

Lineární algebra

doc. Ing. Petr Beremlijski, Ph.D.

Katedra aplikované matematiky, FEI

petr.beremlijski@vsb.cz, místnost EA 534

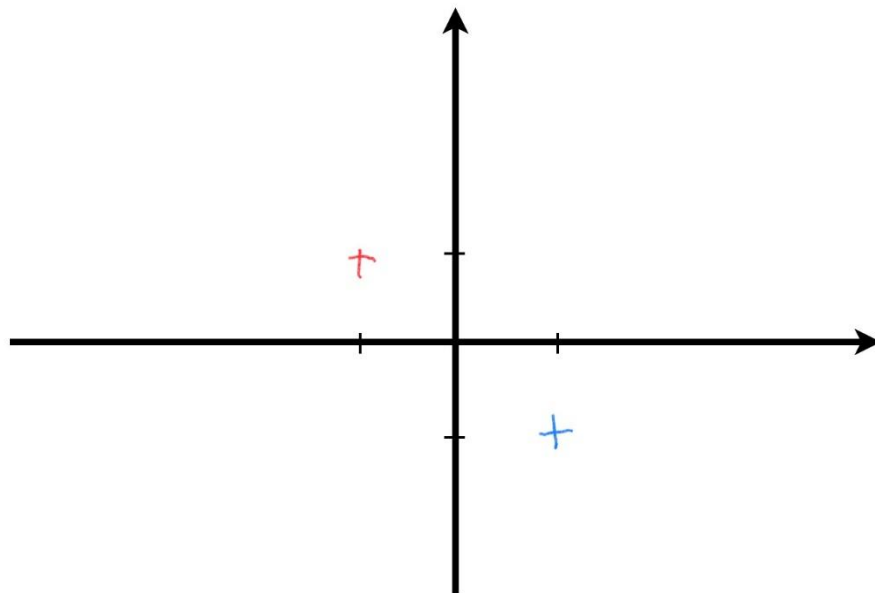
<http://homel.vsb.cz/~ber95/LA/la.htm>

Aplikace I: geometrická zobrazení

- Středová souměrnost
- Osová souměrnost
- Rotace
- Posunutí
- Stejnolehlost

Aplikace I: geometrická zobrazení

- **Středová souměrnost** se středem S je zobrazení, které zobrazí:
 - každý bod $X \neq S$ na bod X' tak, že bod S je středem úsečky XX' ,
 - bod S na $S' = S$.



Aplikace I: geometrická zobrazení

- **Středová souměrnost** se středem $S = [0,0]$ může být popsána pomocí maticového násobení.

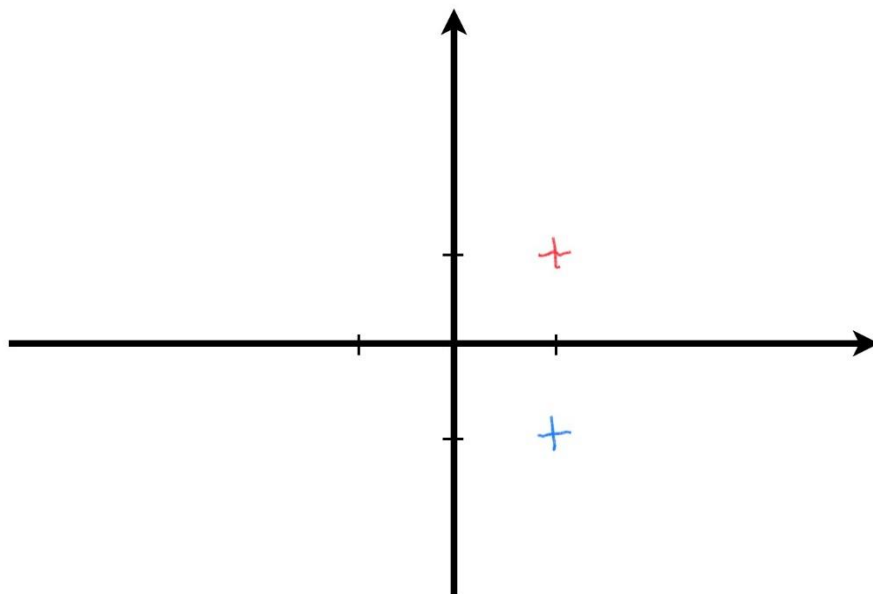
$$P' = T \cdot P, \text{ kde } T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Např.: } P = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\text{pak } P' = T \cdot P = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Aplikace I: geometrická zobrazení

- **Osová souměrnost** s osou o je zobrazení, které zobrazí
 - každý bod $X \notin o$ na bod X' tak, že přímka XX' je kolmá k přímce o a střed úsečky XX' leží na přímce o ,
 - každý bod $Y \in o$ na bod $Y' = Y$.



Aplikace I: geometrická zobrazení

- **Osová souměrnost** s osou $o = x$ může být popsána pomocí maticového násobení.

$$P' = T \cdot P, \text{ kde } T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

