Matematická analýza ve Vesmíru

Jiří Bouchala

Katedra aplikované matematiky

jiri.bouchala@vsb.cz

www.am.vsb.cz/bouchala

1. Reálná čísla. Věta o supremu.

Číselné množiny.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ ... množina všech přirozených čísel.

Věta 1.1. (princip matematické indukce).

Buď $M \subset \mathbb{N}$ taková množina, že platí:

(i) $1 \in M$,

(ii) $\forall n \in M: \; n + 1 \in M$.

Pak

$$M = \mathbb{N}.$$

Příklad. Dokažte, že

$$\forall n \in \mathbb{N}: \ 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}\, n\,(n+1).$$

Řešení. Označme M množinu všech přirozených čísel k, pro něž platí $1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{1}{2}\, k\,(k+1)$, tj.

$$M := \{k \in \mathbb{N}: \ 1{+}2{+}...{+}k = \tfrac{1}{2}\, k\,(k{+}1)\}.$$

Máme dokázat, že $M = \mathbb{N}$.

Díky Větě 1.1. stačí ukázat, že platí předpoklady *(i)* a *(ii)*.

Předpoklad *(i)* zřejmě platí, neboť $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1)$.

Zbývá dokázat *(ii)*.

(ii) $n \in M := \{k \in \mathbb{N} : \; 1+2+\ldots+k = \frac{1}{2}\,k\,(k+1)\} \;\Rightarrow\; n+1 \in M.$

Předpokládejme, že $n \in M$, tj. že

$$1+2+\ldots+n = \tfrac{1}{2}\,n\,(n+1).$$

Máme ukázat, že potom $n+1 \in M$, tzn. že

$$1+2+\ldots+n+(n+1) = \tfrac{1}{2}\,(n+1)\,(n+1+1).$$

$$\underbrace{(1+2+\ldots+n)}_{=\,\frac{1}{2}\,n\,(n+1)} + (n+1) = \frac{1}{2}\,n\,(n+1) + (n+1) =$$

$$= (n+1)\left(\frac{1}{2}\,n+1\right) = (n+1)\,\frac{1}{2}\,(n+2) = \frac{1}{2}(n+1)(n+1+1).$$

■

A teď to ukažme jinak – bez matematické indukce.
Buď $n \in \mathbb{N}$ dáno. Pak

$$2\,(1+2+3+\cdots+n) =$$

$$= \begin{array}{l} 1 + \quad 2 \quad + \quad 3 \quad + \ldots + n + \\ + n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 1 \end{array} = n\,(n+1).$$

■

Problém 1. Vyjádřete dané číslo $\check{c} \in \mathbb{N}$ jako součet přirozených čísel tak, aby součin těchto čísel byl maximální.

(1–2 body)

$$\mathbb{Z} = \{\ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{n,\ -n,\ 0\}$$

... množina všech celých čísel.

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : \ p, q \in \mathbb{Z} \ \wedge \ q \neq 0\}$

... množina všech racionálních čísel.

Existuje řada úvah ukazujících jistou neúplnost racionálních čísel, a to přesto, že racionální čísla jsou na číselné ose rozložená velmi hustě:

mezi každými dvěmi — jakkoliv blízkými — různými racionálními čísly jich leží pořád nekonečně mnoho.

Například platí:

(i) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists p_1, p_2 \in \mathbb{Q}) : \ 2 - \varepsilon < p_1^2 < 2 < p_2^2 < 2 + \varepsilon$,

(ii) neexistuje žádné racionální číslo p, pro něž $p^2 = 2$.

Dokažme alespoň druhé z těchto tvrzení.

Důkaz. Předpokládejme sporem, že existuje racionální číslo p takové, že

$$p^2 = 2.$$

Protože $p \in \mathbb{Q}$, existují celá nesoudělná čísla $m, n\ (\neq 0)$ taková, že

$$p = \frac{m}{n}.$$

Předpokládáme tedy existenci dvou celých nesoudělných čísel $m, n\ (\neq 0)$, pro něž je

$$\frac{m^2}{n^2} = 2.$$

Odtud plyne, že $m^2 = 2n^2$, a tudíž m je sudé. Existuje proto $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $m = 2k$. Dosadíme-li tento vztah do rovnosti $m^2 = 2n^2$, dostaneme $4k^2 = 2n^2$, odkud plyne, že $n^2 = 2k^2$, a proto i n je sudé. A to je spor s nesoudělností čísel m a n. ∎

$\mathbb{R}$ ... množina všech reálných čísel.

Připomeňme, že v $\mathbb{R}$ (ale i v $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$) máme definovanou řadu operací: $+,\ -,\ \cdot,\ :,\ |\,|$.

