Matematická analýza ve Vesmíru

Jiří Bouchala

Katedra aplikované matematiky

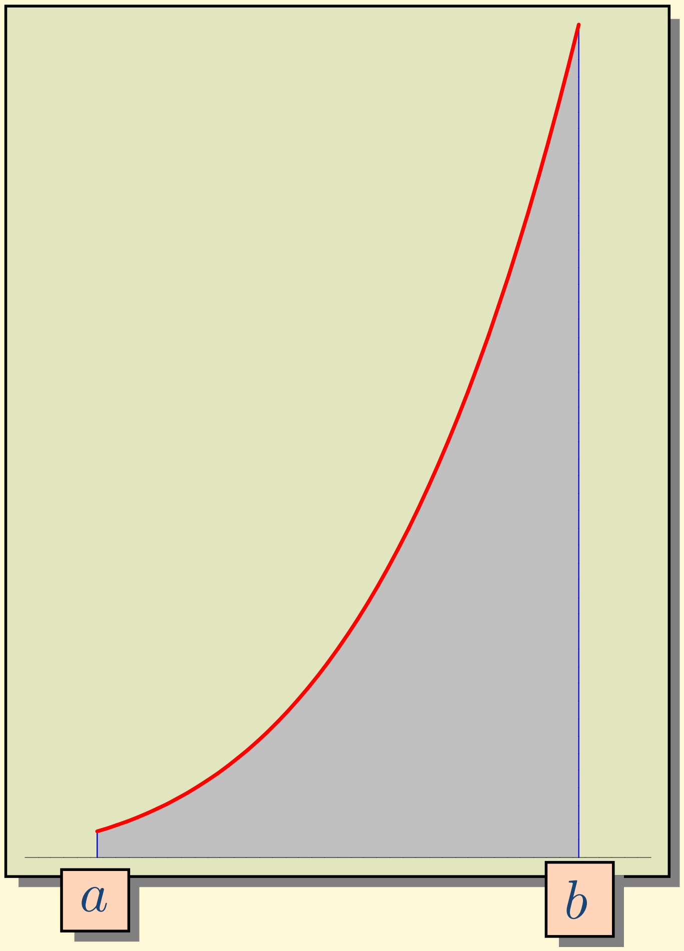
jiri.bouchala@vsb.cz

www.am.vsb.cz/bouchala

12. Riemannův integrál (určitý integrál).

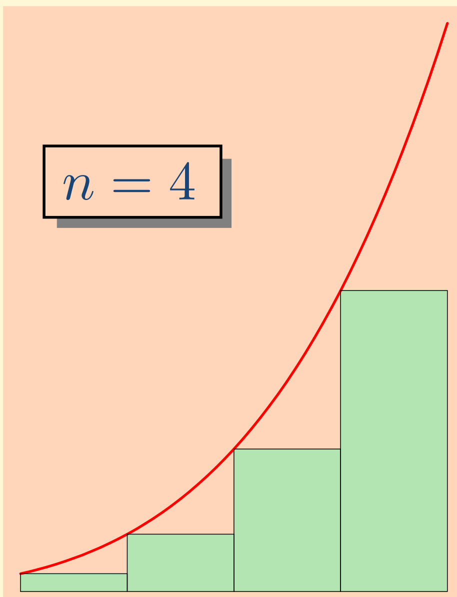
Nechť funkce f je nezáporná a spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$.
Pokusme se o řešení problému:

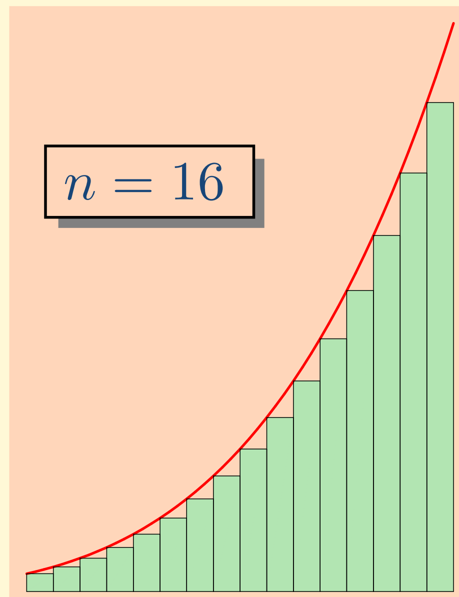
Jak spočítat *obsah* plochy $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in \langle a, b\rangle \wedge 0 \leq y \leq f(x)\}$?