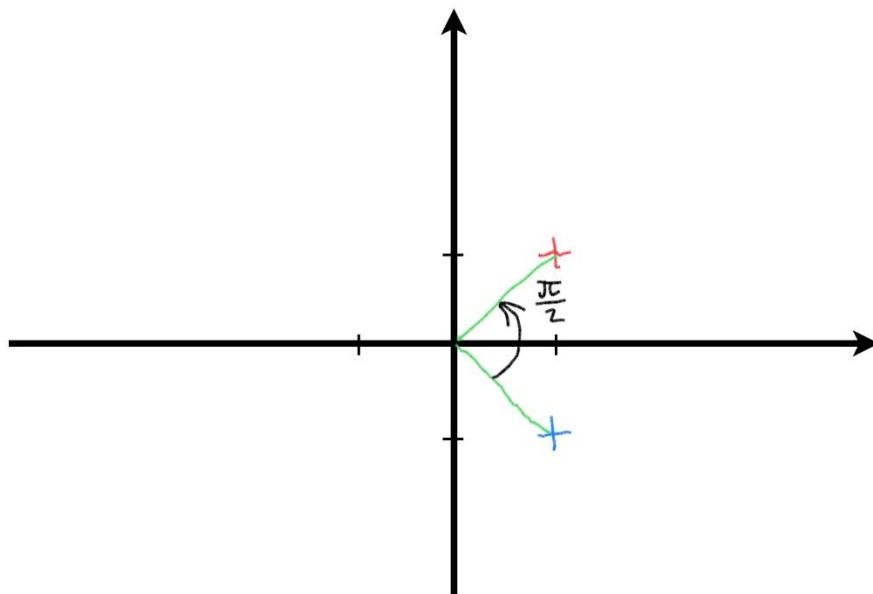
$$\text{Např.: } P = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\text{pak } P' = T \cdot P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Aplikace I: geometrická zobrazení

- **Rotace** kolem středu S o úhel φ je zobrazení, které zobrazí
 - každý bod $X \neq S$ na bod X' tak, že $|X'S| = |XS|$ a orientovaný úhel $\widehat{XSX'}$ má velikost φ
 - bod S na $S' = S$.

Rotace proti směru hodinových ručiček se chápe v kladném smyslu, ve směru hodinových ručiček ji chápeme v záporném smyslu.



Aplikace I: geometrická zobrazení

- **Rotace** kolem středu S může být popsána pomocí maticového násobení.

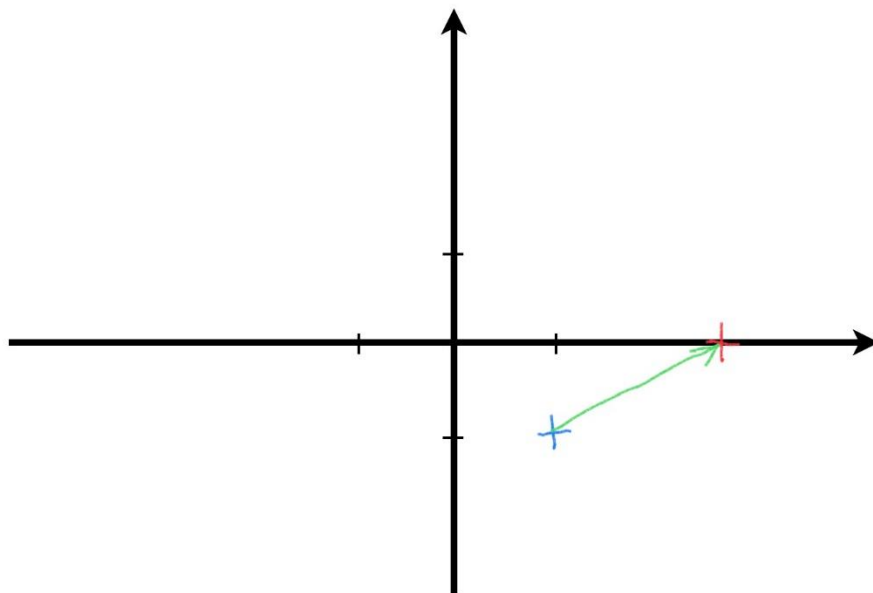
$$P' = T \cdot P, \text{ kde } T = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

$$\text{Např.: } P = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ a } \varphi = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{pak } P' = T \cdot P = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Aplikace I: geometrická zobrazení

- **Posunutí** o vector S je zobrazení, které zobrazí
 - každý bod X na bod X' tak, že $X' = X + S$.



Aplikace I: geometrická zobrazení

- **Posunutí** o vector S může být popsáno pomocí součtu matic.

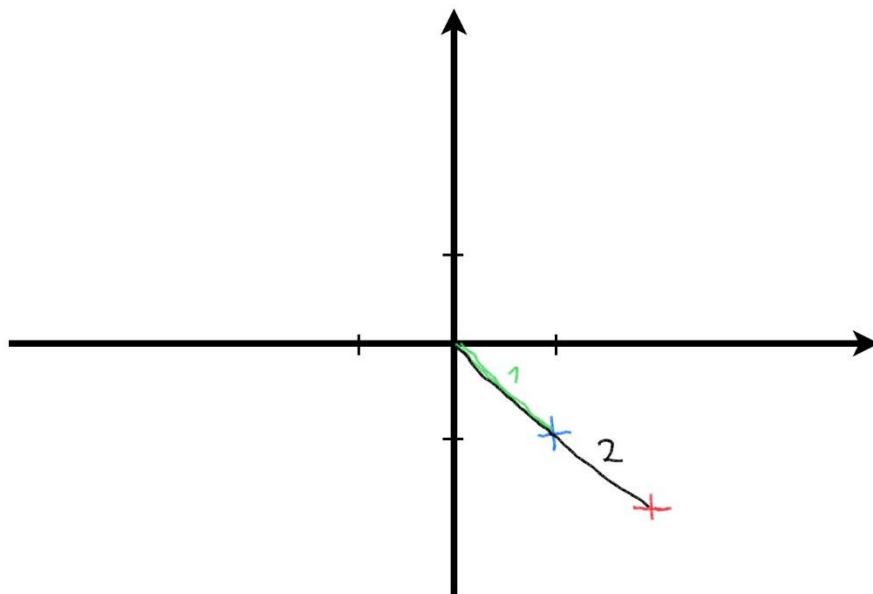
$$P' = P + S$$

$$\text{Např.: } P = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ a } S = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{pak } P' = P + S = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aplikace I: geometrická zobrazení

- **Stejnolehlost** se středem S a koeficientem κ ($\kappa \neq 0$) je zobrazení, které zobrazí
 - každý bod $X \neq S$ na bod X' tak, že $SX' = \kappa SX$,
 - bod S na $S' = S$.



