44 - Diferenciál funkce

Video
Příklady: 220, 221, 222

2.1.2 Diferenciál funkce

Definice 2.1.46: Řekneme, že funkce $y = f(x)$ je v bodě x_0 diferencovatelná, nebo má v tomto bodě diferenciál, jestliže je možné její přírůstek Δy na okolí bodu x_0 vyjádřit jako

$$\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0) = \mathcal{A}h + h\tau(h),$$

kde $\mathcal{A}$ je konstanta a $\lim_{h \to 0} \tau(h) = 0$. Funkce f se nazývá diferencovatelná, je-li diferencovatelná v každém bodě $x \in D_f$.

Věta 2.1.47: Je-li funkce f diferencovatelná v bodě x_0, pak v bodě x_0 existuje derivace prvního řádu a platí

$$\mathcal{A} = f'(x_0).$$

Poznámka: Číslo h představuje přírůstek na ose x, je zvykem tento přírůstek značit $h = dx$. Pro přírůstek na ose y v bodě x_0 při známé hodnotně dx pak dostáváme

$$\Delta y = f'(x_0)dx + dx\tau(dx).$$

Definice 2.1.48: Je-li funkce $y = f(x)$ diferencovatelná, nazýváme následující výraz diferenciálem funkce f,

$$dy = df(x) = f'(x)dx.$$

Věta 2.1.49: Je-li funkce f diferencovatelná v bodě x_0, pak je v tomto bodě spojitá.

Věta 2.1.50: Je-li derivace prvního řádu funkce f spojitá v x_0, pak je funkce f v bodě x_0 diferencovatelná (a tedy i spojitá).

Geometrický význam diferenciálu Diferenciál funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 při známém přírůstku dx je přírůstek na tečně sestrojené ke grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$.

Poznámka:

- *Diferenciál funkce* $y = f(x)$

$$dy = f'(x)dx.$$

- *Diferenciál funkce* $y = f(x)$ v bodě x_0

$$dy(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

- *Diferenciál funkce* $y = f(x)$ v bodě x_0 při známém přírůstku dx,

$$dy(x_0)(dx) = f'(x_0)dx \in \mathbb{R}.$$

- *Diferenciál druhého řádu funkce* $y = f(x)$

$$d^2y = f''(x)dx^2.$$

- Přibližný výpočet funkčních hodnot

$$f(x) \approx f(x_0) + df(x_0)(dx).$$

45 - Tečna a normála

Video **Řešené příklady:** 119, 120
Příklady: 216,217,218, 219

2.1.3 Využití derivace

Tečna a normála

Definice 2.1.51: Nechť má funkce f v bodě x_0 derivaci. Přímku t, procházející bodem $[x_0, f(x_0)]$ a mající směrnici rovnu hodnotě derivace funkce f v x_0 nazveme tečna ke grafu funkce f v bodě x_0. Přímku n, procházející bodem $[x_0, f(x_0)]$ a kolmou k tečně nazveme normála ke grafu funkce f v bodě x_0.

Věta 2.1.52: Tečna ke grafu funkce f v bodě x_0 je dána předpisem:

$$t: \; y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Normála ke grafu funkce f v bodě x_0 je daná předpisem:

$$n: \; y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$$

Poznámka: V bodě, ve kterém nemá funkce f derivaci, tečna neexistuje.

Poznámka: Rovnici tečny lze přímo odvodit z diferenciálu funkce $y = f(x)$ v bodě x_0,

$$dy(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

přičemž $y_0 = f(x_0)$, a tedy

$$t: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

46 - Taylorův polynom

Video **Řešené příklady:** 121, 122
Příklady: 223

Taylorův polynom

Pro aproximaci funkce f na okolí bodu x_0 se používá tzv. Taylorův polynom, což je polynom, který má vhledem k funkci f v bodě x_0 stejné hodnoty derivací až do řádu n.

Definice 2.1.53: Nechť je dána funkce $f(x)$, která má v bodě $x_0 \in D_f$ derivace až do řádu $n \in \mathbb{N}$. Pak polynom

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}df(x_0) + \frac{1}{2!}d^2f(x_0) + \cdots + \frac{1}{n!}d^nf(x_0)$$

nazveme Taylorův polynom funkce f stupně n na okolí bodu x_0.

Poznámka

- Taylorův polynom je kombinací diferenciálů až do stupně n.
- Rozepíšeme-li diferenciály, dostáváme alternativní tvar Taylorova polynomu,

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

- Taylorův polynom prvního stupně je tečna ke grafu funkce f v bodě x_0.
- V případě $x_0 = 0$ se Taylorův polynom nazývá Maclaurinův polynom.

47 - Věty o derivaci

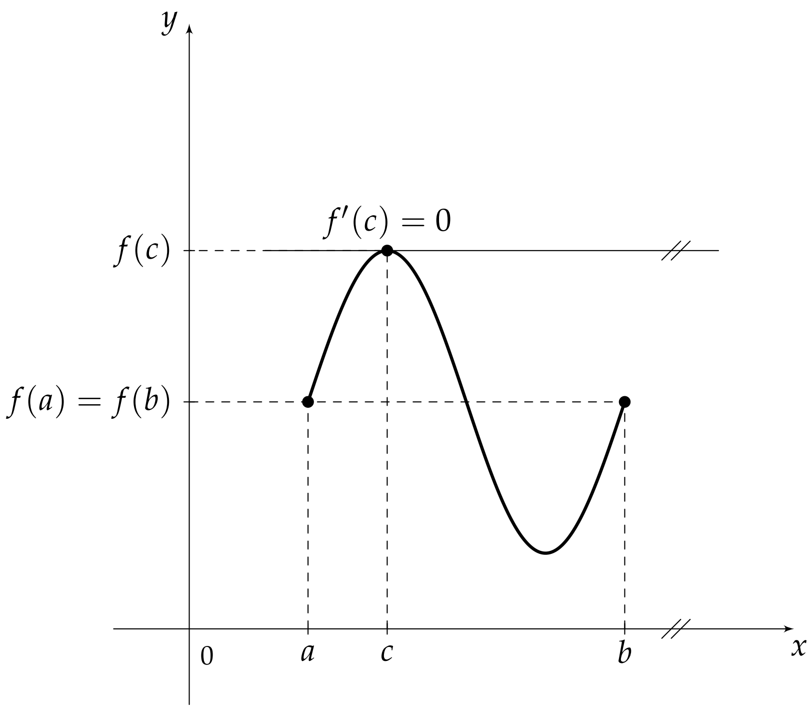
Video

Věty o derivaci

Věta 2.1.54: (Rolleova věta)
Nechť $f(x)$ je spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$ a má v intervalu (a,b) derivaci. Nechť dále platí $f(a)=f(b)$. Pak existuje aspoň jedno $c\in(a,b)$ takové, že:

$$f'(c)=0\,.$$

Poznámka: V bodě c je tečna rovnoběžná s osou x.



Věta 2.1.55: (Lagrangeova věta o střední hodnotě)
Nechť $f(x)$ je spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$ a má v intervalu (a,b) derivaci. Pak existuje aspoň jedno $c\in(a,b)$ takové, že:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,.$$

Poznámka:

1. V bodě c je tečna rovnoběžná se spojnicí bodů $[a,f(a)]$ a $[b,f(b)]$.
2. Platí-li $f(a)=f(b)$ dostaneme Rolleovu větu.