Matematická analýza ve Vesmíru

Jiří Bouchala

Katedra aplikované matematiky

jiri.bouchala@vsb.cz

www.am.vsb.cz/bouchala

2. Reálné funkce jedné reálné proměnné.

Definice. Funkcí (přesněji: reálnou funkcí jedné reálné proměnné) nazýváme každé zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$.

Jinak řečeno:

funkce f je předpis, který každému $x \in Df \subset \mathbb{R}$ přiřadí právě jednu hodnotu $f(x) \in Hf \subset \mathbb{R}$.

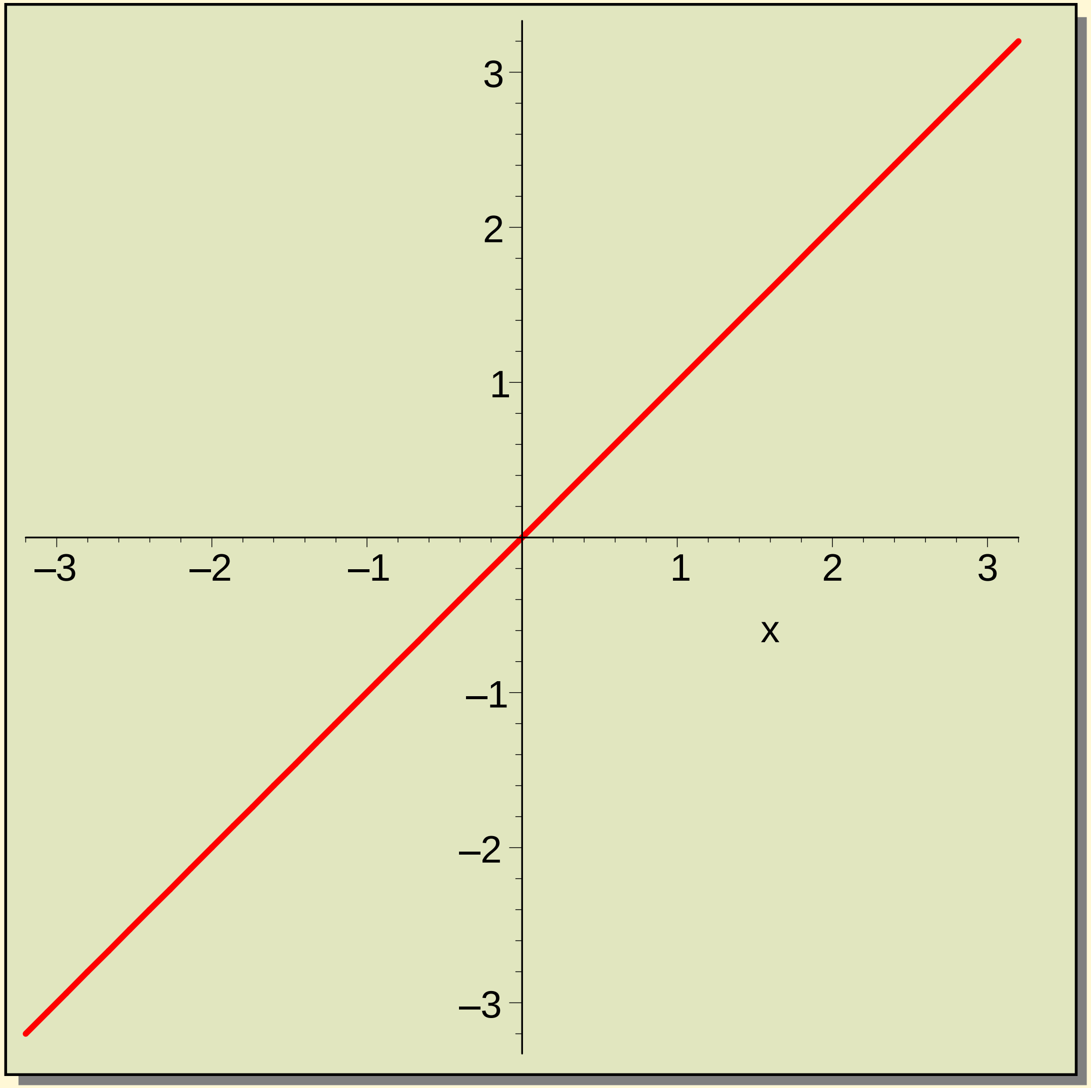
Df ... definiční obor funkce f; Hf ... obor hodnot funkce f.

