1. Matice a maticové operace

Matice a maticové operace

1. Aritmetické vektory
2. Operace s aritmetickými vektory
3. Matice
4. Násobení matice skalárem a sčítání matic
5. Transponované matice
6. Násobení matice a vektoru
7. Násobení matic

1.1 Aritmetické vektory

DEFINICE 1
n-rozměrný *aritmetický vektor* je uspořádaná n-tice čísel, jejíž prvky se nazývají *složky*. Tyto uspořádané n-tice budeme zapisovat do hranatých závorek do řádků nebo sloupců.

PŘÍKLAD 1 $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]$, $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1, \\ 3, \\ -2, \\ 4, \\ 0 \end{bmatrix}$

1.1 Aritmetické vektory

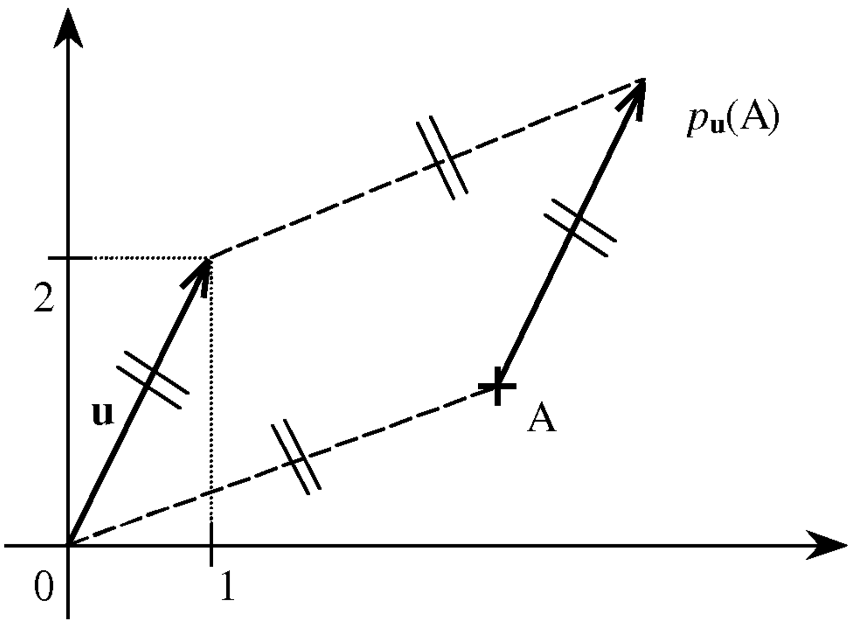
Jestliže $\mathbf{v}$ je aritmetický vektor, pak i-tou složku vektoru $\mathbf{v}$ budeme značit $[\mathbf{v}]_i$. Např. $[\mathbf{u}]_1 = u_1$, $[\mathbf{w}]_3 = -2$.
Počet složek aritmetického vektoru nazýváme jeho *rozměrem* nebo též *dimenzí*. Například vektor $\mathbf{x} = [1, 2]$ je dvourozměrný, vektor $\mathbf{w}$ je pětirozměrný.

DEFINICE 2
Dva aritmetické vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ považujeme za *stejné* (píšeme **u = v**), jestliže mají stejnou dimenzi n a stejné odpovídající složky, tj. $[\mathbf{u}]_1 = [\mathbf{v}]_1, ..., [\mathbf{u}]_n = [\mathbf{v}]_n$. Vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$, které nejsou stejné, jsou *různé (píšeme $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$).*

Jestliže $\mathbf{u} = [1, 2]$ a $\mathbf{v} = [2, 1]$, pak $[\mathbf{u}]_1 = 1, [\mathbf{v}]_1 = 2$, takže $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$.

