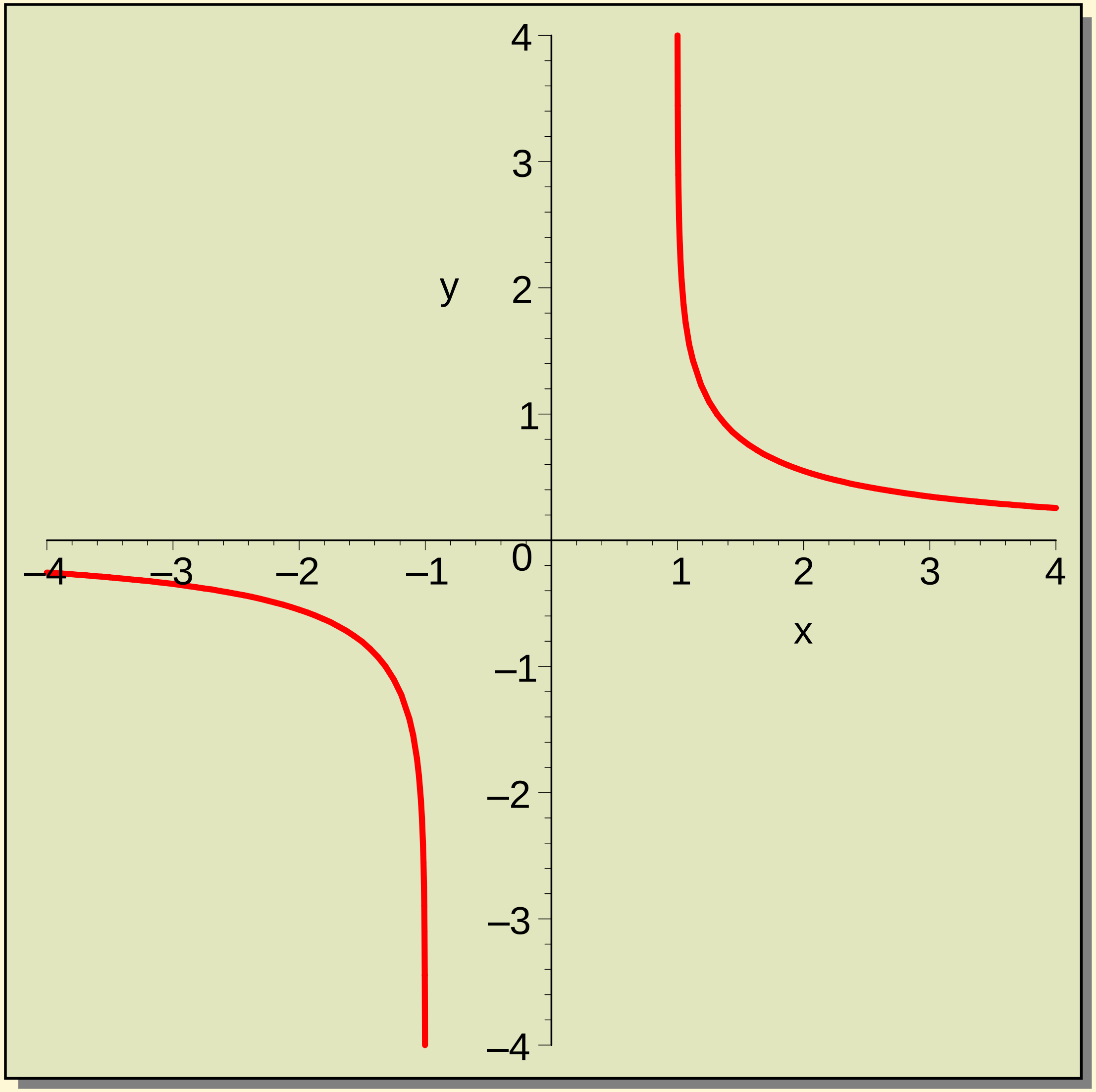


Základní elementární funkce:

-exponenciální,
-logaritmická,
-konstantní,
-mocninné,
-goniometrické,
-cyklometrické,
-hyperbolické,
-hyperbolomet.

Hyperbolometrické funkce (argument kotangenty hyperbolické).

$$\operatorname{arg\,cotgh} := (\operatorname{cotgh})^{-1}$$



Základní elementární funkce:

-exponenciální,
-logaritmická,
-konstantní,
-mocninné,
-goniometrické,
-cyklometrické,
-hyperbolické,
-hyperbolomet.

Elementární funkce.

Definice. Elementárními funkcemi nazýváme funkce, které lze vytvořit ze základních elementárních funkcí pomocí konečného počtu algebraických operací (tj. operací $+$, $-$, $\cdot$, $:$) a skládání funkcí.

Příklady.

- Funkce $f(x) = a^x := \mathrm{e}^{x \ln a}$, kde $a \in \mathbb{R}^+$, je elementární funkcí.
- Funkce inverzní k funkci a^x, kde $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, je elementární funkcí ($\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$).
- sgn není elementární funkcí.
- $|x| = \sqrt{x^2}$ je elementární funkcí.
- Každý reálný polynom, tj. funkce definovaná předpisem

$$f(x) := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

kde $a_i \in \mathbb{R}$ pro každé $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, je elementární funkcí.

Cvičení. Dokažte následující tvrzení:

- $\forall x \in \langle -1, 1 \rangle : \ \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$,
- $\forall x \in \mathbb{R} : \ \operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$,
- $\forall x \in \mathbb{R} : \ \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$,
- $\forall x \in \mathbb{R} : \ \arg\sinh x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$,
- $\forall x \in \langle 1, +\infty) : \ \arg\cosh x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$,
- $\forall x \in (-1, 1) : \ \arg\operatorname{tgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$,
- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \langle -1, 1 \rangle : \ \arg\operatorname{cotgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$,
- $\forall u, v \in \mathbb{R} : \ \cosh(u+v) = \cosh(u)\cosh(v) + \sinh(u)\sinh(v)$,
- $\forall u, v \in \mathbb{R} : \ \sinh(u+v) = \sinh(u)\cosh(v) + \cosh(u)\sinh(v)$.