Aplikace I: geometrická zobrazení

- **Stejnolehlost** s osou $o = x$ může být popsána pomocí maticového násobení.

$$P' = T \cdot P, \text{ kde } T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Např.: } P = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \text{ pak } P' = T \cdot P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Aplikace I: geometrická zobrazení



GEOMETRICKÁ ZOBRAZENÍ

Interaktivní test

Pro každou otázku v testu existuje právě jedna správná odpověď, kterou označíte kliknutím na příslušné políčko. Tlačítko Vyhodnotit slouží k ukončení testu, zobrazení výsledků a správných odpovědí.

Aplikace I: geometrická zobrazení

- **Příklad**

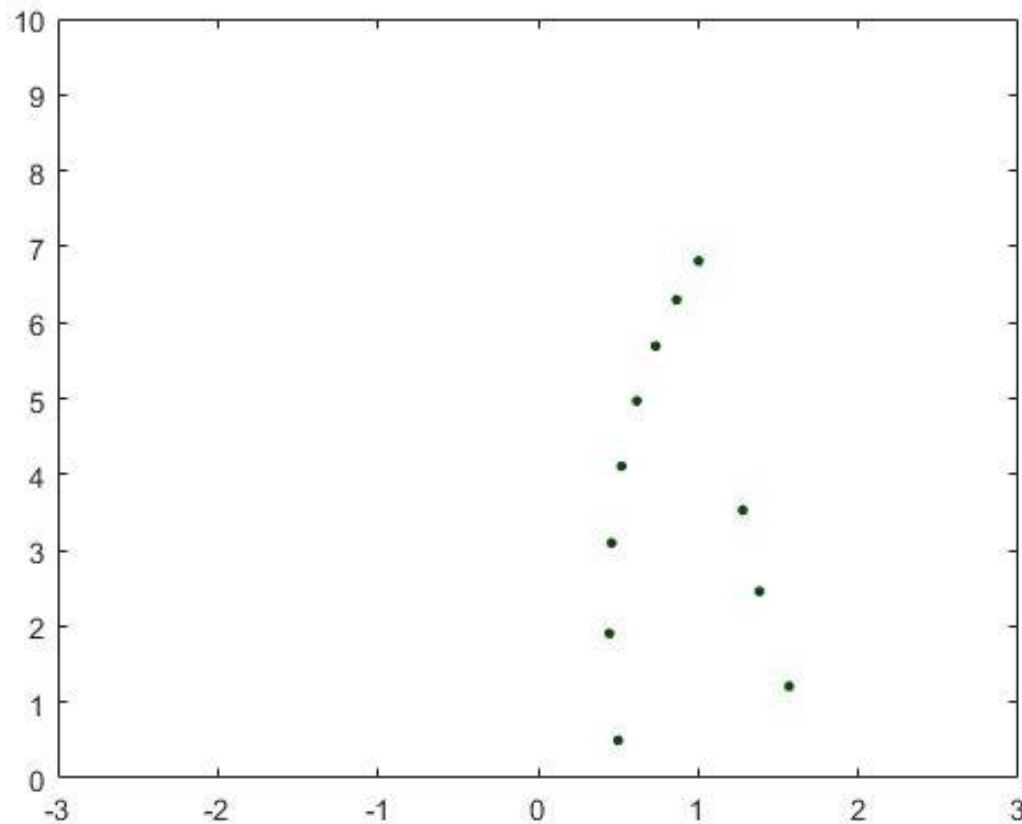
Vytvořte program, který v každé iteraci s danou pravděpodobností provede transformaci bodu z předchozí iterace podle následující tabulky:

Pravděpodobnost	κ (stejnolehlost)	φ (rotace)	S (posunutí)
85 %	0,85	-0,05	[0; 1,5]
7 %	0,3	1	[0; 1,5]
7 %	0,25	-1	[0; 0,5]
1 %	transformace definovaná maticí $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,15 \end{bmatrix}$		

Jako počáteční iteraci volte bod [0,5; 0,5].

