
4. Vektorové prostory

Vektorové prostory

1. Algebraické operace
2. Vektorový prostor
3. Vlastnosti vektorových prostorů
4. Vektorové podprostory
5. Součet a průnik podprostorů
6. Vektory v matematice a ve fyzice

4.1 Algebraické operace

DEFINICE 1

(Binární) *algebraická operace* \circ na neprázdné množině A je zobrazení

$$\circ : A \times A \ni (a, b) \mapsto a \circ b \in A.$$

Operace \circ na množině A tedy každé uspořádané dvojici $(a, b) \in A \times A$ prvků $a, b \in A$ přiřazuje jednoznačně určený prvek $a \circ b \in A$.

PŘÍKLAD 1 Sčítání $+$ definované na množině reálných čísel \mathbb{R} , které například dvojici $(2, 3) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ přiřazuje prvek $2 + 3 = 5 \in \mathbb{R}$.

4.1 Algebraické operace

PŘÍKLAD 2 Sčítání reálných (komplexních) aritmetických vektorů stejné dimenze nebo sčítání a násobení reálných (komplexních) čtvercových matic stejného řádu.

PŘÍKLAD 3 Skládání zobrazení \circ definované na množině všech zobrazení $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ dané množiny \mathcal{A} do sebe. Tato operace přiřazuje každé uspořádané dvojici zobrazení $(f, g) \in \mathcal{Z}(\mathcal{A}) \times \mathcal{Z}(\mathcal{A})$ složené zobrazení $f \circ g \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$ definované pro každé $x \in \mathcal{A}$ předpisem

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Jestliže například $f \in \mathcal{Z}(\mathbb{R})$ a $g \in \mathcal{Z}(\mathbb{R})$ jsou definovány předpisem $f(x) = x^2$ a $g(x) = x^2 + 1$, pak

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (x^2 + 1)^2.$$

4.2 Vektorový prostor

DEFINICE 2

Reálným (komplexním) vektorovým prostorem rozumíme množinu \mathcal{V} s algebraickou operací $+$: $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \ni (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathcal{V}$, kterou nazýváme *sčítání vektorů* a zobrazením $\mathbb{R}(\mathbb{C}) \times \mathcal{V} \ni (\alpha, \mathbf{v}) \mapsto \alpha \mathbf{v} \in \mathcal{V}$, které nazýváme *násobení skalárem*, přičemž platí:

$$\mathbf{VP1} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V} : \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$$

$$\mathbf{VP2} \quad \exists \mathbf{o} \in \mathcal{V} \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V} : \mathbf{u} + \mathbf{o} = \mathbf{o} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$$

$$\mathbf{VP3} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V} \exists -\mathbf{u} \in \mathcal{V} : \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = -\mathbf{u} + \mathbf{u} = \mathbf{o}$$

$$\mathbf{VP4} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V} : \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

$$\mathbf{VP5} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V} : \alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha \mathbf{u} + \alpha \mathbf{v}$$

$$\mathbf{VP6} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V} : (\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{u}$$

$$\mathbf{VP7} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V} : \alpha(\beta \mathbf{u}) = (\alpha \beta)\mathbf{u}$$

$$\mathbf{VP8} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V} : 1\mathbf{u} = \mathbf{u}$$

4.2 Vektorový prostor

PŘÍKLAD 4 Reálné aritmetické vektory daného řádu n se sčítáním vektorů a s násobením skalárem po složkách tvoří reálný vektorový prostor. Jeho nulový prvek je $\mathbf{o} = [0, \dots, 0]$, pro $\mathbf{a} = [a_1, \dots, a_n]$ je inverzním prvkem $-\mathbf{a} = [-a_1, \dots, -a_n]$. Pro $n = 1$ je množina skalárů i vektorů stejná.

PŘÍKLAD 5 Množina \mathcal{F} všech reálných funkcí s operací $+$ definovanou pro každé reálné x rovností

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

a s násobením skalárem, které pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ a $f \in \mathcal{F}$ definuje funkci $\alpha f \in \mathcal{F}$ rovností $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, tvoří reálný vektorový prostor. Nulový prvek o tohoto prostoru je dán předpisem $o(x) = 0$, prvek opačný k f je definován pomocí $(-f)(x) = -f(x)$.

