5. Lineární nezávislost a báze

Lineární nezávislost a báze

1. Závislé a nezávislé vektory
2. Lineární kombinace a závislost
3. Postačující podmínky pro nezávislost funkcí
4. Báze vektorového prostoru
5. Souřadnice vektoru
6. Použití souřadnic

5.1 Závislé a nezávislé vektory

DEFINICE 1
Neprázdná konečná množina vektorů $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ vektorového prostoru $\mathcal{V}$ je *(lineárně) nezávislá*, jestliže rovnice

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{o} \qquad (*)$$

má jediné řešení

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0.$$

Jestliže $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ je (lineárně) nezávislá, říkáme také, že vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ jsou (lineárně) nezávislé. Má-li rovnice $(*)$ i jiné řešení, pak říkáme, že $\mathcal{S}$ je *(lineárně) závislá* a vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ jsou (lineárně) závislé.

5.1 Závislé a nezávislé vektory

PŘÍKLAD 1 Jestliže $\mathbf{v}_1 = [2, -1, 0], \mathbf{v}_2 = [1, 2, 5]$ a $\mathbf{v}_3 = [7, -1, 5]$, pak množina vektorů $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ je lineárně závislá, neboť $3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{o}$.

PŘÍKLAD 2 Mnohočleny $p_1(x) = 1 - x, p_2(x) = 5 + 3x - 2x^2$ a $p_3(x) = 1 + 3x - x^2$ tvoří lineárně závislou množinu v $\mathcal{P}_3$, neboť pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $3p_1(x) - p_2(x) + 2p_3(x) = 0$, tj. $3p_1 - p_2 + 2p_3 = o$.

PŘÍKLAD 3 Vektory $\mathbf{e}_1 = [1, 0, 0], \mathbf{e}_2 = [0, 1, 0]$ a $\mathbf{e}_3 = [0, 0, 1]$ tvoří lineárně nezávislou množinu reálných třírozměrných aritmetických vektorů, neboť $\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{o}$ pouze pro $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$.

5.2 Lineární kombinace a závislost

DEFINICE 2
Vektor $\mathbf{v}$ z vektorového prostoru $\mathcal{V}$ budeme nazývat *lineární kombinací* vektorů $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathcal{V}$, jestliže existují skaláry $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ tak, že

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k.$$

PŘÍKLAD 4 Mnohočlen $p_1(x) = x$ z vektorového prostoru $\mathcal{P}_2$ všech lineárních reálných mnohočlenů je lineární kombinací mnohočlenů $p_2(x) = x + 1$ a $p_3(x) = x + 2$, neboť pro libovolné reálné x platí

$$p_1(x) = x = 2(x+1) - (x+2) = 2p_2(x) - p_3(x),$$

takže $p_1 = 2p_2 - p_3$.

5.2 Lineární kombinace a závislost

VĚTA 1
Konečná množina nenulových vektorů $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_m\}$ je lineárně závislá, právě když existuje $k \geq 2$ tak, že vektor $\mathbf{v}_k$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}$.

DŮKAZ: Nechť $\mathcal{S}$ je množina nenulových lineárně závislých vektorů. Uvažujme množiny $\mathcal{S}_1 = \{\mathbf{v}_1\}, \mathcal{S}_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}, \ldots, \mathcal{S}_m = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ a nechť $\mathcal{S}_k$ je nejmenší množina vektorů, které jsou lineárně závislé, takže platí

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{o} \qquad (**)$$

a některý z koeficientů $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ je nenulový. Pak $k \geq 2$, neboť $\mathcal{S}_1$ je zřejmě nezávislá množina vektorů, a $\alpha_k \neq 0$, neboť jinak by $\mathcal{S}_{k-1}$ byla lineárně závislá.