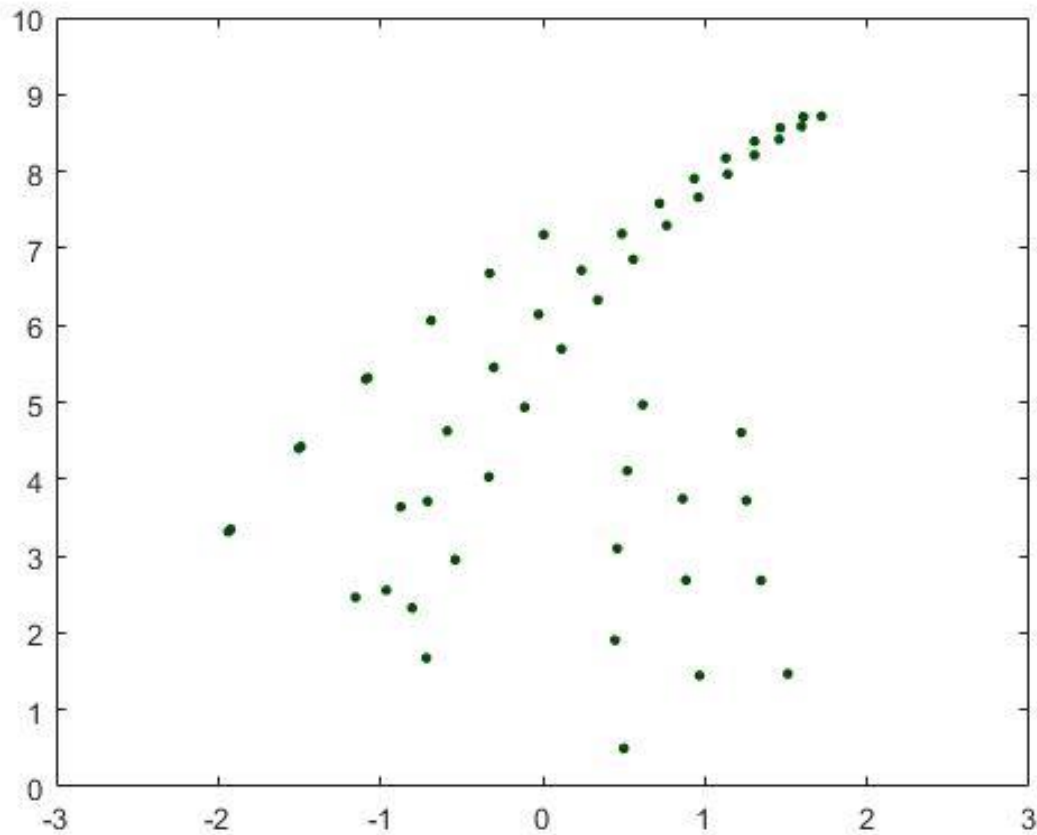
Aplikace I: geometrická zobrazení

Po 10 iteracích



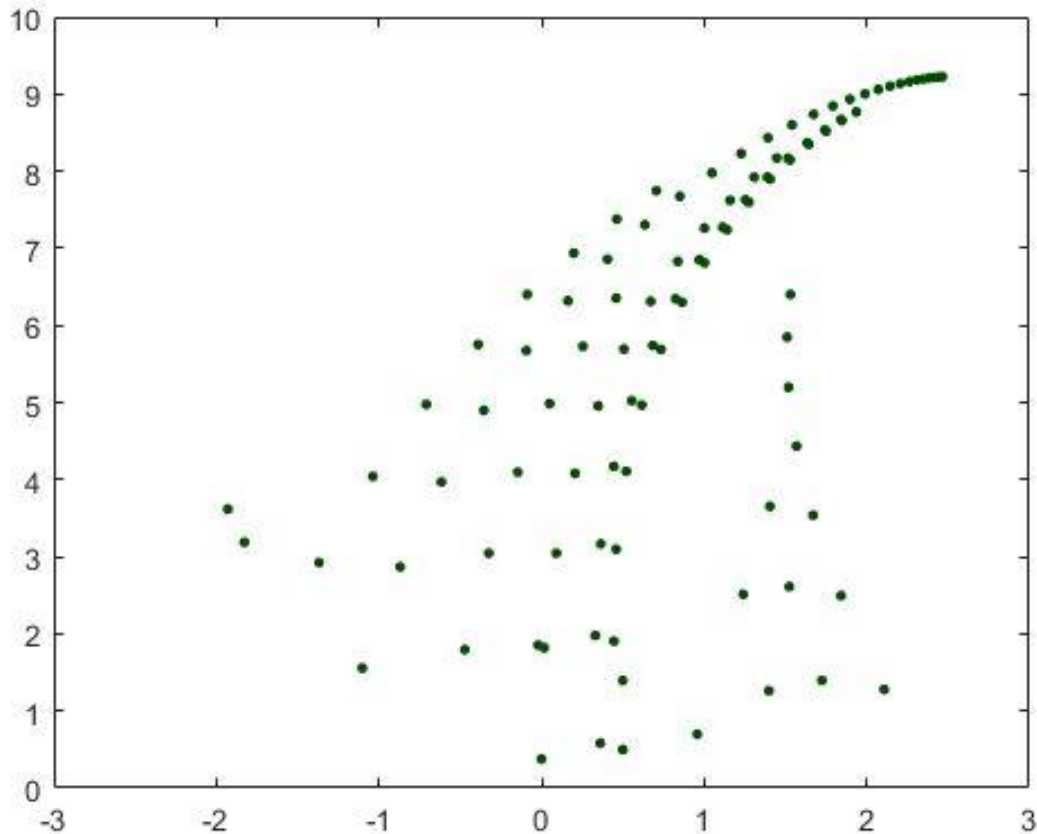
Aplikace I: geometrická zobrazení

Po 50 iteracích



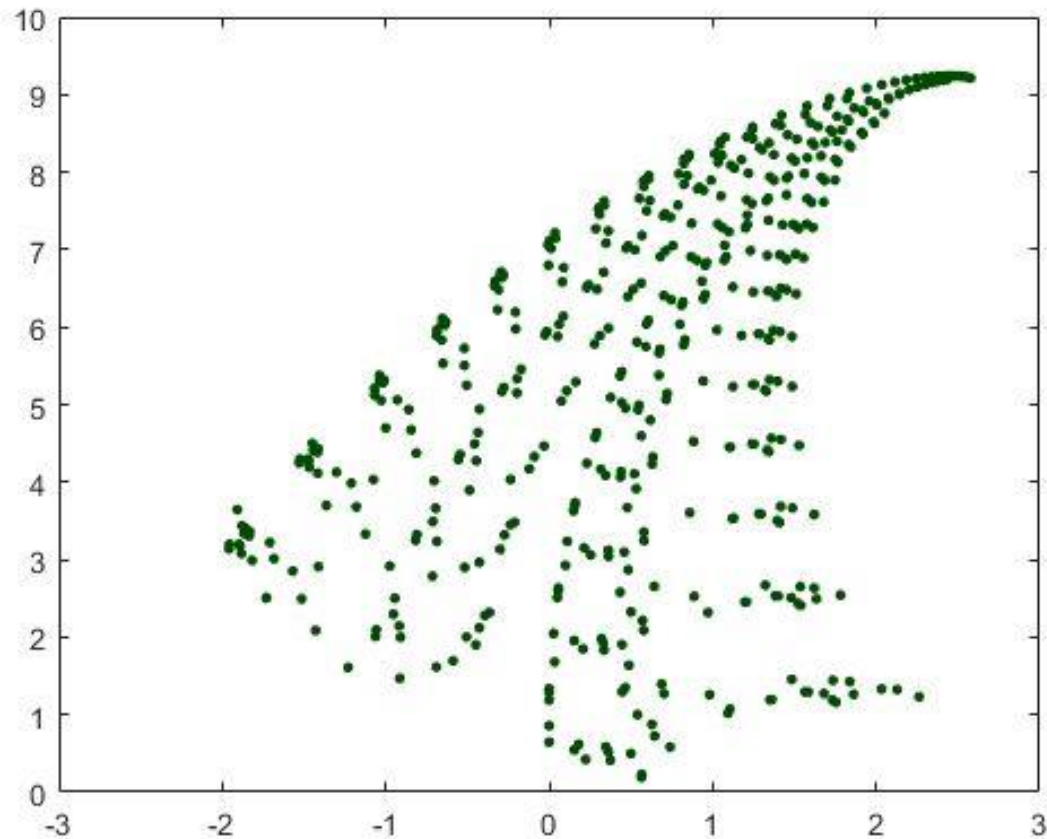
Aplikace I: geometrická zobrazení

Po 100 iteracích



