Matematická analýza ve Vesmíru

Jiří Bouchala

Katedra aplikované matematiky

jiri.bouchala@vsb.cz

www.am.vsb.cz/bouchala

13. Aplikace určitého integrálu.

Problém - Co je to obsah plochy?

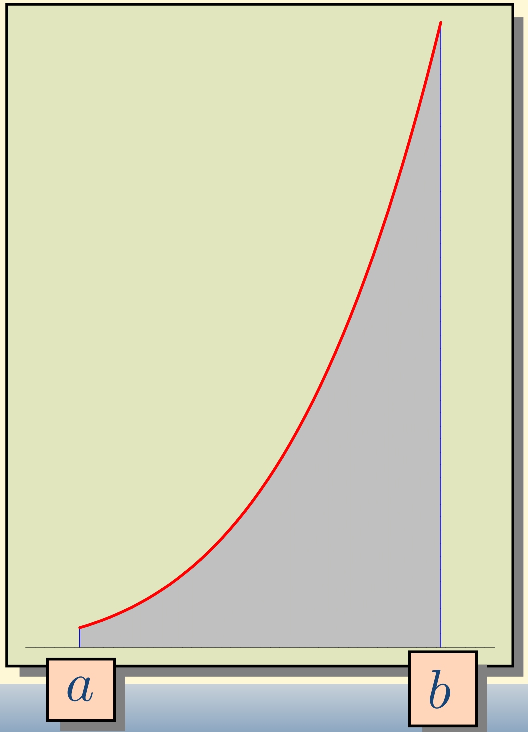
Vraťme se k úvahám ze začátku 12. kapitoly a zformulujme problém:

Je možné každé nezáporné a spojité funkci f na intervalu $\langle a, b\rangle$ přiřadit nezáporné číslo $P(f; a, b)$ tak, aby platilo:

(i) $\forall c \in \mathbb{R}^+ : \; \left[f(x) = c \text{ v } \langle a, b\rangle \;\Rightarrow\; P(f; a, b) = c\,(b - a) \right],$

(ii) $\forall \xi \in (a, b) : \; P(f; a, b) = P(f; a, \xi) + P(f; \xi, b),$

(iii) je-li g spojitá funkce a $f \le g$ v $\langle a, b\rangle$, je $P(f; a, b) \le P(g; a, b)$?



Je hezkým (a ne příliš těžkým) cvičením dokázat, že

- odpověď na výše položenou otázku je *ano*,
- číslo $P(f; a, b)$ je podmínkami *(i)*, *(ii)* a *(iii)* určeno jednoznačně a platí

$$P(f; a, b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Definice. Buď funkce f spojitá a nezáporná na intervalu $\langle a, b\rangle$, kde $-\infty < a < b < +\infty$. Obsahem plochy

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in \langle a, b\rangle \ \wedge \ 0 \le y \le f(x)\}$$

rozumíme číslo

$$P(f; a, b) := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Příklad. Vypočtěme obsah $\mathcal{O}$ plochy

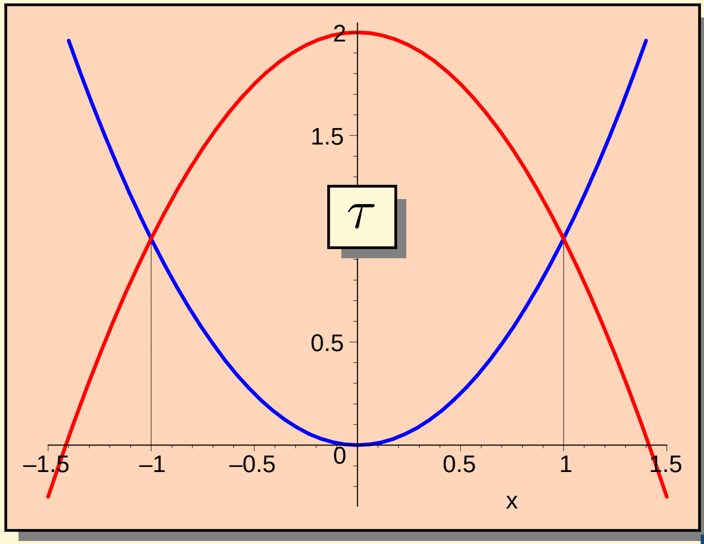
$$\tau := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 \le y \le 2 - x^2\}.$$