Obsah plochy $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x\in\langle a,b\rangle\ \wedge\ 0\le y\le f(x)\}$ = ?

Nabízí se tato myšlenka: rozdělme interval $\langle a,b\rangle$ na n stejných dílků (intervalů). Na každém z nich aproximujme funkci f konstantní funkcí, jejíž hodnota se rovná hodnotě funkce f v (například) levém krajním bodě. Počítaný obsah plochy pak aproximujme součtem obsahů příslušných obdélníků (viz níže uvedené obrázky).





Dá se tušit: bude-li počet dílků n růst do $+\infty$, budou se součty obsahů příslušných obdélníků blížit k hledanému obsahu plochy.

Tímto obsahem bude $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Na předcházející stránce uvedenou konstrukci a „definici“ $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ nyní zobecníme i pro některé nespojité (a navíc ne nutně nezáporné) funkce.

Buď funkce f omezená v intervalu $\langle a, b\rangle$ ($a, b \in \mathbb{R}$; $a < b$); tzn. že existují čísla $m, M \in \mathbb{R}$ taková, že $\forall x \in \langle a, b\rangle :\ m \le f(x) \le M$.

Pro každé dělení $\boxed{D: \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b}$ intervalu $\langle a, b\rangle$ definujme tzv. dolní (resp. horní) součet příslušný dělení D:

$$s(D) := \sum_{k=1}^{n} \Big(\inf_{x \in \langle x_{k-1}, x_k \rangle} f(x) \Big) (x_k - x_{k-1})$$

$$\Big(\text{resp. } S(D) := \sum_{k=1}^{n} \Big(\sup_{x \in \langle x_{k-1}, x_k \rangle} f(x) \Big) (x_k - x_{k-1}) \Big).$$

Definice.
Dolním (resp. horním) Riemannovým integrálem funkce f od a do b rozumíme číslo

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \sup\{s(D) : \ D \text{ je dělení } \langle a, b\rangle\}$$

$$\left(\text{resp. } \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \inf\{S(D) : \ D \text{ je dělení } \langle a, b\rangle\}\right).$$

Je-li

$$\boxed{\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x,}$$

nazýváme toto číslo Riemannovým integrálem funkce f od a do b a značíme

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.}$$

- $\forall x \in \langle a, b\rangle : \; m \le f(x) \le M$,
- $D: \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$,
- $s(D) := \sum_{k=1}^{n} \Big(\inf_{x \in \langle x_{k-1}, x_k\rangle} f(x)\Big)(x_k - x_{k-1})$,
- $S(D) := \sum_{k=1}^{n} \Big(\sup_{x \in \langle x_{k-1}, x_k\rangle} f(x)\Big)(x_k - x_{k-1})$,
- $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \sup_D \{s(D)\}, \;\; \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \inf_D \{S(D)\}$.

Pozorování. Všimněme si, že čísla $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$ jsou definována pro každou v $\langle a, b\rangle$ omezenou funkci f.

Navíc z nerovností

$$m(b-a) = \sum_{k=1}^{n} m(x_k - x_{k-1}) \le s(D) \le S(D) \le \sum_{k=1}^{n} M(x_k - x_{k-1}) = M(b-a)$$

vyplývá, že

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x, \;\; \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}.$$

Příklady.

- Je-li funkce f definovaná předpisem $f(x) := 1$ v $\langle a, b\rangle$, kde $a,\ b \in \mathbb{R},\ a < b$, je

  $$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup_D \Big\{ \sum_k 1 \cdot (x_k - x_{k-1}) \Big\} = \sup_D \{b - a\} = b - a.$$

  Podobně

  $$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \inf_D \Big\{ \sum_k 1 \cdot (x_k - x_{k-1}) \Big\} = \inf_D \{b - a\} = b - a,$$

  a proto

  $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = b - a.$$

- Je-li χ Dirichletova funkce, tj. $\chi(x) := \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$

  je pro každé $a,\ b \in \mathbb{R};\ a < b$:

  $$\underline{\int_a^b} \chi(x)\,\mathrm{d}x = 0,\ \overline{\int_a^b} \chi(x)\,\mathrm{d}x = b - a,$$

  a proto

  $\int_a^b \chi(x)\,\mathrm{d}x$ neexistuje.