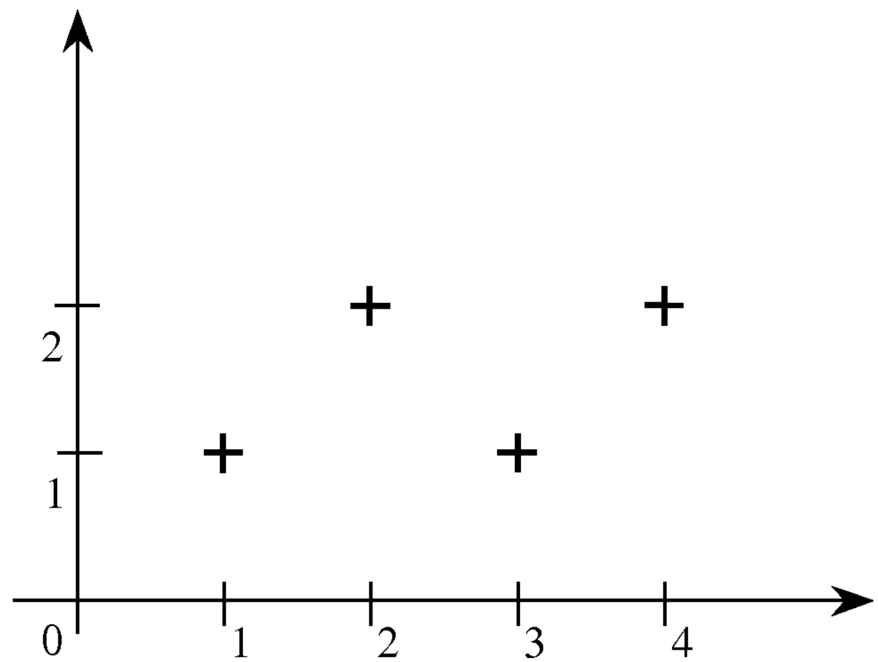
1.1 Aritmetické vektory

Dvou a třírozměrné vektory
- *polohové vektory*



Volné a vázané vektory

Vícerozměrné vektory:



Znázornění vektoru $[1, 2, 1, 2]$

1.2 Operace s aritmetickými vektory

DEFINICE 3
Součin skaláru (čísla) α *a aritmetického vektoru* $\mathbf{u} = [u_1, ..., u_n]$ je vektor $\alpha\mathbf{u}$ definovaný předpisem

$$\alpha\mathbf{u} = [\alpha u_1, ..., \alpha u_n].$$

Pro složky $\alpha\mathbf{u}$ tedy platí

$$[\alpha\mathbf{u}]_i = \alpha[\mathbf{u}]_i, \quad i = 1, ..., n,$$

například

$$3[1, 2] = [3 \cdot 1, 3 \cdot 2] = [3, 6],$$

$$\big[3[1, 2]\big]_1 = 3 \cdot 1 = 3, \quad \big[3[1, 2]\big]_2 = 3 \cdot 2 = 6.$$

1.2 Operace s aritmetickými vektory

DEFINICE 4
Součet aritmetických vektorů $\mathbf{u} = [u_1, ..., u_n]$ a $\mathbf{v} = [v_1, ..., v_n]$ stejné dimenze je vektor $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ definovaný předpisem

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = [u_1 + v_1, ..., u_n + v_n].$$

Pro složky $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ tedy platí

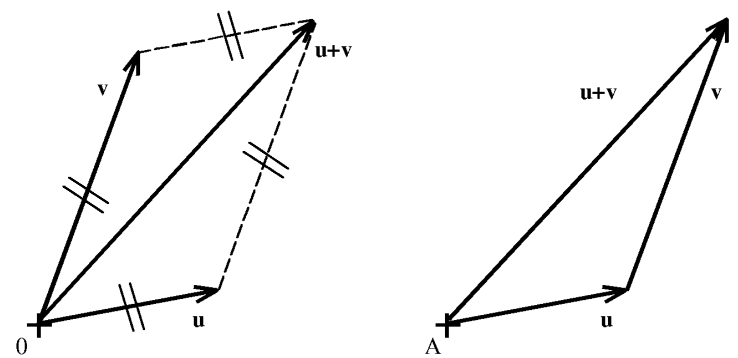
$$[\mathbf{u} + \mathbf{v}]_i = [\mathbf{u}]_i + [\mathbf{v}]_i, \quad i = 1, ..., n.$$