Řešení. Prohlédneme-li si příslušný obrázek, snadno nahlédneme, že

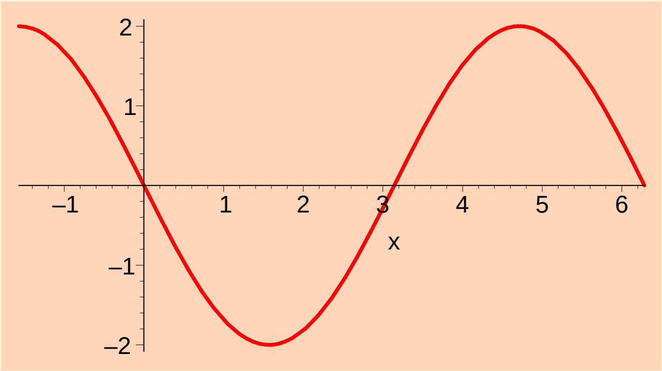
$$\mathcal{O} = P(2 - x^2; -1, 1) - P(x^2; -1, 1) =$$

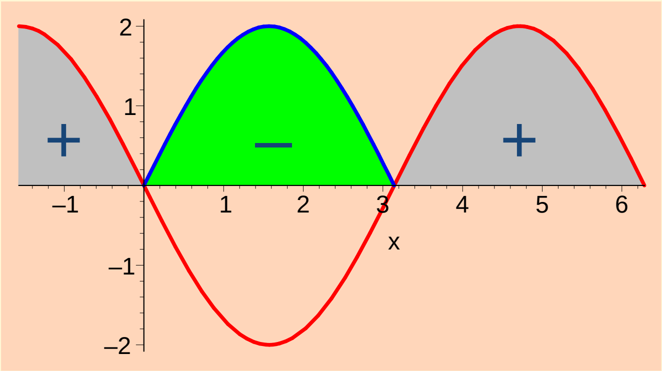
$$= \int_{-1}^{1} (2 - x^2)\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{8}{3}.$$



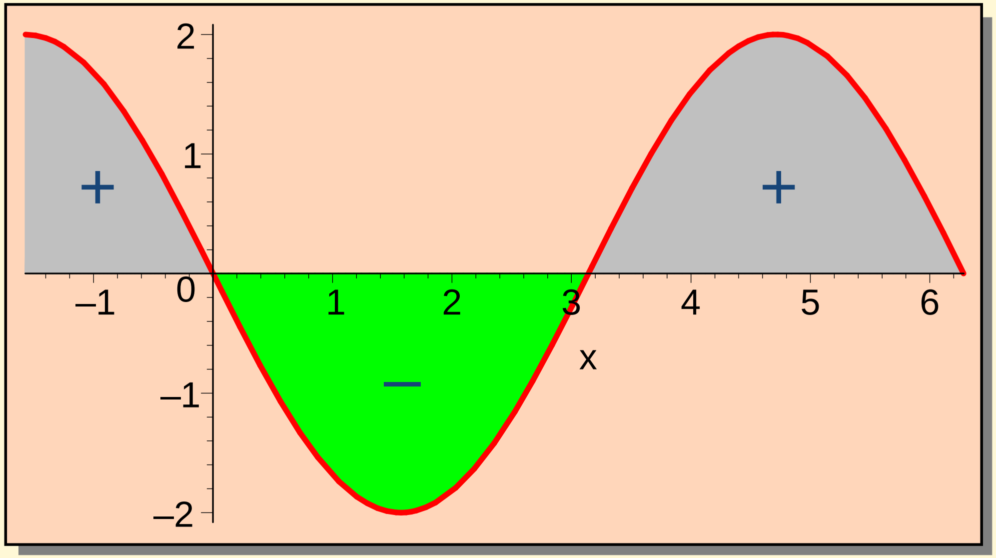
Ilustrace ke geometrickému významu určitého integrálu.





