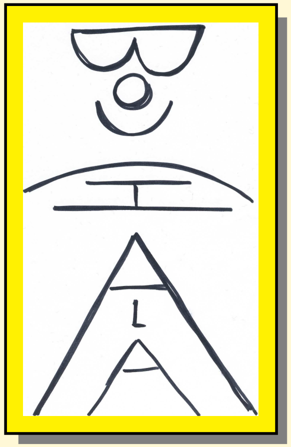
Matematická analýza ve Vesmíru

Jiří Bouchala



Katedra aplikované matematiky

jiri.bouchala@vsb.cz

www.am.vsb.cz/bouchala

11. Integrace některých speciálních funkcí.

Připomeňme si, že polynomem s reálnými koeficienty rozumíme každou funkci q danou předpisem

$$q(x) := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0,$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, a že každý takový polynom lze psát ve tvaru

$$q(x) = a_n (x - \alpha_1)^{n_1} \ldots (x - \alpha_k)^{n_k} \left(x^2 + \beta_1 x + \gamma_1\right)^{m_1} \ldots \left(x^2 + \beta_l x + \gamma_l\right)^{m_l},$$

kde

- α_i jsou navzájem různá reálná čísla,
- $\beta_j, \gamma_j \in \mathbb{R}$,
- polynomy $(x^2 + \beta_j x + \gamma_j)$ mají navzájem různé nereálné kořeny,
- $n_i, m_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Věta 11.1.
Nechť p a q jsou polynomy s reálnými koeficienty a takové, že stupeň polynomu p je menší než stupeň polynomu q. Rozložme q do tvaru

$$q(x) = a_n(x-\alpha_1)^{n_1}\dots(x-\alpha_k)^{n_k}\,(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{m_1}\dots(x^2+\beta_l x+\gamma_l)^{m_l}.$$

Pak existují reálná čísla a_{ij}, b_{rs}, c_{rs} taková, že

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_{11}}{x-\alpha_1} + \frac{a_{12}}{(x-\alpha_1)^2} + \dots + \frac{a_{1n_1}}{(x-\alpha_1)^{n_1}} + \dots$$

$$\dots + \frac{a_{k1}}{x-\alpha_k} + \frac{a_{k2}}{(x-\alpha_k)^2} + \dots + \frac{a_{kn_k}}{(x-\alpha_k)^{n_k}} +$$

$$+\frac{b_{11}x+c_{11}}{x^2+\beta_1x+\gamma_1} + \frac{b_{12}x+c_{12}}{(x^2+\beta_1x+\gamma_1)^2} + \dots + \frac{b_{1m_1}x+c_{1m_1}}{(x^2+\beta_1x+\gamma_1)^{m_1}} + \dots$$

$$\dots + \frac{b_{l1}x+c_{l1}}{x^2+\beta_lx+\gamma_l} + \frac{b_{l2}x+c_{l2}}{(x^2+\beta_lx+\gamma_l)^2} + \dots + \frac{b_{lm_l}x+c_{lm_l}}{(x^2+\beta_lx+\gamma_l)^{m_l}}\,.$$

Příklady.

- $\frac{x+2}{3x^2+3x-18} = \frac{x+2}{3(x-2)(x+3)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+3}$,
- $\frac{3x^2-2x+12}{(x+4)^2(x-1)^3} = \frac{a}{x+4} + \frac{b}{(x+4)^2} + \frac{c}{x-1} + \frac{d}{(x-1)^2} + \frac{e}{(x-1)^3}$,
- $\frac{x^3+2x-13}{x^2(x^2+2x+3)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{cx+d}{x^2+2x+3}$,
- $\frac{x^3+2x-13}{x^2(x^2+2x+1)} = \frac{x^3+2x-13}{x^2(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2}$,
- $\frac{x}{(x-1)(2x^2+x+3)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{2x^2+x+3} + \frac{dx+e}{(2x^2+x+3)^2}$.

