Analytická geometrie v rovině

PARABOLA

$o \parallel y \Rightarrow (x-m)^2 = 2p(y-n)$

$o \parallel x \Rightarrow (y-n)^2 = 2p(x-m)$

vrchol $V=[m,n]$
parametr p
řídící přímka d

tečna k parabole v bodě $T=[t_1,t_2]$

$o \parallel y \Rightarrow (x-m)(t_1-m) = p(y+t_2-2n)$

$o \parallel x \Rightarrow (y-n)(t_2-n) = p(x+t_1-2m)$

Př: Obecnou rovnici paraboly $3x^2+36x-y+108=0$ převeďte na vrcholový tvar a určete její charakteristické prvky.

$\left[(x+6)^2=\frac{1}{3}y\ ;\ V=[-6,0]\ ;\ p=\frac{1}{6},\ o\parallel y,\ d: y=-\frac{1}{12}\right]$

Ř: $3x^2+36x-y+108=0$

$3(x^2+12x) = y-108$

$3(x^2+12x+36) - 3\cdot 36 = y-108$

$3\cdot(x+6)^2 = y-108+108$

$3(x+6)^2 = y \quad |:3$

$(x+6)^2 = \frac{1}{3}y$

$V=[-6,0],\quad 2p=\frac{1}{3} \Rightarrow p=\frac{1}{6}$

$o\parallel y \quad d: y-n+\frac{p}{2}=0 \Rightarrow y-0+\frac{1}{12}=0 \Rightarrow d: y=-\frac{1}{12}$

Př: Napište rovnici tečny paraboly $(x-2)^2=y+25$ v bodě $A=[5,-16]$.

Ř: $(x-2)^2=y+25 \Rightarrow V=[2,-25],\ p=\frac{1}{2}$; $A\in$ parabola $(5-2)^2=-16+25$ $[t: 6x-y-46=0]$

$t: (x-2)\cdot(5-2) = \frac{1}{2}(y-16+50) \Rightarrow 3x-6=\frac{1}{2}(y+34)\ |\cdot 2 \Rightarrow \underline{6x-y-46=0.}$

Př: Určete hodnotu parametru $p\in\mathbb{R}$ tak, aby přímka $x+2y-1=0$ byla tečnou paraboly $y^2=2px$.

$\left[p=-\frac{1}{2}\right]$

Ř: $y^2=2px \Rightarrow V=[m,n]=[0,0],\ o\parallel x$; bod $T=[t_1,t_2]$ leží na parabole i na přímce, která je tečnou.

T leží na přímce $\Rightarrow t_1+2t_2-1=0 \Rightarrow t_1=1-2t_2$

T leží na parabole $\Rightarrow t_2^2=2pt_1$

dosadíme t_1 z první rovnice do druhé rovnice

$t_2^2=2p(1-2t_2)$, hledáme p tak, aby rovnice měla jediné řešení

$t_2^2=2p-4pt_2$

$t_2^2+4pt_2-2p=0$

$D=16p^2+8p=8p(2p+1)=0$

$p=0$ nevyhovuje (nevznikne parabola)

$\underline{p=-\frac{1}{2}} \Rightarrow y^2=-x$

Př: Odhadněte typ kuželosečky a upravte ji na středový (vrcholový) tvar.

a) $2x^2+3y^2+12x-6y+9=0$ $\quad$ [a) $S=[-3,1],\ a=\sqrt{6},\ b=2,\ e=\sqrt{2}$, elipsa $\frac{(x+3)^2}{6}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$]

b) $y^2-4x+4=0$ $\quad$ [b) $V=[1,0],\ p=2,\ F=[2,0],\ d: x=0,\ o\parallel x$, parabola $y^2=4(x-1)$]

c) $x^2+y^2+4x-6y+13=0$ $\quad$ [c) $[-2,3]$ bod $(x+2)^2+(y-3)^2=0$]

d) $x^2-2y^2+4x+12y-23=0$ $\quad$ [d) $S=[-2,3],\ a=3,\ b=\frac{3}{2}\sqrt{2},\ e=\frac{3}{2}\sqrt{6}$, hyperbola $\frac{(x+2)^2}{9}-\frac{2(y-3)^2}{9}=1$]

e) $x^2-2x-5y+2=0$ $\quad$ [e) $V=[1,\frac{1}{5}],\ p=\frac{5}{2},\ d: y=-\frac{21}{20},\ o\parallel y$, parabola $(x-1)^2=5\cdot(y-\frac{1}{5})$]

f) $x^2+y^2-2y-3=0$ $\quad$ [f) $S=[0,1],\ r=2$, kružnice $x^2+(y-1)^2=4$]

g) $7x^2+5y^2-14x-10y+18=0$ $\quad$ [g) kuželosečka neexistuje $7(x-1)^2+5(y-1)^2=-6$]