4.3 Vlastnosti vektorových prostorů

VĚTA 1

Nechť \mathcal{V} je vektorový prostor s nulovým prvkem \mathbf{o} , $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ a nechť α je libovolný skalár. Pak platí následující rovnosti:

1. $0\mathbf{u} = \mathbf{o}$
2. $\alpha\mathbf{o} = \mathbf{o}$
3. $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$

DŮKAZ:

$$1. \quad 0\mathbf{u} \stackrel{VP2}{=} 0\mathbf{u} + \mathbf{o} \stackrel{VP3}{=} 0\mathbf{u} + (0\mathbf{u} + (-0\mathbf{u})) \stackrel{VP1}{=} (0\mathbf{u} + 0\mathbf{u}) + (-0\mathbf{u}) = \stackrel{VP6}{=} (0 + 0)\mathbf{u} + (-0\mathbf{u}) = 0\mathbf{u} + (-0\mathbf{u}) \stackrel{VP3}{=} \mathbf{o}.$$

2. Použijeme-li 1 pro $\mathbf{u} = \mathbf{o}$, dostaneme $0\mathbf{o} = \mathbf{o}$, takže

$$\alpha\mathbf{o} = \alpha(0\mathbf{o}) \stackrel{VP7}{=} (\alpha 0)\mathbf{o} = 0\mathbf{o} = \mathbf{o}.$$

$$3. \quad \mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} \stackrel{VP8}{=} 1\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} \stackrel{VP6}{=} (1 + (-1))\mathbf{u} = 0\mathbf{u} \stackrel{1}{=} \mathbf{o}.$$

4.4 Vektorový podprostor

DEFINICE 3

Neprázdná množina $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ je *podprostorem* vektorového prostoru \mathcal{V} , jestliže \mathcal{U} je vektorový prostor vzhledem ke sčítání vektorů a násobení skalárem v prostoru \mathcal{V} .

VĚTA 2

Množina $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ je podprostorem vektorového prostoru \mathcal{V} právě tehdy, když pro libovolné dva prvky $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{U}$ a pro libovolný skalár α platí:

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathcal{U}$
2. $\alpha\mathbf{u} \in \mathcal{U}$

DŮKAZ: Z 2 plyne $0\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ i $(-1)\mathbf{u} \in \mathcal{U}$, takže podle 1. a 3. věty 1 také nulový prvek $\mathbf{o} = 0\mathbf{u}$ i opačný prvek $-\mathbf{u} = (-1)\mathbf{u}$ patří do \mathcal{U} . Ostatní axiomy vektorového prostoru jsou splněny zřejmě také.

4.4 Vektorový podprostor

PŘÍKLAD 6 Nechť p je pevně zvolená přímka v prostoru procházející zvoleným počátkem souřadnic. Pak množina všech polohových vektorů bodů na přímce p tvoří podprostor vektorového prostoru všech vázaných vektorů v prostoru.

PŘÍKLAD 7 Pro dané $k \geq 1$ je množina \mathcal{P}_k všech mnohočlenů stupně menšího než k podprostorem vektorového prostoru \mathcal{F} z příkladu 5.

PŘÍKLAD 8 Nechť \mathcal{V} je libovolný prostor. Pak $\mathcal{O} = \{\mathbf{o}\}$ je podprostorem \mathcal{V} , neboť $\mathbf{o} + \mathbf{o} = \mathbf{o}$ a pro libovolný skalár α platí, že $\alpha\mathbf{o} = \mathbf{o}$. Vektorový prostor \mathcal{O} je nejmenší podprostor daného vektorového prostoru a nazývá se *nulovým podprostorem*.

4.4 Vektorový podprostor

PŘÍKLAD 9 Nechť $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ je konečná množina vektorů vektorového prostoru \mathcal{V} . Množina všech vektorů, které lze zapsat ve tvaru $\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k$ je podprostorem vektorového prostoru \mathcal{V} , který nazýváme *lineární obal* množiny \mathcal{S} . Lineární obal dané množiny vektorů \mathcal{S} značíme $\langle \mathcal{S} \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle$.