Například

$$[1,2] + [2,3] = [1+2, 2+3] = [3,5],$$

$$\big[[1,2] + [2,3]\big]_1 = 1 + 2 = 3,$$

$$\big[[1,2] + [2,3]\big]_2 = 2 + 3 = 5.$$



a) Vázané vektory b) Volné vektory

1.2 Operace s aritmetickými vektory

VĚTA 1
Pro libovolná čísla α, β a vektory **u**,**v**,**w** stejné dimenze platí:

$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} \tag{1}$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u} \tag{2}$$

$$\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v} \tag{3}$$

$$(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u} \tag{4}$$

$$\alpha(\beta\mathbf{u}) = (\alpha\beta)\mathbf{u} \tag{5}$$

$$1\mathbf{u} = \mathbf{u} \tag{6}$$

DŮKAZ: (6) $[1u]_i = 1[u]_i = [u]_i$

1.2 Operace s aritmetickými vektory

Vlastnosti (3),(4),(5) jsou velmi důležité při výpočtech s velmi velkými vektory.

Operace $\alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$ totiž potřebuje $2n$ operací násobení skaláru se složkami obou vektorů a n operací součtů složek vektorů, tj. celkem $3n$ operací, výraz $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ potřebuje n při součtu obou vektorů a n operací násobení složek vektorů skalárem, tj. celkem $2n$ operací, tedy pouze $\frac{2}{3}$ původního počtu operací.

1.2 Operace s aritmetickými vektory

DEFINICE 5
Vektor $\mathbf{o} = [0, \ldots, 0]$ se nazývá *nulový vektor*. Nulový vektor dimenze n budeme značit $\mathbf{o}_n$.
Je-li vektor $\mathbf{u} = [u_1, ..., u_n]$ libovolný aritmetický vektor, pak se vektor $-\mathbf{u} = [-u_1, ..., -u_n] = (-1)\mathbf{u}$ nazývá *opačný vektor* k vektoru $\mathbf{u}$.

Je-li $\mathbf{u}$ libovolný n-rozměrný vektor, pak $\mathbf{u} + \mathbf{o}_n = \mathbf{u}$.
Opačný vektor splňuje $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{o}$.

Jestliže $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ jsou libovolné aritmetické vektory stejné dimenze, pak jediný vektor $\mathbf{x}$, který splňuje $\mathbf{u} + \mathbf{x} = \mathbf{v}$ lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{x} = \mathbf{v} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{v}.$$

Rozdíl aritmetických vektorů: $\mathbf{v} - \mathbf{u} = \mathbf{v} + (-\mathbf{u})$

1.3 Matice

DEFINICE 6

Nechť jsou dány prvky $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ z dané množiny $\mathcal{F}$. *Matice typu* (m,n) (stručně $m \times n$ matice) je obdélníková tabulka

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

která má mn *prvků* a_{ij} uspořádaných do m *řádků* $\mathbf{r}_i^{\mathbf{A}}$ a n *sloupců* $\mathbf{s}_j^{\mathbf{A}}$, takže

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m^{\mathbf{A}} \end{bmatrix} = \left[\mathbf{s}_1^{\mathbf{A}}, \ldots, \mathbf{s}_n^{\mathbf{A}}\right],$$

$$\mathbf{r}_i^{\mathbf{A}} = \left[a_{i1}, \ldots, a_{in}\right], \quad \mathbf{s}_j^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}.$$

Stručně píšeme též $\mathbf{A} = [a_{ij}]$.

1.3 Matice

- Prvky množiny $\mathcal{F}$ nazýváme také *skaláry* (lze je sčítat a násobit obdobně jako čísla).
- Množinu všech matic typu (m, n) s prvky z množiny $\mathcal{F}$ budeme značit $\mathcal{F}^{m,n}$. (Matice reálné, komplexní, polynomiální).
- Jestliže $m = n$, pak se **A** nazývá *čtvercová matice* řádu n.
- Matici typu $(1, n)$ nazýváme *řádkovým vektorem* řádu n.
- Matici typu $(m, 1)$ nazýváme *sloupcovým vektorem* řádu m.
- Prvky $a_{11}, \ldots, a_{ss}$, $s = \min\{m, n\}$ tvoří *diagonálu* matice **A**.
- Prvek v i-tém řádku a j-tém sloupci matice **A** značíme $[\mathbf{A}]_{ij}$.