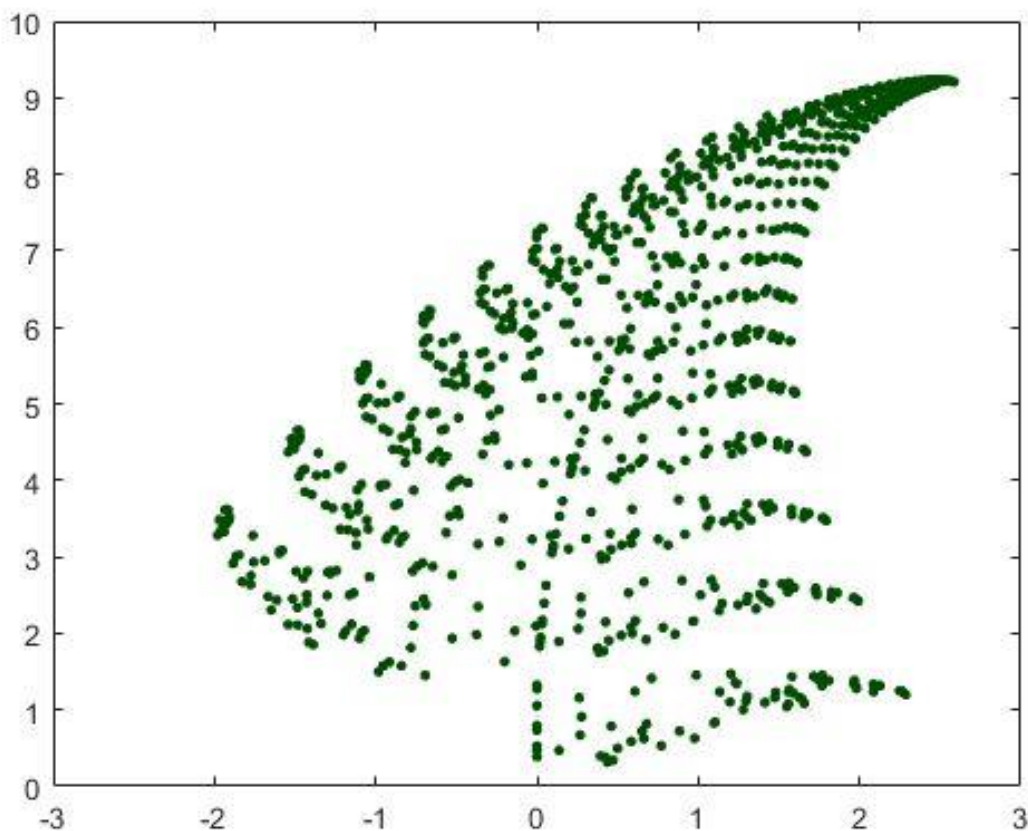
Aplikace I: geometrická zobrazení

Po 500 iteracích



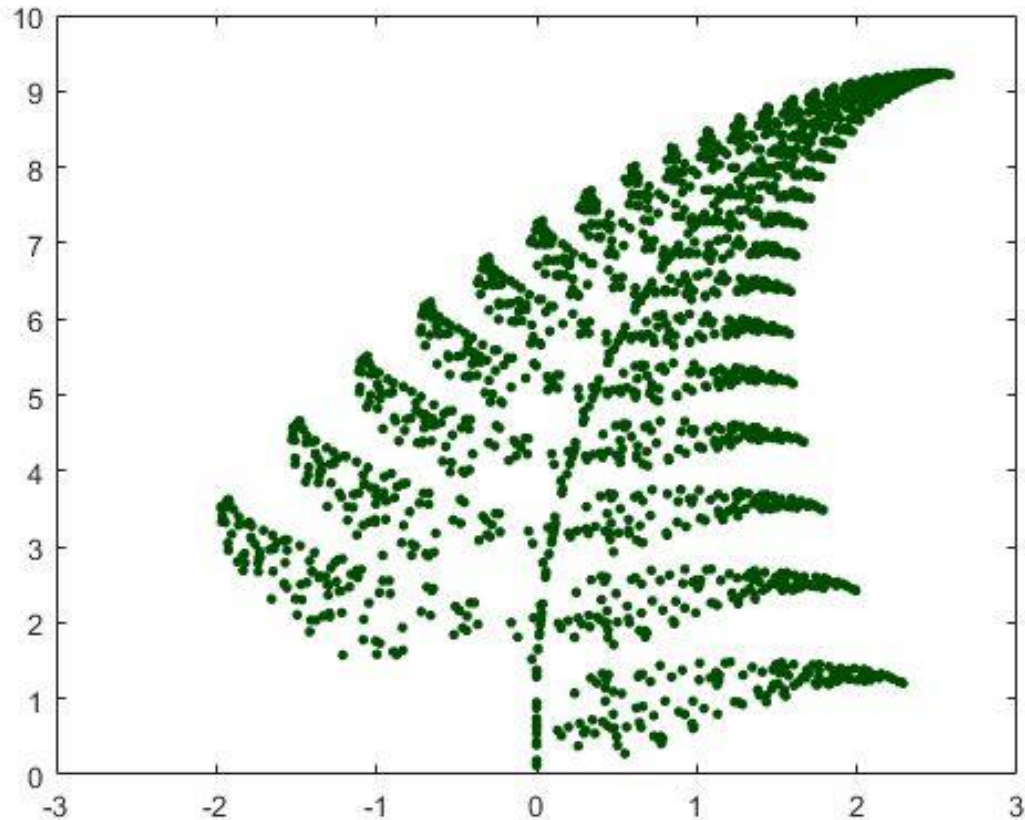
Aplikace I: geometrická zobrazení

Po 1 000 iteracích



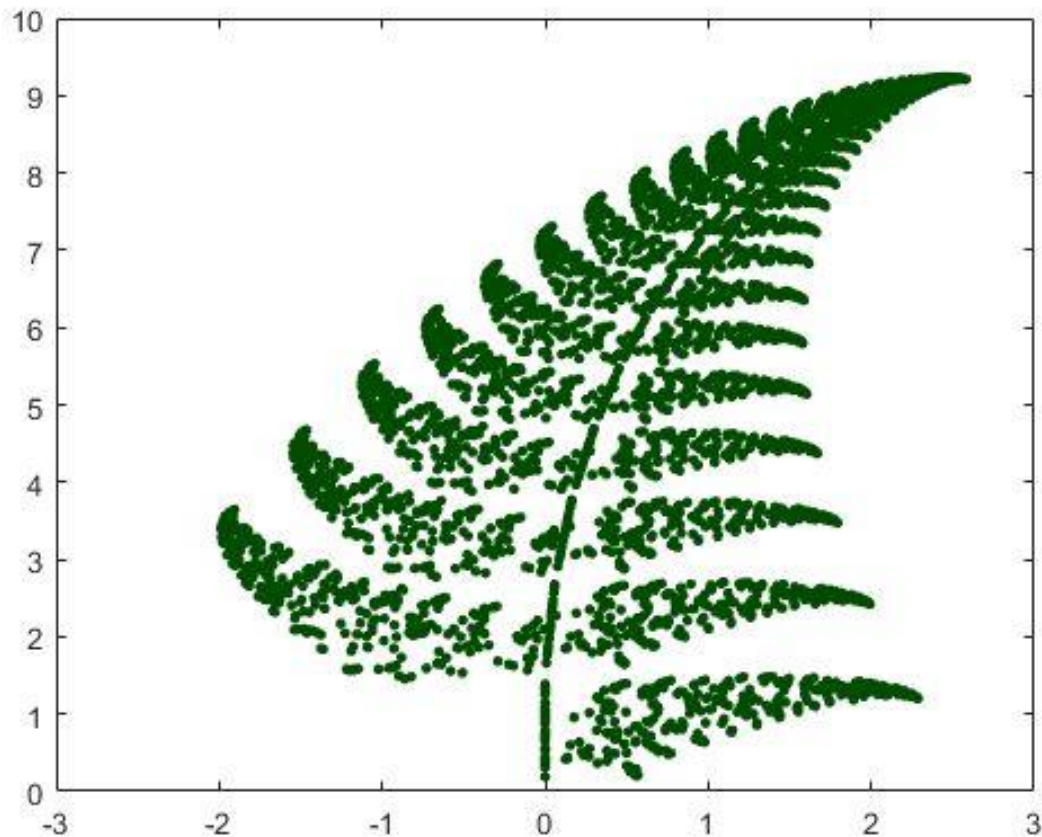
Aplikace I: geometrická zobrazení

Po 2 000 iteracích