Poznámka. Uvažujme „posloupnost“ dělení intervalu $\langle a, b\rangle$

$$D_1,\ D_2,\ \dots,\ D_m,\ \dots\ ,$$

kde

$$D_m:\quad a = x_{m,0} < x_{m,1} < \cdots < x_{m,n_m-1} < x_{m,n_m} = b,$$

takovou, že $\boxed{\|D_m\| := \max_{k\in\{1,\dots,n_m\}} (x_{m,k} - x_{m,k-1}) \ \to\ 0.}$

Pak platí:

- je-li funkce f je omezená v intervalu $\langle a, b\rangle$, je

$$\boxed{\lim s(D_m) = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x,\ \lim S(D_m) = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x;}$$

- existuje-li $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, je

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim s(D_m) = \lim S(D_m) = \lim I(D_m),}$$

kde

$$I(D_m) := \sum_{k=1}^{n_m} f(\xi_{m,k})(x_{m,k} - x_{m,k-1})$$

pro libovolně zvolené body $\xi_{m,k} \in \langle x_{m,k-1}, x_{m,k}\rangle$.

Věta 12.1. (o existenci Riemannova integrálu). Nechť funkce f je spojitá nebo monotónní v intervalu $\langle a,b\rangle$. Pak existuje $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Věta 12.2. (vlastnosti Riemannova integrálu).

Nechť existují $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. Potom platí:

(i) $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}:\ \int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$

(ii) $\forall c \in (a,b):\ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x,$

(iii) $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x,$

(iv) je-li $f(x) \le g(x)$ pro každé $x \in \langle a,b\rangle$, je $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Poznámka. Součástí tvrzení *(i)*-*(iv)* věty 12.2. je skutečnost, že všechny v nich vyskytující se integrály existují!

V dalším oceníme následující rozšíření definice Riemannova integrálu:

- $\boxed{\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x := 0,}$ je-li $f(a)$ definováno,
- $\boxed{\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x := -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,}$ je-li $a < b$ a existuje-li $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Buď funkce f spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$.
Definujme funkci F předpisem

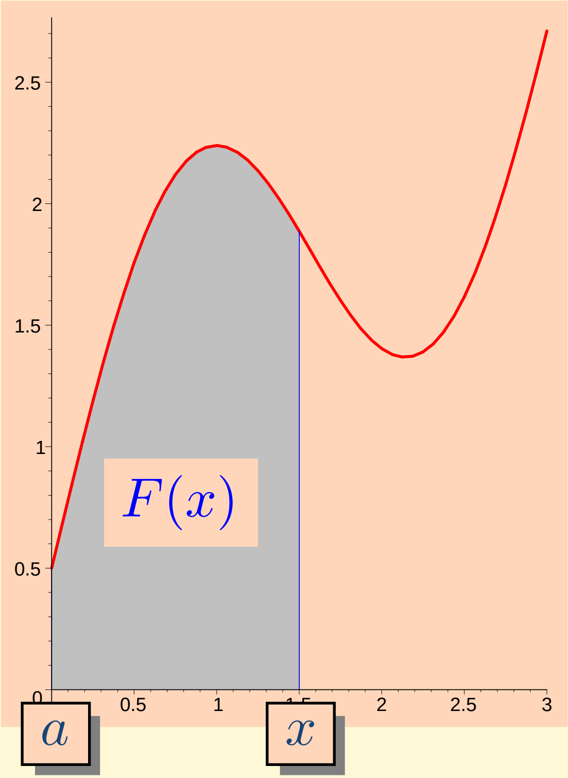
$$\boxed{F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.}$$

(F ... tzv. integrál s proměnnou horní mezí.)

Pro každé $x \in (a, b)$ a *dost malé* h je

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t}{h} =$$

$$= \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t}{h} \doteq \frac{f(x)h}{h} = f(x).$$



Dá se dokázat (je třeba provést *limitní přechod* pro $h \to 0$), že

$$\boxed{\forall x \in (a, b) : \; F'(x) = f(x).}$$

Následující věta toto pozorování zobecňuje.

Věta 12.3. Nechť funkce f je spojitá v otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$ a buď $c \in I$ libovolný bod. Pak funkce F definovaná na I předpisem

$$F(x) := \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

je primitivní funkcí k funkci f na I (tzn. že $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in I = DF$).