Definice. Funkce tvaru $\dfrac{p(x)}{q(x)}$, kde p a q jsou polynomy, nazýváme <u>racionálními funkcemi</u>; funkcím tvaru $\dfrac{a}{(x-\alpha)^n}$ a $\dfrac{bx+c}{(x^2+\beta x+\gamma)^m}$ se říká <u>parciální zlomky</u>

($a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$; $n, m \in \mathbb{N}$; $x^2 + \beta x + \gamma$ nemá reálné kořeny).

Příklad. Rozložme racionální funkci $\frac{x^2+x+1}{x^4-1}$ na parciální zlomky.

Řešení.

$$\frac{x^2+x+1}{x^4-1} = \frac{x^2+x+1}{(x+1)(x-1)(x^2+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} + \frac{cx+d}{x^2+1}$$

pro nějaká $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Po vynásobení výrazem $x^4 - 1$ obdržíme

$$x^2 + x + 1 = a(x-1)(x^2+1) + b(x+1)(x^2+1) + (cx+d)(x^2-1).$$

Porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin sestavíme soustavu (lineárních) rovnic

$$\begin{aligned} x^3: &\quad 0 = a + b + c, \\ x^2: &\quad 1 = -a + b + d, \\ x^1: &\quad 1 = a + b - c, \\ x^0: &\quad 1 = -a + b - d, \end{aligned}$$

jejichž vyřešením získáme (a jednoznačně!) hledaná čísla a, b, c, d.
Výsledek:

$$\frac{x^2+x+1}{x^4-1} = -\frac{1}{4(x+1)} + \frac{3}{4(x-1)} - \frac{x}{2(x^2+1)}. \quad \blacksquare$$

Důležité pozorování. Výpočet výše uvedené soustavy rovnic se zrychlí, dosadíme-li do rovnice

$$x^2 + x + 1 = a(x-1)(x^2+1) + b(x+1)(x^2+1) + (cx+d)(x^2-1)$$

reálné kořeny $x^4 - 1$ (jmenovatele):

$$\begin{aligned} x = 1: &\quad 3 = 4b \;\Rightarrow\; b = \tfrac{3}{4}, \\ x = -1: &\quad 1 = -4a \;\Rightarrow\; a = \tfrac{-1}{4}. \end{aligned}$$

Poznámka. Není-li v $\frac{p(x)}{q(x)}$ stupeň polynomu p menší než stupeň nekonstantního polynomu q, provedeme dělení polynomů $p(x) : q(x)$ se zbytkem. Získáme tak vyjádření ve tvaru

$$\frac{p(x)}{q(x)} = u(x) + \frac{v(x)}{q(x)},$$

kde u a v jsou polynomy a stupeň polynomu v je menší než stupeň polynomu q.

Příklad. Rozložme racionální funkci $\frac{x^4}{x^4-x^3-x+1}$.

Řešení.

$$\begin{array}{l} x^4 \;:\; x^4-x^3-x+1 = 1+\frac{x^3+x-1}{x^4-x^3-x+1}, \\ \underline{-(x^4-x^3-x+1)} \\ \quad x^3+x-1 \end{array}$$

a proto existují čísla $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ taková, že

$$1+\frac{x^3+x-1}{x^4-x^3-x+1} = 1+\frac{x^3+x-1}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = 1+\frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{cx+d}{x^2+x+1}.$$

Odtud plyne

$$x^3+x-1 = a(x-1)(x^2+x+1)+b(x^2+x+1)+(cx+d)(x-1)^2.$$

Porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin získáme soustavu

$$\begin{array}{llll} x^3: & 1 = a+c, & x^1: & 1 = b+c-2d, \\ x^2: & 0 = b-2c+d, & x^0: & -1 = -a+b+d, \end{array}$$

jejímž řešením jsou čísla $a=1,\ b=\frac{1}{3},\ c=0,\ d=-\frac{1}{3}$,

a proto $\frac{x^4}{x^4-x^3-x+1} = 1+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{3(x-1)^2}-\frac{1}{3(x^2+x+1)}$.