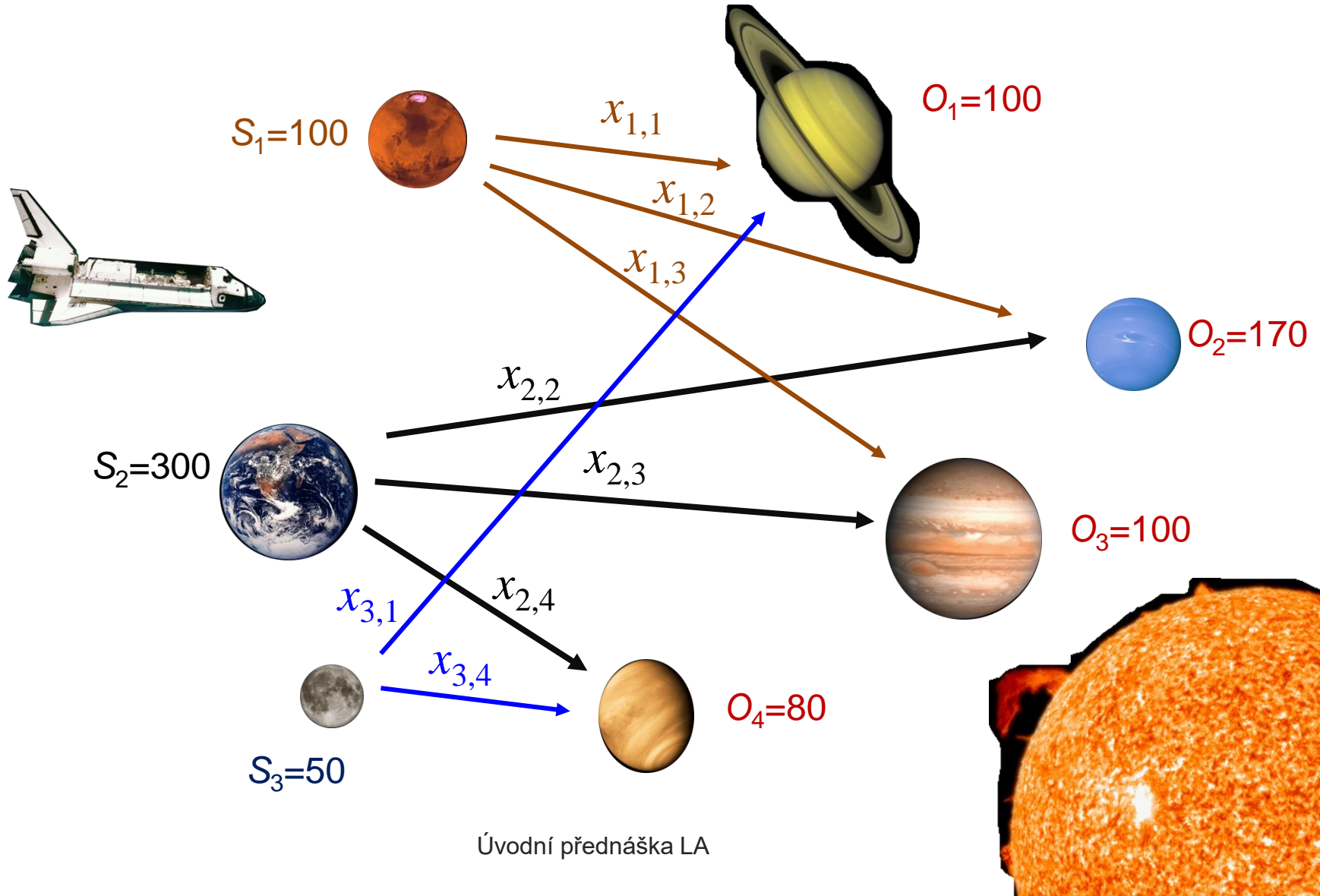


Aplikace I: geometrická zobrazení

Po 5 000 iteracích



Aplikace II: dopravní problém



Aplikace II: dopravní problém

$$\begin{array}{rccccr}
 x_{1,1} & + & x_{1,2} & + & x_{1,3} & & & = & 100 \\
 & & & & & x_{2,2} & + & x_{2,3} & + & x_{2,4} & = & 300 \\
 & & & & & & & & & & x_{3,1} & + & x_{3,4} & = & 50 \\
 x_{1,1} & & & & & & & & & & + & x_{3,1} & & = & 100 \\
 & & x_{1,2} & & & + & x_{2,2} & & & & & & = & 170 \\
 & & & & x_{1,3} & & + & x_{2,3} & & & & & = & 100 \\
 & & & & & & & & x_{2,4} & & + & x_{3,4} & = & 80
 \end{array}$$