Další podstatnou vlastností reálných čísel je jejich uspořádání:

- pro každá dvě reálná čísla x a y platí právě jedna z možností:
  - $x < y$,
  - $x = y$,
  - $x > y$;
- pro každá tři reálná čísla x, y a z platí:

$$(x < y \wedge y < z) \Rightarrow (x < z).$$

Zaveďme ještě následující pojmy a označení:

$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$

... množina všech kladných reálných čísel,

$\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$

... množina všech záporných reálných čísel,

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ... množina všech iracionálních čísel.

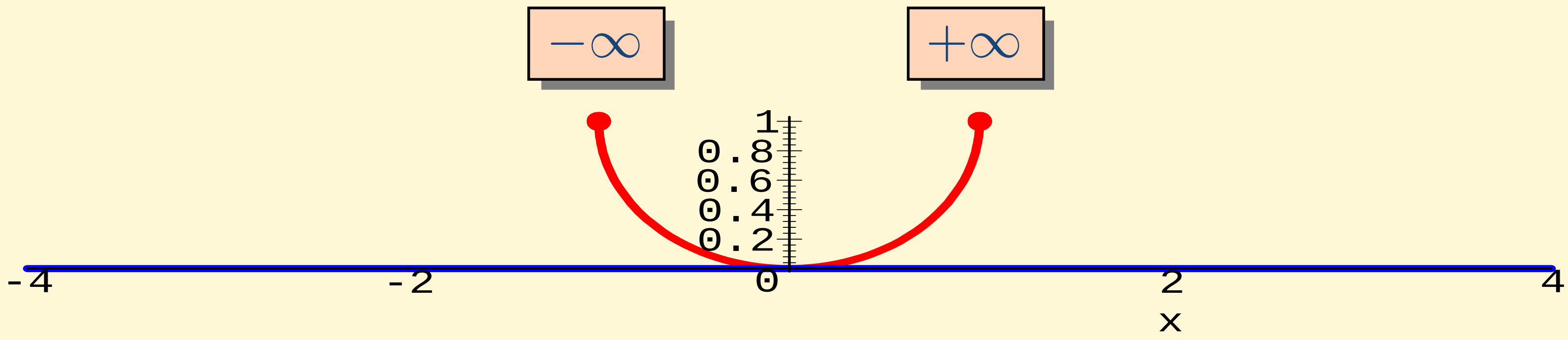
Problém 2. Dokažte implikaci:

$$\left.\begin{aligned} &a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n \in \mathbb{R},\\ &a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1,\\ &a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3 = 1, \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ a_1^5 + a_2^5 + \cdots + a_n^5 = 1.$$

(1 bod)

Dostaneme tak množinu

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ ... rozšířená číselná osa.



Rozšiřme uspořádání z $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}^*$:

- $\forall x \in \mathbb{R}: \; -\infty < x \wedge x < +\infty$,
- $-\infty < +\infty$.

Rozšiřme z $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}^*$ i definice operací: $+,\ -,\ \cdot,\ :,\ |\,|$.

- $\forall x > -\infty:\ x + (+\infty) \overset{\text{ozn.}}{=} x + \infty = +\infty + x = +\infty$,
- $\forall x < +\infty:\ x + (-\infty) \overset{\text{ozn.}}{=} x - \infty = -\infty + x = -\infty$,
- $\forall x \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}:\ x \cdot (+\infty) = +\infty \cdot x = +\infty$,
  $x \cdot (-\infty) = -\infty \cdot x = -\infty$,
- $\forall x \in \mathbb{R}^- \cup \{-\infty\}:\ x \cdot (+\infty) = +\infty \cdot x = -\infty$,
  $x \cdot (-\infty) = -\infty \cdot x = +\infty$,
- $\forall x \in \mathbb{R}:\ \frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0$,
- $|-\infty| = |+\infty| = +\infty$.

Pozor! Není definováno:

$$+\infty - \infty,\ -\infty + \infty,\ 0 \cdot (\pm\infty),\ \frac{(\pm\infty)}{(\pm\infty)},\ \frac{x}{0}\ (x \in \mathbb{R}^*).$$

Již ze střední školy jsme zvyklí pracovat s rozličnými podmnožinami $\mathbb{R}$. Vezměme si ku příkladu intervaly

$$\langle -1, 1\rangle \text{ a } (-1, 1)$$

a všimněme si čísla 1, které v obou z nich hraje roli pravého okraje: žádné číslo ležící na číselné ose vpravo od něj neleží ani v $(-1,1\rangle$ ani v $(-1,1)$. Tuto vlastnost (za chvíli: být horním odhadem) má každé z čísel množiny

$$\langle 1, +\infty) \cup \{+\infty\}.$$

Číslo 1 je z nich však nejlepší, neboť nejmenší. Skutečnost, že v prvním případě je číslo 1 prvkem daného intervalu a v druhém ne, je podstatou rozdílu mezi pojmy maximum a supremum, které nám (spolu s dalšími níže definovanými pojmy) poslouží při odhadech čísel ležících i v mnohem složitějších podmnožinách $\mathbb{R}^*$, než jsou intervaly.