5.2 Lineární kombinace a závislost

DŮKAZ: *Pokračování*

Rovnici $(**)$ můžeme tedy upravit pomocí axiomů vektorového prostoru na tvar

$$\mathbf{v}_k = \left(\frac{-\alpha_1}{\alpha_k}\right)\mathbf{v}_1 + \cdots + \left(\frac{-\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\right)\mathbf{v}_{k-1}.$$

Obráceně, jestliže pro $2 \le k \le m$ platí

$$\mathbf{v}_k = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_{k-1}\mathbf{v}_{k-1},$$

pak

$$-(\alpha_1\mathbf{v}_1) - \ldots - (\alpha_{k-1}\mathbf{v}_{k-1}) + 1\mathbf{v}_k + 0\mathbf{v}_{k+1} + \cdots + 0\mathbf{v}_m = \mathbf{o},$$

takže $\mathcal{S}_m$ je lineárně závislá, neboť koeficient 1 u $\mathbf{v}_k$ je nenulový.

5.3 Postačující podmínky pro nezávislost funkcí

Nechť $\mathcal{S} = \{f_1, \dots, f_k\}$ je konečná množina reálných funkcí vektorového prostoru $\mathcal{F}$. $\mathcal{S}$ je nezávislá právě tehdy, když z

$$\alpha_1 f_1(x) + \cdots + \alpha_k f_k(x) = 0$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$ plyne, že $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$.
Dosadíme-li za x postupně různá čísla $x_1, \dots, x_k$, dostaneme soustavu k lineárních rovnic o k neznámých $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ ve tvaru:

$$\begin{array}{ccccccc}
\alpha_1 f_1(x_1) & + & \dots & + & \alpha_k f_k(x_1) & = & 0 \\
\vdots & & \dots & & \vdots & & \vdots \\
\alpha_1 f_1(x_k) & + & \dots & + & \alpha_k f_k(x_k) & = & 0
\end{array}$$

Pokud má tato soustava regulární matici, plyne odsud, že $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$ a $\mathcal{S}$ je nezávislá množina.

5.3 Postačující podmínky pro nezávislost funkcí

PŘÍKLAD 5 Rozhodněte, zda jsou mocniny x, x^2 a x^3 lineárně nezávislé.

ŘEŠENÍ:Zvolíme si body $x_1 = 1, x_2 = 2$ a $x_3 = 3$, které postupně dosadíme do funkcí $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = x^3$, a vytvoříme soustavu:

$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha_1 & + & \alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 0 \\ 2\alpha_1 & + & 4\alpha_2 & + & 8\alpha_3 & = & 0 \\ 3\alpha_1 & + & 9\alpha_2 & + & 27\alpha_3 & = & 0 \end{array}$$

Matici této soustavy převedeme na schodový tvar. Dostaneme

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ -2\mathrm{r}_1 \\ -3\mathrm{r}_1 \end{array} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 24 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -3\mathrm{r}_2 \end{array} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Matice soustavy je regulární, takže soustava má jen nulové řešení $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Funkce x, x^2 a x^3 jsou tedy lineárně nezávislé.

5.3 Postačující podmínky pro nezávislost funkcí

PŘÍKLAD 5 Je třeba zdůraznit, že tvrzení „Pokud má tato soustava regulární matici, plyne odsud, že $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$ a $\mathcal{S}$ je nezávislá množina.“ je implikace. Pokud má soustava

$$\begin{array}{ccccccc}
\alpha_1 f_1(x_1) & + & \dots & + & \alpha_k f_k(x_1) & = & 0 \\
\vdots & & \dots & & \vdots & & \vdots \\
\alpha_1 f_1(x_k) & + & \dots & + & \alpha_k f_k(x_k) & = & 0
\end{array}$$

singulární matici, tak nelze říct, zda je množina $\mathcal{S}$ závislá nebo nezávislá.

5.4 Báze vektorového prostoru

DEFINICE 3
Konečná množina $\mathcal{E}$ vektorů vektorového prostoru $\mathcal{V}$ je *báze vektorového prostoru* $\mathcal{V}$, jestliže

- $\mathcal{E}$ je nezávislá.
- Každý vektor $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathcal{E}$.

Ne každý vektorový prostor má bázi ve smyslu naší definice. Například neexistuje žádná konečná množina reálných funkcí, jejichž lineární kombinací by bylo možno vyjádřit libovolnou reálnou funkci.

