Určete všechny asymptoty grafu funkce

a) bez směrnice $x = \text{const.}$
v krajních bodech Df nebo
v bodech nespojitosti x_0, jestliže
$$\lim_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = \pm\infty$$

b) asymptoty se směrnicí $y = kx + q$
jestliže jsou vlastní limity
$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad q = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - k \cdot x)$$

Př 1: Asymptoty funkce $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$, $Df = \mathbb{R}$, f je všude spojitá

a) asymptoty bez směrnice nejsou, protože f je definovaná a spojitá na celém $\mathbb{R}$

b) asymptoty se směrnicí $y = kx + q$
$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^4 - 4x^3 + 4x^2}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} (x^3 - 4x^2 + 4x) = \lim_{x \to \pm\infty} x^3\left(1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}\right) =$$
$$= \begin{cases} \lim\limits_{x \to \infty} x^3\left(1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}\right) = \infty \cdot (1 + 0 + 0) = \infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x^3\left(1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}\right) = -\infty \cdot (1 + 0 + 0) = -\infty \end{cases}$$
limity jsou nevlastní
$\Rightarrow$ asymptota se směrnicí neexistuje

Př 2: Asymptoty funkce $f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-2}}$, podmínka $\frac{x+2}{x-2} \geq 0$

$Df = (-\infty, -2\rangle \cup (2, \infty)$

		-2		2	
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{x+2}{x-2}$	$+$	0	$-$	N	$+$

a) bez směrnice mohou být $x = -2$, $x = 2$
$$\lim_{x \to -2^-} \sqrt{\frac{x+2}{x-2}} = \sqrt{\frac{0}{-4}} = 0$$ není nevlastní $\Rightarrow$ v -2 <u>není</u> asymptota bez směrnice
$$\lim_{x \to 2^+} \sqrt{\frac{x+2}{x-2}} = \sqrt{\frac{4}{0^+}} = \sqrt{\infty} = \infty$$ $\Rightarrow$ asymptota bez směrnice je $\boxed{x = 2}$

b) se směrnicí $y = kx + q$
$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt{\frac{x+2}{x-2}} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt{\frac{x+2}{(x-2)x^2}} \cdot (\pm 1) = \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt{\frac{x+2}{x^3 - 2x^2}} \cdot (\pm 1) = 0$$
$$q = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\sqrt{\frac{x+2}{x-2}} - 0 \cdot x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt{\frac{x+2}{x-2}} = \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt{\frac{x \cdot (1 + \frac{2}{x})}{x \cdot (1 - \frac{2}{x})}} = \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt{\frac{1 + \frac{2}{x}}{1 - \frac{2}{x}}} = \sqrt{\frac{1+0}{1-0}} = 1$$
$y = 0 \cdot x + 1 \Rightarrow \boxed{y = 1}$ je asymptota se směrnicí pro $x \to \infty$ i pro $x \to -\infty$

Př 3: Asymptoty $f(x) = (x+2)e^{-x}$, $Df = \mathbb{R}$

a) asymptoty bez směrnice nejsou, funkce je definovaná a spojitá na celém $\mathbb{R}$

b) se směrnicí $y = kx + q$
$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{(x+2)e^{-x}}{x} = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right) e^{-x} = (1 + 0)\, e^{-\infty} = 1 \cdot \frac{1}{e^{\infty}} = 1 \cdot 0 = 0$$
$$q = \lim_{x \to \infty} \left((x+2)e^{-x} - 0 \cdot x\right) = \lim_{x \to \infty} (x+2)e^{-x} = \underbrace{\boxed{\infty \cdot 0}}_{\text{neurčitý výraz}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x+2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \overset{L.P.}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^x} = 0$$
$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{(x+2)e^{-x}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right) e^{-x} = (1 + 0) \cdot \infty = \infty$$
Přímka $\boxed{y = 0}$ je asymptotou se směrnicí jen pro $x \to \infty$.