Definice. Buď $M \subset \mathbb{R}^*$. Každé číslo $k \in \mathbb{R}^*$ takové, že

$$\forall x \in M: \; x \leq k,$$

nazýváme horním odhadem množiny M.

Existuje-li horní odhad množiny M, který je *prvkem* množiny M, nazýváme jej maximem množiny M a značíme $\max M$.

Tvrzení. Nechť $M \subset \mathbb{R}^*$ a $m \in \mathbb{R}^*$. Pak

$$m = \max M \;\Leftrightarrow\; \Big[m \in M \wedge \forall x \in M: \; x \leq m \Big].$$

$$\Updownarrow$$

m je největším prvkem množiny M.

Definice. Buď $M \subset \mathbb{R}^*$. Každé číslo $l \in \mathbb{R}^*$ takové, že

$$\forall x \in M : \ x \geq l,$$

nazýváme dolním odhadem množiny M.

Existuje-li dolní odhad množiny M, který je *prvkem* množiny M, nazýváme jej minimem množiny M a značíme $\min M$.

Tvrzení. Nechť $M \subset \mathbb{R}^*$ a $n \in \mathbb{R}^*$. Pak

$$n = \min M \ \Leftrightarrow \ \left[n \in M \wedge \forall x \in M : \ x \geq n \right].$$

$\Updownarrow$

n je nejmenším prvkem množiny M.

Definice. Buď $M \subset \mathbb{R}^*$. Číslo $s \in \mathbb{R}^*$, pro něž platí:

(i) $\forall x \in M: \; x \leq s$

(tzn. že s je horním odhadem M),

(ii) $(\forall k \in \mathbb{R}^*, \, k < s)\,(\exists x \in M): \; x > k$

(tzn. že žádné číslo menší než s není horním odhadem M),

nazýváme <u>supremem</u> množiny M. Píšeme $s = \sup M$.

Jinak řečeno:

$\sup M$ je nejmenším horním odhadem množiny M.

Definice. Buď $M \subset \mathbb{R}^*$. Číslo $i \in \mathbb{R}^*$, pro něž platí:

(i) $\forall x \in M: \; x \geq i$

(tzn. že i je dolním odhadem M),

(ii) $(\forall l \in \mathbb{R}^*, \, l > i) \, (\exists x \in M): \; x < l$

(tzn. že žádné číslo větší než i není dolním odhadem M),

nazýváme <u>infimem</u> množiny M. Píšeme $i = \inf M$.

Jinak řečeno:

$\inf M$ je největším dolním odhadem množiny M.

Příklady.

- $M = (-1, 1\rangle$
  ... $\min M$ neexistuje, $\inf M = -1$, $\max M = \sup M = 1$;
- $M = \mathbb{R}^+$
  ... $\min M$ ani $\max M$ neexistují, $\inf M = 0$, $\sup M = +\infty$;
- $M = \emptyset$
  ... $\min M$ ani $\max M$ neexistují, $\inf M = +\infty$, $\sup M = -\infty$;
- $M = \{-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$
  ... $\min M = \inf M = -1$, $\max M$ neexistuje, $\sup M = 0$.

Definice. Množinu $M \subset \mathbb{R}^*$ nazveme

- shora omezenou, je-li $\sup M < +\infty$,
- zdola omezenou, je-li $\inf M > -\infty$,
- omezenou, je-li současně shora i zdola omezená,
- neomezenou, není-li omezená.

Věta 1.2. (o supremu). Každá podmnožina $\mathbb{R}^*$ má právě jedno supremum.

Důsledek. Každá podmnožina $\mathbb{R}^*$ má právě jedno infimum.

Cvičení.

- Promyslete si, jaký je vztah mezi čísly $\max M$ a $\sup M$ (resp. $\min M$ a $\inf M$).
- Zjistěte, jaký je vztah mezi čísly $\sup M$ a $\inf(-M)$, kde $-M := \{-x : \ x \in M\}$, a přesvědčte se, že existence infima je skutečně důsledkem věty o supremu.
- Určete $\sup M$ a $\inf M$ (v případě existence i $\max M$ a $\min M$), je-li:
  - $M = \{x \in \mathbb{R} : \ \sin \frac{1}{x} = \frac{1}{2}\}$,
  - $M = \{x \in \mathbb{R} : \ x^2 + 3x - 6 \geq 0\}$.
- Dokažte tvrzení:
  M je omezená množina $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}^+ : \ M \subset \langle -k, k \rangle$.

Problém 3. Dokažte implikaci:

$$\left.\begin{array}{l} a,\, b,\, c \in \mathbb{R}, \\ \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{a+b+c}, \end{array}\right\} \Rightarrow \Big[a+b = 0 \vee a+c = 0 \vee b+c = 0\Big].$$

(1 bod)