PŘÍKLAD 10 $\mathcal{U} = \{[u_1, u_2, u_3] \in \mathbb{R}^3 : u_1 - 2u_2 + u_3 = 0\}$ tvoří podprostor vektorového prostoru \mathbb{R}^3 . Vyřešíme-li soustavu jedné rovnice o třech neznámých $u_1 - 2u_2 + u_3 = 0$ dostaneme řešení ve tvaru $u_1 = 2t - s, u_2 = t, u_3 = s$ s parametry $t, s \in \mathbb{R}$. Pak můžeme podprostor \mathcal{U} zapsat ve tvaru:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \{[2t - s, t, s], t, s \in \mathbb{R}\} = \{t[2, 1, 0] + s[-1, 0, 1], t, s \in \mathbb{R}\} = \\ &= \langle [2, 1, 0], [-1, 0, 1] \rangle. \end{aligned}$$

4.5 Součet a průnik podprostorů

Pro libovolné dva podprostory \mathcal{U}, \mathcal{V} daného vektorového prostoru \mathcal{W} můžeme vytvořit *průnik podprostorů* $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ jako průnik množin \mathcal{U}, \mathcal{V} a *součet podprostorů*

$$\mathcal{U} + \mathcal{V} = \{\mathbf{u} + \mathbf{v} : \mathbf{u} \in \mathcal{U}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}\}.$$

Průnik podprostorů není nikdy prázdný, neboť do něho vždy patří nulový prvek.

VĚTA 2

Nechť \mathcal{U}, \mathcal{V} jsou podprostory vektorového prostoru \mathcal{W} . Pak $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ i $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ jsou podprostory \mathcal{W} .

DŮKAZ: Nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$, tedy $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$, $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$, $\mathbf{v} \in \mathcal{U}$ a $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$. Jelikož \mathcal{U} a \mathcal{V} jsou podprostory téhož prostoru, platí $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathcal{U}$ a $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathcal{V}$, tedy $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$, a pro libovolný skalár α platí také $\alpha\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ i $\alpha\mathbf{u} \in \mathcal{V}$, takže $\alpha\mathbf{u} \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$. Důkaz, že $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ je podprostorem \mathcal{W} je obdobný.

4.5 Součet a průnik podprostorů

PŘÍKLAD 11 Jsou dány podprostory vektorového prostoru \mathbb{R}^3 :

$$\mathcal{U} = \{[u_1, u_2, u_3] \in \mathbb{R}^3 : u_1 - 2u_2 + u_3 = 0\} \text{ a}$$

$$\mathcal{V} = \{[v_1, v_2, v_3] \in \mathbb{R}^3 : v_2 + v_3 = 0\}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U} \cap \mathcal{V} &= \{[u_1, u_2, u_3] \in \mathbb{R}^3 : u_1 - 2u_2 + u_3 = 0 \wedge u_2 + u_3 = 0\} = \\ &= \{[u_1, u_2, u_3] : u_1 = -3t, u_2 = -t, u_3 = t, t \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{[-3t, -t, t], t \in \mathbb{R}\} = \langle [-3, -1, 1] \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U} + \mathcal{V} &= \{[u_1, u_2, u_3] : u_1 = 2t - s, u_2 = t, u_3 = s, t, s \in \mathbb{R}\} + \\ &+ \{[v_1, v_2, v_3] : v_1 = p, v_2 = -q, v_3 = q, p, q \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{[2t - s + p, t - q, s + q], t, s, p, q \in \mathbb{R}\} = \\ &= \langle [2, 1, 0], [-1, 0, 1], [1, 0, 0], [0, -1, 1] \rangle \end{aligned}$$

Jestliže průnik podprostorů \mathcal{U}, \mathcal{V} daného vektorového prostoru \mathcal{W} je nulový podprostor \mathcal{O} , pak se součet $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ nazývá *direktní (přímý) součet podprostorů* a značí se $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$.

4.6 Vektory v matematice a fyzice

- Vektorové prostory zobecňují pojem vektoru známého např. z fyziky, tj. veličina mající velikost a směr
 - Nejedná se o veličiny, které mají velikost a směr (Co je velikost vektoru z prostoru všech funkcí \mathcal{F} ?)
 - Dokonce i veličiny, které mají velikost a směr nemusí splňovat axiomy vektorového prostoru
- V případě abstraktních vektorů je někdy možné je pro zjednodušení nahradit "šipkami", tj. veličinami, které mají velikost a směr.