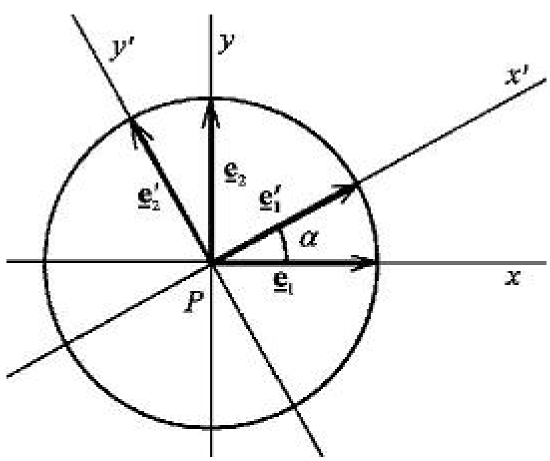
Masarykova univerzita • Přírodovědecká fakulta

Pavel Horák
Josef Janyška

ANALYTICKÁ GEOMETRIE



Brno 2009

Předmluva

Tento učební text pokrývá látku semestrálního kurzu "M3521 Geometrie 2", který je zařazen jako povinný kurz bakalářského stupně učitelského studia matematiky. Obsahem tohoto textu je užití analytické metody při studiu lineárních útvarů v afinním a euklidovském prostoru.

Zvolená forma výkladu látky je v podstatné míře zaměřena na aplikace výsledků z lineární algebry, které byly probrány v přednášce z algebry. K úspěšnému pochopení těchto skript je proto nutno zvládnout lineární algebru v rozsahu skript [Ho94] (P. Horák, *Algebra a teoretická aritmetika I*, skripta MU, Brno 1994). Předpokládáme také, že studenti mají alespoň minimální znalosti středoškolské planimetrie a stereometrie.

Na konci každého paragrafu jsou uvedeny řešené příklady typické pro daný paragraf, na závěr skript jsou pak zařazena cvičení v rozsahu dostatečném pro zvládnutí probírané látky. Další příklady mohou případní zájemci nalézt ve sbírkách příkladů uvedených v seznamu použité literatury ([Baz], [Cub], [Kle] a [Mo79]).

Po formální stránce je výklad látky podán co nejpodrobněji. Je použita běžná symbolika ve shodě se skripty z lineární algebry, [Ho94], a geometrie, [JaSe]. Pro přehlednost textu jsou definice uvedeny v rámečku, konce důkazů, poznámek, příkladů a úloh jsou označeny symboly $\square$, $\diamondsuit$, $\heartsuit$ a $\triangle$.

Použité symboly

V textu jsou použity obvyklé množinové symboly inkluze, průniku a sjednocení. Z logických symbolů se kromě obvyklých symbolů konjunkce a disjunkce používají ještě následující symboly:

$\Leftarrow$, $\Rightarrow$	implikace
$\Leftrightarrow$	nutná a dostatečná podmínka, tj. místo obratu "právě když"
$\exists$	existenční kvantifikátor, tj. místo obratu "existuje"

Ostatní použité symboly:

$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mathbb{R}^n$	množina uspořádaných n-tic reálných čísel
$h(A)$	hodnost matice A
$\|A\|$	determinant matice A (čtvercové)
$\dim V$, $\dim \mathcal{A}$	dimenze vektorových a afinních prostorů
$\underline{\mathbf{u}}$	vektor
$\underline{\mathbf{o}}$	nulový vektor
$\\|\underline{\mathbf{u}}\\|$	velikost vektoru
$\mathscr{B}$	báze
$\mathscr{R}$	repér
$(u_1; \dots; u_n)$	souřadnice vektoru $\underline{\mathbf{u}}$
$[x_1; \dots; x_n]$	souřadnice bodu X
$(\underline{\mathbf{u}})$	sloupcová matice souřadnic vektoru $\underline{\mathbf{u}}$
(X)	sloupcová matice souřadnic bodu X
$\overrightarrow{AB}$	vektor určený body A, B
$L(\underline{\mathbf{u}}_1, \dots, \underline{\mathbf{u}}_k)$	podprostor generovaný vektory $\underline{\mathbf{u}}_1, \dots, \underline{\mathbf{u}}_k$
$(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}})$	skalární součin vektorů
$\underline{\mathbf{u}}_1 \times \cdots \times \underline{\mathbf{u}}_{n-1}$	vektorový součin vektorů
$[\underline{\mathbf{u}}_1, \dots, \underline{\mathbf{u}}_n]$	vnější součin vektorů
$\\|$	rovnoběžnost
$\perp$	kolmost
$v(\mathcal{B}, \mathcal{C})$	vzdálenost podprostorů
$\sphericalangle$	odchylka
$[A, B]$	úsečka s krajními body A, B
S_{AB}	střed dvojice bodů A, B
$(C; A, B)$	dělicí poměr bodu C vzhledem k bodům A, B

Kapitola 1

AFINNÍ PROSTOR

Základním pojmem celého textu bude pojem afinního prostoru. Tento pojem a celou geometrii vůbec budeme budovat axiomaticky, a to tak, abychom jako speciální případy obdrželi pojmy a tvrzení, která známe ze středoškolské geometrie. Použijeme axiomatického přístupu s velmi jednoduchým systémem axiomů, přičemž budeme vycházet z primitivních pojmů: bod, vektor a zobrazení přiřazující dvěma bodům jistý vektor.

1 Pojem afinního prostoru

Definice 1.1. Nechť $\mathcal{A}$ je neprázdná množina, jejíž prvky nazýváme body; nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$ reálných čísel a dále nechť $\rightarrow : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V$ je zobrazení, splňující:

(1) Pro libovolný bod $A \in \mathcal{A}$ a libovolný vektor $\underline{\mathbf{u}} \in V$ existuje jediný bod $B \in \mathcal{A}$ s vlastností $\rightarrow(A, B) := \overrightarrow{AB} = \underline{\mathbf{u}}$.

(2) Pro libovolné body $A, B, C \in \mathcal{A}$ platí $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Potom $\mathcal{A}$ se nazývá *afinní prostor*. Vektorový prostor V se nazývá *zaměření afinního prostoru* $\mathcal{A}$ a označuje se $Z(\mathcal{A})$.

Je-li $\dim V = n$, pak říkáme, že afinní prostor $\mathcal{A}$ je n-rozměrný (nebo též dimenze n), a píšeme $\dim \mathcal{A} = n$ (nebo označujeme zkráceně $\mathcal{A}_n$).

Je-li $\dim \mathcal{A} = 1$ (respektive 2, respektive 3), nazýváme afinní prostor $\mathcal{A}$ *afinní přímkou* (respektive *afinní rovinou*, respektive *afinním prostorem*).

Poznámka 1.1. Přísně vzato, závěr předchozí definice není formulován naprosto přesně, neboť afinním prostorem není množina $\mathcal{A}$, ale přesněji uspořádaná trojice $(\mathcal{A}, V, \rightarrow)$. Pro jednu množinu $\mathcal{A}$ stačí totiž vzít jiný vektorový prostor V, respektive jinak definovat zobrazení $\rightarrow$ tak, aby byly splněny axiomy (1) a (2), a už dostáváme různé afinní prostory (viz Příklad 1.3). Protože však dále budeme vždy hovořit o jednom, pevném afinním prostoru $(\mathcal{A}, V, \rightarrow)$, postačí nám poněkud nepřesné, ale mnohem stručnější označení zavedené v úvodní Definici 1.1. $\diamondsuit$

Příklad 1.1. Nechť $\mathcal{A}$ je množina všech bodů v rovině (studovaná na střední škole), nechť V je vektorový prostor všech volných vektorů v rovině a zobrazení $\rightarrow$ přiřazuje uspořádané dvojici bodů A, B volný vektor, jehož jedním umístěním je orientovaná úsečka s počátečním bodem A a koncovým bodem B. Na střední škole bylo mj. ukázáno, že jsou splněny axiomy (1) a (2) z Definice 1.1. Dostáváme tak tedy afinní prostor, který budeme nazývat *názorná rovina*.

Analogicky lze postupovat v případě obyčejného 3-rozměrného prostoru, studovaného na střední škole. Dostáváme opět afinní prostor, který budeme nazývat *názorný prostor*. ♡

Příklad 1.2. Nechť $\mathcal{A} = \mathbb{R}^n$ (tzn. roli "bodů" budou nyní hrát vektory z $\mathbb{R}^n$) a nechť $V = \mathbb{R}^n$. Položme $\overrightarrow{\underline{\mathbf{ab}}} = \underline{\mathbf{b}} - \underline{\mathbf{a}}$, pro libovolné $\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}} \in \mathcal{A} = \mathbb{R}^n$, kde $-$ značí rozdíl vektorů v $\mathbb{R}^n$. Pak platí:

(1) Pro libovolné $\underline{\mathbf{a}} \in \mathcal{A}$ a libovolné $\underline{\mathbf{u}} \in V$ existuje jednoznačně $\underline{\mathbf{b}} \in \mathcal{A}$ tak, že $\overrightarrow{\underline{\mathbf{ab}}} = \underline{\mathbf{u}}$, konkrétně $\underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{a}}$.

(2) Pro libovolné $\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{c}} \in \mathcal{A}$ platí $\overrightarrow{\underline{\mathbf{ab}}} + \overrightarrow{\underline{\mathbf{bc}}} = \overrightarrow{\underline{\mathbf{ac}}}$.

Je zřejmé, že tímto způsobem lze každý vektorový prostor (nad tělesem $\mathbb{R}$) chápat jako afinní prostor. Hovoříme pak o tzv. *kanonickém afinním prostoru*. ♡

Příklad 1.3. Nechť $\mathcal{A} = \{(a_1; \dots; a_n; 1) | a_i \in \mathbb{R}\}$; nechť V je podprostor vektorového prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$ tvaru $V = \{(u_1; \dots; u_n; 0) | u_i \in \mathbb{R}\}$. Pro dva body $A = (a_1; \dots; a_n; 1)$, $B = (b_1; \dots; b_n; 1) \in \mathcal{A}$ položme

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1; \dots; b_n - a_n; 0)\,.$$

Rozepsáním se lehce ověří, že jsou splněny axiomy (1) a (2) z Definice 1.1, tzn. $\mathcal{A}$ je afinní prostor, přičemž $\dim \mathcal{A} = n$ (neboť $\dim V = n$).

Poznamenejme, že položíme-li $\overrightarrow{AB}' = (a_1 - b_1; \dots; a_n - b_n; 0)$, dostaneme rovněž afinní prostor, přičemž oba afinní prostory, tj. $(\mathcal{A}, V, \rightarrow)$ a $(\mathcal{A}, V, \rightarrow')$, jsou jistě různé, i když množiny bodů i zaměření jsou v obou případech rovné. ♡

Úmluva 1.1. Místo symbolu $\rightarrow$ pro zobrazení $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V$ budeme podle potřeby používat též symbol $-$ a místo $\overrightarrow{AB}$ budeme psát $B - A$. Axiom (2) z Definice 1.1 má potom tvar $(B - A) + (C - B) = C - A$.

Dále, pro pevné $A \in \mathcal{A}$ definujeme zobrazení $f_A : \mathcal{A} \to V$ takto: $f_A(B) = \overrightarrow{AB}$. Z axiomu (1) plyne, že f_A je bijekce. Existuje tedy inverzní zobrazení $f_A^{-1} : V \to \mathcal{A}$, pomocí něhož definujeme zobrazení $+ : \mathcal{A} \times V \to \mathcal{A}$ takto: $+(A, \underline{\mathbf{u}}) := A + \underline{\mathbf{u}} = f_A^{-1}(\underline{\mathbf{u}})$. Pro zobrazení $\rightarrow$ a $+$ pak platí: $\underline{\mathbf{u}} = \overrightarrow{AB} = B - A$ právě když $B = +(A, \underline{\mathbf{u}}) = A + \underline{\mathbf{u}}$.

Zobrazení $+ : \mathcal{A} \times V \to \mathcal{A}$ si můžeme jednoduše představit v názorné rovině (Příklad 1.1). Každému bodu A a volnému vektoru $\underline{\mathbf{u}}$ je jednoznačně přiřazen bod B, který je koncovým bodem vázaného vektoru $\underline{\mathbf{u}}$ s počátkem v bodě A. ♢

Poznámka 1.2. Je nutné si uvědomit, že zavedení označení $B-A$, respektive $A+\underline{\mathbf{u}}$, nás nikterak neopravňuje k tomu, abychom pro počítání s body afinního prostoru používali libovolná početní pravidla, která platí pro sečítání nebo odečítání reálných čísel. Při odvozování početních pravidel pro výše zavedená zobrazení $-$ (respektive $+$) musíme důsledně vycházet pouze z axiomů (1) a (2) Definice 1.1. $\diamondsuit$

Věta 1.1. *Nechť $A, B \in \mathcal{A}$; $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}} \in Z(\mathcal{A})$ a nechť $\underline{\mathbf{o}}$ značí nulový vektor zaměření $Z(\mathcal{A})$. Pak platí:*

1. $\overrightarrow{AB} = \underline{\mathbf{o}} \Leftrightarrow A = B$; *je tedy* $A + \underline{\mathbf{o}} = A$.
2. $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.
3. $A + (\underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{v}}) = (A + \underline{\mathbf{u}}) + \underline{\mathbf{v}}$.
4. $A + \underline{\mathbf{u}} = B + \underline{\mathbf{v}} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{v}}$.

Důkaz. 1. "$\Leftarrow$" Podle Definice 1.1 je $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AA}$. Přičtením vektoru opačného k oběma stranám rovnice dostáváme $\overrightarrow{AA} = \underline{\mathbf{o}}$.

"$\Rightarrow$" Nechť $\overrightarrow{AB} = \underline{\mathbf{o}}$; podle předchozího je však $\overrightarrow{AA} = \underline{\mathbf{o}}$, tzn. podle axiomu (1) je $A = B$.

2. Podle Definice 1.1 je $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \underline{\mathbf{o}}$, tzn. $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

3. Nechť B je bod takový, že $\overrightarrow{AB} = \underline{\mathbf{u}}$ a C je bod takový, že $\overrightarrow{AC} = \underline{\mathbf{u}}+\underline{\mathbf{v}}$, tj. podle naší Úmluvy 1.1 je $B = A + \underline{\mathbf{u}}$ a $C = A + (\underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{v}})$. Potom $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\underline{\mathbf{u}} + (\underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{v}}) = \underline{\mathbf{v}}$, neboli $C = B + \underline{\mathbf{v}}$. Dohromady $A + (\underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{v}}) = C = B + \underline{\mathbf{v}} = (A + \underline{\mathbf{u}}) + \underline{\mathbf{v}}$.

4. $A + \underline{\mathbf{u}} = B + \underline{\mathbf{v}} \Leftrightarrow (A + \underline{\mathbf{u}}) - \underline{\mathbf{v}} = (B + \underline{\mathbf{v}}) - \underline{\mathbf{v}} \Leftrightarrow A + (\underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{v}}) = B + \underline{\mathbf{o}} = B \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{v}}$. $\square$

Následující věta ukazuje, že zobrazení $\rightarrow$ v definici afinního prostoru by bylo možno nahradit zobrazením $+$. V některých učebnicích je možné se s tímto přístupem skutečně setkat.

Věta 1.2. *Nechť $\mathcal{A}$ je neprázdná množina, nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$ reálných čísel a nechť $+ : \mathcal{A} \times V \to \mathcal{A}$ je surjektivní zobrazení, splňující:*

(i) *Pro libovolný prvek $A \in \mathcal{A}$ platí $A = A + \underline{\mathbf{u}} \Leftrightarrow \underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{o}}$.*

(ii) *Pro libovolný prvek $A \in \mathcal{A}$ a libovolné vektory $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}} \in V$ platí*

$$A + (\underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{v}}) = (A + \underline{\mathbf{u}}) + \underline{\mathbf{v}}.$$

Pak na $\mathcal{A}$ je dána struktura afinního prostoru se zaměřením V.

Důkaz. Mějme libovolný bod $A \in \mathcal{A}$ a uvažujme zobrazení $+(A, -) : V \to \mathcal{A}$. Potom toto zobrazení je bijekcí. Opravdu $A + \underline{\mathbf{u}} = A + \underline{\mathbf{v}} \Leftrightarrow (A + \underline{\mathbf{u}}) - \underline{\mathbf{u}} = (A + \underline{\mathbf{v}}) - \underline{\mathbf{u}} \Leftrightarrow A + (\underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{u}}) = A + (\underline{\mathbf{v}} - \underline{\mathbf{u}}) \Leftrightarrow A = A + (\underline{\mathbf{v}} - \underline{\mathbf{u}}) \Leftrightarrow \underline{\mathbf{v}} - \underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{o}}$. Potom inverzní zobrazení označíme $^{\rightarrow}(A, -) : \mathcal{A} \to V$ a protože A byl libovolný, dostáváme zobrazení $^{\rightarrow} : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V$ takové, že $\overrightarrow{AB} = \underline{\mathbf{u}}$ je ekvivalentní $B = A + \underline{\mathbf{u}}$. Toto zobrazení evidentně splňuje axiom (1) Definice 1.1.

Abychom dokázali axiom (2) Definice 1.1, označme $C = A+(\underline{\mathbf{u}}+\underline{\mathbf{v}})$ a $B = A+\underline{\mathbf{u}}$. Potom z (ii) $C = B + \underline{\mathbf{v}}$. Při našem určení zobrazení $\vec{\ }$ máme $\overrightarrow{AC} = \underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{v}} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. □

Poznámka 1.3. Ve Větě 1.1 jsme ukázali, že axiomy (1) a (2) pro zobrazení $\vec{\ }$ implikují vlastnosti (i) a (ii) zobrazení + a ve Větě 1.2 naopak, že (i) a (ii) implikují (1) a (2). Jsou tedy tyto dvě dvojice podmínek navzájem ekvivalentní a afinní prostor bychom mohli definovat také pomocí zobrazení +, které splňuje axiomy (i) a (ii). Afinní prostor tedy můžeme ekvivalentně chápat jako uspořádanou trojici $(\mathcal{A}, V, +)$, kde zobrazení $+ : \mathcal{A} \times V \to \mathcal{A}$ splňuje podmínky (i) a (ii). Všude dále budeme používat obou přístupů k pojmu afinního prostoru bez toho, že bychom mezi nimi dělali rozdíly. ♢

Poznámka 1.4. Připomeňme, že zobrazení $\vec{\ } : \mathcal{A}\times\mathcal{A} \to V$ je vždy surjektivní, tzn. platí $\{\overrightarrow{AB} \mid A, B \in \mathcal{A}\} = V$ (což plyne bezprostředně z Definice 1.1), ale obecně není injektivní (podle Věty 1.1 je totiž $\underline{\mathbf{o}} = \overrightarrow{AA}$ pro každý bod $A \in \mathcal{A}$). Zobrazení $\vec{\ }$ je tedy injektivní právě tehdy, když $\mathcal{A}$ je jednoprvková množina. Tuto situaci popisuje následující Věta 1.3. ♢

Věta 1.3. *Nechť $\mathcal{A}$ je afinní prostor. Pak platí, že*

$$\dim \mathcal{A} = 0 \Leftrightarrow \mathcal{A} \text{ je jednoprvková množina.}$$

Důkaz. "⇒" Nechť $\dim \mathcal{A} = 0$, pak zaměření $Z(\mathcal{A})$ musí být nulovým vektorovým prostorem, tzn. $Z(\mathcal{A}) = \{\underline{\mathbf{o}}\}$. Nechť $A, B \in \mathcal{A}$ libovolné, pak $\overrightarrow{AB} \in Z(\mathcal{A})$, tzn. $\overrightarrow{AB} = \underline{\mathbf{o}}$, odtud $A = B$ podle Věty 1.1. Je tedy $\mathcal{A} = \{A\}$.

"⇐" Nechť $\mathcal{A} = \{A\}$, pak podle Poznámky 1.4 je $Z(\mathcal{A}) = \{\overrightarrow{AA}\}$, tzn. $Z(\mathcal{A}) = \{\underline{\mathbf{o}}\}$, a platí $\dim \mathcal{A} = 0$. □

Úloha 1.1. Nechť $\mathcal{A} = \mathbb{R}^3$ a $V = \mathbb{R}^3$. Pro libovolné $A = (a_1; a_2; a_3)$, $B = (b_1; b_2; b_3) \in \mathcal{A}$ položme $\overrightarrow{AB} = (a_1 - b_2; a_2 - b_3; a_3 - b_1)$. Rozhodněte, zda $(\mathcal{A}, V, \vec{\ })$ je afinní prostor.

Řešení: Zřejmě $\mathcal{A}$ je neprázdná množina, V je vektorový prostor a $\vec{\ }$ je zobrazení $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ do V. Zbývá tedy ověřit platnost axiomů (1) a (2) z Definice 1.1.

Ad (1). Nechť $A = (a_1; a_2; a_3) \in \mathcal{A}$, $\underline{\mathbf{u}} = (u_1; u_2; u_3) \in V$ jsou libovolné. Hledáme bod $B = (x_1; x_2; x_3) \in \mathcal{A}$, splňující $\overrightarrow{AB} = \underline{\mathbf{u}}$. Ale $\overrightarrow{AB} = (a_1 - x_2; a_2 - x_3; a_3 - x_1)$. Odtud plyne $a_1 - x_2 = u_1$, $a_2 - x_3 = u_2$, $a_3 - x_1 = u_3$, tj. $x_1 = a_3 - u_3$, $x_2 = a_1 - u_1$, $x_3 = a_2 - u_2$, a odtud plyne, že bod B s uvedenou vlastností existuje a je jediný.

Ad (2). Nechť $A = (a_1; a_2; a_3)$, $B = (b_1; b_2; b_3)$, $C = (c_1; c_2; c_3) \in \mathcal{A}$ jsou libovolné. Pak $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} = (a_1-b_2; a_2-b_3; a_3-b_1)+(b_1-c_2; b_2-c_3; b_3-c_1) = (a_1-b_2+b_1-c_2; a_2-b_3+b_2-c_3; a_3-b_1+b_3-c_1)$. Na druhé straně $\overrightarrow{AC} = (a_1-c_2; a_2-c_3; a_3-c_1)$ a obecně $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \neq \overrightarrow{AC}$, a tedy $\mathcal{A}$ není afinním prostorem. △

Úloha 1.2. Nechť $\mathcal{A}$ je afinní prostor, nechť $A, B, C, D \in \mathcal{A}$, $\underline{\mathbf{u}} \in Z(\mathcal{A})$. Dokažte, že platí:

1. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.
2. $(A + \underline{\mathbf{u}}) - C = (A - C) + \underline{\mathbf{u}}$.

Řešení: 1. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \underline{\mathbf{o}} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

2. Nejprve si uvědomme, že $A + \underline{\mathbf{u}}$ je bod, respektive $A - C$ je vektor, tzn. obě strany rovnice dávají smysl a jsou to vektory ze $Z(\mathcal{A})$. Označme $B = A + \underline{\mathbf{u}}$, tzn. $B - A = \underline{\mathbf{u}}$. Potom

$$(A + \underline{\mathbf{u}}) - C = B - C = (B - A) + (A - C) = (A - C) + \underline{\mathbf{u}}. \qquad \triangle$$

2 Podprostory afinního prostoru

Základním geometrickým útvarem v afinním prostoru, kterým se budeme v těchto skriptech zabývat, je afinní podprostor. V tomto paragrafu zavedeme pojem afinního podprostoru a budeme studovat zakladní vlastnosti a způsoby zadání afinního podprostoru.

Definice 2.1. Nechť $\mathcal{A}$ je afinní prostor se zaměřením V. Nechť $\mathcal{B}$ je neprázdná podmnožina $\mathcal{A}$ a nechť $W = \{\overrightarrow{XY} | X, Y \in \mathcal{B}\}$. Jestliže platí:

(1) W je vektorovým podprostorem ve V,

(2) pro libovolný bod $X \in \mathcal{B}$ a libovolný vektor $\underline{\mathbf{u}} \in W$ existuje bod $Y \in \mathcal{B}$ s vlastností $\overrightarrow{XY} = \underline{\mathbf{u}}$,

pak $\mathcal{B}$ nazýváme *afinním podprostorem* v $\mathcal{A}$ se zaměřením W (respektive podprostorem v $\mathcal{A}$).

Poznámka 2.1. Bod Y v axiomu (2) Definice 2.1 existuje zřejmě jediný (plyne z Definice 1.1 afinního prostoru $\mathcal{A}$). Vidíme tedy, že afinní podprostor $\mathcal{B}$ je sám afinním prostorem, přičemž jeho zaměření $Z(\mathcal{B}) = W$ a zobrazení $\mathcal{B} \times \mathcal{B} \to W$ požadované v definici afinního prostoru obdržíme jako zúžení zobrazení $^{\to} : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V$ na množinu $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$. Je-li tedy podprostor $\mathcal{B}$ sám afinním prostorem, můžeme mj. hovořit o jeho dimenzi, přičemž $\dim \mathcal{B} = \dim W$. $\diamondsuit$

Poznámka 2.2. Z Definice 2.1 vyplývá, že zatímco pro totožnost afinních prostorů bylo nutno, aby se rovnaly uspořádané trojice

$$(\mathcal{A}, Z(\mathcal{A}), ^{\to}) = (\mathcal{A}', Z(\mathcal{A}'), ^{\to'}),$$

pro totožnost dvou podprostorů daného afinního prostoru stačí, aby se rovnaly množiny bodů. Rovnost zaměření a totožnost příslušných zobrazení je již důsledkem Definice 2.1. $\diamondsuit$

Poznámka 2.3. Ukážeme si, že v Definici 2.1 afinního podprostoru jsou nutné oba axiomy (1) a (2). Uvažujme kanonický afinní prostor $\mathbb{R}^2$ (viz Příklad 1.2). Potom:

1. Podmnožina $\mathcal{B} = \{(a,0)|a \in \mathbb{R}, a \neq 0\} \subset \mathbb{R}^2$ splňuje axiom (1), ale nesplňuje axiom (2). Opravdu, pro bod $A = (a,0)$ a vektor $\underline{\mathbf{u}} = (-a,0)$, bod $B = A + \underline{\mathbf{u}} \neq (0,0) \in \mathcal{B}$.

2. Podmnožina $\mathcal{B} = \{(a,0)|a \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}^2$ splňuje axiom (2), ale nesplňuje axiom (1). Opravdu, $W = \{(a,0)|a \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}^2$ není vektorový podprostor, protože není uzavřená vzhledem k násobení reálnými čísly.

1. Podmnožina $\mathcal{B} = \{(a,0)|a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ splňuje oba axiomy (1) a (2) a jedná se tedy o afinní podprostor (dimenze jedna). $\diamondsuit$

Věta 2.1. *Nechť $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ jsou podprostory v $\mathcal{A}$. Pak*

$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}' \implies Z(\mathcal{B}) \subseteq Z(\mathcal{B}')$ *a* $\dim \mathcal{B} \leq \dim \mathcal{B}'$.

Důkaz. Tvrzení je zřejmé z Definice 2.1. $\square$

Definice 2.2. Nechť $\mathcal{B}$ je podprostor v $\mathcal{A}$. Je-li $\dim \mathcal{B} = 0$ (respektive 1, respektive 2, respektive $(\dim \mathcal{A} - 1)$), pak podprostor $\mathcal{B}$ nazýváme *bodem* (respektive *přímkou*, respektive *rovinou*, respektive *nadrovinou*) prostoru $\mathcal{A}$.

Je vidět, že zavedené pojmy *přímka* a *rovina* odpovídají vžitým středoškol- ským představám. Pojem *nadrovina* se na střední škole nezaváděl, protože v názorné rovině je nadrovinou přímka, respektive v názorném prostoru je nadrovinou rovina, tedy útvary, které již mají své pojmenování. Pro označení přímek (respektive rovin) budeme, kromě zavedeného označení, používat též často označování malými latinskými (respektive řeckými) písmeny.

Úmluva 2.1. Nechť $A \in \mathcal{A}$ je bod a $W \subseteq V$ je vektorový podprostor ve V. Pak symbolem $\{A; W\}$ budeme označovat podmnožinu v $\mathcal{A}$ tvaru

$$\{A; W\} = \{A + \underline{\mathbf{w}} \,|\, \underline{\mathbf{w}} \in W\}\,. \qquad \diamondsuit \tag{2.1}$$

Věta 2.2. *Nechť $A \in \mathcal{A}$ je bod a W je podprostor zaměření $Z(\mathcal{A})$. Pak:*

1. *$\{A; W\}$ je podprostor v $\mathcal{A}$ se zaměřením W.*
2. *Je-li $\mathcal{B}$ podprostor v $\mathcal{A}$ takový, že $A \in \mathcal{B}$ a $Z(\mathcal{B}) = W$, pak je $\mathcal{B} = \{A; W\}$.*

Důkaz. 1. Označme $\mathcal{B}' = \{A; W\}$, respektive $W' = \{\overrightarrow{XY} | X, Y \in \mathcal{B}'\}$. Zřejmě je $\emptyset \neq \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{A}$. Dále platí, že $W = W'$ (je-li $\underline{\mathbf{w}} \in W$, pak $A + \underline{\mathbf{w}} = T \in \mathcal{B}'$, přičemž $A \in \mathcal{B}'$. Tedy $\underline{\mathbf{w}} = \overrightarrow{AT} \in W'$. Naopak, nechť $\overrightarrow{XY} \in W'$. Pak $X = A + \underline{\mathbf{u}}$, $Y = A + \underline{\mathbf{v}}$, kde $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}} \in W$. Pak ale $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{AY} = -\underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{v}} \in W$). Tedy $W' = W$ je podprostor ve V.

Dále, nechť $X \in \mathcal{B}'$, $\underline{\mathbf{u}} \in W'$ libovolné. Pak (podle Definice 1.1 afinního prostoru $\mathcal{A}$) existuje jediný bod $Y \in \mathcal{A}$ s vlastností: $\overrightarrow{XY} = \underline{\mathbf{u}}$. Ale $\overrightarrow{AY} = \overrightarrow{AX} + \overrightarrow{XY} = \overrightarrow{AX} + \underline{\mathbf{u}} \in W' = W$, tzn. $Y = A + \overrightarrow{AY} \in \mathcal{B}'$, a tvrzení platí.

2. "$\subseteq$" Nechť $X \in \mathcal{B}$, pak $\overrightarrow{AX} \in W$, tzn. $X = A + \overrightarrow{AX} \in \{A; W\}$.

"$\supseteq$" Nechť $X \in \{A; W\}$; pak $X = A + \underline{\mathbf{w}}$, kde $\underline{\mathbf{w}} \in W$. Tedy $\overrightarrow{AX} = \underline{\mathbf{w}} \in W$; $A \in \mathcal{B}$, tzn. podle Definice 2.1 je $X \in \mathcal{B}$. □

Důsledek 2.1. *Nechť $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ jsou dva podprostory v $\mathcal{A}$ takové, že $Z(\mathcal{B}) = Z(\mathcal{B}')$ a $\mathcal{B} \cap \mathcal{B}' \neq \emptyset$. Potom $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$.*

Důkaz. Nechť $A \in \mathcal{B} \cap \mathcal{B}'$, potom $\mathcal{B} = \{A; Z(\mathcal{B})\} = \{A; Z(\mathcal{B}')\} = \mathcal{B}'$. □

Poznámka 2.4. Z předchozí věty plyne, že každý podprostor afinního prostoru $\mathcal{A}$ je jednoznačně určen zadáním dvou údajů, a to zadáním jednoho svého bodu a zadáním svého zaměření. ♢

Definice 2.3. Nechť $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ jsou dva podprostory v $\mathcal{A}$. Je-li $\mathcal{B} \cap \mathcal{B}' \neq \emptyset$ (respektive $\mathcal{B} \cap \mathcal{B}' = \emptyset$), pak říkáme, že podprostory $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ se *protínají* (respektive *neprotínají*).

Je-li bod $A \in \mathcal{B}$, pak říkáme, že podprostor $\mathcal{B}$ *prochází bodem* A.

Protínání dvou podprostorů charakterizuje následující důležitá věta.

Věta 2.3. *Nechť $\mathcal{B}_1 = \{B_1; W_1\}$, $\mathcal{B}_2 = \{B_2; W_2\}$ jsou podprostory afinního prostoru $\mathcal{A}$. Pak podprostory $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ se protínají $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{B_1B_2} \in W_1 + W_2$.*

Důkaz. "$\Rightarrow$" Nechť $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 \neq \emptyset$ a nechť $A \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$. Pak $\overrightarrow{B_1A} \in W_1$, $\overrightarrow{AB_2} \in W_2$, odkud $\overrightarrow{B_1B_2} = \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AB_2} \in W_1 + W_2$.

"$\Leftarrow$" Nechť $\overrightarrow{B_1B_2} \in W_1 + W_2$, tzn. $\overrightarrow{B_1B_2} = \underline{\mathbf{w}}_1 + \underline{\mathbf{w}}_2$, kde $\underline{\mathbf{w}}_1 \in W_1$, $\underline{\mathbf{w}}_2 \in W_2$. Pak $B_1 + \underline{\mathbf{w}}_1 = B_1 + (\overrightarrow{B_1B_2} - \underline{\mathbf{w}}_2) = (B_1 + \overrightarrow{B_1B_2}) + (-\underline{\mathbf{w}}_2) = B_2 + (-\underline{\mathbf{w}}_2) \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$. Tedy $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 \neq \emptyset$. □

Věta 2.4. *Nechť I je neprázdná indexová množina, nechť $\mathcal{B}_i$, $i \in I$, jsou podprostory afinního prostoru $\mathcal{A}$ a nechť $\mathcal{B} = \cap_{i \in I} \mathcal{B}_i \neq \emptyset$. Pak $\mathcal{B}$ je podprostorem afinního prostoru $\mathcal{A}$ se zaměřením $Z(\mathcal{B}) = \cap_{i \in I} Z(\mathcal{B}_i)$.*

Důkaz. Ověříme jednotlivé požadavky z Definice 2.1. Především, podle předpokladu, je $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Dále označme $W = \{\overrightarrow{XY} | X, Y \in \mathcal{B}\}$. Poněvadž $Z(\mathcal{B}_i) = \{\overrightarrow{XY} | X, Y \in \mathcal{B}_i\}$, je zřejmě $W = \cap Z(\mathcal{B}_i)$ $(i \in I)$, a tedy (viz [Ho94]) W je vektorový podprostor v $Z(\mathcal{A})$.