Integrály typu $\int \frac{a}{(x-\alpha)^n}\,\mathrm{d}x$

počítáme pomocí substituce $x-\alpha = t$.

Příklady.

- $\int \frac{\mathrm{d}x}{x-6} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| = \ln|x-6|$ v $(-\infty,6)$ i v $(6,\infty)$.

  $x-6=t$

  $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$

- $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-6)^3} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^3} = -\frac{1}{2t^2} = -\frac{1}{2(x-6)^2}$ v $(-\infty,6)$ i v $(6,\infty)$.

- Pozor!

  $\int \frac{\mathrm{d}x}{6-x} = -\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\ln|t| = -\ln|6-x| = -\ln|x-6|$

  $6-x=t$

  $-\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$

  v $(-\infty,6)$ i v $(6,\infty)$.

Integrály typu $\int \frac{bx+c}{(x^2+\beta x+\gamma)^m}\,\mathrm{d}x$

nejdříve rozložíme na součet

$$\int \frac{bx+c}{(x^2+\beta x+\gamma)^m}\,\mathrm{d}x = \frac{b}{2}\int \frac{2x+\beta}{(x^2+\beta x+\gamma)^m}\,\mathrm{d}x + \left(c-\frac{b\beta}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+\beta x+\gamma)^m},$$

a potom

- první z integrálů vypočítáme substitucí $x^2+\beta x+\gamma = t$ (protože pak $(2x+\beta)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$),
- druhý integrál doplněním na čtverec ve jmenovateli a vhodnou *(lineární)* substitucí převedeme na výpočet integrálu $\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^m}$, pro který jsme již dříve odvodili (pomocí per partes) rekurentní formuli.

Příklad.

■ $\int \frac{6x-1}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x = 3\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x - 7\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+3} =$

$$\begin{aligned} x^2+2x+3 &= t \\ (2x+2)\,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \end{aligned}$$

$= 3\int \frac{\mathrm{d}t}{t} - 7\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+2} = 3\ln|t| - \frac{7}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2} =$

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{\sqrt{2}} &= u \\ \mathrm{d}x &= \sqrt{2}\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

$= 3\ln(x^2+2x+3) - \frac{7}{2}\sqrt{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = 3\ln(x^2+2x+3) - \frac{7}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg} u =$

$= 3\ln(x^2+2x+3) - \frac{7}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)$ (v $\mathbb{R}$).

Cvičení. Vypočtěte

$$\int \frac{6x-1}{(x^2+2x+3)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Dobrá rada: vyplatí se přemýšlet!

Podívejme se na následující dva výpočty:

- $\int \frac{x^3}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^3}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)}\,\mathrm{d}x =$

$$= \int \frac{ax+b}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{cx+d}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int \frac{2x+\sqrt{2}}{4(x^2+\sqrt{2}x+1)} + \frac{2x-\sqrt{2}}{4(x^2-\sqrt{2}x+1)}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{4}\ln(x^2+\sqrt{2}x+1) + \frac{1}{4}\ln(x^2-\sqrt{2}x+1) = \frac{1}{4}\ln(x^4+1),$$

- $\int \frac{x^3}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{1}{4}\ln|t| = \frac{1}{4}\ln(x^4+1)$

  $x^4+1=t$

  $4x^3\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$

  (v $\mathbb{R}$).

Cvičení. Vypočtěte

$$\int \frac{2x}{3x^4+4}\,\mathrm{d}x.$$

11. Integrace některých speciálních funkcí.
Integrály z racionálních funkcí.
Integrály typu:
$\int \sin^n x \cos^m x \,\mathrm{d}x$,
$\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$,
$\int R\left(x, \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x$,
$\int R(x, \sqrt{ax^2+\ldots})\mathrm{d}x$.

Integrály typu $\int \sin^n x \, \cos^m x \, dx$,

kde $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, rozdělíme na dva případy.