1.3 Matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&1&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&1 \\ 1&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&1 \end{bmatrix}$$

- Reálná matice typu (7,8), tj. $A \in \mathbb{R}^{7,8}$.
- Diagonála: $1, 0, 0, 1, 1, 0, 0$.
- $[A]_{63} = 1$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2&-1&0&0&0 \\ -1&2&-1&0&0 \\ 0&-1&2&-1&0 \\ 0&0&-1&2&-1 \\ 0&0&0&-1&2 \end{bmatrix}$$

- Reálná čtvercová matice řádu 5, tj. $A \in \mathbb{R}^{5,5}$.
- Diagonála: $2, 2, 2, 2, 2$.
- $[A]_{43} = -1$.

1.3 Matice

DEFINICE 7
Matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ považujeme za *stejné* (píšeme $\mathbf{A} = \mathbf{B}$), jestliže jsou stejného typu a mají stejné odpovídající prvky, tj. $[\mathbf{A}]_{ij} = [\mathbf{B}]_{ij}$. Matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$, které nejsou stejné, jsou *různé* (píšeme $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$).

PŘÍKLAD 2

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \neq [1, 2], \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

1.4 Násobení matice skalárem a sčítání matic

DEFINICE 8
Součin skaláru α *a matice* $\mathbf{A}$ je matice $\alpha\mathbf{A}$ stejného typu jako $\mathbf{A}$ definovaná předpisem

$$[\alpha\mathbf{A}]_{ij} = \alpha[\mathbf{A}]_{ij}.$$

PŘÍKLAD 3

$$2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

1.4 Násobení matice skalárem a sčítání matic

DEFINICE 9
Součet matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ stejného typu je matice $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ stejného typu jako $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ definovaná předpisem

$$[\mathbf{A} + \mathbf{B}]_{ij} = [\mathbf{A}]_{ij} + [\mathbf{B}]_{ij}.$$

PŘÍKLAD 4

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

1.4 Násobení matice skalárem a sčítání matic

VĚTA 2
Pro libovolné číselné matice **A**, **B**, **C** stejného typu a pro libovolné skaláry α, β platí vztahy:

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} \tag{1}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \tag{2}$$

$$\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B} \tag{3}$$

$$(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A} \tag{4}$$

$$\alpha(\beta\mathbf{A}) = (\alpha\beta)\mathbf{A} \tag{5}$$

$$1\mathbf{A} = \mathbf{A} \tag{6}$$

DŮKAZ: (6) $[1A]_{ij} = 1[A]_{ij} = [A]_{ij}$

1.4 Násobení matice skalárem a sčítání matic

Obdobně jako v případě vektorů, vlastnosti (3),(4),(5) jsou velmi důležité při výpočtech s velmi velkými maticemi.

Operace $\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$ se čtvercovou maticí řádu n totiž potřebuje $2n^2$ operací násobení skalárů se složkami matice a n^2 operací součtů složek matic, tj. celkem $3n^2$ operací, výraz $(\alpha + \beta)\mathbf{A}$ potřebuje 1 při součtu obou skalárů a n^2 operací násobení složek matice skalárem, tj. celkem $n^2 + 1$ operací, tedy pouze $\frac{1}{3}$ původního počtu operací.

1.4 Násobení matice skalárem a sčítání matic

DEFINICE 10
Matice

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

se nazývá *nulová matice*. Nulová matice typu (m, n) se značí $\mathbf{O}_{mn}$.
Je-li $\mathbf{A}$ libovolná matice, pak matice $-\mathbf{A}$ se nazývá *opačná matice* k matici $\mathbf{A}$ a platí

$$[-\mathbf{A}]_{ij} = -[\mathbf{A}]_{ij}$$

1.4 Násobení matice skalárem a sčítání matic

VĚTA 3
Pro libovolnou matici $\mathbf{A}$ a nulovou matici stejného typu platí

$$\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{A} \tag{1}$$

$$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{O} \tag{2}$$

$$-\mathbf{A} = (-1)\mathbf{A} \tag{3}$$

DŮKAZ:

(1): $[\mathbf{A} + \mathbf{O}]_{ij} = [\mathbf{A}]_{ij} + [\mathbf{O}]_{ij} = [\mathbf{A}]_{ij} + 0 = [\mathbf{A}]_{ij}$,

(2):

$[\mathbf{A} + (-\mathbf{A})]_{ij} = [\mathbf{A}]_{ij} + [-\mathbf{A}]_{ij} = [\mathbf{A}]_{ij} + (-[\mathbf{A}]_{ij}) = 0 = [\mathbf{O}]_{ij}$,

(3): $[-\mathbf{A}]_{ij} = -[\mathbf{A}]_{ij} = (-1)[\mathbf{A}]_{ij} = [(-1)\mathbf{A}]_{ij}$.

1.4 Násobení matice skalárem a sčítání matic

Jestliže matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou libovolné matice stejného typu, pak jedinou matici $\mathbf{X}$, která splňuje $\mathbf{A} + \mathbf{X} = \mathbf{B}$, lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{X} = \mathbf{B} + (-\mathbf{A}) = (-\mathbf{A}) + \mathbf{B}.$$

Definujeme *odečítání matic* nebo též *rozdíl matic* předpisem

$$\mathbf{B} - \mathbf{A} = \mathbf{B} + (-\mathbf{A}).$$

PŘÍKLAD 5

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} - \mathbf{A} = \mathbf{B} + (-\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

1.5 Transponované matice

DEFINICE 11

K dané matici $\mathbf{A}$ typu (m, n) definujeme matici transponovanou $\mathbf{A}^\top$ typu (n, m) předpisem

$$\left[\mathbf{A}^\top\right]_{ij} = \left[\mathbf{A}\right]_{ji}\,.$$

PŘÍKLAD 6

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

VĚTA 4

Pro matice stejného typu a libovolný skalár platí:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^\top = \mathbf{A}^\top + \mathbf{B}^\top\,, \tag{1}$$

$$(\alpha \mathbf{A})^\top = \alpha \mathbf{A}^\top\,. \tag{2}$$

1.6 Násobení matice a vektoru

Mějme soustavu:

$$\begin{array}{rrcl} x_1 & +x_2 & = & 2 \\ x_1 & -x_2 & = & 0 \end{array}$$

S využitím definice násobení vektoru skalárem a součtu vektorů:

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1.6 Násobení matice a vektoru

Předchozí rovnici lze přepsat:

$$x_1\mathbf{s}_1^{\mathbf{A}} + x_2\mathbf{s}_2^{\mathbf{A}} = \mathbf{b} \tag{$*$}$$

Ze sloupcových vektorů $\mathbf{s}_1^{\mathbf{A}}, \mathbf{s}_2^{\mathbf{A}}$ sestavíme matici

$$\mathbf{A} = \left[\mathbf{s}_1^{\mathbf{A}}, \mathbf{s}_2^{\mathbf{A}}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Levá strana rovnice ($*$) definuje součin matice **A** a vektoru **x**, takže

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \qquad \text{kde } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1.6 Násobení matice a vektoru

DEFINICE 12

Součinem matice $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ typu (m, n) *a sloupcového vektoru* $\mathbf{x} = [x_i]$ dimenze n nazýváme vektor dimenze m definovaný předpisem

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} = x_1\mathbf{s}_1^{\mathbf{A}} + \cdots + x_n\mathbf{s}_n^{\mathbf{A}}.$$

Rozepsáním definice po složkách dostaneme

$$[\mathbf{y}]_i = [\mathbf{A}\mathbf{x}]_i = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}}\mathbf{x}.$$

Toto pravidlo si můžeme znázornit pomocí:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{y} & & \mathbf{A} & \mathbf{x} & \\ \begin{bmatrix} \\ y_i \\ \\ \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \\ & \longrightarrow & \\ & & \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} & \Big\downarrow \end{array}$$

1.6 Násobení matice a vektoru

Jako příklady násobení matice a vektoru si uveďme

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 & + & 1 \cdot 2 & + & 0 \cdot 3 \\ -1 \cdot 1 & + & 3 \cdot 2 & + & 1 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

