Analytická geometrie v rovině

KRUŽNICE $k: (x-m)^2+(y-n)^2=r^2$ střed $S=[m,n]$, poloměr r

tečna ke kružnici: $t: (x-m)(t_1-m)+(y-n)(t_2-n)=r^2$
v bodě $T=[t_1,t_2]\in k$

Př: Upravte na středový tvar $2x^2+2y^2-16x-12y=0$. $\left[(x-4)^2+(y-3)^2=25,\ S=[4,3],\ r=5\right]$

Ř: $2x^2+2y^2-16x-12y=(2x^2-16x)+(2y^2-12y)=2\cdot(x^2-8x)+2\cdot(y^2-6y)=$

$=2\cdot(\underbrace{x^2-8x+16}-16)+2\cdot(\underbrace{y^2-6y+9}-9)=2\cdot(x-4)^2-32+2\cdot(y-3)^2-18=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\cdot(x-4)^2+2\cdot(y-3)^2=50 \ /:2 \Rightarrow (x-4)^2+(y-3)^2=25,\ S=[4,3],\ r=5.$

Př: Určete rovnici tečny t kružnice $k: (x-2)^2+(y-4)^2=25$ v bodě $A[6,1]$. $[t: 4x-3y-21=0]$

Ř: - ověříme $A\in k$ (dosadíme A do k) $(6-2)^2+(1-4)^2=25$
$4^2+(-3)^2=25$
$16+9=25$
$25=25$ ✓ $A\in k$

- souřadnice A dosadíme za t_1 a t_2 do rovnice tečny ke kružnici $(x-2)(6-2)+(y-4)(1-4)=25 \Rightarrow 4x-3y-21=0.$

Př: Z bodu $M[5,2]$ veďte tečny ke kružnici $k: (x-3)^2+(y+12)^2=100$. $[t: 3x-4y-7=0,\ t': 4x+3y-26=0]$

Ř: - ověříme ~~(A)~~ $M\in k$: $(5-3)^2+(2+12)^2=100$
$2^2+14^2=100$
$4+196=100$
$200\neq 100$ → $200>100$ $M\notin k$, M je vnějším bodem

- nalezneme průsečíky tečen s kružnicí (musí splňovat rovnici tečny i rovnici kružnice)

- $M\in t$, $[t_1,t_2]\in t \Rightarrow (5-3)(t_1-3)+(2+12)(t_2-12)=100 \Rightarrow 2t_1+14t_2+62=0$

$t_1=-7t_2-31$

- $[t_1,t_2]\in k \Rightarrow (t_1-3)^2+(t_2+12)^2=100$

$(-7t_2-31-3)^2+(t^2+12)^2=100$

$49t_2^2+476t_2+1156+t_2^2+24t_2+144=100$

$50t_2^2+500t_2+1200=0 \ /:50$

$t_2^2+10t_2+24=0$

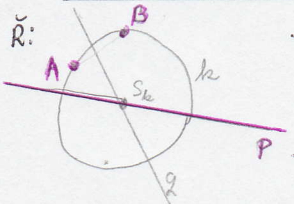
$(t_2+4)(t_2+6)=0$

$t_2=-4 \Rightarrow t_1=-7\cdot(-4)-31=-3$
bodem $[-3,-4]$ prochází tečna
$t: (x-3)\cdot(-3-3)+(y+12)(-4+12)=100$
$t: 3x-4y-7=0$

$t_2=-6 \Rightarrow t_1=-7(-6)-31=11$
bodem $[11,-6]$ prochází tečna
$t': (x-3)(11-3)+(y+12)(-6+12)=100$
$t': 4x+3y-26=0$

Př: Napište rovnici kružnice, která prochází body $A=[12,10]$, $B=[6,2]$ a střed leží na přímce $p: 3x-4y-3=0$. $[(x-9)^2+(y-6)^2=25]$

Ř:



- nalezneme osu úsečky AB, označíme ji q, prochází středem úsečky AB,
$S_{AB}=\frac{A+B}{2}=[9,6]$ a platí $\vec{n_q}=\vec{AB}=B-A=(-6,-8)$, $\vec{u_q}=(8,-6)$, $q: x=9+8t,\ y=6-6t,\ t\in\mathbb{R}$
- střed kružnice je průsečík $S_k=p\cap q$: $3(9+8t)-4(6-6t)-3=0$, $t=0 \Rightarrow S_k=[9,6]$
- poloměr je vzdálenost bodů $r=|S_kA|=|S_kB|=\sqrt{(9-6)^2+(6-2)^2}=5$
- obecná rovnice kružnice $k: (x-9)^2+(y-6)^2=25$