Věta 12.4. Nechť funkce f a F jsou spojité v intervalu $\langle a, b\rangle$, kde $-\infty < a < b < +\infty$, a nechť $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (a, b)$. Pak platí:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \overset{\text{ozn.}}{=} [F(x)]_a^b.$$

Důkaz. Dodefinujme (anebo změňme) funkci f na $\mathbb{R} \setminus \langle a, b\rangle$ tak, aby byla spojitá v $\mathbb{R}$ (to jistě lze a počítaný integrál tím určitě nezměníme). Z vět 12.3. a 10.2. pak plyne, že existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ je $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + c$.
A dál je to snadné:

$$F(b) - F(a) = \left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + c\right) - \left(\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t + c\right) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

∎

Příklady.

- $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = [\frac{x^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$

- $\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = [-\cos x]_0^\pi = -[\cos x]_0^\pi = -(-1-1) = 2.$

- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2+x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2\cos x + \cos 2\sin x)\,\mathrm{d}x =$

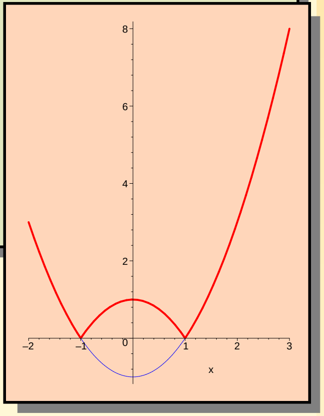
  $= \sin 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x + \cos 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x =$

  $= \sin 2\,[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos 2\,[-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin 2 + \cos 2 \doteq 0{,}493.$

- $\int_{-2}^3 |x^2-1|\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{-1} |x^2-1|\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^1 |x^2-1|\,\mathrm{d}x + \int_1^3 |x^2-1|\,\mathrm{d}x =$

  $= \int_{-2}^{-1} (x^2-1)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^1 (-x^2+1)\,\mathrm{d}x + \int_1^3 (x^2-1)\,\mathrm{d}x =$

  $= [\frac{x^3}{3} - x]_{-2}^{-1} + [-\frac{x^3}{3} + x]_{-1}^1 + [\frac{x^3}{3} - x]_1^3 = \frac{28}{3}.$



Věta 12.5. (integrace per partes).
Nechť funkce u a v mají spojité první derivace v intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom platí:

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Příklady.

- $\int_0^\pi x\sin x\,\mathrm{d}x = [-x\cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\,\mathrm{d}x = \pi + [\sin x]_0^\pi = \pi.$

  $u = x,\ \ v' = \sin x$

  $u' = 1,\ \ v = -\cos x$

- $\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} 1\cdot\ln x\,\mathrm{d}x = [x\ln x]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} x\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - [x]_1^{\mathrm{e}} = 1.$

  $u = \ln x,\ \ v' = 1$

  $u' = \frac{1}{x},\ \ v = x$

...

Věta 12.6. (o substituci).

Nechť

- funkce φ má spojitou první derivaci v intervalu $\langle a, b\rangle$,
- funkce φ zobrazuje interval $\langle a, b\rangle$ do intervalu $J \subset \mathbb{R}$,
- funkce f je spojitá v intervalu J.

Potom platí:

$$\int_a^b f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Poznámka. Tvrzení věty používáme k výpočtu integrálu na levé straně rovnosti (analogie první substituční metody – viz větu 10.6) i k výpočtu integrálu na pravé straně rovnosti (viz větu 10.7 o druhé substituční metodě); mechanismus výpočtu je stejný jako u neurčitých integrálů, jen musíme dát pozor, že se mění taky „meze“.

Příklady.

- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos x \, \mathrm{d}x = \int_0^1 t^4 \, \mathrm{d}t = \left[\frac{t^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{5}$

  $\sin x = t$

  $\cos x \, \mathrm{d}x = \mathrm{d}t$

  $\left(\varphi(x) = \sin x,\ \langle a, b\rangle = \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle,\ J = \mathbb{R},\ f(t) = t^4\right).$

- $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2} \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4\,(1 - \sin^2 t)}\, 2\cos t \, \mathrm{d}t =$

  $x = 2\sin t$

  $\mathrm{d}x = 2\cos t \, \mathrm{d}t$

  $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2 t \, \mathrm{d}t = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2} \, \mathrm{d}t = \pi$

  $\left(\varphi(t) = 2\sin t,\ \langle a, b\rangle = \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle,\ J = \langle -2, 2\rangle,\ f(x) = \sqrt{4 - x^2}\right).$

Poznámka: mohli jsme volit třeba $\langle a, b\rangle = \langle -\pi, \frac{\pi}{2} + 2\pi\rangle$; volba $\langle a, b\rangle = \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ je však vhodnější, protože $\sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t$ pro každé $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$.