VĚTA 5

Pro libovolné matice **A**, **B** typu (m, n), n-rozměrné vektory **u**, **v** a skalár α platí:

$$\mathbf{A}(\alpha\mathbf{u}) = \alpha(\mathbf{A}\mathbf{u}) = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{u} \tag{1}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{A}\mathbf{v} \tag{2}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{3}$$

DŮKAZ: (2)

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{A}(\mathbf{u} + \mathbf{v})\right]_i &= \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a_{i1}(u_1 + v_1) + \cdots + a_{in}(u_n + v_n) = \\ &= (a_{i1}u_1 + \cdots + a_{in}u_n) + (a_{i1}v_1 + \cdots + a_{in}v_n) = \\ &= \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}}\mathbf{u} + \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}}\mathbf{v} = [\mathbf{A}\mathbf{u}]_i + [\mathbf{A}\mathbf{v}]_i, \end{aligned}$$

1.7 Násobení matic

A, **B** libovolné čtvercové matice řádu 3, **x** vektor dimenze 3.

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{x}) = \mathbf{A}\left[x_1\mathbf{s}_1^{\mathbf{B}} + x_2\mathbf{s}_2^{\mathbf{B}} + x_3\mathbf{s}_3^{\mathbf{B}}\right] = x_1\mathbf{A}\mathbf{s}_1^{\mathbf{B}} + x_2\mathbf{A}\mathbf{s}_2^{\mathbf{B}} + x_3\mathbf{A}\mathbf{s}_3^{\mathbf{B}}$$

Odtud můžeme definovat matici $\mathbf{AB} = \left[\mathbf{A}\mathbf{s}_1^{\mathbf{B}}, \mathbf{A}\mathbf{s}_2^{\mathbf{B}}, \mathbf{A}\mathbf{s}_3^{\mathbf{B}}\right]$.

DEFINICE 13

Jestliže **A** je matice typu (m, p) a **B** je matice typu (p, n), pak *součin matic* **A** a **B** je matice **AB** typu (m, n) definovaná předpisem

$$\mathbf{AB} = \left[\mathbf{A}\mathbf{s}_1^{\mathbf{B}}, \ldots, \mathbf{A}\mathbf{s}_n^{\mathbf{B}}\right].$$

1.7 Násobení matic

Rozepíšeme-li si definici násobení matic po složkách, dostaneme

$$[\mathbf{AB}]_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}}\mathbf{s}_j^{\mathbf{B}}$$

a

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}}\mathbf{s}_1^{\mathbf{B}} & \dots & \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}}\mathbf{s}_n^{\mathbf{B}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{r}_m^{\mathbf{A}}\mathbf{s}_1^{\mathbf{B}} & \dots & \mathbf{r}_m^{\mathbf{A}}\mathbf{s}_n^{\mathbf{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}}\mathbf{B} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m^{\mathbf{A}}\mathbf{B} \end{bmatrix}.$$

Toto pravidlo si můžeme znázornit pomocí:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{AB} & \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \begin{bmatrix} \\ \quad [AB]_{ij} \quad \\ \\ \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} a_{i1} & \underset{\longrightarrow}{\dots} & a_{ip} \\ & & \\ & & \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} b_{1j} & \\ \vdots & \downarrow \\ b_{pj} & \end{bmatrix} \end{array}$$

1.7 Násobení matic

PŘÍKLAD 7 Příklady násobení matic:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0 & 0 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \\ -2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & -2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{nelze násobit!!!}$$

1.7 Násobení matic

Z definice lze ihned vidět, že pro libovolné matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ a vektor $\mathbf{x}$ je $\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{x}) = (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{x}$ pokud jsou tyto výrazy definovány. Obecněji platí následující vztahy.

VĚTA 6

Pro libovolný skalár α a matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ platí:

$$\mathbf{A}(\alpha\mathbf{B}) = \alpha(\mathbf{A}\mathbf{B}) = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} \tag{1}$$
$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\mathbf{B}+\mathbf{A}\mathbf{C} \tag{2}$$
$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{C}+\mathbf{B}\mathbf{C} \tag{3}$$

kdykoliv jsou uvedené výrazy definovány.