Skutečnost, že f je reálnou funkcí jedné reálné proměnné, budeme zapisovat takto:

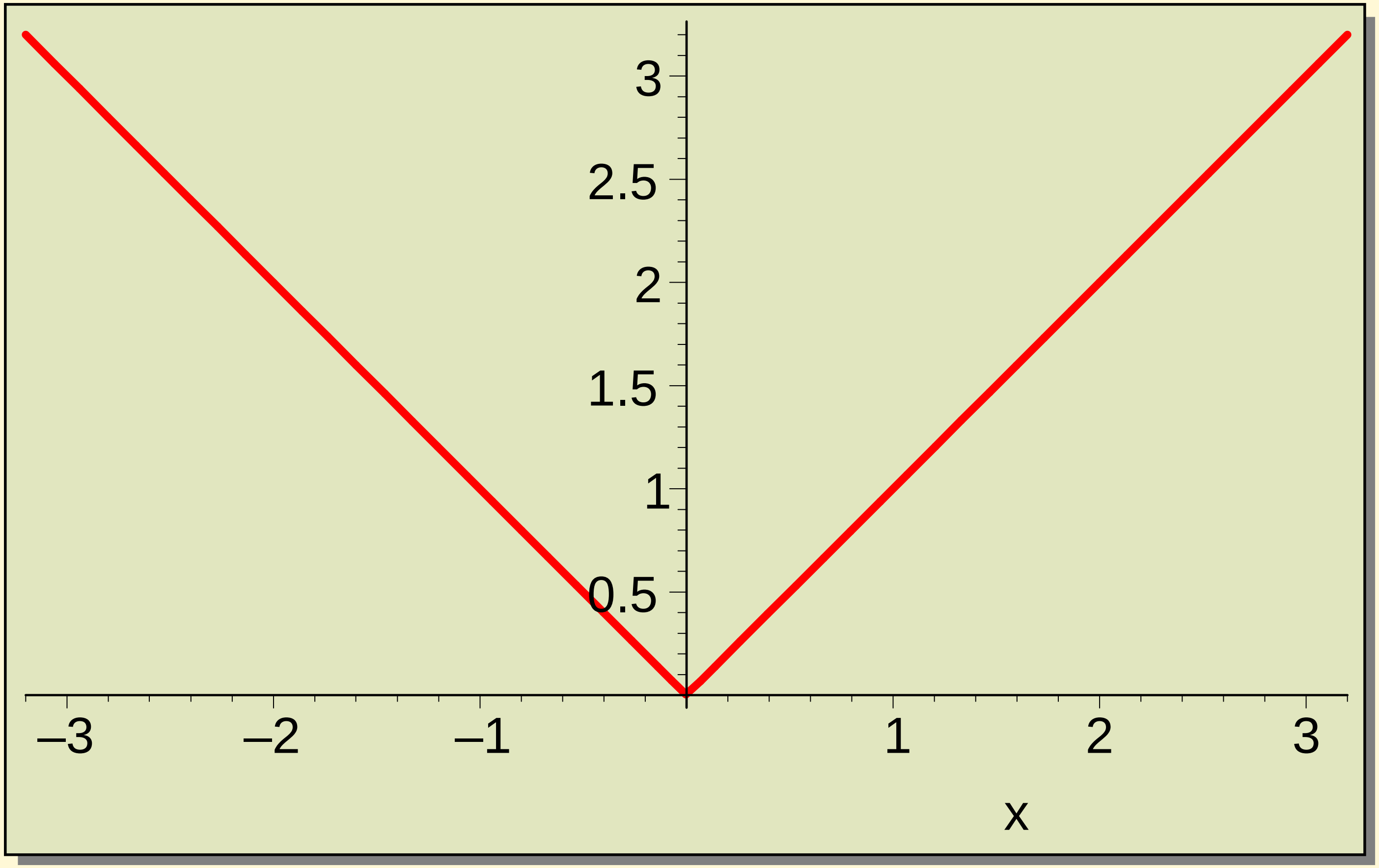
$$\boxed{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.}$$

Identita.