1. Je-li n nebo m liché číslo, užijeme při výpočtu první substituční metodu.

Příklad.

$$\int \sin^3 x \, \cos^2 x \, dx = \int \sin x \,(1-\cos^2 x) \cos^2 x \, dx = \begin{array}{c} \cos x = t \\ -\sin x \, dx = dt \end{array}$$

$$= -\int (1-t^2)t^2 \, dt = -\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} \text{ v } \mathbb{R}.$$

2. Jsou-li n a m sudá čísla, lze při výpočtu využít rovností

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}.$$

Příklad.

$$\int \sin^2 x \cos^2 x \, \mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos(2x)}{2} \cdot \frac{1+\cos(2x)}{2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4} \int 1-\cos^2(2x) \, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{4} \int 1 \, \mathrm{d}x - \frac{1}{4} \int \frac{1+\cos(4x)}{2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}\frac{\sin(4x)}{4} = \frac{x}{8} - \frac{\sin(4x)}{32}$$ v $\mathbb{R}$.

Označení. Symbolem $R(u,v)$ rozumějme zlomek, v jehož čitateli i jmenovateli jsou pouze konečné součty výrazů tvaru $k\,u^n v^m$, kde $k, u, v \in \mathbb{R}$; $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Zobrazení $(u,v) \mapsto R(u,v)$ se říká racionální funkce dvou proměnných.

Příklady takovýchto zobrazení:

$$R(u,v) = \frac{3u^2v^0 + 2uv^0 + 1u^0v^0}{1u^0v^0} = 3u^2 + 2u + 1,$$

$$R(u,v) = \frac{1u^3v^2 + 3uv^3 + 2u^0v^0}{1\,u^0v^0} = u^3v^2 + 3uv^3 + 2,$$

$$R(u,v) = \frac{2u^0v^2 + 1u^0v^0}{1u^2v^0 + 1u^0v^3} = \frac{2v^2+1}{u^2+v^3}.$$

Integrály typu $\int R(\sin x, \cos x)\, \mathrm{d}x$

lze substitucí $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ převést na integrály z racionálních funkcí.

Přesvědčme se o tom. Nejdříve si vyjádřeme $\sin x$, $\cos x$ a $\mathrm{d}x$ pomocí t.

$$\sin^2 \tfrac{x}{2} + \cos^2 \tfrac{x}{2} = 1 \;\Rightarrow\; \operatorname{tg}^2 \tfrac{x}{2} = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} - 1 \;\Rightarrow\; \cos^2 \tfrac{x}{2} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{1+t^2},$$

a proto

$$\sin x = 2 \sin \tfrac{x}{2} \cos \tfrac{x}{2} = 2 \operatorname{tg} \tfrac{x}{2} \cos^2 \tfrac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = 2 \cos^2 \tfrac{x}{2} - 1 = 2 \frac{1}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}\, \mathrm{d}x = \mathrm{d}t.$$

Takže

$$\int R(\sin x, \cos x)\, \mathrm{d}x = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2}\, \mathrm{d}t.$$

(Všimněme si, že dříve zkoumané integrály typu $\int \sin^n x \cos^m x\, \mathrm{d}x$ jsou rovněž typu $\int R(\sin x, \cos x)\, \mathrm{d}x$ – stačí volit $R(u, v) := u^n v^m$. Na předcházejících stránkách popsané metody jejich výpočtu jsou však zpravidla méně pracné než použití substituce $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$.)

Příklad.

$$\int \frac{1-\sin x}{1+\cos x} \, dx = \int \frac{1-\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} \, dt = \int \frac{t^2-2t+1}{t^2+1} \, dt = \int 1 - \frac{2t}{t^2+1} \, dt =$$

$$= t - \ln(t^2+1) = \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \ln(\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1)$$ v (například) $(-\pi, \pi)$.

A opět: vyplatí se přemýšlet!