5.4 Báze vektorového prostoru

PŘÍKLAD 6 Vektory $\mathbf{e}_1 = [1, 0, 0], \mathbf{e}_2 = [0, 1, 0], \mathbf{e}_3 = [0, 0, 1]$ tvoří bázi $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$. Jakýkoli vektor $\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3]$ tohoto prostoru lze vyjádřit ve tvaru $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$. Báze $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ je zvláštním případem *standardní báze* $\mathbb{R}^n$, která je tvořena řádky či sloupci jednotkové matice $\mathbf{I}_n$.

PŘÍKLAD 7 Mnohočleny $p_1(x) = 1$ a $p_2(x) = x$ tvoří bázi vektorového prostoru $\mathcal{P}_2$. Každý mnohočlen $p(x) = a_0 + a_1x$ lze zapsat ve tvaru $p = a_0p_1 + a_1p_2$. Mnohočleny zde považujeme za reálné funkce definované na celé reálné ose. Nechť $a_0p_1 + a_1p_2 = o$, tj. $a_0 + a_1x = 0$ pro všechna x. Pro $x = 0$ dostáváme $a_0 + a_1 \cdot 0 = 0$, odkud $a_0 = 0$, a pro $x = 1$ pak z $a_1 \cdot 1 = 0$ dostaneme $a_1 = 0$, takže p_1 a p_2 jsou nezávislé.

5.5 Souřadnice vektoru

DEFINICE 4

Nechť $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ je uspořádaná báze vektorů vektorového prostoru $\mathcal{V}$. Nechť $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$. Potom čísla $v_1, \ldots, v_n$, pro která platí

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + \cdots + v_n\mathbf{e}_n,$$

nazýváme *souřadnice vektoru* **v** v bázi $\mathcal{E}$.

VĚTA 2

Nechť $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ je uspořádaná báze vektorového prostoru $\mathcal{V}$ a nechť $x_1, \ldots, x_n$ a $y_1, \ldots, y_n$ jsou souřadnice vektoru $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ v bázi $\mathcal{E}$. Pak $x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n$.

5.5 Souřadnice vektoru

Souřadnice každého vektoru $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ jsou v dané bázi $\mathcal{E}$ určeny jednoznačně. Budeme je zapisovat také do aritmetického vektoru, který se nazývá *souřadnicový vektor* a značí se $[\mathbf{v}]_{\mathcal{E}}$.

PŘÍKLAD 8 Libovolný aritmetický vektor $\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3]$ má ve standardní bázi $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ z příkladu 6 souřadnice v_1, v_2, v_3, neboť

$$[v_1, v_2, v_3] = v_1[1, 0, 0] + v_2[0, 1, 0] + v_3[0, 0, 1].$$

Jeho souřadnicový vektor je $[\mathbf{v}]_{\mathcal{E}} = [v_1, v_2, v_3]$.

PŘÍKLAD 9 Mnohočlen $p(x) = x + 2$ má v bázi $\mathcal{P} = (p_1, p_2)$ z příkladu 7, kde $p_1(x) = 1$ a $p_2(x) = x$, souřadnice $2, 1$, neboť

$$p(x) = x + 2 = 2p_1(x) + 1p_2(x).$$

Jeho souřadnicový vektor je $[\mathbf{p}]_{\mathcal{P}} = [2, 1]$.

5.6 Použití souřadnic

Pomocí souřadnic můžeme převést úlohy s vektory, které lze popsat pomocí lineárních kombinací bázových vektorů daného vektorového prostoru, na úlohy s aritmetickými vektory. K tomu použijeme zobrazení

$$\mathcal{V} \ni \mathbf{v} \mapsto [\mathbf{v}]_{\mathcal{E}} \in \mathbb{R}^n$$

LEMMA 1 Pro libovolné vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ a skalár α platí