Dále, nechť $X \in \mathcal{B}$, $\underline{\mathbf{u}} \in W$ jsou libovolné. Pak existuje jediný bod $Y \in \mathcal{A}$ takový, že $\overrightarrow{XY} + \underline{\mathbf{u}}$. Ale $X \in \mathcal{B}_i$, $\underline{\mathbf{u}} \in Z(\mathcal{B}_i)$, a tedy $Y \in \mathcal{B}_i$, pro každé $i \in I$. Pak je $Y \in \mathcal{B}$. □

Důsledek 2.2. *Nechť M je neprázdná podmnožina v afinním prostoru $\mathcal{A}$. Pak*

$$\mathcal{B} = \cap \mathcal{B}_i \ (\mathcal{B}_i \text{ je afinní podprostor v } \mathcal{A};\ B_i \supseteq M)$$

je nejmenší (vzhledem k množinové inkluzi) afinní podprostor v $\mathcal{A}$, který obsahuje množinu M.

Důkaz. Především, existuje vždy alespoň jeden podprostor v $\mathcal{A}$ s uvedenou vlastností (totiž prostor $\mathcal{A}$ samotný), a tedy symbol $\cap\mathcal{B}_i$ má smysl. Podle předchozí věty je $\mathcal{B}$ podprostorem v $\mathcal{A}$, respektive z vlastností množinového průniku plyne, že $\mathcal{B}$ je nejmenší podprostor obsahující množinu M. □

Definice 2.4. Nechť platí předpoklady a označení z předchozího Důsledku 2.2. Pak $\mathcal{B}$ se nazývá *afinní podprostor* v $\mathcal{A}$ *generovaný množinou* M a označuje se obvykle symbolem $\langle M\rangle$. Podprostor $\langle M\rangle$ budeme také nazývát *afinní obal množiny* M.

V případě, že množina M je konečná, například $M = \{A_0, A_1, \dots, A_k\}$, pak místo $\langle\{A_0, A_1, \dots, A_k\}\rangle$ píšeme stručně $\langle A_0, A_1, \dots, A_k\rangle$ a hovoříme o *afinním podprostoru generovaném body* $A_0, A_1, \dots, A_k$.

Je-li podprostor $\langle A_0, A_1, \dots, A_k\rangle$ k-rozměrný, pak body $A_0, A_1, \dots, A_k$ nazýváme *body v obecné poloze.*

Poznámka 2.5. Je-li speciálně množina M podprostorem, pak zřejmě $\langle M\rangle = M$, jinak je vždy $M \subset \langle M\rangle$. Přímo z definice je rovněž zřejmé, že leží-li více než $(k+1)$ bodů v nějakém k-rozměrném prostoru v $\mathcal{A}$, pak tyto body nemohou být v obecné poloze.

Vezmeme-li například za prostor $\mathcal{A}$ afinní názorný prostor (viz Příklad 1.1) a je-li $M = \{A_0, A_1, A_2\}$, pak $\langle M\rangle$ může být buď bod (je-li $A_0 = A_1 = A_2$) nebo přímka (leží-li A_0, A_1, A_2 na jedné přímce) nebo rovina (neleží-li A_0, A_1, A_2 na jedné přímce). V posledním případě jsou body A_0, A_1, A_2 v obecné poloze, kdežto v předchozích dvou případech nikoliv. ♢

Věta 2.5. *Nechť $k \geq 0$ je celé číslo a $A_0, A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}$. Pak platí*

$$\langle A_0, A_1, \dots, A_k\rangle = \{A_i; L(\overrightarrow{A_iA_0}, \overrightarrow{A_iA_1}, \dots, \overrightarrow{A_iA_k})\}$$

pro libovolné $i = 0, 1, \cdots, k$.

Důkaz. Označme $\mathcal{B} = \{A_i; L(\overrightarrow{A_iA_0}, \dots, \overrightarrow{A_iA_k})\}$. Zřejmě $A_0, \dots, A_k \in \mathcal{B}$, tzn. pak $\langle A_0, \dots, A_k\rangle \subseteq \mathcal{B}$, odkud podle Věty 2.1 je $Z(\langle A_0, \dots, A_k\rangle) \subseteq Z(\mathcal{B})$. Naopak, zřejmě $Z(\mathcal{B}) = L(\overrightarrow{A_iA_0}, \dots, \overrightarrow{A_iA_k}) \subseteq Z(\langle A_0, \dots, A_k\rangle)$, a tedy oba podprostory mají stejná zaměření a navíc se jistě protínají. Podle Důsledku 2.1 pak platí dokazovaná rovnost. □

Důsledek 2.3. *V libovolném k-rozměrném podprostoru v $\mathcal{A}$ lze nalézt $(k+1)$ bodů v obecné poloze.*

Důkaz. Nechť $\mathcal{B} = \{B; W\}$ je k-rozměrný podprostor v $\mathcal{A}$. Je-li $k = 0$, pak tvrzení triviálně platí (bod B sám je v obecné poloze). Nechť tedy $k \geq 1$ a nechť $\underline{\mathbf{w}}_1, \dots, \underline{\mathbf{w}}_k$ je báze zaměření W. Pak dle Věty 2.5 body $B, B+\underline{\mathbf{w}}_1, \dots, B+\underline{\mathbf{w}}_k$ (kterých je $k+1$) generují $\mathcal{B}$, a jsou tedy v obecné poloze, neboť $\dim\mathcal{B} = k$. □

Definice 2.5. Nechť s je přirozené číslo a $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_s$ jsou podprostory afinního prostoru $\mathcal{A}$. Pak podprostor $\langle \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cdots \cup \mathcal{B}_s \rangle$ nazýváme *součtem (spojením) podprostorů* $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_s$ a označujeme ho $\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2 + \cdots + \mathcal{B}_s$.

Poznámka 2.6. Uvědomme si dobře, že množinové sjednocení konečného počtu podprostorů afinního prostoru $\mathcal{A}$ nemusí být obecně podprostorem v $\mathcal{A}$. Představme si například v afinním názorném prostoru (viz Příklad 1.1) dvě různé rovnoběžné přímky. Pak jejich množinovým sjednocením jistě není podprostor. Z názoru je zřejmé, že součtem těchto dvou přímek bude rovina, která obě přímky obsahuje. Na druhé straně, uvážíme-li v názorném prostoru pevnou přímku a dále rovinu, která tuto přímku obsahuje, pak množinové sjednocení těchto dvou podprostorů je rovno jejich součtu, kterým je daná rovina. Obecně o určení a dimenzi součtu libovolných dvou podprostorů afinního prostoru hovoří následující věta. $\diamondsuit$

Věta 2.6. *Nechť* $\mathcal{B}_1 = \{B_1; W_1\}$, $\mathcal{B}_2 = \{B_2; W_2\}$ *jsou afinní podprostory v* $\mathcal{A}$. *Pak:*

1. $\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2 = \{B_1; W_1 + W_2 + L(\overrightarrow{B_1B_2})\}$.
2. $\dim(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2) = \begin{cases} \dim(W_1 + W_2) & \textit{je-li } \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 \neq \emptyset, \\ \dim(W_1 + W_2) + 1 & \textit{je-li } \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset. \end{cases}$

Důkaz. 1. Označme $\mathcal{B} = \{B_1; W_1 + W_2 + L(\overrightarrow{B_1B_2})\}$. Potom zřejmě platí $B_2 = B_1 + \overrightarrow{B_1B_2} \in \mathcal{B}$.

Bezprostředním rozepsáním se ověří, že $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$. Dále nechť $\mathcal{C}$ je podprostor v $\mathcal{A}$ takový, že $\mathcal{C} \supseteq \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$. Pak podle Věty 2.1 je $W_1, W_2 \subseteq Z(\mathcal{C})$ a navíc $\overrightarrow{B_1B_2} \in Z(\mathcal{C})$, tzn. $L(\overrightarrow{B_1B_2}) \subseteq Z(\mathcal{C})$. Tedy je $W_1 + W_2 + L(\overrightarrow{B_1B_2}) \subseteq Z(\mathcal{C})$, odkud již dostáváme, že $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$.

Tedy $\mathcal{B}$ je nejmenší podprostor obsahující $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$, neboli $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2$.

2. Je-li $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 \neq \emptyset$, pak podle Věty 2.3 je $\overrightarrow{B_1B_2} \in W_1 + W_2$, tzn. $L(\overrightarrow{B_1B_2}) \subseteq W_1 + W_2$, odkud pak $W_1 + W_2 + L(\overrightarrow{B_1B_2}) = W_1 + W_2$.

Je-li $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$, pak podle Věty 2.3 je $\underline{\mathbf{o}} \neq \overrightarrow{B_1B_2} \notin W_1 + W_2$, odkud dostáváme $(W_1 + W_2) \cap L(\overrightarrow{B_1B_2}) = \{\underline{\mathbf{o}}\}$. Užitím věty o dimenzi součtu a průniku vektorových podprostorů dostáváme: $\dim(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2) = \dim((W_1 + W_2) + L(\overrightarrow{B_1B_2})) = \dim(W_1 + W_2) + \dim L(\overrightarrow{B_1B_2}) - \dim((W_1 + W_2) \cap L(\overrightarrow{B_1B_2})) = \dim(W_1 + W_2) + 1$. $\square$

Úloha 2.1. Nechť $\mathcal{A}$ je 4-rozměrný kanonický prostor (viz Příklad 1.2) a nechť $\mathcal{B}_1 = \{B_1; W_1\}$, $\mathcal{B}_2 = \langle A_0, A_1, A_2, A_3 \rangle$ jsou podprostory v $\mathcal{A}$, přičemž:
$A_0 = (1; -1; 1; 1)$, $A_1 = (2; 0; 1; 1)$, $A_2 = (0; -1; 1; 0)$, $A_3 = (1; 0; 1; 0)$,
$B_1 = (1; 1; 1; 2)$; $W_1 = \{(x_1; x_2; x_3; x_4) | x_1 = 0, x_3 = 0\}$. Potom:

1. Zjistěte, zda body A_0, A_1, A_2, A_3 jsou v obecné poloze.
2. Rozhodněte, zda se podprostory $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ protínají.
3. Nalezněte součet $\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2$ a určete jeho dimenzi.

Řešení: 1. Podle Věty 2.5 je $\dim \mathcal{B}_2 = \dim L(\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \overrightarrow{A_0A_3})$. Ale (viz Příklad 1.2) $\overrightarrow{A_0A_1} = (1;1;0;0)$, $\overrightarrow{A_0A_2} = (-1;0;0;-1)$, $\overrightarrow{A_0A_3} = (0;1;0;-1)$. Nyní stačí matici, v jejíchž řádcích jsou uvedené vektory, převést na schodovitý tvar. Tedy

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ odkud ihned plyne, že } \dim \mathcal{B}_2 = 2,$$

a tedy body A_0, A_1, A_2, A_3 nejsou v obecné poloze.

2. Bází W_1 jsou například vektory: $\underline{\mathbf{u}}_1 = (0,1,0,0)$, $\underline{\mathbf{u}}_2 = (0,0,0,1)$, respektive bází $Z(\mathcal{B}_2)$ jsou podle 1. části úlohy například vektory $\overrightarrow{A_0A_1}$, $\overrightarrow{A_0A_2}$. Podle Věty 2.3 stačí nyní ověřit, zda $\overrightarrow{B_1A_0} \in W_1 + Z(\mathcal{B}_1)$ nebo nikoliv. K tomu zřejmě stačí pouze převést matici, v jejíchž řádcích jsou zapsány vektory báze W_1, báze $Z(\mathcal{B}_2)$ a vektor $\overrightarrow{B_1A_0}$, na schodovitý tvar. Lze-li úpravu provést tak, že nakonec vektor $\overrightarrow{B_1A_0}$ přejde v nulový vektor, pak $\overrightarrow{B_1A_0} \in W_1 + Z(\mathcal{B}_2)$, v opačném případě nikoliv. Ale $\overrightarrow{B_1A_0} = (0,2,0,1)$, tzn.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ \hdotsfor{4} \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hdotsfor{4} \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdotsfor{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

a tedy $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ se protínají.

Poznamenejme, že při úpravě předchozí matice na schodovitý tvar je nejpraktičtější napsat vektor $\overrightarrow{B_1A_0}$ do matice až jako poslední, oddělit jej například vodorovnou čarou a při provádění úprav jej stále ponechávat v matici jako poslední řádek.

3. Podle Věty 2.6 a výpočtem provedeným ve 2. části úlohy ihned dostáváme, že například $\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2 = \{B_1; W\}$, kde $W = L(\overrightarrow{A_0A_1}, \underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2)$, přičemž platí, že $\dim(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2) = \dim W = 3$. △

3 Afinní repér, afinní souřadnice

Připomeňme, že s pojmem souřadnic jsme se setkali v algebře, při studiu vektorových prostorů. Je-li totiž V vektorový prostor a systém vektorů $\mathscr{B} = \langle \underline{\mathbf{e}}_1, \dots, \underline{\mathbf{e}}_n \rangle$ je bází V, pak libovolný vektor $\underline{\mathbf{u}} \in V$ lze jediným způsobem vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů této báze, tzn. ve tvaru

$$\underline{\mathbf{u}} = u_1\underline{\mathbf{e}}_1 + \dots + u_n\underline{\mathbf{e}}_n. \tag{3.1}$$

Uspořádanou n-tici koeficientů $(u_1; \dots ; u_n)$ pak nazýváme *souřadnicemi vektoru* $\underline{\mathbf{u}}$ v bázi $\mathscr{B}$. Báze tedy určuje bijekci V na $\mathbb{R}^n$ a při ztotožnění vektoru $\underline{\mathbf{u}}$ s uspořádanou n-ticí jeho souřadnic budeme psát $\underline{\mathbf{u}} = (u_1; \dots ; u_n)$. Abychom mohli používat zkrácených maticových zápisů, budeme sloupcovou matici tvořenou souřadnicemi vektoru $\underline{\mathbf{u}}$ v bázi $\mathscr{B}$ označovat symbolem $\underline{\mathbf{u}}$, tzn. $(\underline{\mathbf{u}}) = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$.

Dále, je-li $\mathscr{B}' = \langle \underline{\mathbf{d}}_1, \dots, \underline{\mathbf{d}}_n \rangle$ další báze vektorového prostoru V a platí

$$\underline{\mathbf{d}}_j = a_{1j}\underline{\mathbf{e}}_1 + a_{2j}\underline{\mathbf{e}}_2 + \cdots + a_{nj}\underline{\mathbf{e}}_n, \text{ pro } j = 1, \dots, n\,,$$

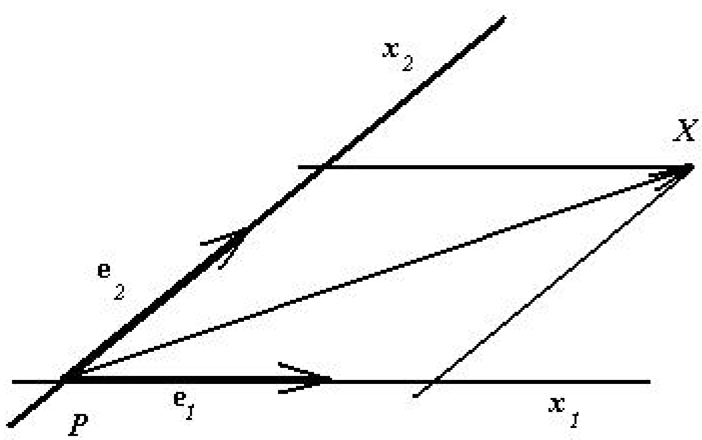
pak matice $A = (a_{ij})$, tj. matice, v jejíchž sloupcích vystupují souřadnice vektorů $\underline{\mathbf{d}}_1, \dots, \underline{\mathbf{d}}_n$ vyjádřené v bázi $\mathscr{B}$, se nazývá *maticí přechodu od báze $\mathscr{B}$ k bázi $\mathscr{B}'$*.

Definice 3.1. Nechť $\mathcal{A}$ je afinní prostor, $\dim \mathcal{A} \geq 1$, nechť $P \in \mathcal{A}$ je pevný bod a nechť $\langle \underline{\mathbf{e}}_1, \dots, \underline{\mathbf{e}}_n \rangle$ je báze zaměření $Z(\mathcal{A})$. *Afinním repérem* (nebo *afinním souřadnicovým systémem*) v $\mathcal{A}$ rozumíme systém

$$\mathscr{R} = \langle P; \underline{\mathbf{e}}_1, \dots, \underline{\mathbf{e}}_n \rangle\,. \tag{3.2}$$

Bod P se nazývá *počátek* a vektory $\underline{\mathbf{e}}_1, \dots, \underline{\mathbf{e}}_n$ se nazývají *základní vektory* afinního repéru (3.2).

Přímky $x_i = \{P; L(\underline{\mathbf{e}}_i)\}$ se nazývají *osy afinních souřadnic* (nebo *souřadné osy afinního repéru*).



Obr. 3.1

Uvažujme bod $X \in \mathcal{A}$ a afinní repér (3.2). Potom existuje jediná uspořádaná n-tice reálných čísel x_i, $i = 1, \dots, n$, splňující

$$\overrightarrow{PX} = x_1\underline{\mathbf{e}}_1 + \cdots + x_n\underline{\mathbf{e}}_n\,, \tag{3.3}$$

nebo ekvivalentně

$$X = P + x_1\underline{\mathbf{e}}_1 + \cdots + x_n\underline{\mathbf{e}}_n\,. \tag{3.4}$$

Definice 3.2. Nechť $\mathscr{R} = \langle P; \underline{\mathbf{e}}, \dots, \underline{\mathbf{e}}_n \rangle$ je afinní repér v $\mathcal{A}$ a $X \in \mathcal{A}$ je bod. Uspořádaná n-tice reálných čísel x_i, $i = 1, \dots, n$, splňující (3.3), se nazývá *souřadnicemi bodu X v afinním repéru $\mathscr{R}$* (nebo *afinními souřadnicemi bodu X vzhledem k repéru $\mathscr{R}$*).

Souřadnicemi vektoru $\underline{\mathbf{u}} \in Z(\mathcal{A})$ v afinním repéru (3.2) nazýváme souřadnice vektoru $\underline{\mathbf{u}}$ v bázi $\langle \underline{\mathbf{e}}_1, \dots, \underline{\mathbf{e}}_n \rangle$, tzn. uspořádanou n-tici reálných čísel u_i, $i = 1, \dots, n$, splňující (3.1).

Úmluva 3.1. Vzhledem k jednoznačnosti vyjádření (3.1) a (3.3) jsou souřadnice bodů i vektorů v daném afinním repéru určeny jednoznačně, a tedy dva body (respektive vektory) mají stejné souřadnice právě tehdy, když jsou si rovny. Tohoto faktu budeme nyní často využívat v tom smyslu, že při studiu pojmů a zejména řešení úloh, které jsou nezávislé na volbě afinního repéru v $\mathcal{A}$ (a těch bude drtivá většina), budeme pracovat se souřadnicemi bodů (respektive vektorů) v nějakém pevném afinním repéru a nebudeme muset zadávat, jak konkrétně afinní prostor $\mathcal{A}$ vypadá.

Zaveďme tedy úmluvu, že v dalším (nebude-li výslovně řečeno jinak) budeme stále předpokládat, že v $\mathcal{A}$ je zadán pevný afinní repér (3.2), v němž budeme souřadnice všech bodů (respektive vektorů) vyjadřovat. $\Diamond$

Úmluva 3.2. Afinní repér tedy určuje bijekci $\mathcal{A}_n$ na $\mathbb{R}^n$ a při ztotožnění bodu $X \in \mathcal{A}_n$ (respektive vektoru $\underline{\mathbf{u}} \in Z(\mathcal{A}_n)$) s uspořádanou n-ticí jeho souřadnic budeme psát $X = [x_1; \dots; x_n]$ (respektive $\underline{\mathbf{u}} = (u_1; \dots; u_n)$). Abychom mohli používat zkrácených maticových zápisů, budeme označovat $(X) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ (respektive $(\underline{\mathbf{u}}) = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$) sloupcovou matici tvořenou souřadnicemi bodu X (respektive vektoru $\underline{\mathbf{u}}$) vzhledem k repéru $\mathscr{R}$. $\Diamond$

Úmluva 3.3. V afinním prostoru dimenze dva, tj. v afinní rovině, budeme zpravidla afinní souřadnice bodů označovat $X = [x; y]$ a příslušné osy souřadnic budeme nazývat osa x a osa y.

Podobně v afinním prostoru dimenze tři budeme zpravidla afinní souřadnice bodů označovat $X = [x; y; z]$ a příslušné osy souřadnic budeme nazývat osa x, osa y a osa z. $\Diamond$

Nyní uvedeme několik jednoduchých důsledků, které bezprostředně vyplývají z předchozí Definice 3.2 a které budeme v dalším velmi často (již bez odkazu) používat. Především je zřejmě, že počátek P má všechny souřadnice rovny nule, tzn. $P = [0; \dots; 0]$, neboť $\overrightarrow{PP} = \underline{\mathbf{o}} = 0\underline{\mathbf{e}}_1 + \cdots + 0\underline{\mathbf{e}}_n$. Dále nechť $X, Y \in \mathcal{A}$ jsou libovolné body, přičemž

$$X = [x_1; \dots; x_n], \quad Y = [y_1; \dots; y_n].$$

Víme, že body X, Y je jednoznačně určen vektor $\overrightarrow{XY} = Y - X \in Z(\mathcal{A})$. Hledejme nyní souřadnice tohoto vektoru. Ale $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{XP} + \overrightarrow{PY} = \overrightarrow{PY} - \overrightarrow{PX} = y_1\underline{\mathbf{e}}_1 + \cdots +$

$y_n\underline{\mathbf{e}}_n - (x_1\underline{\mathbf{e}}_1 + \cdots + x_n\underline{\mathbf{e}}_n) = (y_1 - x_1)\underline{\mathbf{e}}_1 + \cdots + (y_n - x_n)\underline{\mathbf{e}}_n$. Je tedy

$$\overrightarrow{XY} = Y - X = (y_1 - x_1; \ldots; y_n - x_n)\,. \tag{3.5}$$

Je-li dále $\underline{\mathbf{u}} = (u_1; \ldots; u_n) \in Z(\mathcal{A})$ vektor, pak je zřejmě $\overrightarrow{XY} = \underline{\mathbf{u}}$ právě když $y_1 - x_1 = u_1, \ldots, y_n - x_n = u_n$. Jinak řečeno

$$Y = X + \underline{\mathbf{u}} \Leftrightarrow y_i = x_i + u_i, \text{ pro } i = 1, \ldots, n\,. \tag{3.6}$$

Poznámka 3.1. Z (3.5) a (3.6) vyplývá, že vlastnosti zobrazení $+$ a $-$, které jsme popsali ve Větě 1.1, odpovídají při přechodu k afinním souřadnicím přesně vlastnostem operací sčítání a odečítání uspořádaných n-tic reálných čísel. $\diamondsuit$

V další části tohoto paragrafu budeme studovat vzájemný vztah souřadnic jednoho pevného bodu (respektive vektoru) vzhledem ke dvěma různým afinním repérům v prostoru $\mathcal{A}$. Nechť tedy v $\mathcal{A}$ jsou dány dva afinní repéry

$$\mathscr{R} = \langle P; \underline{\mathbf{e}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{e}}_n \rangle\,, \tag{3.7}$$

$$\mathscr{R}' = \langle P'; \underline{\mathbf{e}}'_1, \ldots, \underline{\mathbf{e}}'_n \rangle\,, \tag{3.8}$$

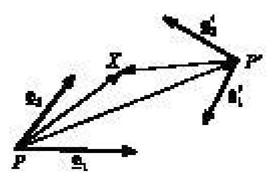
přičemž $P' = [b_1; \ldots; b_n]$ je souřadnicové vyjádření bodu P' vzhledem k repéru $\mathscr{R}$ a $A = (a_{ij})$ je matice přechodu od báze $\langle \underline{\mathbf{e}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{e}}_n \rangle$ k bázi $\langle \underline{\mathbf{e}}'_1, \ldots, \underline{\mathbf{e}}'_n \rangle$ zaměření $Z(\mathcal{A})$, tzn. platí

$$\underline{\mathbf{e}}'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\underline{\mathbf{e}}_i \qquad \text{pro } j = 1, \ldots, n.$$

Konečně, nechť $X \in \mathcal{A}$ je pevný bod, přičemž $X = [x_1; \ldots; x_n]$ vzhledem k repéru $\mathscr{R}$, respektive $X = [x'_1; \ldots; x'_n]$ vzhledem k repéru $\mathscr{R}'$.

Při tomto označení platí

$$\overrightarrow{PX} = x_1\underline{\mathbf{e}}_1 + \cdots + x_n\underline{\mathbf{e}}_n,$$
$$\overrightarrow{P'X} = x'_1\underline{\mathbf{e}}'_1 + \cdots + x'_n\underline{\mathbf{e}}'_n,$$
$$\overrightarrow{PP'} = b_1\underline{\mathbf{e}}_1 + \cdots + b_n\underline{\mathbf{e}}_n.$$



Obr. 3.2

Po dosazení za $\underline{\mathbf{e}}'_j$, $j = 1, \ldots, n$, dostáváme

$$\overrightarrow{P'X} = x'_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{i1}\underline{\mathbf{e}}_i + \cdots + x'_n \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{in}\underline{\mathbf{e}}_i\,.$$

Přitom zřejmě platí $\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'X}$ (viz Obr. 3.2), odkud po dosazení a upravení je

$$x_1\underline{\mathbf{e}}_1 + \cdots + x_n\underline{\mathbf{e}}_n = b_1\underline{\mathbf{e}}_1 + \cdots + b_n\underline{\mathbf{e}}_n + \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x'_j\right)\underline{\mathbf{e}}_1 + \cdots + \left(\sum_{j=1}^{n} a_{nj}x'_j\right)\underline{\mathbf{e}}_n\,.$$

Z jednoznačnosti tohoto vyjádření, porovnáním koeficientů u $\underline{\mathbf{e}}_i$, $i = 1, \dots, n$, nyní dostáváme

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + \cdots + a_{1n}x'_n + b_1\,, \\ &\vdots \\ x_n &= a_{n1}x'_1 + a_{n2}x'_2 + \cdots + a_{nn}x'_n + b_n\,. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Rovnice (3.9) můžeme stručně zapsat ve tvaru

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}x'_i + b_j\,, \qquad j = 1, \dots, n, \tag{3.10}$$

respektive, použijeme-li maticového zápisu, pak

$$(X) = A(X') + B\,, \tag{3.11}$$

kde sloupcová matice (X') je tvořena souřadnicemi bodu X vzhledem k repéru $\mathscr{R}'$ a sloupcová matice B je tvořena souřadnicemi bodu P' vzhledem k repéru $\mathscr{R}$.

Podobně, je-li $\underline{\mathbf{u}} \in Z(\mathcal{A})$vektor, přičemž $\underline{\mathbf{u}} = (u_1; \dots; u_n)$ vzhledem k repéru $\mathscr{R}$, respektive $\underline{\mathbf{u}} = (u'_1; \dots; u'_n)$ vzhledem k repéru $\mathscr{R}'$, pak (jak bylo odvozeno v algebře, [Ho94]) stejným způsobem dostáváme

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{11}u'_1 + a_{12}u'_2 + \cdots + a_{1n}u'_n\,, \\ &\vdots \\ u_n &= a_{n1}u'_1 + a_{n2}u'_2 + \cdots + a_{nn}u'_n\,, \end{aligned} \tag{3.12}$$

respektive, použijeme-li maticového zápisu, pak

$$(\underline{\mathbf{u}}) = A(\underline{\mathbf{u}}')\,, \tag{3.13}$$

kde sloupcová matice $(\underline{\mathbf{u}}')$ je tvořena souřadnicemi vektoru $\underline{\mathbf{u}}$ vzhledem k repéru $\mathscr{R}'$.

Definice 3.3. Rovnice (3.10) a (3.11) (respektive rovnice (3.12) a (3.13)) nazýváme *transformační rovnice* pro souřadnice bodů (respektive vektorů) při přechodu od repéru (3.7) k repéru (3.8).

Matice A se nazývá *matice přechodu* od repéru (3.7) k repéru (3.8).

Poznámka 3.2. Pokud bychom potřebovali vyjádřit souřadnice vzhledem k repéru (3.8) (tj. "čárkované") pomocí souřadnic vzhledem k repéru (3.7) (tj. "nečárkovaných"), pak stačí jednoduše v maticových rovnicích (3.11) (respektive (3.13)) obě strany vynásobit zleva maticí A^{-1} (která musí existovat, neboť matice přechodu A je vždy regulární, jak víme z algebry, [Ho94]) a dostaneme

$$(X') = A^{-1}(X) - A^{-1}B,\ \text{respektive } (\underline{\mathbf{u}}') = A^{-1}(\underline{\mathbf{u}})\,, \tag{3.14}$$

a je tedy matice A^{-1} maticí přechodu od repéru (3.8) k repéru (3.7).

Z předchozího dále vyplývá, že zadáním (3.7) a (3.8) je jednoznačně určena matice A a čísla $p_1, \dots, p_n$ splňující transformační rovnice (3.9) a (3.12). Velmi jednoduše lze ukázat, že naopak, zadáme-li afinní repér (3.7), regulární matici A (řádu n) a čísla $p_1, \dots, p_n$, pak existuje právě jeden afinní repér (3.8) v $\mathcal{A}_n$ tak, že platí (3.9) a (3.12). $\diamondsuit$

Poznámka 3.3. Označíme-li bijekci $\mathcal{A}_n$ na $\mathbb{R}^n$ určenou repérem $\mathscr{R}$ (respektive $\mathscr{R}'$) symbolem f (respektive f'), pak transformační rovnice přechodu pro souřadnice bodů od repéru $\mathscr{R}$ k repéru $\mathscr{R}'$ můžeme chápat jako zobrazení $\mathbb{R}^n$ na $\mathbb{R}^n$, které je dáno složením $f \circ (f')^{-1}$ podle následujícího diagramu

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[rr] \arrow[dr, "(f')^{-1}"'] & & \mathbb{R}^n \\
& \mathcal{A}_n \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

$\diamondsuit$

Úloha 3.1. Ve 3-rozměrném afinním prostoru $\mathcal{A}_3$ jsou dány afinní repéry $\mathscr{R} = \langle P; \underline{\mathbf{e}}_1, \underline{\mathbf{e}}_2, \underline{\mathbf{e}}_3 \rangle$ a $\mathscr{R}' = \langle P'; \underline{\mathbf{e}}'_1, \underline{\mathbf{e}}'_2, \underline{\mathbf{e}}'_3 \rangle$ a dále jsou dány transformační rovnice pro souřadnice bodů při přechodu od repéru $\mathscr{R}$ k repéru $\mathscr{R}'$

$$\begin{aligned}
x &= 3x' - 4y' + 5z' + 2\,, \\
y &= 2x' - 3y' + z'\,, \\
z &= 3x' - 5y' - z' - 1\,.
\end{aligned}$$

Napište transformační rovnice pro souřadnice bodů a transformační rovnice pro souřadnice vektorů při přechodu od repéru $\mathscr{R}'$ k repéru $\mathscr{R}$.

Řešení: Matice přechodu A má v našem případě tvar

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nyní (některou z metod odvozených v algebře) spočteme inverzní matici A^{-1}. Dostaneme

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{a odtud} \quad A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

a podle (3.14) můžeme přímo psát výsledné transformační rovnice při přechodu od repéru $\mathscr{R}'$ k repéru $\mathscr{R}$, a to

(i) pro souřadnice bodů

$$\begin{aligned}
x' &= -8x + 29y - 11z + 5\,, \\
y' &= -5x + 18y - 7z + 3\,, \\
z' &= x - 3y + z - 1\,,
\end{aligned}$$

(ii) pro souřadnice vektorů

$$\begin{aligned}
u'_1 &= -8u_1 + 29u_2 - 11u_3\,, \\
u'_2 &= -5u_1 + 18u_2 - 7u_3\,, \\
u'_3 &= u_1 - 3u_2 + u_3\,.
\end{aligned}$$

$\triangle$

4 Orientace afinního prostoru

V tomto paragrafu se stručně zmíníme o pojmu orientace afinního prostoru $\mathcal{A}_n$. Studium tohoto pojmu převedeme na úvahy o zaměření $Z(\mathcal{A}_n)$ afinního prostoru $\mathcal{A}_n$ (tzn. na úvahy o vektorových prostorech). Takovýto obrat, jak uvidíme, budeme v různých souvislostech poměrně často používat. Zabývejme se tedy nejprve bázemi n-rozměrného (reálného) vektorového prostoru V_n.

Definice 4.1. Nechť

$$\mathscr{B} = \langle \underline{\mathbf{e}}_1, \dots, \underline{\mathbf{e}}_n \rangle \,, \tag{4.1}$$

$$\mathscr{B}' = \langle \underline{\mathbf{e}}'_1, \dots, \underline{\mathbf{e}}'_n \rangle \tag{4.2}$$

jsou báze vektorového prostoru V_n (nad $\mathbb{R}$). Báze (4.1) a (4.2) nazveme *souhlasné* (respektive *nesouhlasné*), je-li determinant matice přechodu od báze (4.1) k bázi (4.2) číslo kladné (respektive záporné).

Dále, na množině všech bází prostoru V definujeme relaci $\sim$ takto:

$$\mathscr{B} \sim \mathscr{B}' \text{ právě když } \mathscr{B}, \mathscr{B}' \text{ jsou souhlasné báze.}$$

Poznámka 4.1. Vzhledem k tomu, že matice přechodu od jedné báze k jiné bázi prostoru V_n je regulární, musí být její determinant různý od nuly (tzn. je buď kladný nebo záporný) a předchozí definice je korektní. Následující věta si blíže všimne právě definované relace $\sim$. ♢

Věta 4.1. *Relace $\sim$ je relací ekvivalence na množině všech bází vektorového prostoru V_n a rozklad $M/\!\sim$ příslušný ekvivalenci $\sim$ má dvě třídy.*

Důkaz. Nejprve ukážeme, že $\sim$ je relací ekvivalence na množině všech bází prostoru V_n. Ale reflexivita $\sim$ plyne z toho, že maticí přechodu od báze (4.1) k bázi (4.1) je jednotková matice E_n, přičemž $|E_n| = 1 > 0$. Symetričnost relace $\sim$ plyne z toho, že je-li A maticí přechodu od báze (4.1) k bázi (4.2), pak A^{-1} je maticí přechodu od báze (4.2) k bázi (4.1) a platí $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$. Jsou tedy determinanty $|A|$ a $|A^{-1}|$ buď oba kladné nebo oba záporné. Transitivita relace $\sim$ pak plyne z Cauchyovy věty o součinu determinantů. Tedy $\sim$ je skutečně relací ekvivalence.

Nyní nalezneme počet tříd rozkladu $M/\!\sim$. Uvažme bázi

$$\mathscr{B}'' = \langle -\underline{\mathbf{e}}_1, \underline{\mathbf{e}}_2, \dots, \underline{\mathbf{e}}_n \rangle \tag{4.3}$$

a označme symbolem A (respektive B, respektive C) matici přechodu od báze (4.1) k bázi (4.2) (respektive od báze (4.2) k bázi (4.3), respektive od báze (4.1) k bázi (4.3)). Z algebry víme, že platí $C = A \cdot B$, tzn. podle Cauchyovy věty je pak

$$|C| = |A| \cdot |B| \,. \tag{4.4}$$

Ale zřejmě $|C| = -1$ (ověřte rozepsáním!), tzn. báze (4.1) a (4.3) nepatří do jedné třídy rozkladu $M/\sim$, a tedy rozklad $M/\sim$ má alespoň dvě třídy. Nechť (4.2) je libovolná báze prostoru V_n, která nepatří do jedné třídy rozkladu $M/\sim$ s bází (4.1). Pak je $|A| < 0$ a ze vztahu (4.4) plyne, že musí být $|B| > 0$, tzn. báze (4.2) patří do jedné třídy s bází (4.3), odkud plyne, že rozklad $M/\sim$ má právě dvě třídy. □

Definice 4.2. *Orientací vektorového prostoru* V_n rozumíme prohlášení jedné z tříd rozkladu $M/\sim$ (tj. tříd bází prostoru V_n) za kladnou a druhé za zápornou.

O dané bázi vektorového prostoru V_n pak říkáme, že je *kladná* (respektive *záporná*), leží-li v kladné (respektive záporné) třídě rozkladu $M/\sim$.

Orientací afinního prostoru $\mathcal{A}_n$ budeme rozumět orientaci jeho zaměření $Z(\mathcal{A}_n)$. Afinní prostor se zadanou orientací budeme nazývat *orientovaným afinním prostorem.*

Poznámka 4.2. Afinní prostor má zřejmě dvě možné orientace, přičemž orientace je jednoznačně určena například prohlášením jedné konkrétní báze zaměření $Z(\mathcal{A}_n)$ za kladnou bázi. Máme-li orientovat daný afinní prostor, pak záleží zcela na naší libovůli, kterou z bází zaměření $Z(\mathcal{A}_n)$ prohlásíme za kladnou. Jakmile tak však učiníme, pak je již každá z bází $Z(\mathcal{A}_n)$ buď kladná nebo záporná (což lze zjistit výpočtem determinantu patřičné matice přechodu). ♢

Úloha 4.1. V orientovaném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ jsou dány dvě báze

$$\langle \underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \underline{\mathbf{u}}_3, \underline{\mathbf{u}}_4 \rangle, \text{ respektive } \langle \underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2, \underline{\mathbf{v}}_3, \underline{\mathbf{v}}_4 \rangle.$$

Zjistěte, zda jsou tyto báze souhlasně či nesouhlasně orientovány. Přitom:
$\underline{\mathbf{u}}_1 = (3; 2; -8; -11)$, $\underline{\mathbf{u}}_2 = (1; 1; 5; 7)$, $\underline{\mathbf{u}}_3 = (1; 1; 9; 7)$, $\underline{\mathbf{u}}_4 = (1; 1; 5; 4)$;
$\underline{\mathbf{v}}_1 = (2; -3; 5; 4)$, $\underline{\mathbf{v}}_2 = (5; -7; 9; 6)$, $\underline{\mathbf{v}}_3 = (1; -1; 2; 1)$, $\underline{\mathbf{v}}_4 = (2; 4; 7; 2)$.

Řešení: élohu je možno řešit přímo užitím definice, tj. nalezením matice přechodu od jedné báze ke druhé a výpočtem jejího determinantu (což v našem případě vyžaduje řešení 4 systémů lineárních rovnic o 4 neznámých a výpočet jednoho determinantu 4. řádu a je tedy dosti pracné).

Výhodnější bude uvážit kanonickou bázi $\underline{\mathbf{e}}_1 = (1; 0; 0; 0)$, $\underline{\mathbf{e}}_2 = (0; 1; 0; 0)$, $\underline{\mathbf{e}}_3 = (0; 0; 1; 0)$, $\underline{\mathbf{e}}_4 = (0; 0; 0; 1)$ prostoru $\mathbb{R}^4$ a zjistit, zda obě zadané báze jsou s touto bází souhlasně či nesouhlasně orientovány, odkud již ihned plyne odpověď na původní otázku (výhoda spočívá v tom, že obě příslušné transformační matice můžeme okamžitě psát, a je tedy v tomto případě nutné počítat pouze dva determinanty 4. řádu). Dostaneme

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -8 & 5 & 9 & 5 \\ -11 & 7 & 7 & 4 \end{vmatrix} = -12 < 0, \text{ respektive } \begin{vmatrix} 6 & 8 & -9 & -12 \\ 4 & 6 & -6 & -9 \\ -3 & -4 & 6 & 8 \\ -2 & -3 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 9 > 0\,,$$

odkud máme výsledek: báze $\langle \underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \underline{\mathbf{u}}_3, \underline{\mathbf{u}}_4 \rangle$ a $\langle \underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2, \underline{\mathbf{v}}_3, \underline{\mathbf{v}}_4 \rangle$ jsou nesouhlasně orientovány. △

5 Souřadnicové vyjádření podprostoru

Připomeňme, že všude dále v tomto textu předpokládáme, že v afinním prostoru $\mathcal{A}_n$, $n \geq 1$, je pevně zadán afinní repér

$$\mathscr{R} = \langle P; \underline{\mathbf{e}}_1, \dots, \underline{\mathbf{e}}_n \rangle \,, \tag{5.1}$$

přičemž souřadnice všech bodů, respektive vektorů, jsou vyjadřovány vzhledem k tomuto afinnímu repéru.

Věta 5.1. *Nechť $\mathcal{B}_k = \{B; W\}$ je podprostor v $\mathcal{A}_n$, nechť $\mathscr{B} = \langle \underline{\mathbf{u}}_1, \dots, \underline{\mathbf{u}}_k \rangle$ je báze jeho zaměření W. Nechť $X \in \mathcal{A}_n$ je bod. Pak $X \in \mathcal{B}_k$ právě když existují reálná čísla $t_1, \dots, t_k$ tak, že*

$$X = B + t_1 \underline{\mathbf{u}}_1 + \dots + t_k \underline{\mathbf{u}}_k \,. \tag{5.2}$$

Je-li navíc $X = [x_1; \dots; x_n]$, $B = [b_1; \dots; b_n]$, $\underline{\mathbf{u}}_i = (u_{1i}; \dots; u_{ni})$, $1 \leq i \leq k$, pak (5.2) lze psát ve tvaru

$$\begin{array}{rcl} x_1 &=& b_1 + t_1 u_{11} + \dots + t_k u_{1k} \,, \\ x_2 &=& b_2 + t_1 u_{21} + \dots + t_k u_{2k} \,, \\ &\vdots& \\ x_n &=& b_n + t_1 u_{n1} + \dots + t_k u_{nk} \,. \end{array} \tag{5.3}$$

Důkaz. Tvrzení věty je zřejmé, neboť podle Definice 2.1 afinního podprostoru je $X \in \mathcal{B} \Leftrightarrow \overrightarrow{BX} \in W$. Rovnice (5.3) pak plynou ihned z (3.5). □

Definice 5.1. Vyjádření (5.2), respektive (5.3), se nazývá *parametrickým vyjádřením (rovnicemi) podprostoru $\mathcal{B}_k$*. Reálná čísla $t_1, \dots, t_k$ se nazývají *parametry bodu X*.

Má-li podprostor $\mathcal{B}_k$ parametrické vyjádření (5.2), pak budeme též psát

$$\mathcal{B}_k \equiv X = B + t_1 \underline{\mathbf{u}}_1 + \dots + t_k \underline{\mathbf{u}}_k \,,$$

a soustavu rovnic (5.3) budeme zkráceně zapisovat ve tvaru

$$X = [b_1; \dots; b_n] + t_1 (u_{11}; \dots; u_{n1}) + \dots + t_k (u_{1k}; \dots; u_{nk}) \,.$$

Poznámka 5.1. Podprostor $\mathcal{B}_k \subseteq \mathcal{A}_n$ je sám afinním prostorem dimenze k a soustava $\langle B; \underline{\mathbf{u}}, \dots, \underline{\mathbf{u}}_k \rangle$ je afinním repérem v $\mathcal{B}_k$. Parametry $t_1, \dots, t_k$ jsou potom afinními souřadnicemi bodu $X \in \mathcal{B}_k$ vzhledem k tomuto repéru. ♢

Věta 5.2. *Nechť $\mathcal{B}_k = \langle A_0, A_1, \dots, A_k \rangle$, kde $A_i = [a_{1i}; \dots; a_{ni}]$, $i = 0, 1, \dots, k$, jsou body v obecné poloze. Pak $X = [x_1; \dots; x_n] \in \mathcal{B}_k$ právě když existují reálná čísla*

$t_0, t_1, \dots, t_k$ *tak, že platí:*

$$\begin{aligned} x_1 &= t_0 a_{10} + t_1 a_{11} + \cdots + t_k a_{1k}\,, \\ x_2 &= t_0 a_{20} + t_1 a_{21} + \cdots + t_k a_{2k}\,, \\ &\vdots \\ x_n &= t_0 a_{n0} + t_1 a_{n1} + \cdots + t_k a_{nk}\,, \end{aligned} \tag{5.4}$$

kde $t_0 + t_1 + \cdots + t_k = 1$.

Důkaz. Podle Věty 2.5 je $\mathcal{B}_k = \{A_0; L(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_k})\}$, přičemž vektory $\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_k}$ jsou podle předpokladu bází zaměření podprostoru $\mathcal{B}_k$. Užitím předchozí Věty 5.1 dostaneme

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{B} \Leftrightarrow x_i = a_{i0} + t_1(a_{i1} - a_{i0}) + \cdots + t_k(a_{ik} - a_{i0}),\ 1 \le i \le n \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x_i = (1 - t_1 - \cdots - t_k)a_{i0} + t_1 a_{i1} + \cdots + t_k a_{ik},\ 1 \le i \le n. \end{aligned}$$

Označíme-li $t_0 = 1 - t_1 - \cdots - t_k$, dostáváme tvrzení věty. □

Označení. Vztahy (5.4) budeme v dalším stručně zapisovat ve tvaru

$$\mathcal{B} \equiv X = t_0 A_0 + t_1 A_1 + \cdots + t_k A_k; \quad t_0 + t_1 + \cdots + t_k = 1\,. \tag{5.5}$$

Uvědomme si dobře, že tímto označením jsme nezavedli žádnou novou operaci "lineární kombinace bodů", ale, že jde pouze o symbolický, zkrácený zápis vztahů (5.4), což je celkem n rovnic v oboru reálných čísel. ♢

Definice 5.2. Vyjádření (5.4), respektive (5.5), se nazývá *afinní kombinace bodů* $A_0, A_1, \dots, A_k$.

Je-li $k = n$, budeme soustavu $\langle A_0, A_1, \dots, A_n\rangle$ $(n+1)$ bodů v obecné poloze nazývat *bodovým repérem* v $\mathcal{A}_n$. Čísla $t_0, t_1, \dots, t_n$ taková, že

$$X = t_0 A_0 + t_1 A_1 + \cdots + t_n A_n\,, \quad t_0 + \cdots + t_n = 1\,,$$

se nazývají *barycentrické souřadnice* bodu X vzhledem k bodovému repéru

$$\langle A_0, A_1, \dots, A_n\rangle\,. \tag{5.6}$$

Poznámka 5.2. Afinní kombinaci bodů můžeme definovat i pro body, které nejsou v obecné poloze. Koeficienty v afinní kombinaci bodů mají také fyzikální význam. Uvažujeme-li hmotnou soustavu o celkové hmotnosti jedna takovou, že veškerá hmota je soustředěna pouze do konečného počtu bodů A_i, $i = 0, 1, \dots, k$, tak, že v bodu A_i je hmotnost o velikosti t_i (připouštíme také záporné hodnoty), pak bod

$$T = t_0 A_0 + t_1 A_1 + \cdots + t_k A_k\,, \quad t_0 + \cdots + t_k = 1\,,$$

je těžištěm této hmotné soustavy. Speciálně, je-li v každém bodu soustavy stejná hmotnost, tj. $1/(k+1)$, pak dostáváme v rovině vzorce pro výpočet souřadnic těžiště trojúhelníka $\triangle ABC$ (respektive čtyřúhelníka $ABCD$) ve tvaru

$$T = \frac{1}{3}(A+B+C)\,, \quad (\text{respektive} \quad T = \frac{1}{4}(A+B+C+D))\,.$$

Stejné vzorce platí i v prostoru pro výpočet těžiště trojúhelníka nebo čtyřstěnu. $\diamondsuit$

Příklad 5.1. V 3-rozměrném afinním prostoru $\mathcal{A}_3$ je dána přímka p dvěma body $A = [2; -1; 1]$, $B = [-1; 0; 1]$. Pak $p = \{A; L(\overrightarrow{AB})\}$, kde $\overrightarrow{AB} = (-3; 1; 0)$ a parametrické vyjádření přímky p je například tvaru $p \equiv X = A + t\overrightarrow{AB}$, neboli

$$p \equiv \begin{cases} x = 2 - 3t\,, \\ y = -1 + t\,, \\ z = 1\,, \end{cases}$$

což je vyjádření známé ze střední školy. Podle Věty 5.2 lze přímku p též vyjádřit ve tvaru $p \equiv X = t_1A + t_2B$, $t_1 + t_2 = 1$, neboli

$$p \equiv \begin{cases} x = 2t_1 - t_2\,, \\ y = -t_1\,, \\ z = t_1 + t_2\,, \end{cases} \qquad \text{kde } t_1 + t_2 = 1. \qquad \heartsuit$$

Definice 5.3. Nechť je dána soustava lineárních rovnic nad $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1\,, \\ &\vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n &= b_k\,, \end{aligned} \tag{5.7}$$

kde $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$, jejíž matici soustavy označme $A = (a_{ij})$. Bod $X = [x_1; \ldots; x_n] \in \mathcal{A}_n$ nazveme *řešením soustavy* (5.7) právě když uspořádaná n-tice reálných čísel $(x_1; \ldots; x_n)$ je řešením soustavy (5.7).

Z vlastností řešení soustav lineárních rovnic (viz [Ho94]) víme, že rozdíl dvou řešení soustavy (5.7) je řešením zhomogenizované soustavy

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0\,, \\ &\vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n &= 0\,, \end{aligned} \tag{5.8}$$

k soustavě (5.7). Jsou-li tedy body $X = [x_1; \ldots; x_n]$, $Y = [y_1; \ldots; y_n] \in \mathcal{A}_n$ řešením soustavy (5.7), je vektor $\overrightarrow{XY} = (y_1 - x_1; \ldots; y_n - x_n) \in Z(\mathcal{A}_n)$ řešením homogenní soustavy (5.8). Víme, že množina všech řešení soustavy (5.8) tvoří vektorový prostor W v $\mathbb{R}^n$, pro jehož dimenzi platí $\dim W = n - h(A)$, a s využitím bijekce mezi $\mathbb{R}^n$

a $Z(\mathcal{A}_n)$, která je dána afinním repérem (viz Paragraf 3), můžeme množinu všech řešení homogenní soustavy (5.8) považovat za jistý podprostor zaměření $Z(\mathcal{A}_n)$.

Všude dále v tomto textu budeme řešení soustavy (5.7) interpretovat jako body n-rozměrného afinního prostoru $\mathcal{A}_n$ a řešení zhomogenizované soustavy (5.8) budeme interpretovat jako vektory zaměření $Z(\mathcal{A}_n)$.

Věta 5.3. *Nechť (5.7) je řešitelná soustava lineárních rovnic a nechť hodnost matice soustavy $h(A) = r$. Pak množina všech bodů z $\mathcal{A}_n$, které jsou řešeními (5.7), tvoří $(n-r)$-rozměrný podprostor $\mathcal{B} = \{B; W\}$ afinního prostoru $\mathcal{A}_n$, kde B je libovolné pevné řešení (5.7) a zaměření W je rovno podprostoru řešení zhomogenizované soustavy (5.8).*

Důkaz. Označme M množinu všech bodů z $\mathcal{A}_n$, které jsou řešeními (5.7). Stačí dokázat množinovou rovnost $M = \mathcal{B}$, neboť tvrzení o dimenzi plyne z toho, jaká je dimenze řešení soustavy (5.8).

Inkluze $\mathcal{B} \subseteq M$ plyne opět z vlastností řešení soustav lineárních rovnic, totiž součet řešení (5.7) s řešením (5.8) je řešením (5.7). Naopak, nechť $X \in M$ je libovolné řešení (5.7). Pak existuje $\underline{\mathbf{w}} = \overrightarrow{BX}$, tj. $\underline{\mathbf{w}} \in W$, které je řešením (5.8), a tedy $X = B + \underline{\mathbf{w}} \in \mathcal{B}$. □

Věta 5.4. *Nechť $\mathcal{B}$ je k-rozměrný podprostor v n-rozměrném afinním prostoru $\mathcal{A}_n$, přičemž $k < n$. Pak existuje soustava $(n-k)$ lineárně nezávislých lineárních rovnic o n neznámých taková, že množina jeho řešení je rovna právě $\mathcal{B}$.*

Důkaz. Nechť $\mathcal{B} = \{B; W\}$, přičemž $B = [b_1; \ldots; b_n]$. Z algebry víme, že existuje soustava $(n-k)$ lineárně nezávislých homogenních rovnic

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & 0\,, \\ & & & \vdots & \\ a_{n-k,1}x_1 & + \cdots + & a_{n-k,n}x_n & = & 0\,, \end{array}$$

jejíž množina řešení je rovna W. Označme

$$a_{i1}b_1 + a_{i2}b_2 + \cdots + a_{in}b_n = c_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n-k\,,$$

a uvažme soustavu nehomogenních rovnic

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & c_1\,, \\ & & & \vdots & \\ a_{n-k,1}x_1 & + \cdots + & a_{n-k,n}x_n & = & c_{n-k}\,, \end{array} \tag{5.9}$$

které jsou zřejmě lineárně nezávislé. Tato soustava je však řešitelná (například B je jejím řešením), tzn. podle Věty 5.3 množina řešení (5.9) tvoří podprostor $\mathcal{B}'$ v $\mathcal{A}_n$, jehož zaměření je rovno W. Ale $B \in \mathcal{B}'$, tzn. $\mathcal{B}' = \{B; W\} = \mathcal{B}$. □

Definice 5.4. Soustavu lineárních rovnic (5.9) nazýváme *neparametrickým* (nebo též *obecným*) vyjádřením (rovnicemi) podprostoru $\mathcal{B}$ a označujeme

$$\mathcal{B} \equiv \begin{cases} a_{11}x_1 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & c_1\,, \\ & & & \vdots & \\ a_{n-k,1}x_1 & + \cdots + & a_{n-k,n}x_n & = & c_{n-k}\,, \end{cases}$$

nebo

$$\mathcal{B} \equiv \begin{cases} a_{11}x_1 & + \cdots + & a_{1n}x_n & -c_1 & = & 0\,, \\ & & & & \vdots & \\ a_{n-k,1}x_1 & + \cdots + & a_{n-k,n}x_n & -c_{n-k} & = & 0\,. \end{cases}$$

Poznámka 5.3. Z Vět 5.3 a 5.4 plyne, že každá řešitelná soustava lineárních rovnic o n neznámých jednoznačně určuje jistý podprostor afinního prostoru $\mathcal{A}_n$, avšak naopak, daný podprostor má více (zřejmě dokonce nekonečně mnoho) neparametrických vyjádření.

Dále je třeba si dobře uvědomit, že rovnice vystupující v neparametrickém vyjádření podprostoru $\mathcal{B}$ požadujeme lineárně nezávislé, tzn. je jednoznačně dán jejich počet, z něhož můžeme mj. ihned určit dimenzi $\mathcal{B}$. V případě, že je soustava závislá, určuje sice podprostor, ale tuto soustavu nechápeme jako neparametrické vyjádření, které je tvořeno teprve maximálním počtem libovolných nezávislých rovnic, které z ní můžeme vybrat. $\diamondsuit$

Věta 5.5. *Podprostor $\mathcal{B}$ afinního prostoru $\mathcal{A}_n$ je nadrovinou právě když jeho neparametrické vyjádření má tvar*

$$\mathcal{B} \equiv a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = a\,,$$

kde alespoň jeden z koeficientů a_i, $i = 1, \ldots, n$, je nenulový.

Důkaz. $\mathcal{B}$ je nadrovina $\Leftrightarrow \dim \mathcal{B} = n-1 \Leftrightarrow$ soustava (5.9) má $n-(n-1) = 1$ rovnici uvedeného tvaru, kterou budeme nazývat rovnicí nadroviny $\mathcal{B}$. $\square$

Poznámka 5.4. Z Věty 5.5 a z (5.9) plyne, že každý k-rozměrný podprostor v $\mathcal{A}$ můžeme chápat jako průnik jistých $(n-k)$ nadrovin. $\diamondsuit$

Pro větší názornost popišme nyní explicitně vyjádření podprostorů pro netriviální podprostory nejjednodušších afinních prostorů – roviny (tj. $\dim \mathcal{A} = 2$) a 3-rozměrného prostoru (tj. $\dim \mathcal{A} = 3$). Dostáváme:

1. Přímka p v rovině:
   - Parametrické vyjádření: $p \equiv X = A + t\underline{\mathbf{u}}$, kde $\underline{\mathbf{u}} \neq \underline{\mathbf{o}}$.
   - Neparametrické vyjádření: $p \equiv ax + by + c = 0$, kde $a \neq 0 \vee b \neq 0$.
   - Afinní obal bodů: $p \equiv X = t_1 A + t_2 B$, kde $A \neq B$, $t_1 + t_2 = 1$.

2. a: Rovina ϱ v prostoru:
   - Parametrické vyjádření: $\varrho \equiv X = A + t\underline{\mathbf{u}} + r\underline{\mathbf{v}}$, kde $\underline{\mathbf{u}}$, $\underline{\mathbf{v}}$ jsou lineárně nezávislé.
   - Neparametrické vyjádření: $\varrho \equiv ax + by + cz + d = 0$, kde $a \neq 0 \vee b \neq 0 \vee c \neq 0$.
   - Afinní obal bodů: $p \equiv X = t_1 A + t_2 B + t_3 C$, kde A, B, C jsou v obecné poloze a $t_1 + t_2 + t_3 = 1$.

   b: Přímka p v prostoru:
   - Parametrické vyjádření: $p \equiv X = A + t\underline{\mathbf{u}}$, kde $\underline{\mathbf{u}} \neq \underline{\mathbf{o}}$.
   - Neparametrické vyjádření: $p \equiv \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ ex + fy + gz + h = 0 \end{cases}$, kde $h\begin{pmatrix} a & b & c \\ e & f & g \end{pmatrix} = 2$.
   - Afinní obal bodů: $p \equiv X = t_1 A + t_2 B$, kde $A \neq B$, $t_1 + t_2 = 1$.

Všimněme si, že v parametrickém vyjádření podprostoru a ve vyjádření podprostoru jako afinního obalu bodů nehraje roli dimenze celého prostoru. Ta se projeví pouze při rozepsání do souřadnic.

Poznámka 5.5. Ve sbírkách příkladů z matematiky se poměrně často můžeme setkat s *kanonickými rovnicemi přímky* ve 3-rozměrném prostoru ve tvaru

$$p \equiv \frac{x - a_1}{u_1} = \frac{y - a_2}{u_2} = \frac{z - a_3}{u_3}\,.$$

Jedná se pak o přímku procházející bodem $A = [a_1; a_2; a_3]$ se směrovým vektorem $\underline{\mathbf{u}} = (u_1; u_2; u_3)$. Toto vyjádření je nutno brát jen jako formální zápis, protože ve jmenovatelích některých zlomků může být i nula. Parametrické rovnice přímky se odtud určí okamžitě. Neparametrické rovnice dostaneme tak, že si vybereme všechny dvojice zlomků, čitatele vynásobíme do kříže jmenovateli a po převedení na jednu stranu dostaneme nehomogenní souatvu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} u_2 x - u_1 y \phantom{{}- u_1 z} + u_1 a_2 - u_2 a_1 &= 0\,, \\ u_3 x \phantom{{}- u_1 y} - u_1 z + u_1 a_3 - u_3 a_1 &= 0\,, \\ u_3 y - u_2 z + u_2 a_3 - u_3 a_2 &= 0\,. \end{aligned}$$

Tako soustava rovnic má hodnost 2, takže libovolné dvě lineárně neyávislé rovnice určují obecné vyjádření přímky p. $\diamondsuit$

Při řešení úloh je nutno často převádět jeden typ zadání podprostorů na druhý. Převádění podprostoru určeného body na parametrické zadání a naopak je zřejmé z důkazu Věty 5.2.

Pro určení obecných rovnic podprostoru, který je určen body v obecné poloze, máme více možností. První spočívá v tom, že do obecné rovnice nadroviny (viz Věta 5.5) dosazujeme souřadnice bodů. Pro koeficienty nadroviny tak dostaneme soustavu homogenních rovnic a souřadnice vektorů z báze řešení soustavy potom tvoří koeficienty matice obecných rovnic daného podprostoru. Druhý způsob je důsledkem následující věty.

Věta 5.6. *Nechť v afinním prostoru $\mathcal{A}_n$ je dáno $(k+1)$ bodů v obecné poloze, $1 \le k < n$, $A_i = [a_{i1}; \dots ; a_{in}]$, $i = 0, 1, \dots, k$. Pak bod $X = [x_1; \dots ; x_n]$ leží v podprostoru $\mathcal{B} = \langle A_0, A_1, \dots, A_k \rangle$ právě když hodnost*

$$h \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_1 & 1 \\ a_{01} & a_{02} & \dots & a_{0n} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} & 1 \end{pmatrix} = k + 1\,.$$

Důkaz. Podle Věty 2.5 je $\mathcal{B} = \{A_0; L(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_k})\}$. Pak $X \in \mathcal{B} \Leftrightarrow$ existují $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R} : \overrightarrow{A_0X} = t_1\overrightarrow{A_0A_1} + \dots + t_k\overrightarrow{A_0A_k} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow h \begin{pmatrix} x_1 - a_{01} & \dots & x_n - a_{0n} \\ a_{11} - a_{01} & \dots & a_{1n} - a_{0n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} - a_{01} & \dots & a_{kn} - a_{0n} \end{pmatrix} = k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h \begin{pmatrix} x_1 - a_{01} & \dots & x_n - a_{0n} & 0 \\ a_{11} - a_{01} & \dots & a_{1n} - a_{0n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{k1} - a_{01} & \dots & a_{kn} - a_{0n} & 0 \end{pmatrix} = k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h \begin{pmatrix} x_1 - a_{01} & \dots & x_n - a_{0n} & 0 \\ a_{01} & \dots & a_{0n} & 1 \\ a_{11} - a_{01} & \dots & a_{1n} - a_{0n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{k1} - a_{01} & \dots & a_{kn} - a_{0n} & 0 \end{pmatrix} = k + 1 \Leftrightarrow h \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n & 1 \\ a_{01} & \dots & a_{0n} & 1 \\ a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} & 1 \end{pmatrix} =$$

$= k + 1$. $\square$

Z Věty 5.6 nyní vyplývá, že všechny determinanty z čtvercových submatic řádu $(k+2)$, které vybíráme z matice ve Větě 5.6, jsou nulové. Stačí vybrat $(n-k)$ submatic takových, aby soustava lineárních rovnic, kterou dostaneme spočtením determinantů, byla nezávislá. Speciálně pro nadrovinu dostaneme následující důsledek.

Důsledek 5.1. *Nechť v n-rozměrném afinním prostoru $\mathcal{A}_n$ je dáno n bodů v obecné poloze $B_i = [b_{i1}; \dots; b_{in}]$, $i = 1, \dots, n$. Pak bod $X = [x_1; \dots; x_n]$ leží v nadrovině $\mathcal{N} = \langle B_1, \dots, B_n \rangle$ právě když*

$$\begin{vmatrix} x_1 & \dots & x_n & 1 \\ b_{11} & \dots & b_{1n} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} & 1 \end{vmatrix} = 0\,. \tag{5.10}$$

Důkaz. Uvážíme-li, že hodnost uvedené matice je rovna n, pak tvrzení důsledku plyne přímo z Věty 5.6 pro $k = n - 1$. □

Poznámka 5.6. Vyjádření (5.10) používáme s výhodou v praktických příkladech při hledání neparametrického vyjádření nadroviny určené n body v obecné poloze, tzn. například přímky v rovině, zadané 2 body, respektive roviny v 3-rozměrném prostoru, zadané 3 body, atd. ♢

V praxi se nejčastěji setkáme s nutností převést parametrické vyjádření zadaného podprostoru na neparametrické a naopak. Převádění z neparametrického vyjádření na parametrické je popsáno v důkaze Věty 5.3. Nalezneme jedno konkrétní řešení soustavy (5.7) a dostaneme bod. Báze řešení zhomogenizované soustavy potom tvoří bázi zaměření.

Opačný postup od parametrického zadání k neparametrickému je pracnější. První způsob byl popsán v algebře (viz [Ho94] a důkaz Věty 5.4) a spočívá v nalezení nehomogenní soustavy lineárních rovnic, jejíž řešení známe. Konkrétně uvažujeme homogenní soustavu, jejíž matice je tvořena souřadnicemi bázových vektorů zaměření daného podprostoru. Báze řešení této soustavy je tvořena $(n - k)$ vektory. Jestliže uvažujeme homogenní soustavu, jejíž matice je tvořena těmito bázovými vektory, dostaneme soustavu, jejímž řešením je zaměření daného podprostoru. Dosazením souřadnic daného bodu do této homogenní soustavy obdržíme příslušné pravé strany hledaného neparametrického vyjádření.

Druhý způsob spočívá ve vylučování parametrů v souřadnicovém zadání (5.3). U podprostoru vyšších dimenzí je ale tato metoda pracná a snadno dojde k chybě. Existuje ovšem možnost, jak postupovat systematicky. Rovnice (5.3) přepíšeme do tvaru

$$\begin{array}{lcl} t_1u_{11} + \dots + t_ku_{1k} - x_1 \qquad\qquad + b_1 & = & 0\,, \\ t_1u_{21} + \dots + t_ku_{2k} \qquad - x_2 \qquad + b_2 & = & 0\,, \\ & \vdots & \\ t_1u_{n1} + \dots + t_ku_{nk} \qquad\qquad - x_n + b_n & = & 0\,, \end{array}$$

který chápeme formálně jako soustavu lineárních rovnic pro neznámé $t_1, \dots, t_k$,

$x_1, \dots, x_n$ s maticí

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc|c} u_{11} & \dots & u_{1k} & -1 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ u_{21} & \dots & u_{2k} & 0 & -1 & \dots & 0 & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_{n1} & \dots & u_{nk} & 0 & 0 & \dots & -1 & b_n \end{array}\right).$$

Protože jsou vektory $\underline{\mathbf{u}}_1, \dots, \underline{\mathbf{u}}_k$ lineárně nezávislé a $k \leq n$, docílíme řádkovými úpravami matice před první svislou čarou toho, aby posledních $(n-k)$ řádků bylo nulových. Potom koeficienty za první čarou v těchto řádcích jsou koeficienty obecných rovnic daného podprostoru.

Úloha 5.1. V afinním prostoru $\mathcal{A}_4$ je zadán (parametricky) podprostor

$\mathcal{B} \equiv X = B + t_1\underline{\mathbf{u}} + t_2\underline{\mathbf{v}}$,

kde $B = [1; 2; -2; 0]$, $\underline{\mathbf{u}} = (1; 0; 0; -1)$, $\underline{\mathbf{v}} = (0; -1; -1; 2)$. Nalezněte neparametrické vyjádření $\mathcal{B}$.

Řešení: Zřejmě $\dim \mathcal{B} = 2$, tzn. jde o rovinu v 4-rozměrném afinním prostoru a neparametrické vyjádření $\mathcal{B}$ sestává z $4 - 2 = 2$ lineárně nezávislých rovnic. élohu je možno řešit buď přímým vyloučením parametrů (což však často bývá dosti pracné a nepřehledné) anebo aplikací důkazu Věty 5.4. Předvedeme nyní obě metody.

(i) Vyloučení parametrů. Parametrické rovnice jsou

$$\mathcal{B} \equiv \begin{cases} x_1 = 1 + t_1\,, \\ x_2 = 2 \qquad - t_2\,, \\ x_3 = -2 \qquad - t_2\,, \\ x_4 = \qquad -t_1 + 2t_2\,. \end{cases}$$

Tomu odpovídá matice

$$\left(\begin{array}{rr|rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \dots \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rr|rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

a odtud dostáváme obecné rovnice

$$\mathcal{B} \equiv \begin{cases} \qquad x_2 - x_3 \qquad - 4 = 0\,, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 1 = 0\,. \end{cases}$$

(ii) Aplikace důkazu Věty 5.4.

a) Nalezneme nejdříve homogenní soustavu, jejíž množina řešení je rovna zaměření $Z(\mathcal{B})$. Souřadnice vektorů $\underline{\mathbf{u}}$ a $\underline{\mathbf{v}}$ jsou koeficienty v homogenní soustavě

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad - x_4 &= 0\,, \\ -x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0\,, \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{aligned} x_1 &= \qquad\quad x_4\,, \\ x_2 &= -x_3 + 2x_4\,, \end{aligned}$$

jejíž báze řešení je dána například vektory $\underline{\mathbf{w}}_1 = (0; -1; 1; 0)$, $\underline{\mathbf{w}}_2 = (1; 2; 0; 1)$. Vezmeme-li souřadnice vektorů $\underline{\mathbf{w}}_1$ a $\underline{\mathbf{w}}_2$ jako koeficienty homogenní soustavy, dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} -x_2 + x_3 \qquad &= 0\,, \\ x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 &= 0\,, \end{aligned}$$

jejímž řešením je zaměření $\mathcal{B}$.

b) Výpočet pravých stran provedeme dosazením souřadnic bodu B za neznámé do homogenního soustavy získané v a); dostaneme: $c_1 = -2-2 = -4$, $c_2 = 1+4 = 5$. Výsledek je potom například

$$\mathcal{B} \equiv \begin{cases} \qquad -x_2 + x_3 \qquad = -4\,, \\ x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 \;=\; 5\,. \end{cases} \qquad \triangle$$

Úloha 5.2. V afinním prostoru $\mathcal{A}_4$ je zadán (neparametricky) podprostor $\mathcal{B}$. Nalezněte parametrické vyjádření podprostoru $\mathcal{B}$, je-li

$$\mathcal{B} \equiv \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1\,, \\ \qquad\qquad\qquad x_4 = 6\,, \\ \quad x_2 - 2x_3 \qquad = 0\,. \end{cases}$$

Řešení: Zřejmě $\dim \mathcal{B} = 4 - 3 = 1$, tzn. jde o přímku ve 4-rozměrném afinním prostoru. Řešíme tak, že volné neznámé v dané soustavě (jejichž počet je roven $\dim \mathcal{B}$) zvolíme za parametry a výpočtem zbývajících neznámých dostáváme pak hledané parametrické vyjádření. Zde například $x_3 = t$, $x_2 = 2t$, $x_1 = 1+x_2+x_3-x_4 = -5+3t$, $x_4 = 6$, odkud

$$\mathcal{B} \equiv \begin{cases} x_1 = -5 + 3t\,, \\ x_2 = \qquad 2t\,, \\ x_3 = \qquad\; t\,, \\ x_4 = \quad 6\,. \end{cases} \qquad \triangle$$

Poznámka 5.7. Volba afinního repéru (5.1) a pomocí něho pak možnost parametrického, respektive neparametrického, vyjádření podprostorů v daném afinním prostoru $\mathcal{A}_n$ nám umožňuje řešit jednotným způsobem geometrické úlohy v $\mathcal{A}_n$, bez ohledu na to, jak konkrétně afinní prostor $\mathcal{A}_n$ vypadá. Stačí si pouze vyjádřit (nebo mít zadány) potřebné body a vektory pomocí afinních souřadnic a pak používat znalostí o počítání ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$ tak, jak je známe z algebry. To je obecný princip analytické metody v geometrii, kterou budeme většinou při řešení příkladů používat. $\diamondsuit$

Úloha 5.3. V 5-rozměrném afinním prostoru $\mathcal{A}_5$ jsou dány dva podprostory $\mathcal{B}_1 = \{B_1; L(\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \underline{\mathbf{u}}_3)\}$, $\mathcal{B}_2 = \{B_2; L(\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2)\}$. Nalezněte průnik $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ a součet $\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2$, je-li $B_1 = [2; 0; -1; 3; 4]$, $\underline{\mathbf{u}}_1 = (1; 1; 0; 1; 0)$, $\underline{\mathbf{u}}_2 = (0; 1; 2; 0; -1)$, $\underline{\mathbf{u}}_3 = (1; -1; 0; 1; 3)$, $B_2 = [1; 1; 2; 1; 1]$, $\underline{\mathbf{v}}_1 = (1; -1; 3; 0; 3)$, $\underline{\mathbf{v}}_2 = (1; 0; 1; 0; 1)$.

Řešení: (i) Pro průnik $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ platí, že $X \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ právě tehdy, když

$X = B_1 + t_1\underline{\mathbf{u}}_1 + t_2\underline{\mathbf{u}}_2 + t_3\underline{\mathbf{u}}_3$

a současně

$X = B_2 + t_4\underline{\mathbf{v}}_1 + t_5\underline{\mathbf{v}}_2\,,$

odkud porovnáním dostaneme

$$t_1\underline{\mathbf{u}}_1 + t_2\underline{\mathbf{u}}_2 + t_3\underline{\mathbf{u}}_3 - t_4\underline{\mathbf{v}}_2 - t_5\underline{\mathbf{v}}_2 = \overrightarrow{B_1B_2}\,,$$

což po rozepsání do souřadnic dává soustavu pěti nehomogenních lineárních rovnic o pěti neznámých, kterou řešíme například Gaussovou metodou

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & -1 & -3 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Vidíme, že soustava je řešitelná, má jednu volnou neznámou (například t_5), a tedy $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ je 1-rozměrný podprostor, tzn. přímka. Položíme-li $t_5 = t$, pak $t_4 = -1 - t$ (je zřejmé, že k vyjádření $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ stačí znát buď t_4, t_5 nebo t_1, t_2, t_3 a ostatní neznámé není třeba počítat) a máme:

$$X = B_2 + (-1 - t)\underline{\mathbf{v}}_1 + t\underline{\mathbf{v}}_2 = (B_2 - \underline{\mathbf{v}}_1) + t(\underline{\mathbf{v}}_2 - \underline{\mathbf{v}}_1)\,.$$

Průnikem $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ je tedy přímka určená bodem $(B_2 - \underline{\mathbf{v}}_1) = [0; 2; -1; 1; -2]$ a vektorem $\underline{\mathbf{v}}_2 - \underline{\mathbf{v}}_1 = (0; 1; -2; 0; -2)$.

(ii) Pro součet $\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2$ je třeba vypočítat pouze zaměření součtu $\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2$. Podle Věty 2.6 je $Z(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2) = W_1 + W_2 + L(\overrightarrow{B_1B_2})$, přičemž však z (i) víme, že $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ se protínají, tzn., že $\overrightarrow{B_1B_2} \in W_1 + W_2$. Tedy $Z(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2)$ je generováno vektory $\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \underline{\mathbf{u}}_3, \underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2$ a bázi $Z(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2)$ zjistíme úpravou na schodovitý tvar matice, v jejíž řádcích tyto vektory vystupují. Tedy zde

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Výsledek: součet $\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2 = \{B_1; W\}$, kde báze W je tvořena například vektory $(1; 1; 0; 1; 0)$, $(0; 1; 2; 0; -1)$, $(0; 0; 4; 0; 1)$, $(0; 0; 0; 4; 3)$. △

6 Vzájemná poloha podprostorů

Základní úlohy, které jsou řešitelné v afinním prostoru, jsou takzvané polohové úlohy. V tomto paragrafu se budeme zabývat vzájemnou polohou podprostorů a vyřešíme některé typické polohové úlohy.

Definice 6.1. Nechť $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ jsou podprostory afinního prostoru $\mathcal{A}$. Je-li $Z(\mathcal{B}_1) \subseteq Z(\mathcal{B}_2)$ nebo $Z(\mathcal{B}_2) \subseteq Z(\mathcal{B}_1)$, pak podprostory $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ nazýváme *rovnoběžné* a značíme $\mathcal{B}_1 \parallel \mathcal{B}_2$.

V opačném případě (tzn. $Z(\mathcal{B}_1) \nsubseteq Z(\mathcal{B}_2) \wedge Z(\mathcal{B}_2) \nsubseteq Z(\mathcal{B}_1)$) říkáme, že $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ nejsou rovnoběžné, a píšeme $\mathcal{B}_1 \nparallel \mathcal{B}_2$.

Věta 6.1. *Nechť $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ jsou podprostory afinního prostoru $\mathcal{A}$. Pak:*

1. $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2 \implies \mathcal{B}_1 \parallel \mathcal{B}_2\,,$
2. $\mathcal{B}_1 \parallel \mathcal{B}_2 \implies \mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2$ *nebo* $\mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{B}_1$ *nebo* $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset\,.$

Důkaz. 1. $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2 \implies Z(\mathcal{B}_1) \subseteq Z(\mathcal{B}_2) \implies \mathcal{B}_1 \parallel \mathcal{B}_2$.

2. Dokážeme sporem. Nechť $\mathcal{B}_1 \parallel \mathcal{B}_2$ a nechť $\mathcal{B}_1 \nsubseteq \mathcal{B}_2 \wedge \mathcal{B}_2 \nsubseteq \mathcal{B}_1 \wedge \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 \neq \emptyset$. Potom například $Z(\mathcal{B}_1) \subseteq Z(\mathcal{B}_2)$ a existuje bod $A \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$. Pak ale $\mathcal{B}_1 = \{A; Z(\mathcal{B}_1)\} \subseteq \{A; Z(\mathcal{B}_2)\} = \mathcal{B}_2$, což je ve sporu s předpokladem. Analogicky se dostaneme do sporu v případě $Z(\mathcal{B}_2) \subseteq Z(\mathcal{B}_1)$. Tedy 2. platí. □

Věta 6.2. *Nechť $\mathcal{B}$ je k-rozměrný podprostor afinního prostoru $\mathcal{A}_n$; nechť $A \in \mathcal{A}_n$ je bod. Pak bodem A prochází právě jeden k-rozměrný podprostor $\mathcal{B}_1$, který je rovnoběžný s $\mathcal{B}$.*

Důkaz. *Existence*: Zřejmě podprostor $\mathcal{B}_1 = \{A; Z(\mathcal{B})\}$ splňuje tvrzení věty.

Jednoznačnost: Nechť $\mathcal{B}_2$ je podprostor splňující: $A \in \mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_2 \parallel \mathcal{B}$ a $\dim \mathcal{B}_2 = \dim \mathcal{B} = k$. Chceme dokázat, že $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_1$. Ale je $Z(\mathcal{B}_2) \subseteq Z(\mathcal{B})$ nebo $Z(\mathcal{B}) \subseteq Z(\mathcal{B}_2)$, přičemž $\dim Z(\mathcal{B}_2) = \dim Z(\mathcal{B})$, tzn. musí být (viz [Ho94]) $Z(\mathcal{B}_2) = Z(\mathcal{B})$. Pak ale $\mathcal{B}_2 = \{A; Z(\mathcal{B})\} = \mathcal{B}_1$. □

Důsledek 6.1. *Nechť $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ jsou dva k-rozměrné rovnoběžné podprostory, které se protínají. Pak $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ jsou totožné.*

Důkaz. Tvrzení je bezprostředním důsledkem předchozí Věty 6.2. □

Poznámka 6.1. Pojem rovnoběžnosti podprostorů tak, jak jsme ho definovali v Definici 6.1, je poněkud obecnější než rovnoběžnost chápána intuitivně v názorné rovině. Především z Definice 6.1 vyplývá, že bod (0-dimenzionální podprostor) je rovnoběžný s libovolným podprostorem. Dále z Věty 6.1 vyplývá, že i podprostory, které jsou v inkluzi (jeden podprostor je podprostorem druhého), jsou rovnoběžné. ♢

Věta 6.3. *Nechť* $\mathcal{B} \equiv b_1x_1+\cdots+b_nx_n = b$, $\mathcal{C} \equiv c_1x_1+\cdots+c_nx_n = c$ *jsou nadroviny v afinním prostoru* $\mathcal{A}_n$. *Potom*

$$\mathcal{B} \parallel \mathcal{C} \Leftrightarrow \exists \text{ reálné číslo } \lambda \neq 0 \text{ tak, že } b_i = \lambda c_i,\ \ i = 1,\ldots,n.$$

Důkaz. Podle předpokladu je $\dim Z(\mathcal{B}) = \dim Z(\mathcal{C})$. Pak $\mathcal{B} \parallel \mathcal{C} \Leftrightarrow Z(\mathcal{B}) = Z(\mathcal{C}) \Leftrightarrow$ rovnice: $b_1x_1 + \cdots + b_nx_n = 0$ a $c_1x_1 + \cdots + c_nx_n = 0$ mají stejné množiny řešení $\Leftrightarrow \exists$ nenulové číslo λ takové, že $b_i = \lambda c_i$, $i = 1,\ldots,n$. □

Definice 6.2. Dva podprostory $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ afinního prostoru $\mathcal{A}$ se nazývají
a) *různoběžné*, jestliže $\mathcal{B}_1 \nparallel \mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 \neq \emptyset$,
b) *mimoběžné*, jestliže $\mathcal{B}_1 \nparallel \mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$.

Poznámka 6.2. Z předchozích dvou definic logicky vyplývá, že pro libovolné dva podprostory v $\mathcal{A}_n$ musí nastat právě jedna ze tří možností: jsou rovnoběžné, jsou různoběžné, jsou mimoběžné. Přitom zřejmě podprostory, které jsou totožné, respektive v inkluzi, jsou speciálním případem rovnoběžných prostorů.

Výše uvedené věty o rovnoběžných podprostorech je možno bez problémů ilustrovat v názorné rovině nebo v názorném prostoru, tzn. v situacích rozebíraných na střední škole. Ve zbytku tohoto paragrafu budeme studovat některé vlastnosti různoběžných a mimoběžných podprostorů. Získaným výsledkům je možno ve většině případů (ale ne vždycky!) opět dát názorný středoškolský význam. ♢

Věta 6.4. *Nechť* $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ *jsou mimoběžné podprostory v* $\mathcal{A}_n$. *Pak*

$$1 \leq \dim \mathcal{B}_1,\ \dim \mathcal{B}_2 \leq n-2\,.$$

Důkaz. $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ jsou mimoběžné, tzn. musí být $(Z(\mathcal{B}_1) \cap Z(\mathcal{B}_2)) \subset Z(\mathcal{B}_2)$, odkud (viz [Ho94]) $\dim(Z(\mathcal{B}_1) \cap Z(\mathcal{B}_2)) < \dim Z(\mathcal{B}_2)$. Je tedy

$$\dim Z(\mathcal{B}_2) - \dim(Z(\mathcal{B}_1) \cap Z(\mathcal{B}_2)) \geq 1.$$

Odtud a podle Věty 2.6 (část 2) dostáváme $\dim(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2) = \dim(Z(\mathcal{B}_1) + Z(\mathcal{B}_2)) + 1 = \dim Z(\mathcal{B}_1) + \dim Z(\mathcal{B}_2) - \dim(Z(\mathcal{B}_1) \cap Z(\mathcal{B}_2)) + 1 \geq \dim Z(\mathcal{B}_1) + 1 + 1 = \dim \mathcal{B}_1 + 2$. Tedy $n \geq \dim(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2) \geq \dim \mathcal{B}_1 + 2$, odkud $\dim \mathcal{B}_1 \leq n-2$. Analogicky dostaneme, že $\dim \mathcal{B}_2 \leq n-2$.

Zbytek tvrzení, tzn. $1 \leq \dim \mathcal{B}_1, \dim \mathcal{B}_2$, je zřejmý, neboť 0-rozměrný podprostor, tj. bod, je vždy rovnoběžný s jakýmkoliv jiným podprostorem. □

Poznámka 6.3. Z předchozí Věty 6.4 vyplývá, že v afinním prostoru $\mathcal{A}$, kde $\dim \mathcal{A} = 0, 1, 2$, žádné mimoběžné podprostory neexistují. O mimoběžných podprostorech má tedy smysl uvažovat pouze v případech, kdy $\dim \mathcal{A} \geq 3$. Přitom, je-li $\dim \mathcal{A} = 3$, pak mimoběžnými podprostory mohou být pouze dvě přímky, respektive je-li $\dim \mathcal{A} = 4$, pak mimoběžnými podprostory mohou být dvě přímky nebo dvě roviny nebo přímka a rovina.

Z poslední úvahy je patrno, že ve více než třírozměrných afinních prostorech obecně selhávají naše vžité názorné představy, které jsme si přinesli ze střední školy. V těchto situacích, kdy už není možné se opírat o názor, je pak třeba vycházet ze solidní znalosti algebry, především kapitol o vektorových prostorech a soustavách lineárních rovnic. $\diamondsuit$

Věta 6.5. *Nechť $\mathcal{N}$ je nadrovina, $\mathcal{B}$ je libovolný podprostor v $\mathcal{A}$. Pak:*

1. *$\mathcal{N}$ a $\mathcal{B}$ jsou buď rovnoběžné nebo různoběžné.*
2. *Jsou-li $\mathcal{N}$ a $\mathcal{B}$ různoběžné, pak $\dim(\mathcal{N} \cap \mathcal{B}) = \dim \mathcal{B} - 1$.*

Důkaz. 1. Tvrzení je přímým důsledkem Věty 6.4.

2. Nechť $\mathcal{N}$ a $\mathcal{B}$ jsou různoběžné, pak $Z(\mathcal{B}) \nsubseteq Z(\mathcal{N})$, tzn. je $Z(\mathcal{N}) + Z(\mathcal{B}) = Z(\mathcal{A})$, odkud $\dim(Z(\mathcal{N}) + Z(\mathcal{B})) = \dim \mathcal{A} = n$. Podle Věty 2.4 je $\dim(\mathcal{N} \cap \mathcal{B}) = \dim(Z(\mathcal{N}) \cap Z(\mathcal{B})) = \dim Z(\mathcal{N}) + \dim Z(\mathcal{B}) - \dim(Z(\mathcal{N}) + Z(\mathcal{B})) = n - 1 + \dim Z(\mathcal{B}) - n = \dim \mathcal{B} - 1$. $\square$

Věta 6.6. *Nechť je dána přímka $p \equiv X = A + t\underline{\mathbf{u}}$, kde $\underline{\mathbf{u}} = (u_1; \ldots; u_n)$ a nadrovina $\mathcal{N} \equiv a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = a$ v afinním prostoru $\mathcal{A}_n$, $n \geq 2$.*

Pak p a $\mathcal{N}$ jsou rovnoběžné (respektive různoběžné) právě když platí

$$a_1u_1 + \cdots + a_nu_n = 0 \quad (\textit{respektive} \neq 0).$$

Důkaz. $p \parallel \mathcal{N} \Leftrightarrow Z(p) \subseteq Z(\mathcal{N}) \Leftrightarrow \underline{\mathbf{u}} \in Z(\mathcal{N}) \Leftrightarrow a_1u_1 + \cdots + a_nu_n = 0$, neboť podle Věty 5.3 je $Z(\mathcal{N})$ rovno množině všech řešení homogenní rovnice $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$.

Podle Věty 6.4 však p a $\mathcal{N}$ mohou být pouze rovnoběžné nebo různoběžné, tzn. druhá část tvrzení je pak logickým důsledkem 1. části. $\square$

Věta 6.7. *Nechť $\mathcal{B}_1 = \{B_1; W_1\}$ a $\mathcal{B}_2 = \{B_2; W_2\}$ jsou dva podprostory v $\mathcal{A}$. Pak:*

1. $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2 \vee \mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{B}_1 \quad \Leftrightarrow \quad W_1 \subseteq W_2 \vee W_2 \subseteq W_1,\ \overrightarrow{B_1B_2} \in W_1 + W_2.$
2. $\mathcal{B}_1 \parallel \mathcal{B}_2 \wedge \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad W_1 \subseteq W_2 \vee W_2 \subseteq W_1,\ \overrightarrow{B_1B_2} \notin W_1 + W_2.$
3. $\mathcal{B}_1, B_2$ *jsou různoběžné* $\quad \Leftrightarrow \quad W_1 \nsubseteq W_2 \wedge W_2 \nsubseteq W_1,\ \overrightarrow{B_1B_2} \in W_1 + W_2.$
4. $\mathcal{B}_1, B_2$ *jsou mimoběžné* $\quad \Leftrightarrow \quad W_1 \nsubseteq W_2 \wedge W_2 \nsubseteq W_1,\ \overrightarrow{B_1B_2} \notin W_1 + W_2.$

Důkaz. Tvrzení věty je důsledkem Definice 6.1 a Věty 2.3. $\square$

Věta 6.8. *Nechť $\mathcal{B}_1 = \{B_1; W_1\}$ a $\mathcal{B}_2 = \{B_2; W_2\}$ jsou dva podprostory v $\mathcal{A}$. Pak:*

1. $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2 \vee \mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{B}_1 \quad \Leftrightarrow \quad \dim(W_1 + W_2 + L(\overrightarrow{B_1B_2})) = \max(\dim W_1, \dim W_2)$.
2. $\mathcal{B}_1 \parallel \mathcal{B}_2 \wedge \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \dim(W_1 + W_2) = \max(\dim W_1, \dim W_2)$, $\dim(W_1 + W_2 + L(\overrightarrow{B_1B_2})) = \dim(W_1 + W_2) + 1$.
3. $\mathcal{B}_1, B_2$ *jsou různoběžné* $\Leftrightarrow \quad \dim(W_1 + W_2) > \max(\dim W_1, \dim W_2)$, $\dim(W_1 + W_2 + L(\overrightarrow{B_1B_2})) = \dim(W_1 + W_2)$.
4. $\mathcal{B}_1, B_2$ *jsou mimoběžné* $\Leftrightarrow \quad \dim(W_1 + W_2) > \max(\dim W_1, \dim W_2)$, $\dim(W_1 + W_2 + L(\overrightarrow{B_1B_2})) = \dim(W_1 + W_2) + 1$.

Důkaz. Pro rovnoběžné podprostory je $W_1 + W_2$ rovno většímu z podprostorů W_1 nebo W_2. Odtud je $\dim(W_1 + W_2) = \max(\dim W_1, \dim W_2)$. Pro nerovnoběžné podprostory je $W_1 + W_2$ ostře větší než jednotlivé podprostory W_1 nebo W_2, a proto je $\dim(W_1 + W_2) > \max(\dim W_1, \dim W_2)$.

Pro podprostory s neprázdným průnikem je $\overrightarrow{B_1B_2} \in W_1 + W_2$, a odtud $\dim(W_1 + W_2 + L(\overrightarrow{B_1B_2})) = \dim(W_1 + W_2)$. Pro neprotínající se podprostory je $\dim(W_1 + W_2 + L(\overrightarrow{B_1B_2})) = \dim(W_1 + W_2) + 1$.

Tvrzení je nyní důsledkem Věty 6.7. □

Důsledek 6.2. *Nechť* $p \equiv X = A + t\underline{\mathbf{u}}$ *je přímka a* $\mathcal{B} = \{B; W\}$ *je podprostor v* $\mathcal{A}$, $\dim \mathcal{B} \geq 1$. *Pak:*

1. $p \subseteq \mathcal{B} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\mathbf{u}}, \overrightarrow{AB} \in W$.
2. $p \parallel \mathcal{B} \wedge p \cap \mathcal{B} = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\mathbf{u}} \in W,\ \overrightarrow{AB} \notin W$.
3. $p, \mathcal{B}$ *jsou různoběžné* $\Leftrightarrow \quad \underline{\mathbf{u}} \notin W,\ \overrightarrow{AB} \in L(\underline{\mathbf{u}}) + W$.
4. $p, \mathcal{B}$ *jsou mimoběžné* $\Leftrightarrow \quad \underline{\mathbf{u}} \notin W,\ \overrightarrow{AB} \notin L(\underline{\mathbf{u}}) + W$.

Důkaz. Tvrzení je přímým důsledkem Věty 6.7. □

Poznámka 6.4. Pro praktické výpočty je výhodnější přeformulovat tvrzení předchozího Důsledku 6.2 do následujícího tvaru (ten je zřejmě ekvivalentní s původním a je důsledkem Věty 6.8):

1. $p \subseteq \mathcal{B} \quad \Leftrightarrow \quad \dim(W + L(\underline{\mathbf{u}}) + L(\overrightarrow{AB})) = \dim W$.
2. $p \parallel \mathcal{B} \wedge p \cap \mathcal{B} = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \dim(W + L(\underline{\mathbf{u}})) = \dim W$, $\dim(W + L(\underline{\mathbf{u}}) + L(\overrightarrow{AB})) = \dim W + 1$.
3. $p, \mathcal{B}$ jsou různoběžné $\Leftrightarrow \quad \dim(W + L(\underline{\mathbf{u}})) = \dim(W + L(\underline{\mathbf{u}}) + L(\overrightarrow{AB})) = \dim W + 1$.
4. $p, \mathcal{B}$ jsou mimoběžné $\Leftrightarrow \quad \dim(W + L(\underline{\mathbf{u}}) + L(\overrightarrow{AB})) = \dim W + 2$. ♢

Důsledek 6.3. *Nechť $p \equiv X = A + t\underline{\mathbf{u}}$, $q \equiv X = B + t\underline{\mathbf{v}}$ jsou dvě přímky v $\mathcal{A}$. Pak platí:*

1. $p \equiv q$ $\Leftrightarrow$ $\dim(L(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}, \overrightarrow{AB}) = 1$.
2. $p \parallel q \wedge p \cap q = \emptyset$ $\Leftrightarrow$ $\dim L(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}) = 1, \dim L(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}, \overrightarrow{AB}) = 2$.
3. *p, q jsou různoběžné* $\Leftrightarrow$ $\dim L(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}) = \dim L(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}, \overrightarrow{AB}) = 2$.
4. *p, q jsou mimoběžné* $\Leftrightarrow$ $\dim L(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}, \overrightarrow{AB}) = 3$.

Důkaz. Tvrzení plyne bezprostředně z předchozí poznámky. □

Poznámka 6.5. Předchozí důsledek popisuje všechny možné případy vzájemné polohy dvou přímek v afinním prostoru $\mathcal{A}$. Je třeba si uvědomit, že výsledek je částečně závislý na dimenzi celého prostoru $\mathcal{A}$ (zřejmě například v afinní rovině, tj. pro $\dim \mathcal{A} = 2$ nemůže nastat případ 4). V následující větě rozebereme analogicky všechny možné případy vzájemné polohy dvou rovin v $\mathcal{A}$ a na závěr pak vyšetříme úlohy o tzv. příčkách mimoběžných přímek. Přitom budeme používat následující terminologii:

Řekneme, že dvě mimoběžné roviny mají společný jeden směr, jestliže průnik zaměření těchto rovin má dimenzi 1.

Řekneme, že přímka $p = \{A; L(\underline{\mathbf{u}})\}$ je rovnoběžná s vektorem $\underline{\mathbf{w}}$ ($\neq \underline{\mathbf{o}}$), je-li $\underline{\mathbf{w}} \in L(\underline{\mathbf{u}})$, tzn. jsou-li vektory $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{w}}$ lineárně závislé. ♢

Věta 6.9. *Nechť $\varrho \equiv X = A + t_1\underline{\mathbf{u}}_1 + t_2\underline{\mathbf{u}}_2$; $\sigma \equiv X = B + s_1\underline{\mathbf{v}}_1 + s_2\underline{\mathbf{v}}_2$ jsou dvě roviny v $\mathcal{A}$. Označme $k = \dim L(\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2)$, $l = \dim L(\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2, \overrightarrow{AB})$. Pak:*

1. *ϱ, σ jsou totožné* $\Leftrightarrow$ $l = 2$.
2. $\varrho \parallel \sigma \wedge \varrho \cap \sigma = \emptyset$ $\Leftrightarrow$ $k = 2, l = 3$.
3. *ϱ, σ jsou různoběžné a mají společnou přímku* $\Leftrightarrow$ $k = l = 3$.
4. *ϱ, σ jsou různoběžné a mají společný jeden bod* $\Leftrightarrow$ $k = l = 4$.
5. *ϱ, σ jsou mimoběžné a mají společný jeden směr* $\Leftrightarrow$ $k = 3,\ l = 4$.
6. *ϱ, σ jsou mimoběžné a nemají společný žádný směr* $\Leftrightarrow$ $l = 5$.

Důkaz. Z algebry víme, že $L(\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2) + L(\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2) = L(\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2)$ a dále, že $\dim L(\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2) + \dim(L(\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2) \cap L(\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2)) = \dim L(\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2) + \dim L(\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2) = 4$. Navíc, podle Věty 2.3 se roviny ϱ, σ protínají právě když $\overrightarrow{AB} \in L(\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2)$. Nyní již můžeme odvodit jednotlivá tvrzení:

"1." ϱ, σ jsou totožné $\Leftrightarrow L(\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2) = L(\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2) \wedge \overrightarrow{AB} \in L(\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2) \Leftrightarrow l = 2$.

"2." $\varrho \parallel \sigma \wedge \varrho \cap \sigma \neq \emptyset \Leftrightarrow L(\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2) = L(\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2) \wedge \overrightarrow{AB} \notin L(\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2) \Leftrightarrow k = 2,\ l = 3$.

"3." ϱ, σ jsou různoběžné a mají společnou přímku $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \in L(\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2)$ a $\dim(L(\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2) \cap L(\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2)) = 1 \Leftrightarrow k = l = 3$.

"4." ϱ, σ jsou různoběžné a mají společný právě jeden bod $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \in L(\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2)$ a $\dim(L(\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2) \cap L(\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2)) = 0 \Leftrightarrow k = l = 4$.

"5." ϱ, σ jsou mimoběžné a mají společný směr $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \notin L(\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2)$ a $\dim(L(\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2) \cap L(\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2)) = 1 \Leftrightarrow k = 3,\ l = 4$.

"6." ϱ, σ jsou mimoběžné a nemají společný žádný směr $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \notin L(\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2)$ a $\dim(L(\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2) \cap L(\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2)) = 0 \Leftrightarrow l = 5$. $\square$

Poznámka 6.6. Předchozí Věta 6.9 popisuje všechny možné případy vzájemné polohy dvou rovin v afinním prostoru $\mathcal{A}$. Vidíme, že dvě roviny nemohou být mimoběžné v prostoru dimenze 3. Teprve ve čtyřrozměrném afinním prostoru mohou být dvě roviny mimoběžné, ale musí mít společný směr. V prostoru dimenze 5 mohou být dvě roviny mimoběžné a nemusí mít společný směr. $\diamondsuit$

Definice 6.3. Nechť p, q jsou mimoběžné přímky (mimoběžky) v $\mathcal{A}$. Pak přímka r, která je různoběžná s přímkou p i q, se nazývá *příčka mimoběžek* p, q.

Poznámka 6.7. Je zřejmé, že o mimoběžkách v $\mathcal{A}$ můžeme hovořit pouze tehdy, je-li $\dim \mathcal{A} \geq 3$. Dále, jsou-li $p = \{A; L(\underline{\mathbf{u}})\}$, $q = \{B; L(\underline{\mathbf{v}})\}$ mimoběžky v $\mathcal{A}$, pak součtem obou přímek (ve smyslu součtu podprostorů) je

$$p + q = \{A; L(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}, \overrightarrow{AB})\},$$

což je 3-rozměrný podprostor v $\mathcal{A}$ a je zřejmé, že každá příčka $r = \{C; L(\underline{\mathbf{w}})\}$ mimoběžek p, q musí ležet v tomto 3-rozměrném podprostoru$(p+q)$, tzn. musí platit

$$r \subseteq (p + q), \quad \underline{\mathbf{w}} \in L(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}, \overrightarrow{AB}).$$

Nyní rozebereme dvě základní úlohy o příčkách mimoběžek. $\diamondsuit$

Příklad 6.1. Nechť $p = \{A; L(\underline{\mathbf{u}})\}$, $q = \{B; L(\underline{\mathbf{v}})\}$ jsou mimoběžky v $\mathcal{A}$, nechť $\underline{\mathbf{w}} \in L(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}, \overrightarrow{AB})$ je nenulový vektor. Nalezněte příčku r mimoběžek p, q, která je rovnoběžná s vektorem $\underline{\mathbf{w}}$.

Řešení: Nechť příčka r protíná přímku p v bodě P a přímku q v bodě Q (viz Obr. 6.1).

Obr. 6.1

Pak
$$P = A + x\underline{\mathbf{u}}; \quad Q = B + y\underline{\mathbf{v}}$$
a k vyřešení úlohy stačí nalézt čísla x, y. Podle předpokladu existují reálná čísla a, b, c, d tak, že platí
$$\underline{\mathbf{w}} = a\underline{\mathbf{u}} + b\underline{\mathbf{v}} + c\overrightarrow{AB}\,, \quad \overrightarrow{PQ} = d\underline{\mathbf{w}},\ d \neq 0$$
Ale $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ} = -x\underline{\mathbf{u}} + \overrightarrow{AB} + y\underline{\mathbf{v}}$ a po dosazení dostáváme
$$-x\underline{\mathbf{u}} + \overrightarrow{AB} + y\underline{\mathbf{v}} = ad\underline{\mathbf{u}} + bd\underline{\mathbf{v}} + cd\overrightarrow{AB} + y\underline{\mathbf{v}}\,,$$
odkud
$$(ad + x)\underline{\mathbf{u}} + (bd - y)\underline{\mathbf{v}} + (cd - 1)\overrightarrow{AB} = \underline{\mathbf{o}}\,.$$
Z lineární nezávislosti vektorů $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}, \overrightarrow{AB}$ plyne $x = -ad$, $y = bd$, $cd = 1$, odkud vzhledem k tomu, že platí $c = 0 \Leftrightarrow \underline{\mathbf{w}} \in L(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}})$, dostáváme následující výsledek:

(i) Je-li $\underline{\mathbf{w}} \in L(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}})$, pak úloha nemá řešení.

(ii) Je-li $\underline{\mathbf{w}} \notin L(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}})$, pak úloha má jediné řešení, kde $x = -\frac{a}{c}$, $y = \frac{b}{c}$ a hledaná příčka je $r = \{P; L(\overrightarrow{PQ})\}$. ♡

Příklad 6.2. Nechť $p = \{A; L(\underline{\mathbf{u}})\}$, $q = \{B; L(\underline{\mathbf{v}})\}$ jsou mimoběžky v $\mathcal{A}$, nechť $M \in p + q$ je bod. Nalezněte příčku r mimoběžek p, q, která prochází bodem M.

Řešení: Nechť příčka r protíná přímku p v bodě P a přímku q v bodě Q (viz Obr. 6.2).

Obr. 6.2

Pak
$$P = A + x\underline{\mathbf{u}}, \quad Q = B + y\underline{\mathbf{v}}$$
a k vyřešení úlohy stačí nalézt čísla x, y. Podle předpokladu existují reálná čísla a, b, c, d tak, že platí
$$\overrightarrow{AM} = a\underline{\mathbf{u}} + b\underline{\mathbf{v}} + c\overrightarrow{AB}\,, \quad \overrightarrow{PM} = d\overrightarrow{PQ}\,.$$

Ale $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ} = -x\underline{\mathbf{u}} + \overrightarrow{AB} + y\underline{\mathbf{v}}$. Dále

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PM} = x\underline{\mathbf{u}} - dx\underline{\mathbf{u}} + d\overrightarrow{AB} + dy\underline{\mathbf{v}}\,,$$

odkud porovnáním

$$a\underline{\mathbf{u}} + b\underline{\mathbf{v}} + c\overrightarrow{AB} = (x - dx)\underline{\mathbf{u}} + dy\underline{\mathbf{v}} + d\overrightarrow{AB}\,,$$

tzn.

$$(a - x + dx)\underline{\mathbf{u}} + (b - dy)\underline{\mathbf{v}} + (c - d)\overrightarrow{AB} = \underline{\mathbf{o}}\,.$$

Z lineární nezávislosti vektorů $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}, \overrightarrow{AB}$ pak plyne

$$\begin{aligned} a - x(1-d) &= 0\,,\\ b - dy &= 0\,,\\ c - d &= 0\,, \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{aligned} x(1-c) &= a\,,\\ yc &= b\,, \end{aligned}$$

odkud dostáváme následující výsledek:

(i) Je-li $c = 0$, $b = 0$, pak bod $M \in p$ a úloha má nekonečně mnoho řešení, přičemž $x = a$, y je libovolné.

(ii) Je-li $c = 0$, $b \neq 0$, pak přímka q je rovnoběžná s rovinou určenou bodem M a přímkou p a úloha nemá řešení.

(iii) Je-li $c = 1$, $a = 0$, pak bod $M \in q$ a úloha má nekonečně mnoho řešení, přičemž x je libovolné, $y = b$.

(iv) Je-li $c = 1$, $a \neq 0$, pak přímka p je rovnoběžná s rovinou určenou bodem M a přímkou q a úloha nemá řešení.

(v) Je-li $c \neq 0, 1$, tj. ve všech ostatních případech, má úloha jediné řešení, přičemž $x = \frac{a}{1-c}$, $y = \frac{b}{c}$. ♡

Poznámka 6.8. Pro dobré pochopení úloh o mimoběžkách je nutné umět si představit, respektive znázornit nebo vymodelovat, jednotlivé možné situace pro případ $n = 3$ v afinním názorném prostoru.

Dále poznamenejme, že pro řešení konkrétních úloh o příčkách mimoběžek není třeba si nazpaměť pamatovat hodnoty x a y získané diskuzí v Příkladech 6.1 a 6.2. Výhodnější je nalezení bodů P, respektive Q, běžným způsobem, tzn. využitím konkrétních podmínek ze zadané úlohy. Z výpočtu pak již automaticky vyjde, zda a kolik řešení úloha má a rovněž tvar řešení. ♢

Úloha 6.1. Vyšetřete vzájemnou polohu podprostorů $\mathcal{B}_1 = \{B_1; L(\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2)\}$ a $\mathcal{B}_2 = \{B_2; L(\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2, \underline{\mathbf{v}}_3)\}$ afinního prostoru $\mathcal{A}_5$, je-li $B_1 = [2; 1; 4; 0; 0]$, $\underline{\mathbf{u}}_1 = (0; -1; -1; 2; 1)$, $\underline{\mathbf{u}}_2 = (1; 0; 1; 1; 0)$, $B_2 = [3; 0; 1; 3; 3]$, $\underline{\mathbf{v}}_1 = (1; 1; 0; 0; 1)$, $\underline{\mathbf{v}}_2 = (1; 0; -2; 1; 1)$, $\underline{\mathbf{v}}_3 = (1; -1; 0; 3; 1)$.

Řešení: Ze zadání plyne, že $\dim \mathcal{B}_1 = 2$, $\dim \mathcal{B}_2 = 3$.

(i) Ověření rovnoběžnosti $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$. Platí $\mathcal{B}_1 \parallel \mathcal{B}_2$, jestliže $W_1 \subseteq W_2$ (opačná inkluze je zde vyloučena vzhledem k dimenzím $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$), tzn. jestliže hodnost matice složené po řádcích ze souřadnic vektorů $\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2, \underline{\mathbf{v}}_3, \underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2$ je rovna 3. Je-li hodnost větší než 3, pak $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ rovnoběžné nejsou.

(ii) Ověření protínání $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$. Podprostory $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$ se protínají (tj. $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 \neq \emptyset$), jestliže $\overrightarrow{B_1B_2} \in W_1 + W_2$ (viz Věta 2.3), tzn. jestliže hodnost matice vyšetřované v (i) se přidáním řádku souřadnic vektoru $\overrightarrow{B_1B_2}$ nezmění. V opačném případě, tzn. jestliže se hodnost zvětší, je $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$.

Z rozboru je vidět, že obě části úlohy lze provést najednou. Je nutné přitom pouze "hlídat" řádek odpovídající vektoru $\overrightarrow{B_1B_2}$, nejlépe tak, že tento řádek při úpravách matice ponecháváme stále jako poslední (případně jej ještě můžeme graficky oddělit čarou). Tedy zde $\overrightarrow{B_1B_2} = (1; -1; -3; 3; 3)$, odkud pak

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hdashline 1 & -1 & -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Z tvaru výsledné matice pak odvodíme, že podprostory $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ jsou mimoběžné a jejich zaměření mají jako průnik jednodimenzionální podprostor (plyne z počtu nulových řádků nad čarou). △

Úloha 6.2. V $\mathcal{A}_4$ vyšetřete vzájemnou polohu rovin $\varrho = \{A; L(\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2)\}$, $\sigma = \{B; L(\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2)\}$ v závislosti na parametrech r, s, je-li $A = [2; -1; -1; 4]$, $\underline{\mathbf{u}}_1 = (1; 1; 0; 2)$, $\underline{\mathbf{u}}_2 = (1; 2; -2; 3)$, $B = [2; -1; r; 9]$, $\underline{\mathbf{v}}_1 = (2; 1; 1; -3)$, $\underline{\mathbf{v}}_2 = (-1; 0; 1; 2s)$.

Řešení: Protože se jedná o dvě roviny, můžeme použít Větu 6.9, tzn. nalézt hodnoty k, respektive l tak, že nalezneme hodnost matice složené po řádcích ze souřadnic vektorů $\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2$, respektive ještě $\overrightarrow{AB}$. Při výpočtu je opět nutné "hlídat" řádek odpovídající vektoru $\overrightarrow{AB}$.

Tedy zde $\overrightarrow{AB} = (0; 0; r+1; 5)$, odkud pak

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & 2s \\ \hdashline 0 & 0 & r+1 & 5 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2s-17 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & -6r-1 \end{pmatrix}.$$

Odtud dostáváme:

(i) Je-li $s = \frac{17}{2}$, $r = -\frac{1}{6}$, pak $k = l = 3$ a roviny ϱ, σ jsou různoběžné a mají společnou přímku.

(ii) Je-li $s = \frac{17}{2}$, $r \neq -\frac{1}{6}$, pak $k = 3$, $l = 4$ a roviny ϱ, σ jsou mimoběžné a mají společný jeden směr.

(iii) Je-li $s \neq \frac{17}{2}$, pak pro všechna $r \in \mathbb{R}$ je $k = l = 4$ a roviny ϱ, σ jsou různoběžné a mají společný jeden bod. $\triangle$

Úloha 6.3. V $\mathcal{A}_4$ nalezněte příčku r mimoběžek $p \equiv X = A + t\underline{\mathbf{u}}$, $q \equiv X = B + s\underline{\mathbf{v}}$, procházející bodem M, je-li $A = [1; 5; 2; -1]$, $\underline{\mathbf{u}} = (1; 2; 1; 0)$, $B = [0; -1; 1; 1]$, $\underline{\mathbf{v}} = (3; 1; 0; 1)$, $M = [0; 1; -5; -3]$.

Řešení: Označme P (respektive Q) průsečík hledané příčky s přímkou p (respektive q). Potom je $P = [1+t; 5+2t; 2+t; -1]$ a $Q = [3s; -1+s; 1; 1+s]$. Neznámými, které chceme vypočítat, jsou pak hodnoty t a s (k vyřešení úlohy tak, jak byla formulována, však stačí nalézt jen jednu z hodnot t, s, neboť k určení hledané příčky r stačí znát jeden z bodů P, Q).

Platí například (viz obrázek k Příkladu 6.2) $\overrightarrow{MP} = k\overrightarrow{MQ}$, tzn.

$$(1 + t; 4 + 2t; 7 + t; 2) = k(3s; -2 + s; 6; 4 + s)\,,$$

odkud z rovnosti odpovídajících si složek dostáváme soustavu lineárních rovnic o třech neznámých ks, k, t.

$$\begin{aligned} 3ks \qquad\quad - t &= 1\,,\\ ks - 2k - 2t &= 4\,,\\ 6k - \ \ t &= 7\,,\\ ks + 4k \qquad &= 2\,, \end{aligned}$$

jehož vyřešením například Gaussovou metodou dostáváme $t = -3$ (respektive $k = \frac{2}{3}$, $ks = -\frac{2}{3}$, odkud pak $s = -1$). Dosazením za t pak získáme vektor $\overrightarrow{MP}$. Výsledná příčka je tedy $r \equiv X = M + t\underline{\mathbf{w}}$, kde $M = [0; 1; -5; -3]$, $\underline{\mathbf{w}} = \overrightarrow{MP} = (-2; -2; 4; 2)$. $\triangle$

Úloha 6.4. V $\mathcal{A}_3$ nalezněte příčku r mimoběžek $p \equiv X = A + t\underline{\mathbf{u}}$, $q \equiv X = B + s\underline{\mathbf{v}}$, která je rovnoběžná s vektorem $\underline{\mathbf{w}}$, je-li $\underline{\mathbf{w}} = (8; 7; 1)$, $A = [10; -7; 0]$, $\underline{\mathbf{u}} = (5; 4; 1)$, $B = [-3; 5; 0]$, $\underline{\mathbf{v}} = (2; 1; 1)$.

Řešení: Označme P (respektive Q) průsečík hledané příčky s přímkou p (respektive q). Potom $P = [10 + 5t; -7 + 4t; t]$ (respektive $Q = [-3 + 2s; 5 + s; s]$) a opět hledáme hodnoty t, s. Platí $\overrightarrow{PQ} = k\underline{\mathbf{w}}$, neboli

$$(-13 + 2s - 5t; 12 + s - 4t; s - t) = (8k; 7k; k)\,,$$

tzn. dostáváme soustavu lineárních rovnic o třech neznámých k, s, t

$$\begin{aligned} 8k - 2s + 5t &= -13\,,\\ 7k - \ \ s + 4t &= \ \ 12\,,\\ k - \ \ s + \ \ t &= \ \ \ 0\,, \end{aligned}$$

o níž však výpočtem snadno zjistíme, že nemá řešení, takže hledaná příčka r neexistuje. $\triangle$

7 Svazek nadrovin, trs rovin

V tomto paragrafu zavedeme pojem svazku nadrovin a podrobněji si všimneme především svazku přímek v rovině a svazku rovin v $\mathcal{A}_3$. Zavedeme také pojem trsu rovin v $\mathcal{A}_3$. Svazky a trsy jsou užitečným nástrojem při řešení celé řady geometrických úloh.

Definice 7.1. Nechť $\mathcal{B}$ je $(n-2)$-dimenzionální podprostor v $\mathcal{A}_n$, $n \geq 2$. Množina nadrovin v $\mathcal{A}_n$, které obsahují podprostor $\mathcal{B}$, se nazývá *svazek nadrovin 1. druhu.*

Množina navzájem rovnoběžných nadrovin v $\mathcal{A}_n$ se nazývá *svazek nadrovin 2. druhu.*

Pro $n = 2$ hovoříme o *svazku přímek 1. a 2. druhu* a bod S, společný pro všechny přímky svazku 1. druhu, se nazývá *střed* nebo *vrchol svazku.*

Pro $n = 3$ hovoříme o *svazku rovin 1. a 2. druhu* a přímka o, společná pro všechny roviny svazku 1. druhu, se nazývá *osa svazku.*

Věta 7.1. *Libovolné dvě různé nadroviny v $\mathcal{A}_n$ určují svazek nadrovin.*

Důkaz. Dvě nadroviny v $\mathcal{A}_n$ mohou být buď rovnoběžné nebo různoběžné a jejich průnikem je podprostor dimenze $(n-2)$ (viz Věta 6.5). V prvním případě určují svazek navzájem rovnoběžných nadrovin a ve druhém případě svazek nadrovin prvního druhu. $\square$

Úmluva 7.1. Dále se budeme zabývat souřadnicovým vyjádřením svazku nadrovin. Abychom zkrátili zápisy, budeme používat následující symbolické označení: $L(X) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a$, tj. obecná rovnice nadroviny α je tvaru $\alpha \equiv L(X) = 0$. $\Diamond$

Věta 7.2. *Nechť $\alpha_1 \equiv L_1(X) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a = 0$, $\alpha_2 \equiv L_2(X) = b_1x_1 + \cdots + b_nx_n + b = 0$ jsou dvě různé nadroviny. Pak nadrovina α patří do svazku nadrovin určeného nadrovinami α_1 a α_2 právě tehdy, když existují $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tak, že*

$$\alpha \equiv \lambda_1 L_1(X) + \lambda_2 L_2(X) = 0\,, \tag{7.1}$$

tj.

$$\alpha \equiv \sum_{i=1}^{n} (\lambda_1 a_i + \lambda_2 b_i)x_i + (\lambda_1 a + \lambda_2 b) = 0\,, \tag{7.2}$$

přičemž (λ_1, λ_2) není řešením homogenní soustavy n lineárních rovnic

$$\begin{aligned} a_1x_1 + b_1x_2 &= 0\,, \\ &\vdots \\ a_nx_1 + b_nx_2 &= 0\,. \end{aligned} \tag{7.3}$$

Důkaz. "$\Leftarrow$" Z podmínky (7.3) vyplývá, že

$$\alpha \equiv \lambda_1 L_1(X) + \lambda_2 L_2(X) = 0$$

je rovnice nadroviny. Musíme ukázat, že nadrovina α patří do svazku určeného nadrovinami α_1 a α_2. Situaci musíme rozdělit na dva případy.

1. Nechť $\alpha_1 \cap \alpha_2 \neq \emptyset$, pak α_1 a α_2 určují svazek nadrovin 1. druhu se společným podprostorem $\mathcal{B} = \alpha_1 \cap \alpha_2$, $\dim \mathcal{B} = n-2$. Předpokládejme, že $Y \in \mathcal{B}$ je libovolný bod, tj. $Y \in \alpha_1 \Leftrightarrow L_1(Y) = 0$ a $Y \in \alpha_2 \Leftrightarrow L_2(Y) = 0$. Potom $\lambda_1 L_1(Y) + \lambda_2 L_2(Y) = 0 \Leftrightarrow Y \in \alpha$, a tedy $\mathcal{B} \subset \alpha$ a α patří do svazku nadrovin, který je určen nadrovinami α_1 a α_2.

2. Nechť $\alpha_1 \parallel \alpha_2$, pak podle Věty 6.3 existuje nenulové číslo $k \in \mathbb{R}$ takové, že $b_i = ka_i$, $i = 1, \dots, n$. Ze (7.2) potom dostáváme $\lambda_1 a_i + \lambda_2 b_i = (\lambda_1 + k\lambda_2)a_i$ a z podmínky (7.3) je $(\lambda_1 + k\lambda_2) \neq 0$. Je tedy nadrovina α rovnoběžná s nadrovinou α_1 a patří do svazku nadrovin 2. druhu určeného nadrovinami α_1 a α_2.

"$\Rightarrow$" Nechť patří α do svazku nadrovin určeného nadrovinami α_1 a α_2. Potom nastávají následující možnosti:

a) $\alpha \equiv \alpha_1 \Leftrightarrow \alpha \equiv \lambda_1 L_1(X) = 0\,,\ \lambda_1 \neq 0$.

b) $\alpha \equiv \alpha_2 \Leftrightarrow \alpha \equiv \lambda_2 L_2(X) = 0\,,\ \lambda_2 \neq 0$.

c) $\alpha \not\equiv \alpha_1$ a $\alpha \not\equiv \alpha_2$. Uvažujme libovolný bod $P \in \alpha$ takový, že $P \notin \alpha_1$ a $P \notin \alpha_2$, tj. $L_1(P) \neq 0$ a $L_2(P) \neq 0$. Označme $\lambda_1 = L_2(P)$ a $\lambda_2 = -L_1(P)$. Ukážeme sporem, že λ_1, λ_2 nejsou řešením soustavy (7.3). Předpokládejme tedy, že

$$a_i L_2(P) - b_i L_1(P) = 0 \tag{7.4}$$

pro všechna $i = 1, \dots, n$. Z předpokladu $L_1(P) \neq 0$ je

$$b_i = \lambda a_i\,, \qquad \lambda = \frac{L_2(P)}{L_1(P)}\,. \tag{7.5}$$

Nyní musíme rozlišit dva případy:

1. α_1, α_2 určují svazek 1. druhu $\Leftrightarrow \alpha_1 \nparallel \alpha_2 \Leftrightarrow (b_1; \dots; b_n) \neq k(a_1; \dots; a_n)$, což je ve sporu s (7.5).

2. α_1, α_2 určují svazek 2. druhu $\Leftrightarrow \alpha_1 \parallel \alpha_2 \Leftrightarrow (b_1; \dots; b_n) = k(a_1; \dots; a_n)$. Potom ze (7.4) plyne $b = ka$, tj. $L_2(X) = kL_1(X) \Leftrightarrow \alpha_1 \equiv \alpha_2$, což je ve sporu s předpokladem, že α_1, α_2 jsou různé nadroviny.

Dohromady tedy dostáváme, že $\lambda_1 = L_2(P)$ a $\lambda_2 = -L_1(P)$ nejsou řešením soustavy (7.3), a odtud

$$\lambda_1 L_1(X) + \lambda_2 L_2(X) = 0$$

je rovnicí nadroviny, která podle první části důkazu patří do svazku nadrovin určeného nadrovinami α_1, α_2 a prochází bodem P. □

Poznámka 7.1. Rovnici

$$\alpha \equiv \lambda_1 L_1(X) + \lambda_2 L_2(X) = 0$$

nazýváme *rovnicí svazku nadrovin*, který je určen nadrovinami $\alpha_1 \equiv L_1(X) = 0$ a $\alpha_2 \equiv L_2(X) = 0$. Čísla λ_1, λ_2 se nazývají *parametry* (vzhledem k nadrovinám α_1, α_2)

nadroviny α ve svazku. Protože je rovnice nadroviny určena až na nenulový násobek, jsou pro nenulové $k \in \mathbb{R}$ čísla $k\lambda_1, k\lambda_2$ parametry téže nadroviny, a nadrovina je tedy určena poměrem $\lambda_1 : \lambda_2$. $\diamondsuit$

Poznámka 7.2. Z Věty 7.1 vyplývá, že neparametrické rovnice podprostoru $\mathcal{B}$ dimenze $(n-2)$ jsou vlastně rovnice dvou nadrovin, které určují $\mathcal{B}$ jako podprostor společný všem nadrovinám svazku těmito nadrovinami určeného. $\diamondsuit$

Poznámka 7.3. Nechť α_1, α_2 určují svazek nadrovin druhého druhu, tj. $\alpha_1 \parallel \alpha_2$, což je ekvivalentní s $(b_1; \ldots; b_n) = k(a_1; \ldots; a_n)$, $0 \neq k \in \mathbb{R}$. Potom pro nadrovinu α ve svazku můžeme zvolit parametry λ_1, λ_2 tak, že $\lambda_1 + k\lambda_2 = 1$ a ze (7.2) dostaneme

$$\alpha \equiv a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + c = 0\,,$$

kde $c = \lambda_1 a + \lambda_2 b$. Toto vyjádření nadroviny ve svazku 2. druhu je mnohem užitečnější při praktických výpočtech. $\diamondsuit$

Věta 7.3. *Tři různé nadroviny $\alpha_1 \equiv L_1(X) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a = 0$, $\alpha_2 \equiv L_2(X) = b_1x_1 + \cdots + b_nx_n + b = 0$, $\alpha_3 \equiv L_3(X) = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n + c = 0$ patří do téhož svazku nadrovin právě tehdy, když*

$$h\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n & a \\ b_1 & \cdots & b_n & b \\ c_1 & \cdots & c_n & c \end{pmatrix} = 2\,. \tag{7.6}$$

Důkaz. "$\Rightarrow$" Patří-li např. α_3 do svazku nadrovin určeného nadrovinami α_1, α_2, je $L_3(X) = \lambda_1 L_1(X) + \lambda_2 L_2(X)$, kde (λ_1, λ_2) není řešením soustavy (7.3). Potom je třetí řádek matice lineární kombinací prvních dvou (s koeficienty λ_1, λ_2) a z předpokladu $\alpha_1 \not\equiv \alpha_2$ dostáváme tvrzení.

"$\Leftarrow$" Z $h(A) = 2$ a různosti rovin α_i je např. třetí řádek matice lineární kombinací prvních dvou, tj. $c_i = \lambda_1 a_i + \lambda_2 b_i$, $i = 1, \ldots, n$, $c = \lambda_1 a + \lambda_2 b$. Potom $L_3(X) = \lambda_1 L_1(X) + \lambda_2 L_2(X)$ a α_3 patří do svazku nadrovin určeného nadrovinami α_1, α_2. $\square$

Důsledek 7.1. *Tři různé přímky $p_1 \equiv L_1(X) = a_1x + a_2y + a = 0$, $p_2 \equiv L_2(X) = b_1x + b_2y + b = 0$, $p_3 \equiv L_3(X) = c_1x + c_2y + c = 0$ patří do téhož svazku přímek právě tehdy, když*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a \\ b_1 & b_2 & b \\ c_1 & c_2 & c \end{vmatrix} = 0\,. \tag{7.7}$$

Důkaz. Tvrzení je přímým důsledkem Věty 7.2. $\square$

Na závěr tohoto paragrafu ještě zavedeme pojem trsu rovin v $\mathcal{A}_3$. Podobně jako u svazku nadrovin bychom mohli definovat i trs nadrovin pro libovolnou dimenzi $n \geq 3$, ale prakticky se nesetkáme s jiným případem než $n = 3$.

Definice 7.2. Nechť S je bod a p je přímka v $\mathcal{A}_3$. Množina rovin v $\mathcal{A}_3$, které obsahují bod S, se nazývá *trs rovin 1. druhu*. Bod S se nazývá *vrchol* nebo *střed trsu rovin*.

Množina rovin v $\mathcal{A}_3$, které jsou rovnoběžné s přímkou p, se nazývá *trs rovin 2. druhu*.

Věta 7.4. *Libovolné tři různé roviny v $\mathcal{A}_3$, které nepatří do jednoho svazku rovin, určují trs rovin.*

Důkaz. Tři roviny v $\mathcal{A}_3$, které nepatří do jednoho svazku rovin, mají buď právě jeden společný bod nebo nemají žádný společný bod a jejich zaměření mají právě jeden společný směr. V prvním případě určují trs rovin 1. druhu a ve druhém případě trs rovin 2. druhu. □

Věta 7.5. *Nechť $\rho_1 \equiv L_1(X) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a = 0$, $\rho_2 \equiv L_2(X) = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b = 0$, $\rho_3 \equiv L_3(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c = 0$ jsou tři roviny, které nepatří do jednoho svazku rovin. Pak nadrovina ρ patří do trsu rovin určeného rovinami ρ_1, ρ_2 a ρ_3 právě tehdy, když existují $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tak, že*

$$\rho \equiv \lambda_1 L_1(X) + \lambda_2 L_2(X) + \lambda_3 L_3(X) = 0\,, \tag{7.8}$$

přičemž $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ není řešením homogenní soustavy rovnic

$$\begin{aligned} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 &= 0\,,\\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 &= 0\,,\\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 &= 0\,. \end{aligned} \tag{7.9}$$

Důkaz. Důkaz se provede stejně jako důkaz Věty 7.2 a ponecháme jej na čtenáři. □

Věta 7.6. *Čtyři různé roviny $\rho_1 \equiv L_1(X) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a = 0$, $\rho_2 \equiv L_2(X) = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b = 0$, $\rho_3 \equiv L_3(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c = 0$, $\rho_4 \equiv L_4(X) = d_1x_1 + d_2x_2 + d_3x_3 + d = 0$, z nichž žádné tři nepatří do téhož svazku rovin, patří do téhož trsu rovin právě tehdy, když*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a\\ b_1 & b_2 & b_3 & b\\ c_1 & c_2 & c_3 & c\\ d_1 & d_2 & d_3 & d \end{vmatrix} = 0\,. \tag{7.10}$$

Důkaz. Podmínka, že žádné tři z rovin $\rho_1, \dots, \rho_4$ nepatří do téhož svazku rovin, je ekvivalentní tomu, že matice A sestavená z koeficientů rovnic má hodnost ≥ 3. Stejně jako v důkazu Věty 7.3 se dokáže, že $\rho_1, \dots, \rho_4$ patří do téhož trsu rovin právě tehdy, když $h(A) = 3$, a odtud dostáváme $|A| = 0$. Na druhé straně, je-li $|A| = 0$, je např. poslední řádek matice A lineární kombinací prvních tří, což je ekvivalentní s tím, že ρ_4 patří do trsu určeného rovinami ρ_1, ρ_2, ρ_3. □

Úloha 7.1. Určete rovnici přímky r v rovině, která prochází průsečíkem přímek $p_1 \equiv x + 2y - 5 = 0$ a $p_2 \equiv 3x - 2y + 1 = 0$ a navíc

a) prochází bodem $P = [3; -1]$,

b) je rovnoběžná s přímkou $q \equiv 4x + 3y + 1 = 0$.

Řešení: a) Hledaná přímka r patří do svazku přímek 1. druhu, který je určen přímkami p_1 a p_2, tj. $r \equiv \lambda_1(x + 2y - 5) + \lambda_2(3x - 2y + 1) = 0$. Podmínka $P \in r$ dává rovnici $-4\lambda_1 + 12\lambda_2 = 0$, odkud $\lambda_1 : \lambda_2 = 12 : 4 = 3 : 1$.

Výsledek: $r \equiv 6x + 4y - 14 = 0$.

b) Hledaná přímka r patří do svazku přímek 2. druhu určeného přímkou q, tj. $r \equiv 4x+3y+c = 0$, a současně do svazku přímek 1. druhu, který je určen přímkami p_1 a p_2. Z Důsledku 7.1 je

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & c \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = -10\,.$$

Výsledek: $r \equiv 4x + 3y - 10 = 0$. △

Úloha 7.2. Bodem $M = [2; 3; 1]$ veďte příčku mimoběžek

$$p \equiv \begin{cases} x + y & = 0\,, \\ x - y + z + 4 & = 0\,, \end{cases} \qquad q \equiv \begin{cases} x + 3y \phantom{{}+z} - 1 & = 0\,, \\ \phantom{x+{}} y + z - 2 & = 0\,. \end{cases}$$

Řešení: Hledaná příčka r musí ležet v rovinách $\rho_1(M, p)$ a $\rho_2(M, q)$. Rovina ρ_1 patří do svazku s osou p, tj. $\rho_1 \equiv \lambda_1(x + y) + \lambda_2(x - y + z + 4) = 0$ a podmínka $M \in \rho_1$ dává rovnici $5\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0$, tj. $\lambda_1 : \lambda_2 = -4 : 5$, odkud dostáváme $\rho_1 \equiv x - 9y + 5z + 20 = 0$.

Podobně rovina ρ_2 patří do svazku s osou q, tj. $\rho_2 \equiv \lambda_1(x+3y-1)+\lambda_2(y+z-2) = 0$ a podmínka $M \in \rho_2$ dává rovnici $10\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$, tj. $\lambda_1 : \lambda_2 = -1 : 5$, odkud dostáváme $\rho_2 \equiv x - 2y - 5z + 9 = 0$.

Výsledek: hledaná příčka $r \equiv \begin{cases} x - 9y + 5z + 20 & = 0\,, \\ x - 2y - 5z + 9 & = 0\,. \end{cases}$ △

8 Dělicí poměr, střed dvojice bodů

Definice 8.1. Nechť A, B, C jsou tři navzájem různé body ležící na dané přímce p. Reálné číslo λ splňující vztah

$$\overrightarrow{AC} = \lambda\, \overrightarrow{BC} \tag{8.1}$$

nazýváme *dělicím poměrem bodu C vzhledem k bodům A, B* (v tomto pořadí) a označujeme symbolem $(C; A, B)$.

Poznámka 8.1. Předchozí definice je formálně vyslovena pro přímku, tj. pro jednorozměrný afinní prostor, ale je zřejmé, že pojem dělicího poměru je stejným způsobem definován i pro tři navzájem různé body jakéhokoliv jednorozměrného podprostoru (tj. přímky) v afinním n-rozměrném prostoru $\mathcal{A}$. Podstatné je tedy pouze to, aby uvažované body A, B, C ležely na jedné přímce. ♢

Věta 8.1. *Nechť $A = [a_1; \dots ; a_n]$, $B = [b_1; \dots ; b_n]$, $C = [c_1; \dots ; c_n]$ jsou tři navzájem různé body ležící na jedné přímce v afinním prostoru $\mathcal{A}$. Nechť $(C; A, B) = \lambda$. Pak platí*

$$c_i - a_i = \lambda(c_i - b_i), \quad i = 1, \dots , n\,. \tag{8.2}$$

Důkaz. Platí-li předpoklady věty, pak $\overrightarrow{AC} = (c_1 - a_1; \dots ; c_n - a_n)$, $\overrightarrow{BC} = (c_1 - b_1; \dots ; c_n - b_n)$ a tvrzení věty vyplývá přímo z Definice 8.1. □

Poznámka 8.2. Vztahy (8.2), což je celkem n rovností mezi reálnými čísly, budeme dále obvykle stručně zapisovat jedinou symbolickou rovnicí

$$(C - A) = \lambda(C - B)\,.$$

Bezprostředně lze ověřit (například rozepsáním pomocí transformačních rovnic pro souřadnice bodů), že hodnota dělicího poměru λ, která je vztahy (8.2) jednoznačně určena, nezávisí na volbě afinního repéru.

Zároveň připomeňme, že hodnota λ není obecně jednoznačně určena každým ze vztahů (8.2). Může se totiž stát, že $a_i = b_i = c_i$ pro jeden nebo více indexů i (nikoliv však pro všechny!) a pro takové i je pak (8.2) tvaru $0 = \lambda \cdot 0$. Je-li však prostor $\mathcal{A}$ jednorozměrný a $A = [a]$, $B = [b]$, $C = [c]$, pak musí být a, b, c navzájem různá reálná čísla, a je

$$(C; A, B) = \frac{c - a}{c - b}\,.$$

Konečně, z Definice 8.1 ihned plyne, že dělicí poměr $\lambda = (C; A, B)$ je reálné číslo, různé od 0, respektive 1, neboť jinak by bylo $A = C$, respektive $A = B$, což je vyloučeno. V následující větě ukážeme, že zobrazení přiřazující každému bodu C ($C \neq B$, $C \neq A$) dělicí poměr $(C; A, B)$ je bijekcí množiny $p - \{A, B\}$ na množinu $\mathbb{R} - \{0, 1\}$. ♢

Věta 8.2. *Nechť A, B jsou dva různé body na přímce p, nechť λ je reálné číslo $0 \neq \lambda \neq 1$. Pak existuje na přímce p jediný bod C, různý od A, B, splňující vztah $(C; A, B) = \lambda$.*

Důkaz. Protože pojem dělicího poměru nezávisí na volbě afinního repéru, provedeme důkaz v souřadnicích vzhledem k vhodně zvolenému afinnímu repéru, s využitím Věty 8.1. Nechť tedy $\langle A; \overrightarrow{AB} \rangle$ je afinní repér na p. Vzhledem k němu je pak $A = [0]$, $B = [1]$. Budeme hledat všechny body $C = [x]$, které splňují vztah $(C; A, B) = \lambda$. Podle Věty 8.1 je $x - 0 = \lambda \cdot (x - 1)$, odkud $x = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$. Vidíme, že hodnota x je určena jednoznačně a je $x \neq 0$, $x \neq 1$, a tedy bod C s uvedenou vlastností je jediný a je různý od A i B. □

Z Definice 8.1, případně z Věty 8.1 je zřejmé, že pořadí, v jakém zapisujeme body A, B, C ve výrazu pro dělicí poměr, je pevně dáno a je podstatné. Následující věta ukáže, jak se změní dělicí poměr tří bodů, změníme-li jejich pořadí.

Věta 8.3. *Nechť A, B, C jsou tři navzájem různé body na přímce a nechť $(C; A, B) = \lambda$. Pak platí*

1. $(C; B, A) = \dfrac{1}{\lambda}$, *2.* $(B; A, C) = 1 - \lambda$, *3.* $(B; C, A) = \dfrac{1}{1-\lambda}$,

4. $(A; B, C) = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda}$, *5.* $(A; C, B) = \dfrac{\lambda}{\lambda - 1}$.

Důkaz. 1. Podle předpokladu $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{BC}$, odkud $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{\lambda}\overrightarrow{AC}$, a tedy $(C; B, A) = \frac{1}{\lambda}$.

2. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \lambda \overrightarrow{BC}$, tzn. $\overrightarrow{AB} = (\lambda - 1)\overrightarrow{BC}$, odkud dostáváme $\overrightarrow{AB} = (1-\lambda)\overrightarrow{CB}$, a tedy $(B; A, C) = 1 - \lambda$.

3., 4., 5. plynou bezprostředně z 1. a 2. □

Věta 8.4. *Nechť $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3$ jsou tři různé rovnoběžné nadroviny v afinním n-rozměrném prostoru $\mathcal{A}_n$, $n \geq 2$. Nechť r, s jsou přímky v $\mathcal{A}_n$, různoběžné s těmito nadrovinami. Označme $R_i = r \cap \mathcal{N}_i$, $S_i = s \cap \mathcal{N}_i$, $i = 1, 2, 3$. Pak platí*

$$(R_3; R_1, R_2) = (S_3; S_1, S_2)\,.$$

Důkaz. Pro názornost si nejprve situaci popsanou ve Větě 8.4 ilustrujme obrázkem pro nejjednodušší případy, tj. $n = 2, 3$ (viz Obr 8.1).

Obr 8.1

Nyní k vlastnímu důkazu. Nechť $r = \{A; L(\underline{\mathbf{u}})\}$, $s = \{B; L(\underline{\mathbf{v}})\}$ a dále zvolme v $\mathcal{A}_n$ afinní repér

$$\mathscr{R} = \langle P; \underline{\mathbf{e}}_1, \dots, \underline{\mathbf{e}}_{n-1}, \underline{\mathbf{e}}_n \rangle \tag{8.3}$$

a to tak, že vektory $\underline{\mathbf{e}}_1, \dots, \underline{\mathbf{e}}_{n-1}$ jsou bází zaměření nadroviny $\mathcal{N}_1$ (a tudíž i $\mathcal{N}_2$ a $\mathcal{N}_3$) a všechny souřadnice vyjadřujeme nyní vzhledem k (8.3). Potom $\mathcal{N}_i \equiv x_n = c_i$, kde c_i, $i = 1, 2, 3$, jsou navzájem různá reálná čísla. Nechť $R_i = [r_{1i}; \dots; r_{ni}]$, $S_i = [s_{1i}; \dots; s_{ni}]$, $\underline{\mathbf{u}} = (u_1; \dots ; u_n)$, $\underline{\mathbf{v}} = (v_1; \dots ; v_n)$. Vzhledem k tomu, jak jsme zvolili repér $\mathscr{R}$, musí být $r_{n1} = s_{n1} = c_1$, $r_{n2} = s_{n2} = c_2$, $r_{n3} = s_{n3} = c_3$ (neboť body R_i, S_i leží oba v nadrovině $\mathcal{N}_i$), respektive $u_n \neq 0$, $v_n \neq 0$ (neboť přímky r, s nejsou rovnoběžné s $\mathcal{N}_1$), a tedy také $r_{ni} - r_{nj} \neq 0$, $s_{ni} - s_{nj} \neq 0$ pro $i \neq j$. Odtud a z (8.2) pak dostáváme

$$(R_3; R_1, R_2) = \frac{r_{n3} - r_{n1}}{r_{n3} - r_{n2}} = \frac{s_{n3} - s_{n1}}{s_{n3} - s_{n2}} = (S_3; S_1, S_2)\,. \qquad \square$$

$\square$

Definice 8.2. Nechť A, B jsou body afinního prostoru $\mathcal{A}$. Je-li $A = B$, pak *středem dvojice bodů* A, B nazýváme bod A. Je-li $A \neq B$, pak *středem dvojice bodů* A, B nazýváme bod $S \in \mathcal{A}$, pro který platí $(S; A, B) = -1$.

Poznámka 8.3. Uvědomme si, že v definici středu dvojice bodů nezáleží na pořadí bodů A, B (neboť podle Věty 8.3 je $(S; A, B) = -1$ právě když $(S; B, A) = -1$). Vzhledem k Větě 8.2 je pak střed dvojice bodů určen jednoznačně. $\diamondsuit$

Věta 8.5. *Nechť $A, B \in \mathcal{A}$ jsou libovolné body. Pak bod S je středem dvojice bodů A, B právě když*

$$S = A + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}\,.$$

Důkaz. Tvrzení je zřejmé, pokud $A = B$. Nechť tedy $A \neq B$. Potom:

„$\Rightarrow$" Nechť S je středem dvojice bodů A, B. Pak $(S; A, B) = -1$, tj. $\overrightarrow{AS} = -\overrightarrow{BS} = -(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AS})$, odkud $2\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AB}$. Pak $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, neboli $S = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

„$\Leftarrow$" Nechť $S = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, pak $2\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AB}$, odkud $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SB} = -\overrightarrow{BS}$. Tedy $(S; A, B) = -1$ a S je středem dvojice bodů A, B. $\square$

Důsledek 8.1. *Nechť $A = [a_1; \dots ; a_n]$, $B = [b_1; \dots ; b_n]$ jsou libovolné body v $\mathcal{A}_n$. Pak bod S je středem dvojice bodů A, B právě když*

$$S = \left[\frac{1}{2}(a_1 + b_1); \dots ; \frac{1}{2}(a_n + b_n)\right]\,.$$

Důkaz. Tvrzení plyne přímo z předchozí věty, uvědomíme-li si, že platí $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1; \dots ; b_n - a_n)$. $\square$

Poznámka 8.4. Vyjádření souřadnic středu S dvojice bodů A, B z předchozího důsledku můžeme zapsat stručně symbolickou rovnicí

$$S = \frac{1}{2}(A + B) = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\,.$$

Přitom je třeba ještě jednou zdůraznit, že tento zápis je symbolický a znamená, že bod S je afinní kombinací bodů A, B (viz Definice 5.2) a symbolizuje tedy n odpovídajících rovností mezi souřadnicemi.

Podle Poznámky 5.2 je střed dvojice bodů těžištěm hmotné soustavy tvořené pouze těmito body. ♢

Věta 8.6. *Nechť A, B, C, D jsou čtyři body v $\mathcal{A}_n$. Potom platí*

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(A + D) = \frac{1}{2}(B + C)\,.$$

Důkaz. Nechť $A = [a_1; \ldots; a_n]$, $B = [b_1; \ldots; b_n]$, $C = [c_1; \ldots; c_n]$, $D = [d_1; \ldots; d_n]$. Pak $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1; \ldots; b_n - a_n)$, $\overrightarrow{CD} = (d_1 - c_1; \ldots; d_n - c_n)$ a zřejmě platí

$$b_i - a_i = d_i - c_i \Leftrightarrow \frac{1}{2}(a_i + b_i) = \frac{1}{2}(b_i + c_i), \quad i = 1, \ldots, n\,. \qquad \square$$

□

Poznámka 8.5. Předchozí Věta 8.6 ukazuje souvislost v algebře zavedeného pojmu vektoru (viz [Ho94]) se středo- školským pojmem vektoru. Věta 8.6 totiž říká, že dvojice bodů A, B a C, D určují stejný vektor právě tehdy, mají-li dvojice bodů A, D a B, C stejný střed (viz Obr. 8.2), což je jeden z obvyklých způsobů používaný při zavádění vektorů na střední škole.

Obr. 8.2

Konkrétně, v názorné rovině (prostoru) je *vázaný vektor* definován jako uspořádaná dvojice bodů (A, B), kterou značíme $\overrightarrow{AB}$. Na množině vázaných vektorů se definuje relace *ekvipolence* takto:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(A + D) = \frac{1}{2}(B + C)\,.$$

Tato relace je relací ekvivalence na množině všech vázaných vektorů a třídy rozkladu příslušného této ekvivalenci se nazývají *volné vektory* (prvky ze zaměření prostoru). ♢

Úloha 8.1. Na přímce p jsou dány čtyři navzájem různé body A, B, C, D. Dokažte, že platí

$$(D; A, B) \cdot (D; B, C) = (D; A, C)\,.$$

Řešení: Nechť vzhledem k pevnému afinnímu repéru na přímce p je $A = [a]$, $B = [b]$, $C = [c]$, $D = [d]$. Pak užitím Věty 8.1 dostáváme

$$(D; A, B) \cdot (D; B, C) = \frac{d-a}{d-b} \cdot \frac{d-b}{d-c} = \frac{d-a}{d-c} = (D; A, C)\,,$$

což dává dokazované tvrzení. △

Úloha 8.2. Jsou dány body $A = [1; -1; 2; 1]$, $B = [2; 1; 1; 0]$ v $\mathcal{A}_4$. Určete bod $C \in \mathcal{A}_4$, víte-li, že střed dvojice bodů A, C leží v nadrovině $\mathcal{N} \equiv x_1 + x_2 - x_4 + 4 = 0$ a střed dvojice bodů B, C leží na přímce $p \equiv X = [2; 0; 1; 3] + t(0; 2; -1; 1)$.

Řešení: Nechť $C = [c_1; c_2; c_3; c_4]$ je hledaný bod. Potom:

a) Označíme-li S_{AC} střed dvojice bodů A, C, pak podle Důsledku 8.1 je v souřadnicích $S_{AC} = \left[\frac{1+c_1}{2}; \frac{-1+c_2}{2}; \frac{2+c_3}{2}; \frac{1+c_4}{2}\right]$. Ale $S_{AC} \in \mathcal{N}$, tzn. po dosazení souřadnic S_{AC} do rovnice $\mathcal{N}$ a úpravě dostáváme

$$c_1 + c_2 - c_4 + 7 = 0\,. \tag{8.4}$$

Vidíme, že body C s vlastností $S_{AC} \in \mathcal{N}$ vyplní nadrovinu (8.4), která je rovnoběžná s nadrovinou $\mathcal{N}$.

b) Označíme-li S_{BC} střed dvojice bodů B, C, pak v souřadnicích je $S_{BC} = \left[\frac{2+c_1}{2}; \frac{1+c_2}{2}; \frac{1+c_3}{2}; \frac{c_4}{2}\right]$. Ale $S_{BC} \in p$, tzn. po dosazení souřadnic S_{BC} do parametrického vyjádření přímky p a úpravě dostáváme

$$\begin{cases} c_1 = \phantom{-1+{}}2\,, \\ c_2 = -1 + 4t\,, \\ c_3 = 1 - 2t\,, \\ c_4 = 6 + 2t\,. \end{cases} \tag{8.5}$$

Vidíme tedy, že body C s vlastností $S_{BC} \in p$ vyplní přímku (8.5), která je rovnoběžná s přímkou p.

Řešením úlohy je pak množina bodů patřících do průniku nadroviny (8.4) a přímky (8.5) (což teoreticky může být buď prázdná množina nebo jeden bod nebo přímka (8.5)). V našem případě po dosazení (8.5) do (8.4) dostáváme

$$2 - 1 + 4t - 6 - 2t + 7 = 0 \implies t = -1\,,$$

odkud plyne, že hledaný bod C je jediný, a sice $C = [2; -5; 3; 4]$. △

9 Uspořádání na přímce, poloprostor, úhel

V tomto paragrafu budeme nejprve na množině všech bodů na přímce zavádět jistou relaci uspořádání. Připomeňme si z algebry (viz [Ho94]), že relací uspořádání na dané množině $\mathbb{M}$ $(\neq \emptyset)$ rozumíme relaci na $\mathbb{M}$, která je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní. Je-li tato relace navíc ještě úplná, hovoříme pak o úplném (nebo též lineárním) uspořádání.

Dále, je-li ϱ relací uspořádání na $\mathbb{M}$ a definujeme-li na $\mathbb{M}$ relaci $\bar{\varrho}$ předpisem

$$x\,\bar{\varrho}\,y \text{ právě když } y\,\varrho\,x\,, \text{ pro } x, y \in \mathbb{M}\,,$$

pak je ihned vidět, že $\bar{\varrho}$ je rovněž relací uspořádání na $\mathbb{M}$. Relaci $\bar{\varrho}$ pak nazýváme *opačné uspořádání* k uspořádání ϱ.

Nejběžnějším příkladem úplného uspořádání na množině reálných čísel $\mathbb{R}$ je relace *přirozeného uspořádání* (nebo též *uspořádání podle velikosti*), označovaná symbolem $\leq$ a definovaná:

$$x \leq y \text{ právě když } (y - x) \text{ je nezáporné číslo, pro } x, y \in \mathbb{R}\,.$$

Opačné uspořádání k přirozenému uspořádání na $\mathbb{R}$ jsme tradičně zvyklí označovat symbolem $\geq$.

Nyní tedy zavedeme relaci uspořádání na afinní přímce jistým jednoduchým způsobem (využívajícím přirozeného uspořádání množiny $\mathbb{R}$) a potom budeme sledovat základní vlastnosti pojmů, z této relace odvozených.

Definice 9.1. Nechť p je přímka (tzn. jednorozměrný afinní prostor) a

$$\mathscr{R} = \langle P; \underline{\mathbf{u}} \rangle \tag{9.1}$$

je pevný afinní repér na p. Nechť $X, Y \in p$ jsou dva body, přičemž $X = [x]$, $Y = [y]$ vzhledem k repéru $\mathscr{R}$. Pak na přímce p definujeme relaci ω předpisem

$$X\,\omega\,Y \text{ právě když } x \leq y\,.$$

Poznámka 9.1. Je zřejmé, že ω je relací úplného uspořádání na p (plyne ihned z toho, že $\leq$ je relací úplného uspořádání na $\mathbb{R}$), která však obecně bude záviset na volbě afinního repéru $\mathscr{R}$. $\diamondsuit$

Definice 9.2. Uspořádání ω přímky p se nazývá *uspořádání určené afinním repérem* $\mathscr{R}$. Jestliže pro body $X, Y \in p$ platí $X\,\omega\,Y$, pak budeme říkat, že X *je roven nebo je před* Y, respektive platí-li $X\,\omega\,Y$ a $X \neq Y$, pak budeme říkat, že X *je před* Y.

Věta 9.1. *Nechť na přímce p jsou dány afinní repéry*

(1) $\mathscr{R}_1 = \langle P; \underline{\mathbf{u}} \rangle\,,$

(2) $\mathscr{R}_2 = \langle Q; \underline{\mathbf{v}} \rangle\,,$

přičemž $\underline{\mathbf{v}} = k\underline{\mathbf{u}}$, $k \in \mathbb{R}$. *Pak uspořádání určená afinními repéry $\mathscr{R}_1$ a $\mathscr{R}_2$ jsou rovná právě když $k > 0$ a jsou opačná právě když $k < 0$.*

Důkaz. Označme ω_1 (respektive ω_2) uspořádání p určené $\mathscr{R}_1$ (respektive určené $\mathscr{R}_2$). Nechť $X, Y \in p$ jsou libovolné body a nechť vzhledem k $\mathscr{R}_1$ je $X = [x]$, $Y = [y]$, $Q = [q]$ (respektive vzhledem k $\mathscr{R}_2$ je $X = [x']$, $Y = [y']$). Pak podle (3.10) je

$$\begin{aligned} x &= kx' + q\,, \quad & y &= ky' + q\,, \\ x' &= \frac{1}{k}x - \frac{q}{k}\,, \quad & y' &= \frac{1}{k}y - \frac{q}{k}\,. \end{aligned} \tag{9.2}$$

(i) Nechť $k > 0$, pak úpravou z (9.2) $x \leq y$ právě když $x' \leq y'$, a tedy $X\,\omega_1\,Y$ právě když $X\,\omega_2\,Y$. Obě uspořádání ω_1 a ω_2 jsou tedy rovná.

(ii) Nechť $k < 0$, pak z (9.2) plyne $x \leq y$ právě když $y' \leq x'$, a tedy $X\,\omega_1\,Y$ právě když $Y\,\omega_2\,X$ a uspořádání ω_1, ω_2 jsou opačná.

Zbývající implikace z tvrzení věty jsou již logickým důsledkem (i) a (ii). □

Věta 9.2. *Na přímce p existují právě dvě uspořádání určená afinními repéry a tato uspořádání jsou navzájem opačná.*

Důkaz. Tvrzení plyne přímo z Věty 9.1, uvědomíme-li si, že číslo k musí být různé od nuly, a tedy buď je $k > 0$ nebo $k < 0$. □

Definice 9.3. Nechť ω je uspořádání přímky p určené pevným afinním repérem; nechť A, B, C jsou tři navzájem různé body na p. Řekneme, že bod C *leží mezi body* A, B, je-li

$$A\,\omega\,C\,\omega\,B \text{ nebo } B\,\omega\,C\omega\,A\,.$$

Poznámka 9.2. Z předchozích vět vidíme, že uspořádání přímky p, určené afinním repérem, závisí na volbě tohoto repéru jenom zčásti – přesněji řečeno, musí být jedním ze dvou možných uspořádání. Máme-li tedy například dva různé body $A, B \in p$, pak při jednom z obou možných uspořádání je bod A před bodem B a při druhém je bod B před bodem A. Je tedy zřejmé, že výše definovaný pojem *ležet mezi body* A, B nezáleží na pořadí bodů A, B ani na zvoleném uspořádání přímky p. ♢

Věta 9.3. *Nechť $A, B, C \in p$; $A \neq B$. Pak bod C leží mezi body A, B právě když $(C; A, B) < 0$.*

Důkaz. V pevně zvoleném afinním repéru nechť je $A = [a]$, $B = [b]$, $C = [c]$. Podle Poznámky 8.2 je $(C; A, B) = \frac{c-a}{c-b}$. Tedy $(C; A, B) < 0 \Leftrightarrow (c - a > 0, c - b < 0)$ nebo $(c - a < 0, c - b > 0) \Leftrightarrow (a < c < b)$ nebo $(b < c < a) \Leftrightarrow$ bod C leží mezi body A, B. □

Při studiu pojmů "uspořádání určené afinním repérem" a "bod leží mezi dvěma body" jsme se zatím z přirozených důvodů omezovali na jednorozměrné afinní prostory. Dále těchto pojmů využijeme pro studium dalších lineárních útvarů v n-rozměrném afinním prostoru $\mathcal{A}_n$. Připomeňme, že libovolné dva různé body $A, B \in \mathcal{A}_n$ jednoznačně určují přímku $\{A; L(\overrightarrow{AB})\}$, kterou budeme v dalším někdy také nazývat "přímka AB".

Definice 9.4. Nechť A, B jsou body afinního prostoru $\mathcal{A}$. Množina bodů $X \in \mathcal{A}$ tvaru

$$X = A + t\,\overrightarrow{AB}, \qquad \text{kde } 0 \leq t \leq 1\,,$$

se nazývá *úsečka s krajními body* A, B nebo krátce *úsečka* AB a označuje se symbolem $[A, B]$.

Množina bodů $[A, B] - \{A, B\}$ se nazývá *vnitřek úsečky* $[A, B]$.

Poznámka 9.3. Uvědomme si, že v definici úsečky nezáleží na pořadí bodů A, B, neboť bezprostředním rozepsáním se ukáže, že $\{X \in \mathcal{A} \mid X = A + t\overrightarrow{AB},\ 0 \leq t \leq 1\} = \{X \in \mathcal{A} \mid X = B + q\overrightarrow{BA},\ 0 \leq q \leq 1\}$. Dále, definice zřejmě nevylučuje případ $A = B$, kdy pak dostaneme $[A, B] = \{A\}$ a vnitřek takovéto úsečky je prázdná množina. Následující dvě věty blíže popisují strukturu úsečky. $\diamondsuit$

Věta 9.4. *Nechť $A, B \in \mathcal{A}$. Pak vnitřek úsečky $[A, B]$ je právě množina všech bodů afinního prostoru $\mathcal{A}$, které leží mezi body A, B.*

Důkaz. Je-li $A = B$, pak tvrzení věty zřejmě platí. Nechť tedy $A \neq B$. Zřejmě se stačí omezit pouze na body přímky AB. Na přímce AB zvolme afinní repér $\langle A; \overrightarrow{AB}\rangle$. Pak je $A = [0]$, $B = [1]$ a bod $X = [x]$ je bodem vnitřku úsečky $[A, B]$ právě když $X = A + x\overrightarrow{AB}$, $0 < x < 1$, tj. právě když bod X leží mezi body A, B. $\square$

Věta 9.5. *Nechť $A = [a_1; \ldots ; a_n]$, $B = [b_1; \ldots ; b_n]$, $X = [x_1; \ldots ; x_n] \in \mathcal{A}$. Pak bod X je bodem úsečky $[A, B]$ právě když*

$$x_i = ra_i + sb_i \quad \textit{kde } r + s = 1,\ \ r \geq 0,\ \ s \geq 0,\ \ \textit{pro } i = 1, \ldots , n\,. \tag{9.3}$$

Důkaz. $X \in [A, B] \Leftrightarrow X = A + t\overrightarrow{AB}$, $0 \leq t \leq 1 \Leftrightarrow \overrightarrow{AX} = t\overrightarrow{AB}$, $0 \leq t \leq 1 \Leftrightarrow x_i - a_i = t(b_i - a_i)$, $0 \leq t \leq 1$, pro $i = 1, \ldots , n \Leftrightarrow x_i = (1 - t)a_i + tb_i$, $0 \leq t \leq 1$, pro $i = 1, \ldots , n$, což dává tvrzení, položíme-li $r = 1 - t$, $s = t$. $\square$

Poznámka 9.4. Vztahy (9.3) můžeme opět zapsat symbolickou rovnicí

$$X = rA + sB,\ \ r + s = 1,\ \ r \geq 0,\ \ s \geq 0\,.$$

Dále budeme z důvodů stručnosti téměř vždy již bez výslovného upozornění používat tento symbolický zápis. Při jeho úpravách je však nutno mít na paměti, že se ve skutečnosti jedná o n rovností mezi reálnými čísly a rozmyslet si, že prováděné úpravy jsou korektní. $\diamondsuit$

Definice 9.5. Nechť $\mathcal{N}$ je nadrovina afinního prostoru $\mathcal{A}$. Řekneme, že body $A, B \in \mathcal{A} - \mathcal{N}$ *jsou oddělovány nadrovinou* $\mathcal{N}$, jestliže $\mathcal{N} \cap [A, B] \neq \emptyset$. V opačném případě říkáme, že body A, B *nejsou oddělovány nadrovinou* $\mathcal{N}$.

Věta 9.6. *Nechť $\mathcal{N}$ je nadrovina v $\mathcal{A}$. Na množině bodů $\mathcal{A} - \mathcal{N}$ definujeme relaci $\sim$ takto: pro $A, B \in \mathcal{A} - \mathcal{N}$ položíme*

$$A \sim B \text{ právě když body } A, B \text{ nejsou oddělovány nadrovinou } \mathcal{N}.$$

Potom relace $\sim$ je relací ekvivalence na množině $\mathcal{A} - \mathcal{N}$ a rozklad množiny $\mathcal{A} - \mathcal{N}$ příslušný této relaci ekvivalence $\sim$ má dvě třídy.

Důkaz. Nejprve si relaci $\sim$ vyjádříme jiným způsobem, z něhož pak celkem lehce vyplyne tvrzení věty. Nechť tedy $P \in \mathcal{N}$ je pevný bod, $\underline{\mathbf{u}} \in Z(\mathcal{A}) - Z(\mathcal{N})$ pevný (nenulový) vektor a $\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_{n-1}$ je pevná báze zaměření $Z(\mathcal{N})$ (pokud existuje, tzn. pro $\dim \mathcal{A} \geq 2$). Potom

$$\langle P; \underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_{n-1} \rangle \tag{9.4}$$

je afinní repér v $\mathcal{A}$. Poznamenejme, že při takto zvoleném afinním repéru zřejmě bod leží (respektive neleží) v $\mathcal{N}$ právě když jeho 1. souřadnice je rovna nule (respektive je různá od nuly).

Nyní, nechť $A, B \in \mathcal{A} - \mathcal{N}$, přičemž v souřadnicích vzhledem k (9.4) je $A = [a; a_1; \ldots; a_{n-1}]$, $B = [b; b_1; \ldots; b_{n-1}]$. Zřejmě pak $a \neq 0$, $b \neq 0$ a platí $[A, B] \cap \mathcal{N} \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists t_0 : 0 < t_0 < 1,\ A + t_0 \overrightarrow{AB} \in \mathcal{N} \Leftrightarrow \exists t_0 : 0 < t_0 < 1,\ a + t_0(b - a) = 0$, $a \neq b \Leftrightarrow 0 < \frac{a}{a-b} < 1$. Přitom mohou nastat dvě možnosti:

(i) $a - b > 0$, pak $[A, B] \cap \mathcal{N} \neq \emptyset \Leftrightarrow a > 0,\ b < 0$;

(ii) $a - b < 0$, pak $[A, B] \cap \mathcal{N} \neq \emptyset \Leftrightarrow a < 0,\ b > 0$.

Dohromady tedy $[A, B] \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$ právě když $a \cdot b < 0$, odkud $[A, B] \cap \mathcal{N} = \emptyset$ právě když $a \cdot b > 0$ a relaci $\sim$ pak můžeme vyjádřit takto:

$$A \sim B \text{ právě když } a \cdot b > 0\,. \tag{9.5}$$

Z (9.5) je ihned vidět, že relace $\sim$ je reflexivní a symetrická. Zbývá ověřit tranzitivitu. Nechť $A, B, C \in \mathcal{A} - \mathcal{N}$, $A = [a; a_1; \ldots; a_{n-1}]$, $B = [b; b_1; \ldots; b_{n-1}]$, $C = [c; c_1; \ldots; c_{n-1}]$ vzhledem k repéru (9.4) a nechť platí $A \sim B$, $B \sim C$. Potom však $a \cdot b > 0$, $b \cdot c > 0$, odkud plyne, že $a \cdot c > 0$, a tedy $A \sim C$.

Tedy $\sim$ je relací ekvivalence na množině $\mathcal{A} - \mathcal{N}$ a z (9.5) ihned plyne, že rozklad množiny $\mathcal{A} - \mathcal{N}$ příslušný ekvivalenci $\sim$ má právě dvě třídy. □

Definice 9.6. Nechť $\mathcal{N}$ je nadrovina v $\mathcal{A}$. Třídy rozkladu množiny $\mathcal{A} - \mathcal{N}$ příslušného ekvivalenci $\sim$ budeme označovat $\mathcal{P}'_1$ a $\mathcal{P}'_2$ a nazývat *otevřené poloprostory v $\mathcal{A}$ vyťaté nadrovinou $\mathcal{N}$*. Množiny $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}'_1 \cup \mathcal{N}$ a $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}'_2 \cup \mathcal{N}$ budeme nazývat *poloprostory v $\mathcal{A}$ vyťaté nadrovinou $\mathcal{N}$* a nadrovinu $\mathcal{N}$ jejich *hranicí*. Body z $\mathcal{P}'_i$ (respektive z $\mathcal{N}$) budeme nazývat *vnitřními body* (respektive *hraničními body*) poloprostoru $\mathcal{P}_i$, pro $i = 1, 2$.

Poloprostory na přímce (respektive v rovině) budeme nazývat *polopřímkami* (respektive *polorovinami*).

Poznámka 9.5. Z předchozího vyplývá, že každý poloprostor je jednoznačně určen svou hranicí $\mathcal{N}$ (tj. nadrovinou) a podmínkou, aby daný bod (neležící v $\mathcal{N}$) ležel, respektive neležel, v tomto poloprostoru.

Poloprostor $\mathcal{P}$ daný hranicí $\mathcal{N}$ a vnitřním bodem A budeme v dalším označovat symbolem $\mathcal{P} = (\mathcal{N}; A)$. ♢

Následující věty nám pak udají další možnosti explicitního vyjádření polo- prostorů v $\mathcal{A}$.

Věta 9.7. *Nechť $\mathcal{N}$ je nadrovina prostoru $\mathcal{A}$, nechť $\underline{\mathbf{u}} \in Z(\mathcal{A}) - Z(\mathcal{N})$ je pevný vektor. Pak poloprostory $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ v $\mathcal{A}$, vyťaté nadrovinou $\mathcal{N}$ jsou tvaru*

$$\mathcal{P}_1 = \{X + t\underline{\mathbf{u}} \,|\, X \in \mathcal{N},\, t \geq 0\}, \quad \mathcal{P}_2 = \{X + t\underline{\mathbf{u}} \,|\, X \in \mathcal{N},\, t \leq 0\}. \tag{9.6}$$

Důkaz. Zvolíme-li stejným způsobem jako v důkazu Věty 9.6 afinní repér (9.4), pak libovolný bod $T \in \mathcal{A}$ lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru

$$T = P + t\underline{\mathbf{u}} + t_1\underline{\mathbf{u}}_1 + \cdots + t_{n-1}\underline{\mathbf{u}}_{n-1} = (P + t_1\underline{\mathbf{u}}_1 + \cdots + t_{n-1}\underline{\mathbf{u}}_{n-1}) + t\underline{\mathbf{u}}\,.$$

Označíme-li nyní $X = P + t_1\underline{\mathbf{u}}_1 + \cdots + t_{n-1}\underline{\mathbf{u}}_{n-1} \in \mathcal{N}$, pak tvrzení věty plyne ze vztahu (9.5) v důkazu Věty 9.6. □

Věta 9.8. *Nechť $\mathcal{N} \equiv a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a = 0$ je nadrovina v $\mathcal{A}_n$. Pak poloprostory $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ v $\mathcal{A}_n$, vyťaté nadrovinou $\mathcal{N}$ jsou tvaru*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 &= \{X = [x_1; \ldots; x_n] \,|\, a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a \geq 0\}\,, \\ \mathcal{P}_2 &= \{X = [x_1; \ldots; x_n] \,|\, a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \leq 0\}\,. \end{aligned} \tag{9.7}$$

Důkaz. Nechť $Y = [y_1; \ldots; y_n]$, $Z = [z_1; \ldots; z_n] \in \mathcal{A}_n - \mathcal{N}$ jsou dva různé body.

1. Je-li $\overrightarrow{YZ} \in Z(\mathcal{N})$, pak přímka YZ neprotíná nadrovinu $\mathcal{N}$ (podle Věty 6.1). Je tedy $[Y, Z] \cap \mathcal{N} = \emptyset$ a body Y, Z leží ve stejném poloprostoru v $\mathcal{A}_n$, vyťatém nadrovinou $\mathcal{N}$. Na druhé straně, z podmínky $\overrightarrow{YZ} \in Z(\mathcal{N})$ plyne (viz Věta 5.3), že $a_1(z_1 - y_1) + \cdots + a_n(z_n - y_n) = 0$, tzn. po úpravě

$$a_1z_1 + \cdots + a_nz_n + a = a_1y_1 + \cdots + a_ny_n + a\,,$$

a tedy výrazy $(a_1y_1 + \cdots + a_ny_n + a)$ a $(a_1z_1 + \cdots + a_nz_n + a)$ jsou oba kladné nebo oba záporné.

2. Je-li $\overrightarrow{YZ} \notin Z(\mathcal{N})$, pak přímka YZ protíná nadrovinu $\mathcal{N}$ v jediném bodě $B = [b_1; \ldots; b_n]$.

Ale $B \neq Y$, $B \neq Z$, tzn. existuje $\lambda \in \mathbb{R} : \overrightarrow{BY} = \lambda\overrightarrow{BZ}$, $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$. Přechodem k souřadnicím dostáváme symbolickou rovnici $Y - B = \lambda \cdot (Z - B)$, kterou upravíme

$$B = \frac{1}{1-\lambda}(Y - \lambda Z)\,, \tag{9.8}$$

tzn. $B = \frac{1-\lambda+\lambda}{1-\lambda}Y + \frac{-\lambda}{1-\lambda}Z = Y + \frac{\lambda}{\lambda-1}(Z-Y)$, což jinak zapsáno je

$$B = Y + \frac{\lambda}{\lambda-1}\overrightarrow{YZ}\,. \tag{9.9}$$

Bod B je však průsečíkem přímky YZ s nadrovinou $\mathcal{N}$, tzn. $a_1b_1+\cdots+a_nb_n+a=0$, odkud po dosazení z (9.8) vypočítáme λ

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{1}{1-\lambda}(y_i - \lambda z_i)\right) + a\,, \\ 0 &= \sum_{i=1}^{n} a_i y_i - \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i z_i + (1-\lambda)a\,, \\ \lambda &= \frac{a_1y_1+\cdots+a_ny_n+a}{a_1z_1+\cdots+a_nz_n+a}\,. \end{aligned}$$

Body Y, Z leží ve stejném poloprostoru v $\mathcal{A}$ vyťatém nadrovinou $\mathcal{N}$ $\Leftrightarrow$ body Y, Z nejsou oddělovány nadrovinou $\mathcal{N}$ $\overset{(9.9)}{\iff}$ $\frac{\lambda}{\lambda-1} > 1$ nebo $\frac{\lambda}{\lambda-1} < 0 \Leftrightarrow \lambda > 1$ nebo $0 < \lambda < 1 \Leftrightarrow$ výrazy $(a_1y_1+\cdots+a_ny_n+a)$, $(a_1z_1+\cdots+a_nz_n+a)$ jsou oba kladné nebo oba záporné.

Přidáme-li k vyšetřovaným bodům i body ležící v nadrovině $\mathcal{N}$, pak z 1. a 2. plyne tvrzení věty. $\square$

Poznámka 9.6. Vyjádření (9.6) nazýváme též *parametrickým vyjádřením poloprostorů* (vyťatých v $\mathcal{A}$ nadrovinou $\mathcal{N}$). Uvědomme si, že pro toto vyjádření je nutné umět každý bod afinního prostoru $\mathcal{A}$ vyjádřit v jistém speciálním tvaru (jako součet bodu z $\mathcal{N}$ a vektoru ze $Z(\mathcal{A}) - Z(\mathcal{N})$), což může být někdy pro praktické počítání nevýhodné.

Vyjádření (9.7) nazýváme též *neparametrickým vyjádřením poloprostorů* (vyťatých v $\mathcal{A}$ nadrovinou $\mathcal{N}$). Dále budeme pro toto vyjádření užívat stručnějšího zápisu

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 &\equiv a_1x_1+\cdots+a_nx_n+a \geq 0\,, \\ \mathcal{P}_2 &\equiv a_1x_1+\cdots+a_nx_n+a \leq 0\,. \qquad \diamondsuit \end{aligned}$$

Věta 9.9. *Nechť $\mathcal{P} = (\mathcal{N}; A)$ je poloprostor v $\mathcal{A}_n$, přičemž nadrovina $\mathcal{N}$ je určena n body $A_1, \dots, A_n$ v obecné poloze. Potom bod $X \in \mathcal{P}$ právě když*

$$X = t_1A_1+\cdots+t_nA_n+tA, \ \textit{kde}\ t_1+\cdots+t_n+t = 1 \ \textit{a}\ t \geq 0\,.$$

Důkaz. Z předpokladů plyne, že $\overrightarrow{A_1A_2}, \dots, \overrightarrow{A_1A_n}, \overrightarrow{A_1A}$ je báze $Z(\mathcal{A}_n)$, přičemž $\overrightarrow{A_1A} \in Z(\mathcal{A}_n) - Z(\mathcal{N})$. Poněvadž $A = A_1 + \overrightarrow{A_1A}$, je podle Věty 9.7 $X \in \mathcal{P} \Leftrightarrow X = A_1 + t_2\overrightarrow{A_1A_2} + \cdots + t_n\overrightarrow{A_1A_n} + t\overrightarrow{A_1A}$, $t \geq 0$, odkud přechodem k souřadnicím a označením $t_1 = 1 - t_2 - \cdots - t_n - t$, dostáváme tvrzení. $\square$

Důsledek 9.1. *Nechť A, B jsou dva různé body afinní přímky. Pak polopřímka $(A; B)$ určená hranicí A a vnitřním bodem B má vyjádření*

$$(A; B) = \{X = rA + sB \,|\, r + s = 1,\ s \geq 0\}\,.$$

Důkaz. Tvrzení plyne přímo z Věty 9.9 pro $n = 1$. □

Na závěr paragrafu se budeme zabývat speciálním případem průniku dvou poloprostorů – a sice průnikem dvou polorovin (tj. poloprostorů ve dvourozměrném afinním prostoru) takových, že jejich hraniční přímky jsou různoběžné.

Definice 9.7. Nechť $\mathcal{P} = (p; A)$, $\mathcal{Q} = (q; A)$ jsou dvě poloroviny v afinní rovině takové, že jejich hraniční přímky p, q jsou různoběžné. Pak množinu $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ nazýváme *úhlem*. Polopřímky $p \cap \mathcal{Q}$, $q \cap \mathcal{P}$ nazýváme *rameny* tohoto úhlu a bod $V = p \cap q$ jeho *vrcholem*.

Obr. 9.1

Poznámka 9.7. Bezprostředním rozepsáním ve vhodně zvoleném afinním repéru lehce zjistíme, že průnikem $p \cap \mathcal{Q}$ (respektive $q \cap \mathcal{P}$) jsou skutečně polopřímky, tzn. předchozí definice je korektní. éhly budeme obvykle označovat malými řeckými písmeny, jak jsme zvyklí ze střední školy. Jedná se tedy o jistou podmnožinu afinní roviny, kterou budeme nyní blíže charakterizovat. ♢

Věta 9.10. *Nechť v afinní rovině je dán úhel α tak, že V je jeho vrchol a polopřímky $(V; A)$, $(V; B)$ jeho ramena. Potom je*

$$\alpha = \{rV + sA + tB \,|\, r + s + t = 1,\ s \geq 0,\ t \geq 0\}\,.$$

Důkaz. Označme $\mathcal{P}$ (respektive $\mathcal{Q}$) polorovinu s hraniční přímkou VA (respektive VB), obsahující bod B (respektive bod A). Potom je $\alpha = \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ a tvrzení věty plyne přímo z Věty 9.9. □

Věta 9.11. *Nechť v afinní rovině je dán úhel α tak, že V je jeho vrchol a polopřímky $(V; A)$, $(V; B)$ jeho ramena. Potom je*

$$X \in \alpha \text{ právě když } X = V \text{ nebo } X \neq V \text{ a } (V; X) \cap [A, B] \neq \emptyset\,.$$

Důkaz. 1. Nechť $X \in \alpha$ a nechť $X \neq V$. Potom podle Věty 9.10 je $X = rV + sA + tB$, $r + s + t = 1$, $s \geq 0$, $t \geq 0$ a $s + t \neq 0$. Jinak napsáno je tedy $X = rV + (s+t)\left(\frac{s}{s+t}A + \frac{t}{s+t}B\right)$. Označme $C = \frac{s}{s+t}A + \frac{t}{s+t}B$. Podle Důsledku 9.1 je $X \in (V;C)$, a tudíž i $C \in (V;X)$. Dále podle Věty 9.9 je $C \in [A,B]$. Pak ovšem $C \in (V;X) \cap [A,B]$ a tedy $(V;X) \cap [A,B] \neq \emptyset$.

Obr. 9.2

2. Je-li $X = V$, pak zřejmě $X \in \alpha$. Nechť tedy $X \neq V$ a $(V;X) \cap [A,B] \neq \emptyset$. Pak existuje bod $Z \in (V;X) \cap [A,B]$. Pak ale také $X \in (V;Z)$ a platí

$$X = pV + qZ,\ p + q = 1,\ q \geq 0\,,$$
$$Z = rA + sB,\ r + s = 1,\ r \geq 0, s \geq 0\,,$$

(podle Důsledku 9.1, respektive Poznámky 9.4). Dohromady dostáváme

$$X = pV + qrA + qsB\,,$$

kde $p + qr + qs = p + q(r+s)$, $qr \geq 0$, $qs \geq 0$, tzn. podle Věty 9.10 je $X \in \alpha$. □

Poznámka 9.8. Předchozí dvě věty nám charakterizují úhel α jednak množinově a jednak geometricky. Názorně můžeme říci, že úhel α je sjednocením všech polopřímek majících hraniční bod ve vrcholu úhlu α a protínajících pevnou úsečku s koncovými body na obou ramenech úhlu α (viz Obr. 9.2).

Studujeme-li vzájemnou polohu úhlu α a přímky p, pak celkem jednoduše odvodíme, že průnikem $p \cap \alpha$ je buď prázdná množina nebo polopřímka nebo úsečka.

Podobně, máme-li dva úhly α, β se společným vrcholem V, potom průnikem $\alpha \cap \beta$ je buď jednobodová množina $\{V\}$ nebo společné rameno úhlů α, β nebo úhel s vrcholem V, jehož každé rameno je ramenem α nebo β. ♢

10 Konvexní množiny

Definice 10.1. Podmnožina $\mathcal{K}$ afinního prostoru $\mathcal{A}$ se nazývá *konvexní množina* (v $\mathcal{A}$), jestliže pro libovolné $A, B \in \mathcal{K}$ platí, že $[A,B] \subseteq \mathcal{K}$.

Příklad 10.1. Nejjednoduššími příklady konvexních množin v $\mathcal{A}$ jsou prázdná množina, respektive úsečka, respektive podprostor afinního prostoru $\mathcal{A}$ (plyne přímo z definice podprostoru). Tedy speciálně bod a celý afinní prostor jsou konvexní množiny. ♡

Následující obrázek ukazuje množiny v rovině, které jsou konvexní a), b), c), respektive nejsou konvexní d), e), f) – v těchto případech je vyznačena úsečka, jejíž krajní body do dané množiny patří, ale která není celá částí této množiny.

Obr. 10.1

Vyšetřujeme-li konvexní množiny v jednorozměrném afinním prostoru (tzn. na přímce), pak celkem jednoduše získáme jejich úplnou charakterizaci (volbou afinního repéru na přímce převedeme všechny úvahy na úvahy o reálných intervalech). Konvexními množinami na přímce jsou totiž právě prázdná množina, celá přímka, otevřená polopřímka, polopřímka, úsečka a úsečka bez jednoho nebo obou krajních bodů.

Následující věty ukazují příklady konstrukcí dalších konvexních množin v n-rozměrném afinním prostoru $\mathcal{A}_n$.

Věta 10.1. *Poloprostor $\mathcal{P}$ afinního prostoru $\mathcal{A}_n$ je konvexní množina.*

Důkaz. Nechť nadrovina $\mathcal{N} \equiv a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a = 0$ je hranicí poloprostoru $\mathcal{P}$ a nechť $P = [p_1; \ldots ; p_n]$, $Q = [q_1; \ldots ; q_n]$ jsou libovolné body v $\mathcal{P}$. Podle Věty 9.8 výrazy $\sum_{i=1}^n a_ip_i + a$, $\sum_{i=1}^n a_iq_i + a$ mají stejné znaménko.

1. Nechť $\sum_{i=1}^n a_ip_i + a \geq 0$, $\sum_{i=1}^n a_iq_i + a \geq 0$. Nechť $Y = [y_1; \ldots ; y_n]$ je libovolný bod úsečky $[P, Q]$, tzn. je

$$Y = P + t\overrightarrow{PQ},\ 0 \leq t \leq 1\,.$$

Potom $\sum_{i=1}^n a_iy_i + a = \sum_{i=1}^n a_i\cdot(p_i + t(q_i - p_i)) + a = (1-t)\cdot\sum_{i=1}^n a_ip_i + t\cdot\sum_{i=1}^n a_iq_i + a \geq (1-t)\cdot(-a) + t\cdot(-a) + a = 0$. Je tedy $Y \in \mathcal{P}$.

2. Je-li $\sum_{i=1}^n a_ip_i + a \leq 0$, $\sum_{i=1}^n a_iq_i \leq 0$, pak analogicky dostaneme, že

$$\forall Y \in [P, Q] \implies Y \in \mathcal{P}.$$

Dohromady dostáváme, že $\mathcal{P}$ je konvexní množina. □

Věta 10.2. *Nechť I je neprázdná indexová množina a nechť $\mathcal{K}_i$, $i \in I$, jsou konvexní množiny. Potom $\cap_{i\in I}\mathcal{K}_i$ je konvexní množina.*

Důkaz. Je-li $\cap_{i\in I}\mathcal{K}_i = \emptyset$, pak tvrzení věty platí. Nechť tedy $\cap_{i\in I}\mathcal{K}_i \neq \emptyset$ a nechť $A, B \in \cap_{i\in I}\mathcal{K}_i$. Pak $A, B \in \mathcal{K}_i$ pro všechna $i \in I$, a tedy $[A, B] \subseteq \mathcal{K}_i$, pro každé $i \in I$. Tedy $[A, B] \subseteq \cap_{i\in I}\mathcal{K}_i$ a podle Definice 10.1 je $\cap_{i\in I}\mathcal{K}_i$ konvexní množina. □

Poznámka 10.1. Podle Věty 10.2 je množinový průnik libovolného počtu konvexních množin opět konvexní množina. Na druhé straně zřejmě množinové sjednocení konvexních množin není obecně konvexní množinou. K libovolné pod- množině $\mathcal{M}$ afinního prostoru $\mathcal{A}$ však existuje nejmenší konvexní množina, která ji obsahuje, jak ukazuje následující věta. ♢

Věta 10.3. *Nechť $\mathcal{M}$ je libovolná podmnožina afinního prostoru $\mathcal{A}$. Nechť $K(\mathcal{M})$ značí průnik všech konvexních množin, obsahujících množinu $\mathcal{M}$. Pak $K(\mathcal{M})$ je nejmenší (vzhledem k množinové inkluzi) konvexní množina obsahující množinu $\mathcal{M}$.*

Důkaz. Existuje alespoň jedna konvexní množina obsahující $\mathcal{M}$, a sice $\mathcal{A}$, a tedy $K(\mathcal{M})$ je definováno. Tvrzení pak bezprostředně plyne z předchozí věty a z vlastností množinového průniku. □

Definice 10.2. Nechť $\mathcal{M}$ je libovolná podmnožina afinního prostoru $\mathcal{A}$. Pak množinu $K(\mathcal{M})$ nazýváme *konvexním obalem množiny* $\mathcal{M}$.

Poznámka 10.2. Přímo z definice konvexního obalu plynou tyto jeho jednoduché vlastnosti:

1. $\mathcal{M}$ je konvexní množina $\Leftrightarrow K(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$. Speciálně je $K(\emptyset) = \emptyset$, $K(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ a $K(\{A\}) = \{A\}$ pro libovolné $A \in \mathcal{A}$.
2. $\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_2 \implies K(\mathcal{M}_1) \subseteq K(\mathcal{M}_2)$, přičemž opačná implikace obecně zřejmě neplatí.
3. $K(\{A, B\}) = [A, B]$, pro $A, B \in \mathcal{A}$. ♢

Věta 10.4. *Nechť $\mathcal{M}$ je libovolná neprázdná podmnožina v $\mathcal{A}$. Pak*

$$K(\mathcal{M}) = \{t_1M_1 + \cdots + t_sM_s \,|\, s \in \mathbb{N}, M_i \in \mathcal{M}, t_i \geq 0, \textstyle\sum_{i=1}^{s} t_i = 1\}\,. \tag{10.1}$$

Důkaz. Označme množinu na pravé straně (10.1) symbolem $\mathcal{W}$. Pak:

1. Zřejmě platí $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{W}$.

2. Dokážeme, že $\mathcal{W}$ je konvexní množina. Nechť $A, B \in \mathcal{W}$ libovolné. Pak (při vhodném označení) existuje přirozené číslo r a body $M_1, \dots, M_r \in \mathcal{M}$ tak, že
$A = p_1M_1 + \cdots + p_rM_r;\ p_i \geq 0,\ p_1 + \cdots + p_r = 1\,,$
$B = q_1M_1 + \cdots + q_rM_r;\ q_i \geq 0,\ q_1 + \cdots + q_r = 1\ .$

Pro libovolný bod $X \in [A, B]$ je

$$X = \lambda A + \mu B;\ \lambda, \mu \geq 0,\ \lambda + \mu = 1\,,$$

tzn. po dosazení dostáváme

$$X = (\lambda p_1 + \mu q_1)M_1 + \cdots + (\lambda p_r + \mu q_r)M_r\,,$$

přičemž $\lambda p_i + \mu q_i \geq 0$ a $(\lambda p_1 + \mu q_1) + \cdots + (\lambda p_r + \mu q_r) = \lambda(p_1 + \dots p_r) + \mu(q_1 + \cdots + q_r) = \lambda + \mu = 1$. Tedy $X \in \mathcal{W}$, tzn. $\mathcal{W}$ je konvexní množina.

3. Nechť $\mathcal{K}$ je konvexní množina, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{K}$. Dokážeme, že pak je $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{K}$. Uvažme libovolný bod z $\mathcal{W}$, který je tedy tvaru

$$t_1M_1 + \cdots + t_sM_s;\ \text{kde } M_i \in \mathcal{M},\ t_i \geq 0,\ t_1 + \cdots + t_s = 1\,, \tag{10.2}$$

a důkaz inkluze $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{K}$ provedeme indukcí vzhledem k s.

(i) Je-li $s = 1$, pak $1\,M_1 = M_1 \in \mathcal{M} \subseteq \mathcal{K}$.

(ii) Předpokládejme, že body z $\mathcal{W}$ tvaru (10.2) patří do $\mathcal{K}$. Nechť $X \in \mathcal{W}$, $X = t_1M_1 + \cdots + t_sM_s + t_{s+1}M_{s+1}$, kde $M_i \in \mathcal{M}$, $t_i \geq 0$, $t_1 + \cdots + t_{s+1} = 1$. Je-li $t_s = 0$ nebo $t_{s+1} = 0$, pak podle indukčního předpokladu je $X \in \mathcal{K}$; nechť tedy $t_s \neq 0$, $t_{s+1} \neq 0$. Označme $t = t_1 + \cdots + t_s$ (> 0), respektive $Y = \frac{t_1}{t}M_1 + \cdots + \frac{t_s}{t}M_s$. Pak $\frac{t_i}{t} \geq 0$, $\frac{t_1}{t} + \cdots + \frac{t_s}{t} = 1$, a tedy $Y \in \mathcal{K}$ podle indukčního předpokladu. Nyní $X = tY + t_{s+1}M_{s+1}$, přičemž $t \geq 0$, $t_{s+1} \geq 0$, $t + t_{s+1} = 1$, a tedy podle Věty 9.5 je $X \in [Y, M_{s+1}]$. Ale $\mathcal{K}$ je konvexní množina, $Y \in \mathcal{K}$, $M_{s+1} \in \mathcal{K}$, a tedy $X \in \mathcal{K}$.

Dohromady z 1., 2. a 3. plyne, že $\mathcal{W}$ je nejmenší konvexní množina obsahující $\mathcal{M}$, tzn. $\mathcal{W} = K(\mathcal{M})$. □

Poznámka 10.3. Je nutné dobře porozumět významu vyjádření (10.1). Index s zde není pevný a body $M_1, \ldots, M_s$, které v (10.1) vystupují, probíhají všechny možné konečné podmnožiny množiny $\mathcal{M}$ (tj. pro $s = 1$ jednoprvkové, pro $s = 2$ dvouprvkové, atd.). Přitom množina $\mathcal{M}$ může mít samozřejmě i nekonečně mnoho prvků.

Je-li speciálně množina $\mathcal{M}$ konečná, např. k-prvková, tj. $\mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_k\}$, pak zřejmě

$$K(\mathcal{M}) = \{t_1M_1 + \cdots + t_kM_k \,|\, t_i \geq 0,\ t_1 + \cdots + t_k = 1\},$$

neboť (10.1) můžeme formálně zapsat ve výše uvedeném tvaru případným přidáním sčítanců tvaru $0\,M_j$. ♢

Definice 10.3. Konvexní obal konečné množiny bodů z $\mathcal{A}$ se nazývá *konvexní mnohostěn.*

Jeatliže $M_0, M_1, \ldots, M_k \in \mathcal{A}$ jsou body v obecné poloze, pak konvexní obal $(k+1)$-prvkové množiny $\{M_0, M_1, \ldots, M_k\}$ se nazývá *k-rozměrný simplex* a body $M_0, M_1, \ldots, M_k$ jeho *vrcholy.*

Poznámka 10.4. Je-li $\mathcal{S}$ k-rozměrným simplexem v $\mathcal{A}$, pak zřejmě musí být $0 \leq k \leq \dim \mathcal{A}$. Z předchozí definice dále plyne, že každý k-rozměrný simplex je konvexním mnohostěnem. Například v afinní rovině (tj. pro $\dim \mathcal{A} = 2$) je 0-rozměrným simplexem bod, jednorozměrným simplexem úsečka a dvourozměrným simplexem trojúhelník. Konvexními mnohostěny v rovině jsou navíc ještě všechny vypuklé n-úhelníky ($n = 4, 5, 6, \ldots$).

Vidíme tedy, že obecně konvexní mnohostěn není simplexem. Jediným afinním prostorem, v němž tyto pojmy splývají, je afinní přímka. Lze totiž bezprostředně ukázat, že konvexní mnohostěny na přímce jsou právě body a úsečky (viz éloha 10.2). ♢

Věta 10.5. *Nechť $\mathcal{S}$ je k-rozměrný simplex s vrcholy $M_0, M_1, \ldots, M_k$. Pak*

$$\mathcal{S} = \{t_0M_0 + t_1M_1 + \cdots + t_kM_k \,|\, t_i \geq 0,\ t_0 + t_1 + \cdots + t_k = 1\}.$$

Důkaz. Tvrzení věty plyne ihned z definice k-rozměrného simplexu a z Poznámky 10.3. □

Věta 10.6. *Nechť v n-rozměrném afinním prostoru $\mathcal{A}_n$ je dán n-rozměrný simplex $\mathcal{S}$ s vrcholy $M_0, M_1, \dots, M_n$. Pak $\mathcal{S}$ lze vyjádřit jako průnik $(n+1)$ poloprostorů.*

Důkaz. Zvolme v $\mathcal{A}$ afinní repér

$$\langle M_0; \overrightarrow{M_0M_1}, \dots, \overrightarrow{M_0M_n} \rangle \tag{10.3}$$

a vyjadřujme vzhledem k němu všechny souřadnice. Uvažujme $(n+1)$ poloprostorů v $\mathcal{A}_n$ tvaru

$$\left\{ \begin{array}{lllll} x_1 & & & & \geq 0\,, \\ & x_2 & & & \geq 0\,, \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & x_n & \geq 0\,, \\ x_1 + & x_2 + & \dots + & x_n \quad -1 & \leq 0\,. \end{array} \right. \tag{10.4}$$

Nechť $X = [x_1; \dots; x_n]$. Dokážeme, že $X \in \mathcal{S} \Leftrightarrow X$ splňuje soustavu nerovností (10.4).

"$\Rightarrow$" Nechť $X \in \mathcal{S}$, pak podle předcházející věty je

$$X = t_0 M_0 + t_1 M_1 + \dots + t_n M_n\,,$$

kde $t_i \geq 0,\ t_0 + t_1 + \dots + t_n = 1$, což lze upravit do tvaru $X = (1 - t_1 - \dots - t_n)M_0 + t_1 M_1 + \dots + t_n M_n = M_0 + t_1(M_1 - M_0) + \dots + t_n(M_n - M_0)$, tzn.

$$X = M_0 + t_1 \overrightarrow{M_0M_1} + \dots + t_n \overrightarrow{M_0M_n}\,,$$

odkud dostáváme $x_1 = t_1 \geq 0, \dots, x_n = t_n \geq 0$; $x_1 + \dots + x_n - 1 = -t_0 \leq 0$, a tedy X splňuje (10.4).

"$\Leftarrow$" Nechť $X = [x_1; \dots; x_n]$ splňuje (10.4). Ale $X = M_0 + x_1 \overrightarrow{M_0M_1} + \dots + x_n \overrightarrow{M_0M_n}$, odkud $X = M_0 + x_1(M_1 - M_0) + \dots + x_n(M_n - M_0) = (1 - x_1 - \dots - x_n)M_0 + x_1 M_1 + \dots + x_n M_n$. Přitom z (10.4) plyne, že všechny koeficienty jsou nezáporné a jejich součet je zřejmě roven 1. Podle Věty 10.5 je pak $X \in \mathcal{S}$. □

Na závěr paragrafu se alespoň stručně zmíníme o dalším důležitém příkladu konvexní množiny.

Definice 10.4. Nechť $A \in \mathcal{A}$ je bod a $\underline{\mathbf{u}}_1, \dots, \underline{\mathbf{u}}_k \in Z(\mathcal{A})$ jsou lineárně nezávislé vektory. Pak množinu bodů $X \in \mathcal{A}$ tvaru

$$X = A + t_1 \underline{\mathbf{u}}_1 + \dots + t_k \underline{\mathbf{u}}_k,\ \text{kde } 0 \leq t_i \leq 1,\ \text{pro } i = 1, \dots, k\,,$$

nazýváme *k-rozměrným rovnoběžnostěnem* v $\mathcal{A}$ a označujeme

$$\mathcal{R}(A; \underline{\mathbf{u}}_1, \dots, \underline{\mathbf{u}}_k)\,,$$

nebo stručně $\mathcal{R}_k$.

Poznámka 10.5. Je-li $\mathcal{R}(A; \underline{\mathbf{u}}_1, \dots, \underline{\mathbf{u}}_k)$ k-rozměrným rovnoběžnostěnem v $\mathcal{A}$, pak z předpokladu o lineární nezávislosti vektorů $\underline{\mathbf{u}}_1, \dots, \underline{\mathbf{u}}_k$ plyne, že $1 \leq k \leq \dim \mathcal{A}$. Tedy na přímce (tj. pro $\dim \mathcal{A} = 1$) existují pouze 1-rozměrné rovnoběžnostěny (a sice úsečky), v rovině (tj. pro $\dim \mathcal{A} = 2$) existují 1-, respektive 2-rozměrné rovnoběžnostěny (a sice úsečky, respektive rovnoběžníky), atd.

Je-li dán k-rozměrný rovnoběžnostěn $\mathcal{R}_k = \mathcal{R}(A; \underline{\mathbf{u}}_1, \dots, \underline{\mathbf{u}}_k)$ v $\mathcal{A}_n$, pak vhodnou volbou afinního repéru, a sice $\langle A; \underline{\mathbf{u}}_1, \dots, \underline{\mathbf{u}}_k, \underline{\mathbf{w}}_{k+1}, \dots, \underline{\mathbf{w}}_n \rangle$, kde $\underline{\mathbf{w}}_{k+1}, \dots, \underline{\mathbf{w}}_n$ jsou libovolné vektory ze $Z(\mathcal{A}_n)$, které doplňují vektory $\underline{\mathbf{u}}_1, \dots, \underline{\mathbf{u}}_k$ na bázi $Z(\mathcal{A}_n)$, dosáhneme toho, že rovnoběžnostěn $\mathcal{R}_k$ lze charakterizovat jako množinu bodů $X = [x_1; \dots; x_n] \in \mathcal{A}_n$, pro něž

$$0 \leq x_i \leq 1, \text{ pro } i = 1, \dots, k, \text{ a } x_j = 0, \text{ pro } j = k+1, \dots, n\,. \qquad \diamondsuit$$

Věta 10.7. *Každý k-rozměrný rovnoběžnostěn v $\mathcal{A}$ je konvexní množinou v $\mathcal{A}$.*

Důkaz. Z předchozí poznámky plyne, že libovolný k-rozměrný rovnoběžnostěn $\mathcal{R}_k$ lze při vhodné volbě afinního repéru vyjádřit jako průnik $2k$ poloprostorů (tvaru $x_i \geq 0$, respektive $x_i - 1 \leq 0$, $i = 1, \dots, k$) a $(n-k)$ nadrovin (tvaru $x_j = 0$, $j = k+1, \dots, n$), což jsou všechno konvexní množiny. Podle Věty 10.2 je pak $\mathcal{R}_k$ také konvexní množina. $\square$

$k = 2$ $k = 3$

Obr. 10.2

Poznámka 10.6. Podrobnějším rozborem lze ukázat, že k-rozměrný rovnoběžnostěn $\mathcal{R}(A; \underline{\mathbf{u}}_1, \dots, \underline{\mathbf{u}}_k)$ je dokonce konvexním mnohostěnem – je totiž konvexním obalem 2^k bodů tvaru $A + t_1\underline{\mathbf{u}}_1 + \dots + t_k\underline{\mathbf{u}}_k$, kde $t_i = 0$ nebo 1, $i = 1, \dots, k$. Obr. 10.2 ilustruje tuto situaci pro $k = 2$ (body $A, A + \underline{\mathbf{u}}_1$, $A + \underline{\mathbf{u}}_2$, $A + \underline{\mathbf{u}}_1 + \underline{\mathbf{u}}_2$) a pro $k = 3$ (body $A, A + \underline{\mathbf{u}}_1, A + \underline{\mathbf{u}}_2, A + \underline{\mathbf{u}}_1 + \underline{\mathbf{u}}_2$, $A + \underline{\mathbf{u}}_3$, $A + \underline{\mathbf{u}}_1 + \underline{\mathbf{u}}_3$, $A + \underline{\mathbf{u}}_2 + \underline{\mathbf{u}}_3$, $A + \underline{\mathbf{u}}_1 + \underline{\mathbf{u}}_2 + \underline{\mathbf{u}}_3$). $\diamondsuit$

Úloha 10.1. Mějme konvexní mnohostěn $\mathcal{K} = K(\{A_1, A_2, A_3, A_4\})$ v afinní rovině. Zjistěte, zda bod B, respektive C, patří do $\mathcal{K}$, je-li $A_1 = [-1;-1]$, $A_2 = [1;2]$, $A_3 = [2;-2]$, $A_4 = [3;1]$, $B = [2;-1]$, $C = [0;1]$.

Řešení: Vzhledem k Poznámce 8.3 stačí zjistit, zda existují reálná čísla t_1, t_2, t_3, t_4, splňující

$$B = t_1A_1 + t_2A_2 + t_3A_3 + t_4A_4\,, \tag{10.5}$$

kde $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 1$, $t_1 \geq 0$, $t_2 \geq 0$, $t_3 \geq 0$, $t_4 \geq 0$, respektive

$$C = t_1A_1 + t_2A_2 + t_3A_3 + t_4A_4\,, \tag{10.6}$$

kde $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 1$, $t_1 \geq 0$, $t_2 \geq 0$, $t_3 \geq 0$, $t_4 \geq 0$.

Vidíme, že po rozepsání do souřadnic dostáváme v obou případech tři lineární rovnice a čtyři nerovnice pro t_1, t_2, t_3, t_4. Konkrétně:

(i) Pro bod B

$$\left.\begin{aligned} -t_1 + \ t_2 + 2t_3 + 3t_4 &= \ \ 2 \\ -t_1 + 2t_2 - 2t_3 + \ t_4 &= -1 \\ t_1 + \ t_2 + \ t_3 + \ t_4 &= \ \ 1 \end{aligned}\right\} \implies$$

$$\implies t_4 = r, t_3 = \frac{9-8r}{11}, t_2 = \frac{3-10r}{11}, t_1 = \frac{7r-1}{11}\,.$$

Dále musí být (vzhledem k (10.5)) $r \geq 0$, $9-8r \geq 0$, $3-10r \geq 0$, $7r-1 \geq 0$, což však je splněno pro libovolné reálné r s vlastností $\frac{1}{7} \leq r \leq \frac{3}{10}$. Vidíme tedy, že existují t_1, t_2, t_3, t_4 (zřejmě dokonce nekonečně mnoho) splňující (10.5), a tedy $B \in \mathcal{K}$.

(ii) Pro bod C analogickým výpočtem a dosazením dostaneme (například) $r \geq 0$, $-1 - 8r \geq 0$, $7 - 10r \geq 0$, $5 + 7r \geq 0$, což však zřejmě není splněno pro žádné r, tzn. neexistují t_1, t_2, t_3, t_4, splňující (10.6), a tedy $C \notin \mathcal{K}$. △

Úloha 10.2. Dokažte, že konvexní mnohostěny na přímce jsou právě body a úsečky.

Řešení: 1. Bod, respektive úsečka, jsou zřejmě konvexní mnohostěny na přímce.

2. Naopak uvažujme konvexní mnohostěn $\mathcal{K} = K(\{M_1, \ldots, M_k\})$ na přímce, kde $M_1, \ldots, M_k$ jsou navzájem různé body na této přímce. Chceme nyní ukázat, že $\mathcal{K}$ je buď bod nebo úsečka.

Je-li $k = 1$, pak $\mathcal{K}$ je zřejmě bod. Nechť tedy $k \geq 2$ a nechť vzhledem k pevnému afinnímu repéru na dané přímce je $M_1 = [m_1]$, $M_2 = [m_2], \ldots, M_k = [m_k]$, přičemž bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $m_1 < m_2 < \cdots < m_k$.

Pro $i = 2, \ldots, k-1$ označme $q_i = \frac{m_k - m_i}{m_k - m_1}$. Zřejmě je $0 < q_i < 1$ a platí

$$m_i = q_im_1 + (1-q_i)m_k, \qquad i = 2, \ldots, k-1\,. \tag{10.7}$$

Bezprostředním rozepsáním pomocí souřadnic s využitím (10.7) se ukáže, že platí

$$\{t_1M_1 + \cdots + t_kM_k \,|\, t_i \geq 0,\ t_1 + \cdots + t_k = 1\} = \{rM_1 + sM_k \,|\, r, s \geq 0,\ r + s = 1\}$$

neboli $K(\{M_1; \ldots; M_k\}) = [M_1, M_k]$, což znamená, že $\mathcal{K}$ je úsečka. △

Kapitola 2

EUKLIDOVSKÝ PROSTOR

V tomto textu jsme se v Kapitole 1 zabývali *polohovými* geometrickými problémy (například rovnoběžností, různoběžností a mimoběžností podprostorů, vzájemnou polohou bodů na přímce, atd.). Základní metoda, kterou jsme používali, spočívala v tom, že jsme geometrický problém převedli nejprve do algebraické podoby, zde jej řešili (většinou pomocí úvah o zaměřeních, kdy jsme v podstatné míře využívali vlastností vektorových prostorů – lineární závislosti a nezávislosti vektorů, báze, dimenze apod.) a získané výsledky pak opět geometricky interpretovali. Nyní v Kapitole 2 přicházejí na řadu *metrické* geometrické problémy (například určování vzdálenosti bodů, respektive podprostorů, kolmost, výpočet odchylek atd.). Proto budeme muset na bodovém prostoru zavést navíc také metriku, v našem případě euklidovskou metriku, která je dána prostřednictvím skalárního součinu definovaném na zaměření.

11 Skalární součin

S pojmem skalárního součinu jsme se setkali již dříve v algebře (viz [Ho94]), a to tehdy, když jsme v reálných vektorových prostorech potřebovali *měřit*, tzn. zjišťovat délky vektorů, odchylky, tj. velikosti jejich úhlů, kolmost atd.

Tento paragraf bude rozšířením odstavce o vektorových prostorech se skalárním součinem, probíraného v algebře. Z důvodů přehlednosti a návaznosti studované látky nejprve stručně zopakujeme základní vlastnosti těchto prostorů (a to formou souvislého textu) a ve zbývající části paragrafu pak již obvyklým způsobem uvedeme některé jejich speciální vlastnosti.

Je-li V vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$ reálných čísel a je-li každé dvojici vektorů $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}} \in V$ přiřazeno reálné číslo, označené $(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}})$ tak, že pro libovolná $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{w}} \in V$, $r \in \mathbb{R}$ platí:

(i) $(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}) = (\underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{u}})$;

(ii) $(\underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{w}}) = (\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{w}}) + (\underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{w}})$;

(iii) $(r\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}) = r(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}})$;

(iv) $(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{u}}) \geq 0$, přičemž $(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{u}}) = 0$ právě když $\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{o}}$.

Pak říkáme, že ve V je definován *skalární součin*. Číslo $(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}})$ nazýváme *skalárním součinem vektorů* $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}$.

Vektorový prostor V, v němž je definován skalární součin, nazýváme *vektorovým prostorem se skalárním součinem* nebo *euklidovským vektorovým prostorem* nebo stručně euklidovským prostorem.

Víme, že v každém vektorovém prostoru nad tělesem $\mathbb{R}$ lze vždy definovat skalární součin, a to obecně více různými způsoby.

Podíváme-li se ještě jednou, podrobněji, na právě zavedené pojmy, zjistíme, že by bylo možné mít určité výhrady vůči některým formulacím. Zcela přesně řečeno, skalární součin je zobrazení $f : V \times V \to \mathbb{R}$ splňující axiomy (i) – (iv) a odpovídající euklidovský vektorový prostor je pak uspořádaná dvojice (V, f). V zájmu stručného vyjadřování se vědomě dopouštíme určité nepřesnosti tím, že hovoříme o euklidovském vektorovém prostoru V, místo o uspořádané dvojici (V, f). Připomeňme, že podobně jsme postupovali například při zavádění pojmu afinního prostoru.

Máme-li tedy dán nějaký euklidovský vektorový prostor V, pak zřejmě axiomy (i) – (iv) skalárního součinu jsou splněny i v libovolném (vektorovém) podprostoru prostoru V. To znamená, že každý (vektorový) podprostor euklidovského prostoru V je sám euklidovským prostorem. Budeme jej stručně nazývat *podprostorem euklidovského prostoru* V.

Přímo z definice skalárního součinu plyne, že:

$(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}} + \underline{\mathbf{w}}) = (\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}) + (\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{w}})$;

$(\underline{\mathbf{u}}, r\underline{\mathbf{v}}) = r(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}})$;

$(\underline{\mathbf{o}}, \underline{\mathbf{u}}) = (\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{o}}) = 0$;

$\left(\sum_{i=1}^{s} p_i\underline{\mathbf{u}}_i, \sum_{j=1}^{t} q_j\underline{\mathbf{v}}_j\right) = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t} p_i q_j (\underline{\mathbf{u}}_i, \underline{\mathbf{v}}_j)$.

Skalární součin nám umožňuje definovat délku vektoru a odchylku dvou nenulových vektorů.

Definice 11.1. Pro libovolný vektor $\underline{\mathbf{u}} \in V$ definujeme jeho *délku* (nebo též *velikost*) $\|\underline{\mathbf{u}}\|$ vztahem

$$\|\underline{\mathbf{u}}\| = +\sqrt{(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{u}})}\,.$$

Pro délku vektoru jsme v algebře odvodili základní početní pravidla:

$\|\underline{\mathbf{u}}\| \geq 0$, přičemž $\|\underline{\mathbf{u}}\| = 0$ právě když $\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{o}}$;

$\|r\underline{\mathbf{u}}\| = |r| \cdot \|\underline{\mathbf{u}}\|$;

$\|\underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{v}}\| \leq \|\underline{\mathbf{u}}\| + \|\underline{\mathbf{v}}\|$ (*trojúhelníková nerovnost*) ;

$|(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}})| \leq \|\underline{\mathbf{u}}\| \cdot \|\underline{\mathbf{v}}\|$ (*Cauchyova nerovnost*).

Poznamenejme, že poslední nerovnost se též někdy nazývá *Schwartzova nerovnost*.

Z Cauchyovy nerovnosti bezprostředně plyne, že pro libovolné nenulové vektory $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}$ platí

$$-1 \leq \frac{(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}})}{\|\underline{\mathbf{u}}\| \cdot \|\underline{\mathbf{v}}\|} \leq 1\,,$$

a tedy existuje právě jedno reálné číslo φ splňující vztahy

$$\cos\varphi = \frac{(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}})}{\|\underline{\mathbf{u}}\| \cdot \|\underline{\mathbf{v}}\|} \quad \text{a} \quad 0 \leq \varphi \leq \pi\,, \tag{11.1}$$

jak plyne z našich znalostí funkce kosinus. Můžeme tedy vyslovit následující definici.

Definice 11.2. Nechť $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}$ jsou nenulové vektory z euklidovského vektorového prostoru V. Pak reálné číslo φ, splňující vztahy (11.1), nazýváme *odchylkou vektorů* $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}$.

Dva vektory $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}} \in V$ nazýváme *ortogonální* nebo *kolmé*, je-li $(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}) = 0$. Píšeme pak $\underline{\mathbf{u}} \perp \underline{\mathbf{v}}$ nebo $\underline{\mathbf{v}} \perp \underline{\mathbf{u}}$. Tento způsob zápisu je korektní, jak plyne z komutativnosti skalárního součinu. Přímo z definice ortogonálních vektorů plyne, že:

$\underline{\mathbf{u}} \perp \underline{\mathbf{u}}$ právě když $\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{o}}$;

$\underline{\mathbf{u}} \perp \underline{\mathbf{x}}$ pro každý vektor $\underline{\mathbf{x}} \in V$ právě když $\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{o}}$;

$\underline{\mathbf{u}} \perp \underline{\mathbf{w}}_i$ pro $i = 1, \ldots, k$ právě když $\underline{\mathbf{u}} \perp (r_1\underline{\mathbf{w}}_1 + \cdots + r_k\underline{\mathbf{w}}_k)$ pro $\forall r_i \in \mathbb{R}$.

Konečnou posloupnost vektorů $\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_k \in V$ nazýváme *ortogonální posloupností*, je-li

$$\underline{\mathbf{u}}_i \perp \underline{\mathbf{u}}_j; \text{ pro } i \neq j;\ i, j = 1, \ldots, k\,,$$

někdy říkáme též stručně, že *vektory* $\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_k$ *jsou ortogonální*. Jednoduše lze ukázat, že každá ortogonální posloupnost vektorů je lineárně nezávislá.

Je-li ortogonální posloupnost vektorů navíc bází prostoru V, pak ji nazýváme *ortogonální bází* prostoru V. Ortogonální bázi, jejíž každý vektor je *normovaný* (tzn. má velikost rovnu 1), nazýváme *ortonormální bází* prostoru V.

Při práci s euklidovskými vektorovými prostory budeme používat výlučně ortonormální báze, což má zásadní výhody pro počítání skalárního součinu (a tedy i všech pojmů z něj odvozených). Je-li totiž

$$\mathscr{B} = \langle \underline{\mathbf{e}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{e}}_n \rangle \tag{11.2}$$

ortonormální bází prostoru V a $\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \in V$ vektory, jejichž souřadnice v (11.2) jsou $\underline{\mathbf{x}} = (x_1; \ldots; x_n)$, respektive $\underline{\mathbf{y}} = (y_1; \ldots; y_n)$, tzn. je

$$\underline{\mathbf{x}} = x_1\underline{\mathbf{e}}_1 + \cdots + x_n\underline{\mathbf{e}}_n, \text{ resp. } \underline{\mathbf{y}} = y_1\underline{\mathbf{e}}_1 + \cdots + y_n\underline{\mathbf{e}}_n\,,$$

pak skalární součin (ať je ve V definován jakkoliv) vektorů $\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}$ je tvaru

$$(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n\,.$$

Je jasné, že při použití jiné báze než ortonormální, je vyjádření skalárního součinu $(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}})$ podstatně složitější.

Konečně – lze dokázat, že k libovolné konečné posloupnosti vektorů $\underline{\mathbf{u}}, \dots, \underline{\mathbf{u}}_k \in V$ existuje ortogonální posloupnost $\underline{\mathbf{e}}_1, \dots, \underline{\mathbf{e}}_k \in V$ tak, že platí

$$L(\underline{\mathbf{u}}_1, \dots, \underline{\mathbf{u}}_k) = L(\underline{\mathbf{e}}_1, \dots, \underline{\mathbf{e}}_k)\,.$$

Speciálně tedy v každém nenulovém euklidovském vektorovém prostoru V existují ortogonální i ortonormální báze.

Připomeňme, že důkaz právě uvedeného tvrzení je konstruktivní a jeho algoritmus (který je nutno znát!) se nazývá *Gramm-Schmidtův ortogonalizační proces.*

Ve zbývající části tohoto paragrafu nyní uvedeme některé další vlastnosti ortogonálních vektorů.

Definice 11.3. Nechť W je podprostor euklidovského vektorového prostoru V. Množinu

$$W^\perp = \{\underline{\mathbf{x}} \in V \,|\, \underline{\mathbf{x}} \perp \underline{\mathbf{w}},\ \text{pro každý vektor } \underline{\mathbf{w}} \in W\}$$

nazýváme *ortogonálním doplňkem podprostoru* W ve V.

Je-li $\underline{\mathbf{x}} \in W^\perp$, pak říkáme též, že *vektor* $\underline{\mathbf{x}}$ *je kolmý k podprostoru* W a píšeme $\underline{\mathbf{x}} \perp W$.

Věta 11.1. *Nechť W je podprostor euklidovského prostoru V. Pak platí:*

1. *Ortogonální doplněk $W^\perp$ je podprostorem ve V.*
2. *Prostor V je přímým součtem podprostorů W a $W^\perp$,*
   tzn. $V = W \oplus W^\perp$.

Důkaz. 1. Zřejmě $\underline{\mathbf{o}} \in W^\perp$, a tedy $W^\perp \neq \emptyset$. Dále, jsou-li $\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \in W^\perp$, $r \in \mathbb{R}$ libovolné, pak je ihned vidět, že $\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}} \in W^\perp$ a $r\underline{\mathbf{x}} \in W^\perp$, tzn. $W^\perp$ je podprostorem ve V.

2. Je-li $W = \{\underline{\mathbf{o}}\}$, respektive $W = V$, pak je $W^\perp = V$, respektive $W^\perp = \{\underline{\mathbf{o}}\}$, a tvrzení zřejmě platí. Nechť tedy $\{\underline{\mathbf{o}}\} \neq W \neq V$, nechť $\underline{\mathbf{e}}_1, \dots, \underline{\mathbf{e}}_n$ je ortonormální báze prostoru V a nechť $\underline{\mathbf{u}}_1, \dots, \underline{\mathbf{u}}_k$ $(0 < k < n)$ je báze podprostoru W. Při tomto označení je $\underline{\mathbf{x}} \in W^\perp$ právě když $(\underline{\mathbf{u}}_i, \underline{\mathbf{x}}) = 0$, pro $i = 1, \dots, k$. Nechť je

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{u}}_i &= a_{i1}\underline{\mathbf{e}}_1 + \dots + a_{in}\underline{\mathbf{e}}_n, \quad i = 1, \dots, k\,, \\ \underline{\mathbf{x}} &= x_1\underline{\mathbf{e}}_1 + \dots + x_n\underline{\mathbf{e}}_n\,. \end{aligned}$$

Potom je $\underline{\mathbf{x}} \in W^\perp$ právě když platí

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= 0\,, \\ &\vdots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n &= 0\,, \end{aligned}$$

což je homogenní soustava k lineárních rovnic o n neznámých $x_1, \ldots, x_n$, jejíž matice má hodnost k. Podprostorem řešení této soustavy je zřejmě právě $W^\perp$.

Platí (viz [Ho94]) $\dim W^\perp = n - k$.

Dále, součet podprostorů W a $W^\perp$ je přímý, neboť je-li $\underline{\mathbf{u}} \in W \cap W^\perp$, pak $\underline{\mathbf{u}} \perp \underline{\mathbf{u}}$, tzn. $\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{o}}$, odkud dostáváme, že $W \cap W^\perp = \{\underline{\mathbf{o}}\}$. Konečně,

$$\dim(W \dot{+} W^\perp) = \dim W + \dim W^\perp = k + (n - k) = n = \dim V\,,$$

a tedy (viz [Ho94]) $V = W \oplus W^\perp$. □

Důsledek 11.1. *Nechť W je podprostor euklidovského prostoru V, nechť $\underline{\mathbf{x}} \in V$ libovolné. Pak existuje jediné vyjádření vektoru $\underline{\mathbf{x}}$ ve tvaru*

$$\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{y}} + \underline{\mathbf{z}}, \ \ \textit{kde } \underline{\mathbf{y}} \in W, \ \underline{\mathbf{z}} \in W^\perp\,. \tag{11.3}$$

Důkaz. Tvrzení je přímým důsledkem 2. části předchozí věty a definice přímého součtu podprostorů (viz [Ho94]). □

Definice 11.4. Nechť W je podprostor euklidovského prostoru V, nechť vektor $\underline{\mathbf{x}} \in V$ je vyjádřen ve tvaru (11.3). Pak $\underline{\mathbf{y}}$ se nazývá *ortogonální projekce* vektoru $\underline{\mathbf{x}}$ na podprostor W a $\underline{\mathbf{z}}$ se nazývá *ortogonální komponenta* vektoru $\underline{\mathbf{x}}$ vzhledem k podprostoru W.

Věta 11.2. *Nechť W, S jsou podprostory euklidovského prostoru V. Pak platí:*

1. $(W^\perp)^\perp = W$ *;*
2. $(W + S)^\perp = W^\perp \cap S^\perp$ *;*
3. $(W \cap S)^\perp = W^\perp + S^\perp$ *;*
4. $W \subseteq S \Leftrightarrow W^\perp \supseteq S^\perp$ *.*

Důkaz. 1. Inkluze $W \subseteq (W^\perp)^\perp$ je zřejmá. Podle Věty 11.1 (část 2.) platí $W \oplus W^\perp = W^\perp \oplus (W^\perp)^\perp = V$, odkud $\dim W = \dim V - \dim W^\perp$. Tedy $\dim W = \dim (W^\perp)^\perp$ a podle [Ho94] je $W = (W^\perp)^\perp$.

2. Inkluze $(W + S)^\perp \subseteq W^\perp \cap S^\perp$ je zřejmá. Naopak nechť $\underline{\mathbf{x}} \in W^\perp \cap S^\perp$ a nechť $\underline{\mathbf{u}} \in W + S$ libovolné. Potom je $\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{w}} + \underline{\mathbf{s}}$, kde $\underline{\mathbf{w}} \in W$, $\underline{\mathbf{s}} \in S$, a platí

$$(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}}) = (\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{w}} + \underline{\mathbf{s}}) = (\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{w}}) + (\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{s}}) = 0\,,$$

a tedy $\underline{\mathbf{x}} \in (W + S)^\perp$.

3. Užitím 1. a 2. dostáváme $(W \cap S)^\perp = [(W^\perp)^\perp \cap (S^\perp)^\perp]^\perp = [(W^\perp + S^\perp)^\perp]^\perp = W^\perp + S^\perp$.

4. "$\Rightarrow$" $W \subseteq S \Leftrightarrow S = W + S \implies S^\perp = (W+S)^\perp = W^\perp \cap S^\perp \implies S^\perp \subseteq W^\perp$, užitím 2. části věty a definice součtu podprostorů.

"$\Leftarrow$" Plyne z právě dokázané implikace užitím 1. části věty. □

Definice 11.5. Nechť W, S jsou netriviální podprostory euklidovského vektorového prostoru V. Je-li

$$W \subseteq S^{\perp} \text{ nebo } W \supseteq S^{\perp},$$

pak podprostory W, S nazýváme *kolmé* (ve V) a označujeme $W \perp S$.

Je-li speciálně $W = S^{\perp}$, pak podprostory W, S nazýváme *totálně kolmé* (ve V).

Poznámka 11.1. Z Věty 11.2 (část 4.) bezprostředně plyne, že

$$W \subseteq S^{\perp} \Leftrightarrow S \subseteq W^{\perp}, \text{ resp. } W \supseteq S^{\perp} \Leftrightarrow S \supseteq W^{\perp}, \text{ resp. } W = S^{\perp} \Leftrightarrow S = W^{\perp}.$$

Vidíme tedy, že kolmost i totální kolmost jsou symetrické relace na množině všech netriviálních podprostorů V, a tedy předchozí definice, tak jak byla vyslovena, je korektní.

Dále poznamenejme, že užitím Věty 11.2 (část 4.) a vlastností dimenze dostaneme následující implikace

$$\begin{cases} W \subseteq S^{\perp} & \Longrightarrow \ \dim W + \dim S \leq \dim V\,, \\ W \supseteq S^{\perp} & \Longrightarrow \ \dim W + \dim S \geq \dim V\,, \end{cases} \tag{11.4}$$

přičemž ostrá inkluze implikuje vždy ostrou nerovnost. Je zřejmé, že obecně neplatí obrácené implikace! ♢

Věta 11.3. *Nechť W, S jsou netriviální podprostory euklidovského prostoru V. Pak platí:*

$$W, S \text{ jsou totálně kolmé } \Leftrightarrow W, S \text{ jsou kolmé a } \dim W + \dim S = \dim V.$$

Důkaz. "⇒" Nechť W, S jsou totálně kolmé; pak zřejmě W, S jsou kolmé a $W = S^{\perp}$, odkud $\dim V = \dim(S^{\perp} \dot{+} S) = \dim S^{\perp} + \dim S = \dim W + \dim S$.

"⇐" Nechť W, S jsou kolmé a platí $\dim W + \dim S = \dim V$; pak $W \subseteq S^{\perp}$ nebo $W \supseteq S^{\perp}$ a z předchozí poznámky plyne, že ani jedna z inkluzí nemůže být ostrá. Je tedy $W = S^{\perp}$, tzn. W, S jsou totálně kolmé. □

Věta 11.4. *Nechť W, S jsou netriviální podprostory euklidovského prostoru V takové, že W, S jsou kolmé. Pak platí:*

1. $\dim W + \dim S \leq \dim V \implies W \cap S = \{\underline{\mathbf{o}}\}$;

2. $\dim W + \dim S \geq \dim V \implies W + S = V$.

Důkaz. 1. Nechť $W \perp S$ a $\dim W + \dim S \leq \dim V$. Pak $W \subseteq S^{\perp}$ nebo $W \supseteq S^{\perp}$, ovšem vzhledem k (11.4) musí být $W \subseteq S^{\perp}$, odkud pak $W \cap S \subseteq S^{\perp} \cap S = \{\underline{\mathbf{o}}\}$, a tedy $W \cap S = \{\underline{\mathbf{o}}\}$.

2. Nechť $W \perp S$ a $\dim W + \dim S \geq \dim V$. Pak opět užitím (11.4) dostáváme $W \supseteq S^{\perp}$, odkud $V \supseteq W + S \supseteq S^{\perp} \oplus S = V$. Obě poslední inkluze musí tedy být rovnostmi, což však znamená, že $V = W + S$. □

Věta 11.5. *Nechť W, S jsou netriviální podprostory euklidovského prostoru V. Potom platí:*

$$W \perp S \text{ ve } V \text{ a } \dim W + \dim S \leq \dim V \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow W, S \text{ jsou totálně kolmé ve } (W + S).$$

Důkaz. Nechť index u symbolu $^\perp$ značí vždy podprostor, v němž konstruujeme ortogonální doplněk. Je zřejmé, že platí

$$S^{\perp_{W+S}} = S^{\perp_V} \cap (W + S)\,. \tag{11.5}$$

“$\Rightarrow$” Z předpokladů a z Věty 11.4 dostáváme, že $W \cap S = \{\underline{\mathbf{o}}\}$, odkud $\dim W + \dim S = \dim(W + S)$, respektive W, S jsou netriviální podprostory ve $(W + S)$. Dále z předpokladů (užitím (11.4)) plyne, že $W \subseteq S^{\perp_V}$. Triviálně je $W \subseteq W + S$, a tedy z (11.5) pak dostáváme $W \subseteq S^{\perp_{W+S}}$, neboli W, S jsou kolmé ve $(W + S)$. Dohromady pak podle Věty 11.3 jsou W, S totálně kolmé ve $(W + S)$.

“$\Leftarrow$” Nechť W, S jsou totálně kolmé ve $(W + S)$. Pak podle Věty 11.3 je $\dim W + \dim S = \dim(W + S) \leq \dim V$. Dále, z předpokladu totální kolmosti a z (11.5) dostáváme $W = S^{\perp_{W+S}} \subseteq S^{\perp_V}$ neboli $W \perp S$ ve V. □

Úloha 11.1. Nalezněte ortogonální projekci vektoru $\underline{\mathbf{x}} = (4; -1; -3; 4)$ na podpostor $W = L(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{w}})$, kde $\underline{\mathbf{u}} = (1; 1; 1; 1)$, $\underline{\mathbf{v}} = (1; 2; 2; -1)$, $\underline{\mathbf{w}} = (1; 0; 0; 3)$.

Řešení: Bude výhodné nejprve nalézt bázi podprostoru W (vektory $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{w}}$ jsou podle zadání pouze generátory W). Ale

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

odkud již vidíme, že bázi W tvoří například vektory $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}$.

Nyní budeme hledat vyjádření

$$\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{y}} + \underline{\mathbf{z}}, \text{ kde } \underline{\mathbf{y}} \in W,\ \underline{\mathbf{z}} \in W^\perp\,,$$

a tedy $\underline{\mathbf{y}} = r\underline{\mathbf{u}} + s\underline{\mathbf{v}}$, respektive $\underline{\mathbf{z}} = \underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}$, odkud vidíme, že úloha bude vyřešena nalezením koeficentů r, s. Ale platí

$$0 = (\underline{\mathbf{z}}, \underline{\mathbf{u}}) = (\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{u}}), \text{ resp. } 0 = (\underline{\mathbf{z}}, \underline{\mathbf{v}}) = (\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{v}})\,,$$

odkud po dosazení za $\underline{\mathbf{y}}$ a rozepsání dostáváme

$r(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{u}}) + s(\underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{u}}) = (\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}})\,,$

$r(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}) + s(\underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{v}}) = (\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{v}})\,.$

Po vyčíslení všech skalárních součinů a dosazení řešíme soustavu lineárních rovnic

$$\left.\begin{aligned} 4r + 4s &= 4 \\ 4r + 10s &= -8 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow r = 3,\ s = -2 \Longrightarrow \underline{\mathbf{y}} = 3\underline{\mathbf{u}} - 2\underline{\mathbf{v}} = (1; -1; -1; 5).$$

Poznamenejme, že jako vedlejší produkt předchozích výpočtů dostáváme i ortogonální komponentu $\underline{\mathbf{z}} = \underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}} = (3; 0; -2; -1)$.

Výsledek: ortogonální projekcí vektoru $\underline{\mathbf{x}}$ na W je vektor $\underline{\mathbf{y}} = (1; -1; -1; 5)$ a ortogonální komponenta vektoru $\underline{\mathbf{x}}$ vzhledem k podprostoru W je vektor $\underline{\mathbf{z}} = (3; 0; -2; -1)$. △

Úloha 11.2. V euklidovském 4-rozměrném prostoru V jsou dány podprostory $W = L(\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \underline{\mathbf{u}}_3)$ a $S = L(\underline{\mathbf{v}})$, kde $\underline{\mathbf{u}}_1 = (1; 1; 1; 1)$, $\underline{\mathbf{u}}_2 = (-2; 6; 0; 8)$, $\underline{\mathbf{u}}_3 = (-3; 1; -2; 2)$, $\underline{\mathbf{v}} = (1; a; 3; b)$:

1. Nalezněte ortogonální bázi W a tuto bázi doplňte na ortogonální bázi prostoru V.
2. Určete hodnoty a, b tak, aby podprostory W, S byly kolmé.

Řešení: 1. Na vektory $\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \underline{\mathbf{u}}_3$ aplikujeme Gramm-Schmidtův ortogonalizační proces:

$\underline{\mathbf{e}}_1 = \underline{\mathbf{u}}_1 = (1; 1; 1; 1)\,;$

$\underline{\mathbf{e}}_2 = t\underline{\mathbf{e}}_1 + \underline{\mathbf{u}}_2$, kde $t = -\frac{(\underline{\mathbf{u}}_2, \underline{\mathbf{e}}_1)}{(\underline{\mathbf{e}}_1, \underline{\mathbf{e}}_1)} = -3$; tedy $\underline{\mathbf{e}}_2 = (-5; 3; -3; 5)\,;$

$\underline{\mathbf{e}}_3 = t_1\underline{\mathbf{e}}_1 + t_2\underline{\mathbf{e}}_2 + \underline{\mathbf{u}}_3$, kde $t_1 = -\frac{(\underline{\mathbf{u}}_3, \underline{\mathbf{e}}_1)}{(\underline{\mathbf{e}}_1, \underline{\mathbf{e}}_1)} = \frac{1}{2}$, $t_2 = -\frac{(\underline{\mathbf{u}}_3, \underline{\mathbf{e}}_2)}{(\underline{\mathbf{e}}_2, \underline{\mathbf{e}}_2)} = -\frac{1}{2}$; tedy
$\underline{\mathbf{e}}_3 = (0; 0; 0; 0)$.

Vidíme, že $\underline{\mathbf{e}}_3 = \underline{\mathbf{o}}$ (což je důsledkem toho, že vektory $\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \underline{\mathbf{u}}_3$ jsou lineárně závislé), a tedy hledanou ortogonální bází W jsou (např.) vektory $\underline{\mathbf{e}}_1, \underline{\mathbf{e}}_2$.

Pro doplnění vektorů $\underline{\mathbf{e}}_1, \underline{\mathbf{e}}_2$ na ortogonální bázi celého prostoru V bude zřejmě stačit nalézt libovolnou ortogonální bázi $\underline{\mathbf{f}}_1, \underline{\mathbf{f}}_2$ podprostoru $W^\perp$ (zdůvodněte!). Ale $W^\perp$ je množina řešení homogenní soustavy lineárních rovnic, jejiž koeficienty jsou právě souřadnice vektorů $\underline{\mathbf{e}}_1, \underline{\mathbf{e}}_2$ (zdůvodněte!). Vektory $\underline{\mathbf{f}}_1, \underline{\mathbf{f}}_2$ pak dostaneme ortogonalizací libovolné báze řešení této homogenní soustavy:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & -3 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{l} x_2 = r\,, \\ x_4 = s\,, \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} x_3 = 4r - 5s\,, \\ x_1 = 3r + 4s\,, \end{array}$$

a tedy bázi řešení tvoří například vektory $\underline{\mathbf{w}}_1 = (3; 1; -4; 0)$, $\underline{\mathbf{w}}_2 = (4; 0; -5; 1)$. Pak:

$\underline{\mathbf{f}}_1 = \underline{\mathbf{w}}_1 = (3; 1; -4; 0)\,;$

$\underline{\mathbf{f}}_2 = t\underline{\mathbf{f}}_1 + \underline{\mathbf{w}}_2$, kde $t = -\frac{(\underline{\mathbf{w}}_2, \underline{\mathbf{f}}_1)}{(\underline{\mathbf{f}}_1, \underline{\mathbf{f}}_1)} = -\frac{16}{13}$; tedy $\underline{\mathbf{f}}_2 = \left(\frac{4}{13}; \frac{-16}{13}; \frac{-1}{13}; 1\right)$.

Výsledek: vektory $\underline{\mathbf{e}}_1, \underline{\mathbf{e}}_2$ jsou ortogonáloní bází W, respektive vektory $\underline{\mathbf{e}}_1, \underline{\mathbf{e}}_2, \underline{\mathbf{f}}_1, \underline{\mathbf{f}}_2$ jsou ortogonální bází prostoru V.

2. Vzhledem k tomu, že $\dim S = 1$, $\dim W = 2$ (a tedy $\dim S^\perp = 3$, $\dim W^\perp = 2$), mohou být podprostory W, S kolmé jedině v případě, že $W \subseteq S^\perp$ neboli $S \subseteq W^\perp$. Musíme tedy určit čísla a, b tak, aby $\underline{\mathbf{v}} \in L(\underline{\mathbf{w}}_1, \underline{\mathbf{w}}_2)$, kde $\underline{\mathbf{w}}_1, \underline{\mathbf{w}}_2$ jsou vektory báze

$W^\perp$, získané v 1. Ale

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & -5 & 1 \\ 1 & a & 3 & b \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -51-3a & 3-9a-12b \end{pmatrix}.$$

Vidíme tedy, že $\underline{\mathbf{v}} \in L(\underline{\mathbf{w}}_1, \underline{\mathbf{w}}_2)$ právě když $-51-3a = 0 \wedge 3-9a-12b = 0$, tj. právě když $a = -17$, $b = 13$.

Výsledek: podprostory W, S jsou kolmé právě když $a = -17$, $b = 13$. △

Připomeňme znovu, že v obou úlohách jsme při výpočtech podstatně využívali úmluvy o tom, že souřadnice vektorů jsou vyjadřovány vzhledem k pevné ortonormální bázi prostoru V.

12 Euklidovský prostor, kartézské souřadnice

Definice 12.1. Afinní prostor, jehož zaměřením je euklidovský vektorový prostor (tj. vektorový prostor se skalárním součinem), nazýváme *euklidovským bodovým prostorem* nebo stručně *euklidovským prostorem* a označujeme $\mathcal{E}$.

Poznámka 12.1. Vidíme, že euklidovský (bodový) prostor je speciálním případem afinního prostoru. Proto můžeme na euklidovský prostor přenést všechny pojmy a vlastnosti afinního prostoru. Je tedy zřejmý význam pojmů: *bod euklidovského prostoru* $\mathcal{E}$, *zaměření* $Z(\mathcal{E})$ *euklidovského prostoru* $\mathcal{E}$, *podprostor euklidovského prostoru* $\mathcal{E}$ (připomeňme z Paragrafu 1, že podprostory v $Z(\mathcal{E})$ jsou právě jeho vektorové podprostory), *dimenze euklidovského prostoru* $\mathcal{E}$, *dimenze podprostoru euklidovského prostoru* $\mathcal{E}$, *afinní repér* a *afinní souřadnice* v $\mathcal{E}$ atd. Všechny tyto pojmy nebudeme v euklidovském prostoru znovu zavádět, ale budeme je automaticky přenášet z afinního prostoru. ♢

Připomeňme ještě, že stručné vyjádření *euklidovský prostor* může sice jednou znamenat *euklidovský bodový prostor* a podruhé *euklidovský vektorový prostor*, ovšem ze souvislosti bude vždy jednoznačně jasné, o který z obou pojmů se jedná.

Definice 12.2. Nechť A, B jsou body euklidovského prostoru $\mathcal{E}$. Pak reálné číslo $\|\overrightarrow{AB}\|$ nazýváme *vzdáleností bodů* A, B a označujeme $\overline{AB}$. Je tedy

$$\overline{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|.$$

Věta 12.1. *Nechť $A, B, C \in \mathcal{E}$. Pak platí:*

1. $\overline{AB} \geq 0$ *;*
2. $\overline{AB} = 0$ *právě když* $A = B$ *;*
3. $\overline{AB} = \overline{BA}$ *;*
4. $\overline{AC} \leq \overline{AB} + \overline{BC}$.

Důkaz. Tvrzení plynou ihned z definice velikosti vektorů a axiomů skalárního součinu, respektive z trojúhelníkové nerovnosti, uvedených v Paragrafu 11. □

Poznámka 12.2. Množiny, v nichž ke každým dvěma bodům X, Y je přiřazeno reálné číslo $\overline{XY}$ tak, že jsou splněny vlastnosti 1. – 4. z předchozí věty, se nazývají *metrické prostory* a studují se blíže v matematické analřze. Předchozí věta nám tedy mimo jiné říká, že euklidovský prostor je příkladem metrického prostoru. ♢

Poslední část předchozí věty můžeme ještě jednoduše rozšířit o charakterizaci toho, kdy v uvedené nerovnosti nastane rovnost.

Věta 12.2. *Nechť* $A, B, C \in \mathcal{E}$. *Potom platí:*

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} \text{ právě když } B \in [A, C] .$$

Důkaz. Z definice vzdálenosti dvou bodů, z Věty 12.1 a z trojúhelníkové nerovnosti plyne, že $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$ právě když $B = C$ nebo $\overrightarrow{AB} = t\overrightarrow{BC}$, kde $t \geq 0$. Poslední podmínka je však ekvivalentní podmínce, že body A, C leží na opačných polopřímkách s hraničním bodem B neboli bod B je bodem úsečky $[A, C]$, což dává tvrzení věty. □

Definice 12.3. Nechť $\mathcal{E}$ je euklidovský prostor, $\dim \mathcal{E} = n \geq 1$, a nechť

$$\mathscr{R} = \langle P; \underline{\mathbf{e}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{e}}_n \rangle \tag{12.1}$$

je afinní repér v $\mathcal{E}_n$ takový, že $\langle \underline{\mathbf{e}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{e}}_n \rangle$ je ortonormální báze zaměření $Z(\mathcal{E}_n)$. Pak (12.1) se nazývá *kartézský repér* nebo *ortonormální repér* nebo *kartézský souřadný systém* v $\mathcal{E}_n$.

Souřadnice bodů v $\mathcal{E}_n$ vzhledem k repéru (12.1) se nazývají *kartézské souřadnice*.

Úmluva 12.1. Všude dále v této kapitole, nebude-li výslovně řečeno jinak, budeme souřadnicemi bodů a vektorů vždy rozumět jejich souřadnice vzhledem k pevnému kartézskému repéru (12.1). ♢

Poznámka 12.3. Vidíme, že kartézský repér je speciálním případem afinního repéru a platí pro něj tedy všechny vztahy odvozené v Paragrafu 3, tj. vztahy pro souřadnice bodů, souřadnice vektorů, transformační rovnice atd. Z toho, co bylo řečeno v předchozím paragrafu o ortonormálních bázích, je zřejmé, že hlavní výhodou zavedení kartézskřch souřadnic bude jednoduché vyjadřování skalárního součinu a pojmů z něj odvozených. Připomeňme, že jsou-li $\underline{\mathbf{u}} = (u_1; \ldots; u_n)$, $\underline{\mathbf{v}} = (v_1; \ldots; v_n)$ vektory ze zaměření $Z(\mathcal{E}_n)$, pak pro jejich skalární součin $(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}})$ platí

$$(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}) = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n . \tag{12.2}$$

Máme-li dva body $A = [a_1; \ldots; a_n]$, $B = [b_1; \ldots; b_n] \in \mathcal{E}_n$, pak jejich vzdálenost $\overline{AB}$ vyjádříme pomocí souřadnic užitím (12.2) takto:

$$\overline{AB} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2} . \qquad \diamondsuit \tag{12.3}$$

Následující věta ukáže, že i střed dvojice bodů můžeme charakterizovat pomocí vzdáleností.

Věta 12.3. *Bod $S \in \mathcal{E}$ je středem dvojice bodů $A, B \in \mathcal{E}$ právě když je*

$$\overline{SA} = \overline{SB} = \frac{1}{2}\,\overline{AB}\,. \tag{12.4}$$

Důkaz. Je-li $A = B$, pak tvrzení zřejmě platí. