Matematická analýza ve Vesmíru

Jiří Bouchala

Katedra aplikované matematiky

jiri.bouchala@vsb.cz

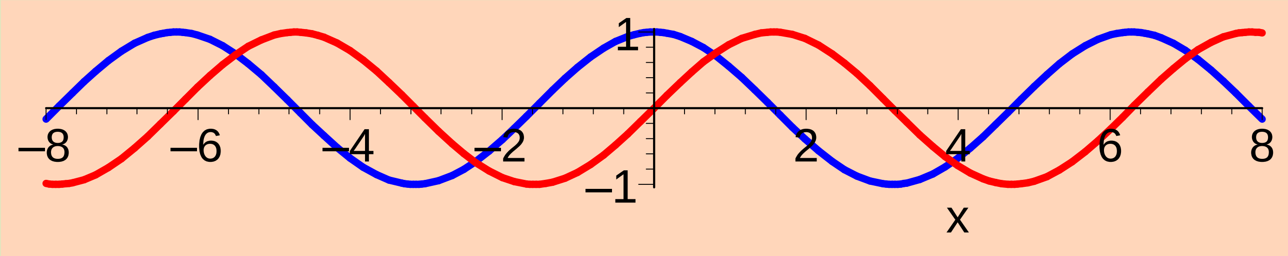
www.am.vsb.cz/bouchala

10. Primitivní funkce (neurčitý integrál).

Definice. Řekneme, že funkce $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je primitivní funkcí k funkci $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$, platí-li

$$\forall x \in DF = I: \ F'(x) = f(x).$$

Příklad. Funkce $F(x) := \sin x$ je primitivní funkcí k funkci $f(x) := \cos x$ na $\mathbb{R}$.



Věta 10.1. (o existenci primitivní funkce). Je-li funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitá na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$, má v I primitivní funkci.

Pozor! Spojitost *je postačující*, ale *ne nutnou* podmínkou existence primitivní funkce.

Věta 10.2. Je-li funkce F primitivní funkcí k funkci f na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$, tvoří funkce $G_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definované předpisy

$$G_c(x) := F(x) + c,$$

kde $c \in \mathbb{R}$, právě všechny primitivní funkce k funkci f na intervalu I.

Důkaz. Uvědomme si, že máme vlastně dokázat tato dvě tvrzení:

1. pro každé $c \in \mathbb{R}$ je funkce G_c primitivní funkcí k f na I;
2. je-li funkce G primitivní funkcí k f na I, existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $G(x) = F(x) + c$ pro každé $x \in I$.

Důkaz tvrzení 1. je velmi snadný. Stačí si uvědomit, že pro každé $x \in I$ platí: $(G_c(x))' = (F(x) + c)' = F'(x) + c' = f(x) + 0 = f(x)$.

Důkaz tvrzení 2. Uvažujme funkci $G - F$. Z předpokladů plyne, že pro každé $x \in I$ je $(G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$, a proto je funkce $G - F$ konstantní v I (viz větu 8.1.). To znamená, že existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $(G - F)(x) = G(x) - F(x) = c$ pro každé $x \in I$. ■

Označení. Je-li funkce F primitivní funkcí k funkci f, píšeme

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

a mluvíme o neurčitém integrálu funkce f.

Poznámky.

- Tento – z historických důvodů užívaný – zápis není zcela korektní. Všimli jsme si již, že primitivní funkce F je funkcí f určena jednoznačně *až na aditivní konstantu*. Jak tedy chápat rovnosti: $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x$, $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + 2005$, ... ?
- Domluvme se, že symbol $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ znamená některou z primitivních funkcí k funkci f (každou další bychom dostali přičtením vhodné konstanty).

  Rovnosti $\int f(x)\,\mathrm{d}x = G(x)$ rozumějme tak, že existuje primitivní funkce F k funkci f taková, že pro každé $x \in DF$ je $F(x) = G(x)$.
- Mluvíme-li – nepříliš přesně – o *primitivní funkci* (případně o *neurčitém integrálu*), vždy máme současně na mysli i nějaký otevřený interval – viz definici primitivní funkce.

Věta 10.3. Na každém otevřeném intervalu, který je částí definičního oboru příslušné integrované funkce, platí:

- $\int k \, \mathrm{d}x = kx \quad (k \in \mathbb{R})$,
- $\int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \in \mathbb{R};\ n \neq -1)$,
- $\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln |x|$,
- $\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x$,
- $\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x$,
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x = \mathrm{tg}\ x$,
- $\int \frac{1}{\sin^2 x} \, \mathrm{d}x = -\mathrm{cotg}\ x$,
- $\int \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \mathrm{arctg}\ x$,
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x = \arcsin x$,
- $\int e^x \, \mathrm{d}x = e^x$.

Věta 10.4. (o linearitě neurčitého integrálu). Nechť α, $\beta \in \mathbb{R}$ a nechť funkce f a g jsou spojité na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Pak v I platí:

$$\int \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Příklady.

- $\int \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x^5} + x^2}{\sqrt[6]{x}}\,\mathrm{d}x = \int \big(x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}} - x^{\frac{5}{3}-\frac{1}{6}} + x^{2-\frac{1}{6}}\big)\,\mathrm{d}x =$

  $= \int x^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x - \int x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x + \int x^{\frac{11}{6}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{x^{\frac{17}{6}}}{\frac{17}{6}} =$

  $= \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} - \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + \frac{6}{17}\sqrt[6]{x^{17}}$ (v $\mathbb{R}^+$).

- $\int \mathrm{tg}^2\, x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \big(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\big)\,\mathrm{d}x =$

  $= \int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x - \int 1\,\mathrm{d}x = \mathrm{tg}\ x - x$

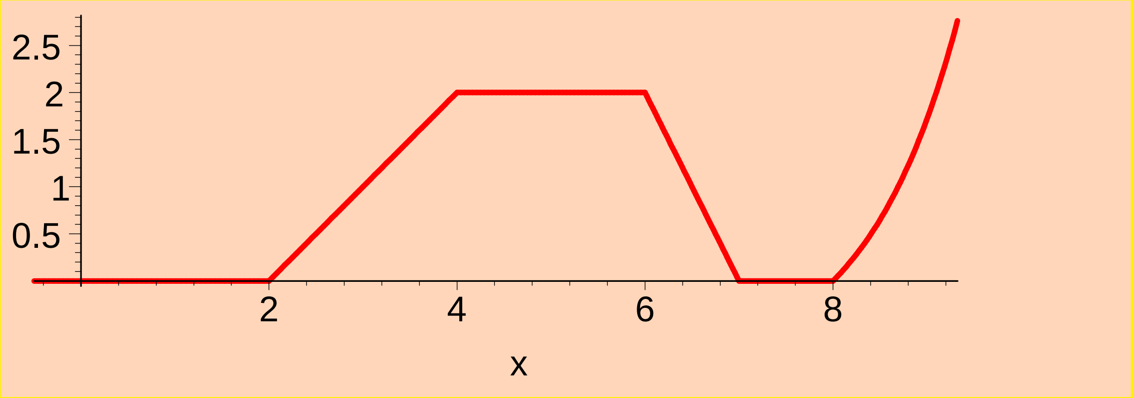
  (v každém $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, kde $k \in \mathbb{Z}$).

Problém 23.

Vypočtěte (na $\mathbb{R}$!) $\int v(x)\,\mathrm{d}x$, je-li

$$v(x) := \begin{cases} 0,\ x \in (-\infty, 2), \\ x-2,\ x \in \langle 2, 4), \\ 2,\ x \in \langle 4, 6), \\ 14-2x,\ x \in \langle 6, 7), \\ 0,\ x \in \langle 7, 8), \\ \mathrm{e}^{\,x-8} - 1,\ x \in \langle 8, +\infty). \end{cases}$$

(2 body)



10. Primitivní funkce (neurčitý integrál).

Primitivní funkce. Neurčitý integrál.

Integrační metody:
- "rozklad",
- per partes,
- 1. subst. met.,
- 2. subst. met.,

Věta 10.5. (integrace per partes).
Nechť funkce u a v mají v otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$ spojité první derivace. Potom v I platí:

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Příklady.

- $\int x\sin x\,\mathrm{d}x = -x\cos x + \int \cos x\,\mathrm{d}x = -x\cos x + \sin x$ (v $\mathbb{R}$).

  $u = x,\ \ v' = \sin x$

  $u' = 1,\ v = -\cos x$

- $\int \ln x\,\mathrm{d}x = \int 1\cdot \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - \int x\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x\ln x - x$ (v $\mathbb{R}^+$).

  $u = \ln x,\ v' = 1$

  $u' = \frac{1}{x},\ \ v = x$

- $\int e^x \sin x \,\mathrm{d}x = e^x \sin x - \int e^x \cos x \,\mathrm{d}x =$

  $u = \sin x,\quad v' = e^x \qquad\qquad u = \cos x,\quad v' = e^x$

  $u' = \cos x,\quad v = e^x \qquad\qquad u' = -\sin x,\quad v = e^x$

  $= e^x \sin x - \left(e^x \cos x - \int e^x(-\sin x)\,\mathrm{d}x\right) =$

  $= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \,\mathrm{d}x$, a proto

  $\int e^x \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)$ (v $\mathbb{R}$).

- Odvoďme rekurentní vzorec pro výpočet integrálu

  $I_n(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$, kde $n \in \mathbb{N}$.

  - $I_1(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x,$
  - $I_n(x) = \int 1 \cdot \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{x^2+1-1}{(1+x^2)^{n+1}} =$

    $= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2nI_n(x) - 2nI_{n+1}(x).$

Odtud snadno spočítáme: $I_{n+1}(x) = \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n(x)$ (v $\mathbb{R}$).

Věta 10.6. (první substituční metoda).

Nechť

- funkce φ má v intervalu (a,b) konečnou derivaci a pro každé $x \in (a,b)$ je $\varphi(x) \in (\alpha,\beta)$,
- funkce f je spojitá v intervalu (α,β).

Buď F libovolná primitivní funkce k funkci f na intervalu (α,β).

Potom v (a,b) platí:

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = F(\varphi(x)).$$

Užití první substituční metody budeme formálně zapisovat takto:

$$\boxed{\begin{array}{l}\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t) = F(\varphi(x)).\\ \quad\varphi(x) = t\\ \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t\end{array}}$$

Příklady.

- $\int \operatorname{cotg} x \,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln|t| = \ln|\sin x|$

$$\sin x = t$$
$$\cos x \,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$$

v každém $(k\pi, \pi + k\pi)$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

- $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}} = \sqrt{t} = \sqrt{x^2-1}$

$$x^2 - 1 = t$$
$$2x \,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$$

v $(-\infty, -1)$ i v $(1, +\infty)$.

- $\int \frac{\mathrm{d}x}{3x+2007} = \int \frac{1}{3}\frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{1}{3}\ln|t| = \frac{1}{3}\ln|3x+2007|$

$$3x + 2007 = t$$
$$3\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$$
$$\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\,\mathrm{d}t$$

v $(-\infty, -\frac{2007}{3})$ i v $(-\frac{2007}{3}, +\infty)$.

Věta 10.7. (druhá substituční metoda).

Nechť

- funkce φ zobrazuje interval (α, β) na interval (a, b) a nechť φ má v (α, β) spojitou a nenulovou derivaci,
- funkce f je spojitá v intervalu (a, b).

Buď F libovolná primitivní funkce k funkci $(f \circ \varphi)\,\varphi'$ na intervalu (α, β). Potom v (a, b) platí:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(\varphi^{-1}(x)).$$

Užití druhé substituční metody budeme formálně zapisovat takto:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F(t) = F(\varphi^{-1}(x)).$$

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ \mathrm{d}x &= \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Příklady. Buď $a \in \mathbb{R}^+$.

- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{a\,dt}{\sqrt{a^2-a^2t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t = \arcsin \frac{x}{a}$

  $x = at$

  $dx = a\,dt$

  v $(-a, a)$.

- $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} \cdot a\cos t\,dt = a^2 \int |\cos t| \cos t\,dt =$

  $x = a\sin t$

  $dx = a\cos t\ dt$

  $t = \arcsin \frac{x}{a}$

  $x \in (-a, a),\ t \in (-\pi/2, \pi/2)$

  $= a^2 \int \cos^2 t\,dt = a^2 \int \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = a^2 \int \frac{1}{2}\,dt + a^2 \int \frac{\cos(2t)}{2}\,dt =$

  $= \frac{a^2}{2} t + a^2 \frac{\sin(2t)}{4} = \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{2} \sin t \sqrt{1-\sin^2 t} =$

  $= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{a^2}{2} \sin(\arcsin \frac{x}{a}) \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin \frac{x}{a})} =$

  $= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{a^2}{2} \frac{x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2}$

  v $(-a, a)$.