1. $[\mathbf{u} + \mathbf{v}]_{\mathcal{E}} = [\mathbf{u}]_{\mathcal{E}} + [\mathbf{v}]_{\mathcal{E}}$
2. $[\alpha\mathbf{u}]_{\mathcal{E}} = \alpha[\mathbf{u}]_{\mathcal{E}}$

5.6 Použití souřadnic

Při řešení úloh s lineárními kombinacemi vektorů, například máme-li vyjádřit nějaký vektor jako lineární kombinaci jiných vektorů nebo máme-li rozhodnout, zda je nějaká množina vektorů nezávislá, postupujeme následovně:

- Zvolíme si takovou bázi $\mathcal{E}$ daného vektorového prostoru, ve které lze všechny vektory snadno vyjádřit.
- Najdeme souřadnicové vektory všech vektorů, které se vyskytují v popisu problému.
- Řešíme úlohu, kterou dostaneme z původní úlohy záměnou všech vektorů za souřadnicové vektory.

Postup ovšem předpokládá, že máme k dispozici vhodnou bázi, což nemusí být vždycky splněno.

5.6 Použití souřadnic

PŘÍKLAD 10 Najděte souřadnice mnohočlenu $p(x) = x^2 - 1$ v bázi $\mathcal{P} = (p_1, p_2, p_3)$, kde $p_1(x) = 1, p_2(x) = x + 1, p_3(x) = x^2 + x + 1.$

ŘEŠENÍ:

- Zvolíme si bázi $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, kde $e_1(x) = 1$, $e_2(x) = x$, $e_3(x) = x^2$.
- Najdeme souřadnice vektorů p, p_1, p_2, p_3 v bázi $\mathcal{E}$. Dostaneme

$$[p]_{\mathcal{E}} = [-1, 0, 1], [p_1]_{\mathcal{E}} = [1, 0, 0], [p_2]_{\mathcal{E}} = [1, 1, 0], [p_3]_{\mathcal{E}} = [1, 1, 1].$$

- Řešíme soustavu $[p]_{\mathcal{E}} = \alpha_1 [p_1]_{\mathcal{E}} + \alpha_2 [p_2]_{\mathcal{E}} + \alpha_3 [p_3]_{\mathcal{E}}$.
  Rozepsáním této rovnice po složkách dostaneme soustavu

$$\begin{array}{rcccccc} -1 & = & \alpha_1 & + & \alpha_2 & + & \alpha_3 \\ 0 & = & & & \alpha_2 & + & \alpha_3 \\ 1 & = & & & & & \alpha_3 \end{array}$$

  která má řešení $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = 1.$

Snadno ověříme, že opravdu platí $p = -p_1 - p_2 + p_3$.

5.6 Použití souřadnic

PŘÍKLAD 11 Rozhodněte, zda jsou mnohočleny $p_1(x) = x^2 + x + 1$, $p_2(x) = x^2 + 2x + 1$, $p_3(x) = x^2 + x + 2$ závislé nebo nezávislé.

ŘEŠENÍ:

- Zvolíme si bázi $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, kde $e_1(x) = 1$, $e_2(x) = x$, $e_3(x) = x^2$.
- Najdeme souřadnice vektorů p, p_1, p_2, p_3 v bázi $\mathcal{E}$. Dostaneme

$$[p_1]_{\mathcal{E}} = [1, 1, 1], [p_2]_{\mathcal{E}} = [1, 2, 1], [p_3]_{\mathcal{E}} = [2, 1, 1].$$

- Řešíme soustavu $\alpha_1 [p_1]_{\mathcal{E}} + \alpha_2 [p_2]_{\mathcal{E}} + \alpha_3 [p_3]_{\mathcal{E}} = \mathbf{o}$.

  Rozepsáním po složkách dostaneme soustavu:

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_1 & + & \alpha_2 & + & 2\alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_1 & + & 2\alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_1 & + & \alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 0 \end{array}$$

$$\text{Řešíme: } \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -\mathrm{r}_1 \\ -\mathrm{r}_1 \end{array} \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

  Odtud vidíme, že soustava má jediné řešení $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$.

  Mnohočleny p_1, p_2, p_3 jsou tedy lineárně nezávislé.