Příklad.

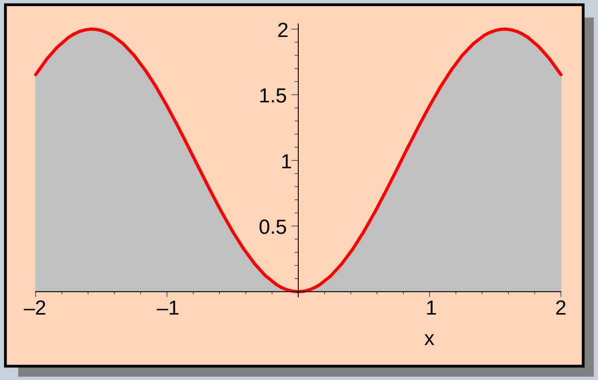
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{2\pi} -2\sin x \,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} -2\sin x \,\mathrm{d}x - \int_{0}^{\pi} 2\sin x \,\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi} -2\sin x \,\mathrm{d}x.$$



Pozorování.

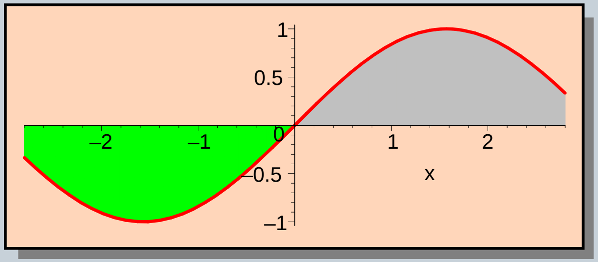
- Je-li funkce f spojitá a sudá na $\langle -a, a\rangle$, je

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$



- Je-li funkce f spojitá a lichá na $\langle -a, a\rangle$, je

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$



- Je-li funkce f spojitá v $\mathbb{R}$ a periodická s periodou $T \in \mathbb{R}^+$, je

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}: \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^{\alpha+T} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Příklad. $\int_2^4 \sin(\pi x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \sin(\pi x)\,\mathrm{d}x = 0$,

protože funkce $f(x) := \sin(\pi x)$ je spojitá v $\mathbb{R}$, periodická s periodou 2 a lichá.

Pojmem křivka - v této kapitole - rozumíme graf funkce spojité v omezeném uzavřeném intervalu.

Buď funkce f spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$. Zabývejme se problémem:

Jak definovat a spočítat délku křivky

$$k := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \in \langle a, b\rangle \;\wedge\; y = f(x)\}\,?$$

Problém budeme řešit postupně:

- Buď $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2),\ \beta = (\beta_1, \beta_2)$ body roviny $\mathbb{R}^2$. Délkou úsečky s krajními body α, β (takovou úsečku značme $\langle\alpha; \beta\rangle$) rozumíme nezáporné číslo

$$\lambda(\langle\alpha; \beta\rangle) := \sqrt{(\beta_1 - \alpha_1)^2 + (\beta_2 - \alpha_2)^2}.$$

- Buď $z_0,\ z_1,\ \dots,\ z_n$ navzájem různé body roviny $\mathbb{R}^2$.

  Délkou lomené čáry $\langle z_0; z_1; \dots; z_n\rangle := \bigcup_{k=1}^{n} \langle z_{k-1}; z_k\rangle$ rozumíme číslo

$$\lambda(\langle z_0; z_1; \dots; z_n\rangle) := \sum_{k=1}^{n} \lambda(\langle z_{k-1}; z_k\rangle).$$

- Vraťme se zpět k funkci f spojité na $\langle a,b\rangle$.