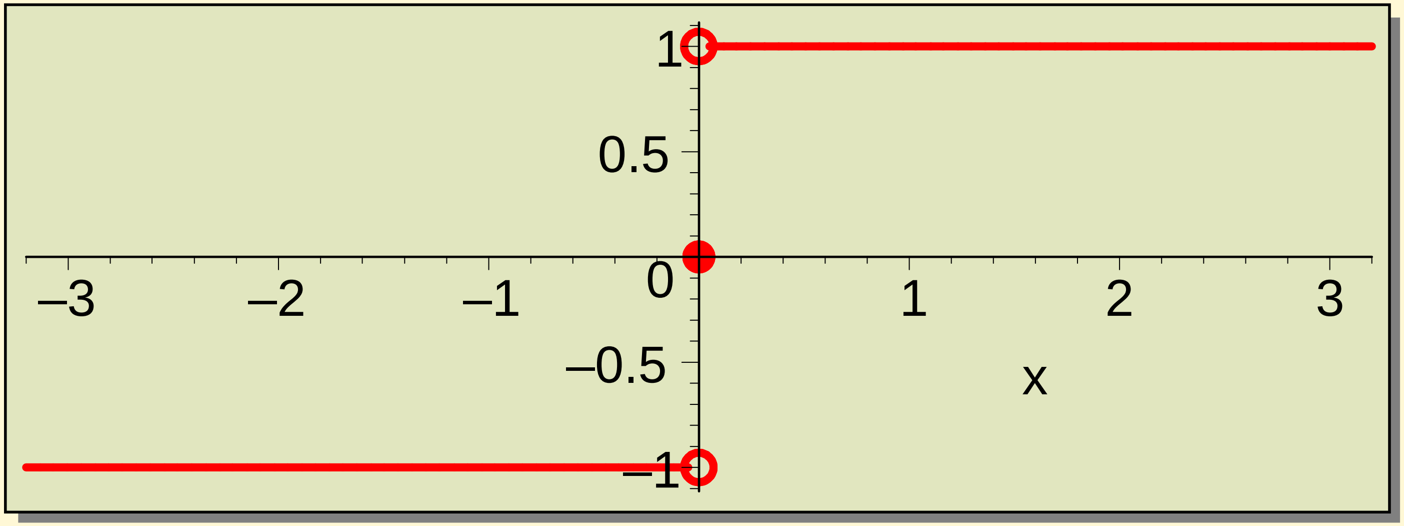
$$\boxed{\mathrm{Id}\,(x) := x; \;\; D(\mathrm{Id}\,) = \mathbb{R}.}$$



$$l(x) := |x| = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0; \end{cases} \quad D(l) = \mathbb{R}.$$

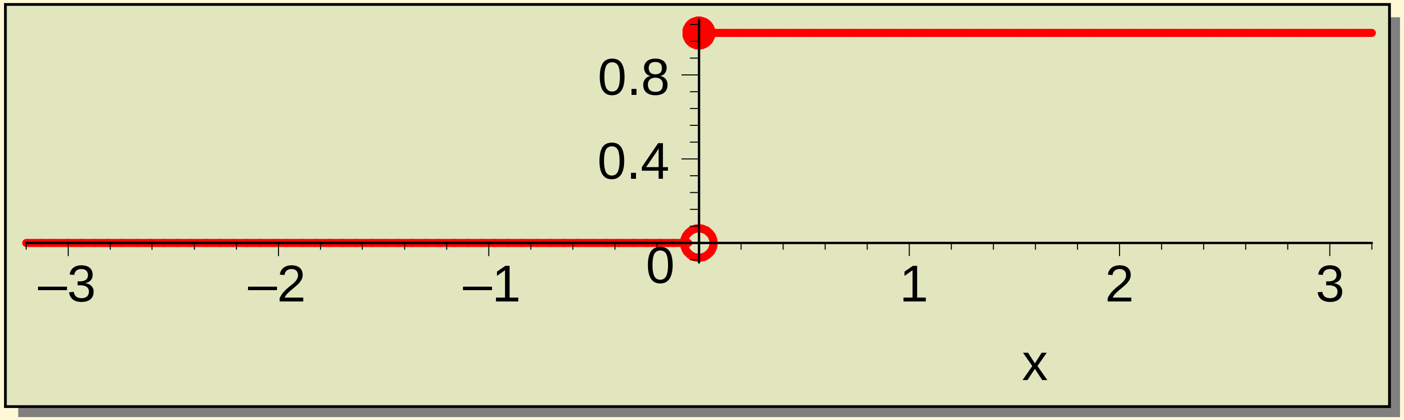


$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0; \end{cases} \quad D(\operatorname{sgn}) = \mathbb{R}.$$