DŮKAZ (2):
$$\big[A(B+C)\big]_{ij} = \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}}\mathbf{s}_j^{\mathbf{B}+\mathbf{C}} = \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}}(\mathbf{s}_j^{\mathbf{B}}+\mathbf{s}_j^{\mathbf{C}}) =$$
$$= \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}}\mathbf{s}_j^{\mathbf{B}} + \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}}\mathbf{s}_j^{\mathbf{C}} = [AB]_{ij} + [AC]_{ij}$$

1.7 Násobení matic

Násobení matic je velmi výpočetně nákladné. Je proto velmi důležité operace dělat co nejefektivněji.

Operace násobení matic se čtvercovými maticemi řádu n totiž potřebuje $n^2(2n-1) = 2n^3 - n^2$ operací, tj. výraz $\mathbf{AC} + \mathbf{BC}$ potřebuje $4n^3 - 2n^2$ při součinech matic a n^2 operací pro součet matic, tj. celkem $4n^3 - n^2$ operací, zatímco výraz $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C}$ potřebuje $2n^3$ tedy přibližně $\frac{1}{2}$ původního počtu operací.

1.7 Násobení matic

VĚTA 7
Pro násobení matice $\mathbf{A}$ typu (m, p), matice $\mathbf{B}$ typu (p, q) a matice $\mathbf{C}$ typu (q, n) platí také tzv. *asociativní zákon*, tj.

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$$

DŮKAZ: $$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = \mathbf{A}\left[\mathbf{B}\mathbf{s}_1^{\mathbf{C}}, \ldots, \mathbf{B}\mathbf{s}_n^{\mathbf{C}}\right] = \left[\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{s}_1^{\mathbf{C}}), \ldots, \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{s}_n^{\mathbf{C}})\right] = \\ = \left[(\mathbf{AB})\mathbf{s}_1^{\mathbf{C}}, \ldots, (\mathbf{AB})\mathbf{s}_n^{\mathbf{C}}\right] = (\mathbf{AB})\mathbf{C}.$$

Indukcí lze dokázat obdobné tvrzení i pro součin více než tří matic.

Odtud speciálně vyplývá, že *mocnina čtvercové matice*

$$\mathbf{A}^k = \underbrace{\mathbf{A}\mathbf{A}\cdots\mathbf{A}}_{k}$$

je definována jednoznačně neboť nezáleží na uzávorkování.

1.7 Násobení matic

DEFINICE 14

Čtvercová matice

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

se nazývá *jednotková matice*. Jednotková matice řádu n se značí $\mathbf{I}_n$.

VĚTA 8

Jestliže $\mathbf{A}$ je libovolná matice, pak pro jednotkové matice příslušné dimenze platí

$$\mathbf{AI} = \mathbf{A}, \quad \mathbf{IA} = \mathbf{A}.$$

DŮKAZ:

Např. $[AI]_{ij} = a_{i1} \cdot 0 + \cdots + a_{ij} \cdot 1 + \cdots + a_{in} \cdot 0 = a_{ij} = [A]_{ij}$

1.7 Násobení matic

Pro matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

platí

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

takže $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

Navíc platí

$$\mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{O}.$$

Pro násobení matic tedy *neplatí komutativní zákon* a *mocnina nenulové matice* může být *nulová matice*!

1.7 Násobení matic

VĚTA 9
Jestliže je **A** matice typu (m, p) a **B** je matice typu (p, n), pak platí:

$$(\mathbf{AB})^\top = \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top$$

DŮKAZ:

$$\begin{aligned}
\left[(\mathbf{AB})^\top\right]_{ij} =& [\mathbf{AB}]_{ji} = \mathbf{r}_j^{\mathbf{A}} \mathbf{s}_i^{\mathbf{B}} = \\
=& a_{j1} b_{1i} + \cdots + a_{jp} b_{pi} = \\
=& b_{1i} a_{j1} + \cdots + b_{pi} a_{jp} = \\
=& \left(\mathbf{s}_i^{\mathbf{B}}\right)^\top \left(\mathbf{r}_j^{\mathbf{A}}\right)^\top = \left[\mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top\right]_{ij}.
\end{aligned}$$