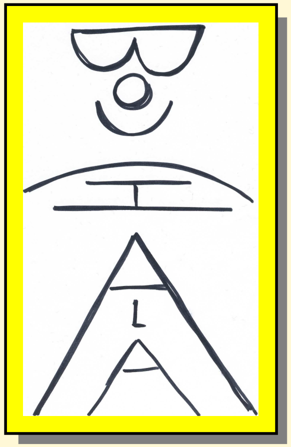
Matematická analýza ve Vesmíru

Jiří Bouchala



Katedra aplikované matematiky

jiri.bouchala@vsb.cz

www.am.vsb.cz/bouchala

14. Nevlastní integrály.
Definice.
Výpočet.
Srovnávací kritérium.

14. Nevlastní integrály.

Představme si takovouto situaci: máme funkci f spojitou a nezápornou na intervalu $\langle a, +\infty)$ ($a \in \mathbb{R}$) a chceme spočítat (`definovat`) obsah „neomezené plochy“

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in \langle a, +\infty) \ \wedge\ 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Je jistě přirozené vyjádřit tento obsah jako limitu

$$\lim_{t \to +\infty} P(f; a, t) = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Podobně

$$\lim_{t \to b-} \int\limits_a^t f(x)\, \mathrm{d}x$$

vyjadřuje obsah plochy

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in \langle a, b) \ \wedge\ 0 \leq y \leq f(x)\},$$

kde funkce f je spojitá, nezáporná (a případně i neomezená) na intervalu $\langle a, b)$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

Takovéto úvahy vedou k následující definici.

14. Nevlastní integrály.
Definice.
Výpočet.
Srovnávací kritérium.

Definice. Buď $-\infty < a < b \le +\infty$ a buď f taková funkce, že $\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje pro každé $t \in \langle a, b)$. Existuje-li $\lim\limits_{t\to b-} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$, přičemž při $b = +\infty$ touto limitou rozumíme limitu $\lim\limits_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$, definujeme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{t\to b-} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x.$$

V případě, že

- $\lim\limits_{t\to b-} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}$, říkáme, že $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ <u>konverguje</u>;
- $\lim\limits_{t\to b-} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$ neexistuje, nebo $\lim\limits_{t\to b-} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x = \pm\infty$, mluvíme o <u>divergentním</u> integrálu.

Zcela analogicky definujeme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a jeho konvergenci za situace, kdy $-\infty \le a < b < +\infty$ a $\int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje pro každé $t \in (a, b\rangle$.

14. Nevlastní integrály.
Definice.
Výpočet.
Srovnávací kritérium.

Příklady.

- $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim_{t\to+\infty} [\operatorname{arctg} x]_1^t = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$
- $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\to 1-} \int_0^t \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\to 1-} [\arcsin x]_0^t = \frac{\pi}{2}.$
- $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x\ \ln x} = \lim_{t\to 1+} \int_t^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x} = \lim_{t\to 1+} [\ln(\ln x)]_t^{\mathrm{e}} = 0 - (-\infty) = +\infty.$

Definice. Buď $-\infty \le a < b \le +\infty$, buď funkce f spojitá v intervalu (a,b) a buď $c \in (a,b)$. Řekneme, že integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ <u>konverguje</u>, konvergují-li integrály $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$. V takovém případě navíc definujeme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dá se ukázat, že výše uvedená definice je nezávislá na volbě $c \in (a,b)$.

14. Nevlastní integrály.
Definice.
Výpočet.
Srovnávací kritérium.

Věta 14.1. Nechť funkce f je spojitá v intervalu (a, b), kde $-\infty \le a < b \le +\infty$, a nechť funkce F je primitivní funkcí k funkci f na (a, b). Potom $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, existují-li konečné limity

$$\lim_{x\to b-} F(x) =: F(b-), \quad \lim_{x\to a+} F(x) =: F(a+).$$

Navíc v takovém případě platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b-) - F(a+) \overset{\text{ozn.}}{=} [F(x)]_a^b.$$

$$\Big(F(+\infty-) := \lim_{x\to+\infty} F(x), \quad F(-\infty+) := \lim_{x\to-\infty} F(x).\Big)$$

Cvičení. Rozmyslete si podrobně, že

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2})\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

14. Nevlastní integrály.
Definice.
Výpočet.
Srovnávací kritérium.

14. Nevlastní integrály.
Definice.
Výpočet.
Srovnávací kritérium.

Věta 14.2. (srovnávací kritérium).
Nechť

- $-\infty \le a < b \le +\infty$,
- funkce f, g a h jsou spojité v intervalu (a, b),
- pro každé $x \in (a, b)$ je $g(x) \le f(x) \le h(x)$,
- integrály $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x$ konvergují.

Pak konverguje i integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Důsledek. Je-li funkce f spojitá v intervalu (a, b) a konverguje-li $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$, konverguje i $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Navíc v takovém případě platí:

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

(Srovnejte tvrzení důsledku s tvrzením *(iii)* věty 12.2.)

Příklad. Rozhodněme o konvergenci integrálu

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Protože

$$0 \leq \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2} \quad \text{pro každé } x \in \left(\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$$

a

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} = \frac{2}{\pi} \in \mathbb{R},$$

zkoumaný integrál konverguje. ■

Cvičení. Buď $\alpha \in \mathbb{R}$. Rozhodněte o konvergenci integrálů

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}, \quad \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}.$$