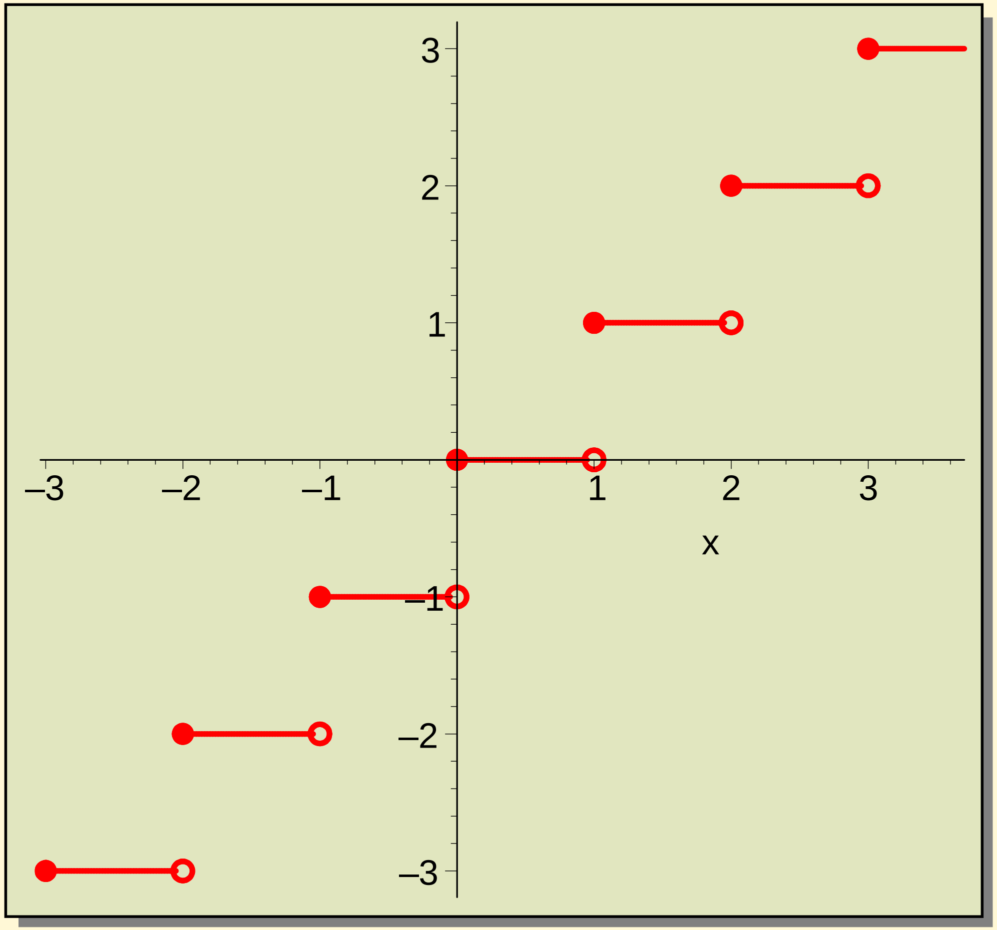
Heavisideova funkce.

$$\eta(x) := \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0; \end{cases} \quad D(\eta) = \mathbb{R}.$$



$$h(x) := [x];\ \ D(h) = \mathbb{R}.$$

$$([x] \in \mathbb{Z}:\ \ [x] \le x < [x] + 1.)$$



Dirichletova funkce.

$$\chi(x) := \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \end{cases} \qquad D(\chi) = \mathbb{R}.$$

?

Definice. Grafem funkce f rozumíme množinu:

Graf $f := \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \overset{\text{ozn.}}{=} \mathbb{R}^2 :\ x \in Df\ \wedge\ y = f(x)\}.$

Úmluva. Řekli jsme si, že funkce je zadána svým definičním oborem a předpisem, který každému prvku definičního oboru přiřadí jeho (právě jednu) hodnotu.

Často budeme funkci zadávat pouze tím předpisem; v takovém případě jejím definičním oborem rozumíme množinu všech reálných čísel, pro něž má daný předpis smysl.

Příklad. Určeme definiční obor a znázorněme graf funkce f definované předpisem $f(x) := \sqrt{1-x^2}$.