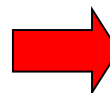


$$x_{1,1} = 50 + q, x_{1,2} = -50 + p - q, x_{1,3} = 100 - p$$

$$x_{2,2} = 220 - p + q, x_{2,3} = p, x_{2,4} = 80 - q$$

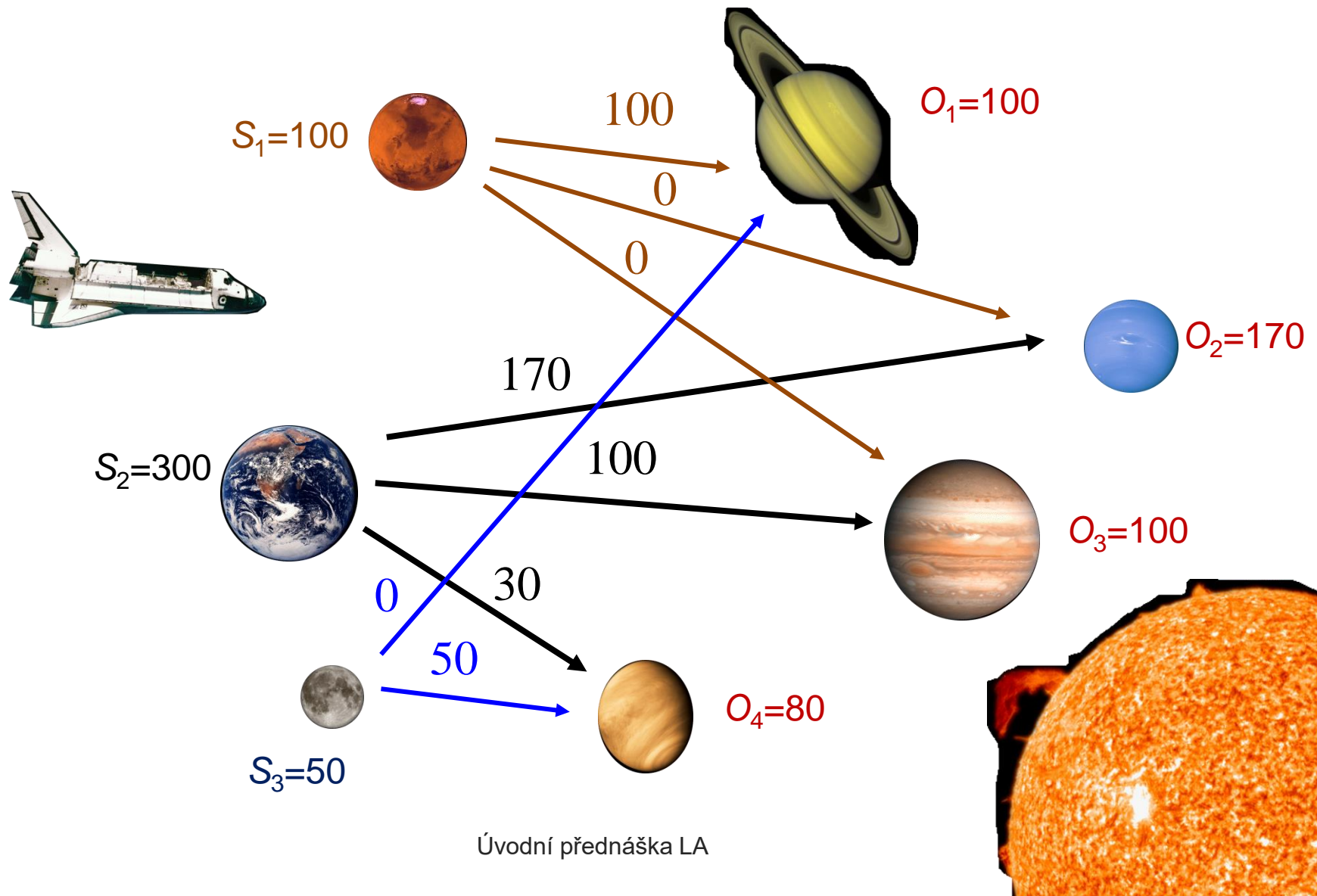
$$x_{3,1} = 50 - q, x_{3,4} = q$$

$$\text{pro lib. } p, q \geq 0 \text{ a } p \leq 100, q \leq 50$$



$$\begin{array}{l}
 x_{1,1} = 100, x_{1,2} = 0, x_{1,3} = 0 \\
 x_{2,2} = 170, x_{2,3} = 100, x_{2,4} = 30 \\
 x_{3,1} = 0, x_{3,4} = 50
 \end{array}$$

Aplikace II: dopravní problém



Aplikace II: dopravní problém

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ x_{1,3} \\ x_{2,2} \\ x_{2,3} \\ x_{2,4} \\ x_{3,1} \\ x_{3,4} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 100 \\ 300 \\ 50 \\ 100 \\ 170 \\ 100 \\ 80 \end{bmatrix}$$

- Řešitelnost soustavy
 - soustava nemá řešení (zboží nelze rozvést)
 - soustava má jediné řešení (zboží lze rozvést jediným způsobem)
 - soustava má nekonečně mnoho řešení (zboží lze rozvést různým způsobem – možno dále specifikovat jakým)

Současné superpočítače

- **Frontier**
- AMD (proc.)
- HPE Cray OS (OS)
- 8 699 904 jader
- 1 206 PetaFlops
- <http://www.top500.org> (06/2024)



Oak Ridge National Laboratory

IT4Innovations – superpočítače v Ostravě



<http://www.it4i.cz>

IT4Innovations – superpočítače v Ostravě

- Anselm

- zprovozněn v květnu 2013, v provozu do roku 2021

<https://www.it4i.cz/infrastruktura/anselm>

- Salomon

- zprovozněn v září 2015 (tehdy byl 40. nejvýkonnější superpočítač světa), v provozu do roku 2021

<https://www.it4i.cz/infrastruktura/salomon>

- Barbora

- zprovozněn v říjnu 2019

<https://www.it4i.cz/infrastruktura/barbora>

IT4Innovations – superpočítače v Ostravě

•Karolina

- uveden do provozu v roce 2021
- 135. nejvýkonnější superpočítač světa
(dle <http://www.top500.org> - 06/2024)
<https://www.it4i.cz/infrastruktura/karolina>

Obsah předmětu

- Matice a maticové operace
- Úpravy a řešení soustav lineárních rovnic
- Inverzní matice
- Vektorové prostory a podprostory
- Lineární nezávislost a báze vektorových prostorů
- Dimenze vektorových prostorů, hodnost matic a řešení soustav
- Lineární zobrazení
- Determinanty
- Spektrální teorie
- Skalární součin a ortogonalita
- Aplikace lineární algebry

Organizace výuky

- Přednáška
- Cvičení

Hodnocení

- Cvičení (max. 30 bodů)
 - 2 písemné testy (každý za 15 bodů)
 - Pro udělení zápočtu je nutno získat minimálně 10 bodů.

Hodnocení

- Písemná zkouška (max. 70 bodů)
 - 50 bodů za příklady
 - 20 bodů za teorii

- Celkem (max. 100 bodů)
 - nevyhověl (0-50 bodů)
 - dobře (51-65 bodů)
 - velmi dobře (66-85 bodů)
 - výborně (86-100 bodů)

Literatura

- Přednášky
 - Z. Dostál, V. Vondrák, D. Lukáš, Lineární algebra, VŠB-TU Ostrava 2012
<http://mi21.vsb.cz/modul/linearni-algebra>
 - Sylaby přednášek na <http://homel.vsb.cz/~ber95/LA/la.htm>
- Cvičení
 - L. Šindel, Sbíрка úloh z algebry, VŠB-TU Ostrava 2006
<https://homel.vsb.cz/~ber95/LA/sbirkauloh.pdf>
 - Sylaby cvičení na <http://homel.vsb.cz/~ber95/LA/la.htm>
- LMS Moodle
 - <https://lms.vsb.cz/course/view.php?id=126344>