  Uvažujme pro každé dělení

  $$D: \ a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

  intervalu $\langle a,b\rangle$ body

  $$z_0 = (x_0, f(x_0)), \ z_1 = (x_1, f(x_1)), \ \dots, \ z_n = (x_n, f(x_n))$$

  a pomocí nich definujme číslo

  $$L_D := \lambda(\langle z_0; z_1; \dots; z_n\rangle).$$

Definice. Buď funkce f spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$, kde $-\infty < a < b < +\infty$. Délkou křivky

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in \langle a,b\rangle \ \wedge \ y = f(x)\}$$

rozumíme číslo

$$\Lambda(f; a, b) := \sup\{L_D : \ D \text{ je dělení } \langle a,b\rangle\}.$$

Pozorování. Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$, je

$$0 < \Lambda(f;a,b) \le +\infty.$$

Příklady.

- Buď funkce f definovaná předpisem $f(x) := 2x$. Pak pro každé dělení D intervalu $\langle 0,1\rangle$ platí, že $L_D := \sqrt{5}$. Proto

$$\Lambda(f;0,1) = \sqrt{5}.$$

(Vlastně jsme počítali délku úsečky s krajními body $(0,0)$ a $(1,2)$.)

- Buď funkce f definovaná předpisem

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin\frac{\pi}{2x^2}, & x \ne 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Pak f je spojitá v $\mathbb{R}$ – a proto i v intervalu $\langle 0,1\rangle$ – a dá se dokázat, že platí

$$\Lambda(f;0,1) = +\infty.$$

Věta 13.1. Má-li funkce f v intervalu $\langle a, b\rangle$ spojitou první derivaci, je

$$\Lambda(f; a, b) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \mathrm{d}x.$$

Příklad. Vypočtěme délku křivky

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in \langle -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\rangle \ \wedge\ y = \sqrt{1 - x^2}\right\}.$$

Řešení.

$$\Lambda(\sqrt{1 - x^2}; -\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}) = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1 + (\tfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}})^2}\, \mathrm{d}x = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{\tfrac{1}{1-x^2}}\, \mathrm{d}x =$$

$$= [\arcsin x]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{\pi}{4} = \tfrac{\pi}{2}.$$

(Vlastně jsme vypočítali délku čtvrtkružnice s poloměrem 1.)

Definice. Buď funkce f spojitá a nezáporná na intervalu $\langle a, b\rangle$. Uvažujme těleso Ω, které vznikne rotací „křivočarého lichoběžníka“ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \in \langle a, b\rangle \wedge 0 \le y \le f(x)\}$ kolem osy x. Dá se ukázat, že je rozumné počítat *(definovat)* objem rotačního tělesa Ω pomocí rovnosti

$$V(f; a, b) := \pi \int_a^b f^2(x) \; \mathrm{d}x.$$

Příklad. Vypočtěme objem koule s poloměrem $r \in \mathbb{R}^+$.

Řešení.

$$V(\sqrt{r^2 - x^2}; -r, r) = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2) \; \mathrm{d}x = 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) \; \mathrm{d}x =$$

$$= 2\pi \left(r^3 - [\tfrac{x^3}{3}]_0^r\right) = \tfrac{4}{3}\pi r^3.$$

■

Definice. Obsah rotační plochy, která vznikne rotací křivky $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \in \langle a, b\rangle \wedge y = f(x)\}$ – kde funkce f je nezáporná a má spojitou derivaci v intervalu $\langle a, b\rangle$ – kolem osy x, je dán vztahem

$$\sigma(f; a, b) := 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} \; \mathrm{d}x.$$

Příklad. Vypočtěme obsah rotační plochy, která vznikne rotací křivky $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\in\langle 0,1\rangle \wedge y=x^3\}$ kolem osy x.

Řešení.

$$\sigma(x^3;0,1) = 2\pi \int_0^1 x^3\sqrt{1+(3x^2)^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_0^1 x^3\sqrt{1+9x^4}\,\mathrm{d}x =$$

$$= 2\pi\,\tfrac{1}{36}\int_1^{10}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \tfrac{\pi}{18}\left[\tfrac{2\sqrt{t^3}}{3}\right]_1^{10} = \tfrac{\pi}{27}\,(10\sqrt{10}-1).$$

■

Poznámka. Existuje celá řada dalších aplikací určitého integrálu; například ve fyzice lze pomocí určitého integrálu počítat statické momenty a těžiště křivky, křivočarého lichoběžníka, rotačních těles, a podobně.