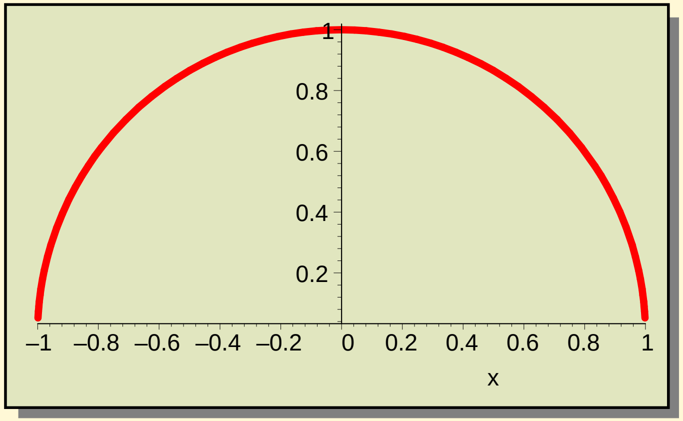
Řešení.

Df = $\{x \in \mathbb{R}: \ \sqrt{1-x^2}$ má smysl$\} = \{x \in \mathbb{R}: \ 1-x^2 \geq 0\} =$

= $\langle -1, 1 \rangle$.

Graf f = $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in \langle -1, 1 \rangle \ \wedge \ y = \sqrt{1-x^2}\} =$

= $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in \langle -1, 1 \rangle \ \wedge \ x^2 + y^2 = 1 \ \wedge \ y \geq 0\}$.



Hledejme odpověď na otázku:

Jaký největší povrch může mít kvádr s obsahem podstavy rovným 1 a délkou tělesové úhlopříčky rovnou 2?

Řešení. Označme délky hran kvádru $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Z předpokladů plyne, že $ab = 1$ a že $a^2 + b^2 + c^2 = 4$, a proto $a + b = \sqrt{6 - c^2}$. Pro povrch kvádru S pak platí

$$S = 2ab + 2ac + 2bc = 2 + 2c(a + b) = 2 + 2c\sqrt{6 - c^2} = \\ = 2 + 2\sqrt{6c^2 - c^4} = 2 + 2\sqrt{9 - (c^2 - 3)^2}.$$

Poslední výraz bude největší, když $c^2 - 3 = 0$. Proto hledaným maximem je $S = 8$.

Problém 4. Najděte ve výše uvedeném řešení chybu a opravte ji.

(2 body)

Některé speciální vlastnosti funkcí.

Monotónní funkce.

Definice. Řekneme, že funkce f je na množině $M \subset \mathbb{R}$:

- rostoucí, platí-li: $\forall x_1, x_2 \in M : \; x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2)$,
- neklesající, platí-li: $\forall x_1, x_2 \in M : \; x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \leq f(x_2)$,
- klesající, platí-li: $\forall x_1, x_2 \in M : \; x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) > f(x_2)$,
- nerostoucí, platí-li: $\forall x_1, x_2 \in M : \; x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \geq f(x_2)$.

Řekneme, že funkce je rostoucí (resp. neklesající, resp. klesající, resp. nerostoucí), je-li rostoucí (resp. neklesající, resp. klesající, resp. nerostoucí) na svém definičním oboru.

Funkce rostoucí a klesající se nazývají ryze monotónní, funkce neklesající a nerostoucí se nazývají monotónní.

Sudé a liché funkce.

Definice. Řekneme, že funkce f je:

- sudá, platí-li: $\forall x \in Df: \; f(-x) = f(x)$,
- lichá, platí-li: $\forall x \in Df: \; f(-x) = -f(x)$.

Pozorování. Graf sudé (resp. liché) funkce je symetrický podle přímky $x = 0$ (resp. podle počátku).

Periodické funkce.

Definice. Řekneme, že funkce f je periodická, existuje-li číslo $T \in \mathbb{R}^+$ takové, že platí

$$\forall x \in Df: \ f(x) = f(x+T).$$

Takové T pak nazýváme periodou funkce f.

Prosté funkce.

Definice. Řekneme, že funkce f je prostá, platí-li

$$\forall x_1, x_2 \in Df: \ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Omezené funkce.

Definice. Řekneme, že funkce f je

- shora omezená na množině $M \subset Df$, je-li shora omezená množina
$$f(M) := \{f(x) :\ x \in M\}.$$
- shora omezená, je-li shora omezená na Df.

Podobně definujeme i funkce zdola omezené a omezené.

Operace s funkcemi.

Součet, rozdíl, součin, podíl a skládání funkcí.

Definice. Buď f a g funkce. Definujme funkce $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$, $\frac{f}{g}$ a $g\circ f$ předpisy:

- $(f+g)(x) := f(x)+g(x)$,
- $(f-g)(x) := f(x)-g(x)$,
- $(f\cdot g)(x) := f(x)\cdot g(x)$,
- $(\frac{f}{g})(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$,
- $(g\circ f)(x) := g(f(x))$.

Příklady.

- $\mathrm{Id} = \mathrm{Id}\circ \mathrm{Id}$,
- $|x| = x\cdot \operatorname{sgn} x = \sqrt{x^2}$.

Inverzní funkce.

Definice. Buď f funkce. Funkci f^{-1}, pro niž platí

(i) $Df^{-1} = Hf$,

(ii) $\forall x, y \in \mathbb{R} : \ f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = f(y)$,

nazýváme funkcí inverzní k funkci f.

Pozor!

$$f^{-1}(x) \neq (f(x))^{-1} = \frac{1}{f(x)}.$$

Věta 2.1. (o existenci inverzní funkce). Nechť f je funkce. Pak f^{-1} existuje právě tehdy, je-li f prostá.

Příklad. Najděte (existuje-li) funkci inverzní k funkci f, je-li
$$f(x) := \sqrt{1-x^2},\ Df = \langle -1, 0\rangle.$$

Řešení. $\forall x_1, x_2 \in Df = \langle -1, 0\rangle$:

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \sqrt{1-x_1^2} = \sqrt{1-x_2^2} \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt{x_1^2} = \sqrt{x_2^2} \Rightarrow |x_1| = |x_2| \Rightarrow -x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$,

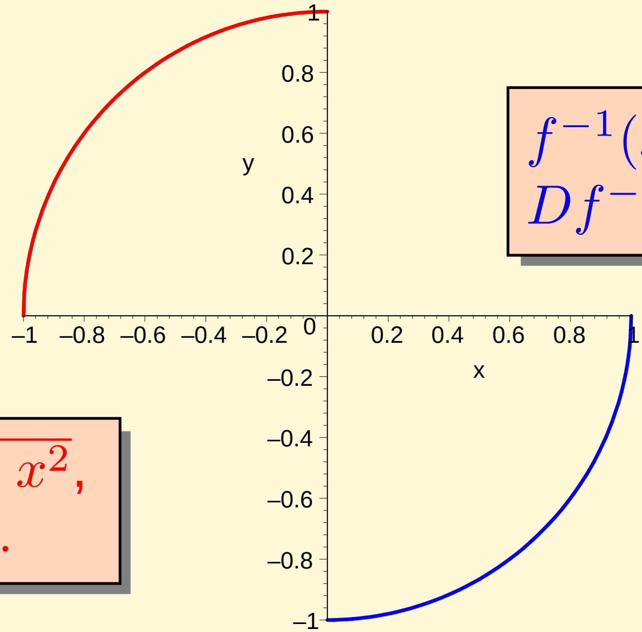
a proto f je prostá. Tudíž f^{-1} existuje!

$\forall x \in Df^{-1} = Hf = \langle 0, 1\rangle$:

$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = f(y) = \sqrt{1-y^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt{y^2} = |y| = \sqrt{1-x^2}$, a proto $y = f^{-1}(x) = -\sqrt{1-x^2}$.

Takže

$$\boxed{f^{-1}(x) := -\sqrt{1-x^2},\ Df^{-1} = \langle 0, 1\rangle.}$$



$f^{-1}(x) := -\sqrt{1-x^2}$,
$Df^{-1} = \langle 0,1 \rangle$.

$f(x) := \sqrt{1-x^2}$,
$Df = \langle -1,0 \rangle$.

Pozorování. Nechť f je prostá funkce, pak

- $\forall x \in Df^{-1} : \ (f \circ f^{-1})(x) = x$,
- $\forall x \in Df : \ (f^{-1} \circ f)(x) = x$,
- $(f^{-1})^{-1} = f$,
- $(x,y) \in \text{Graf } f \Leftrightarrow (y,x) \in \text{Graf } f^{-1}$ (symetrie grafů podle přímky $y = x$).

Restrikce funkce.

Definice. Řekneme, že funkce h je restrikcí (zúžením) funkce f na množinu $M \subset \mathbb{R}$ (píšeme $h = f|_M$), platí-li současně

- $M = Dh \subset Df$,
- $\forall x \in M : \; f(x) = h(x)$.