- $$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} \, dx = \int \frac{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^3}{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2} \frac{2}{1+t^2} \, dt = \int \frac{16t^3}{(1+t^2)^2(t-1)^2(t+1)^2} \, dt = \dots,$$

- $$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} \, dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)\sin x}{\cos^2 x} \, dx = -\int \frac{1-t^2}{t^2} \, dt = \frac{1}{t} + t =$$

$$\cos x = t$$
$$-\sin x \, dx = dt$$

$$= \frac{1}{\cos x} + \cos x.$$

Integrály typu $\int R\left(x, \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) \mathrm{d}x,$

kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $ad \neq bc$ (proč?), zjednodušíme substitucí $\sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$.

Příklad.

$$\int \frac{\sqrt{2x+3}+x}{\sqrt{2x+3}-x}\ \mathrm{d}x = \int \frac{t+\frac{t^2-3}{2}}{t-\frac{t^2-3}{2}}\, t\ \mathrm{d}t = \int \frac{t^2+2t-3}{-t^2+2t+3}\, t\ \mathrm{d}t =$$

$$\sqrt{2x+3} = t \qquad \begin{aligned} x &= \frac{t^2-3}{2} \\ \mathrm{d}x &= t\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$= \int -t - 4 + \frac{8t+12}{-(t+1)(t-3)}\ \mathrm{d}t = -\frac{t^2}{2} - 4t + \int -\frac{9}{t-3} + \frac{1}{t+1}\ \mathrm{d}t =$$

$$= -\frac{t^2}{2} - 4t - 9\ln|t-3| + \ln|t+1| =$$

$$= -\frac{2x+3}{2} - 4\sqrt{2x+3} - 9\ln|\sqrt{2x+3}-3| + \ln|\sqrt{2x+3}+1|.$$

Integrály typu $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{d}x$,

kde $a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0,\ ax^2+bx+c$ má dva různé (obecně komplexní) kořeny α_1, α_2 (proč?), rozdělíme na dva případy.

1. Je-li $a > 0$, volíme tzv. Eulerovou substituci
$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,x + t$, která je vhodná na každém otevřeném intervalu, který je částí definičního oboru dané integrované funkce.

Příklad.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+2x-1}} = \int \frac{1}{\frac{t^2+1}{2(1-t)}\left(\frac{t^2+1}{2(1-t)}+t\right)}\,\frac{4t-2t^2+2}{4(1-t)^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$\boxed{\sqrt{x^2+2x-1} = \sqrt{1}\,x + t,\ x = \frac{t^2+1}{2(1-t)},\ \mathrm{d}x = \frac{4t-2t^2+2}{4(1-t)^2}\,\mathrm{d}t}$$

$$= \int \frac{2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{arctg}\,t = 2\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{x^2+2x-1} - x\right)$$

v $(-\infty, -1-\sqrt{2})$ i v $(-1+\sqrt{2}, \infty)$.

2. Je-li $a < 0$, má smysl uvažovat pouze případ, kdy $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ (jinak $ax^2+bx+c<0$ v $\mathbb{R}$). Předpokládejme, že $\alpha_1 < \alpha_2$. Pak pro každé $x \in (\alpha_1, \alpha_2)$ (a jiná nás nemohou zajímat) platí

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)} =$$

$$= \sqrt{(-a)(x-\alpha_1)(\alpha_2-x)} = \sqrt{(-a)}\,(x-\alpha_1)\sqrt{\frac{\alpha_2-x}{x-\alpha_1}},$$

a proto počítaný integrál lze psát ve tvaru

$$\int R\left(x, \sqrt{-a}\,(x-\alpha_1)\sqrt{\tfrac{\alpha_2-x}{x-\alpha_1}}\right)\mathrm{d}x;$$

a integrály tohoto druhu už počítat umíme - volíme substituci

$$\sqrt{\tfrac{\alpha_2-x}{x-\alpha_1}} = t.$$

Cvičení. Přepočítejte výše popsanou metodou, že

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\sqrt{3-2x-x^2}} = 2\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{\tfrac{x+3}{1-x}} + \frac{2\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{1-x}} \quad \text{v } (-3,1).$$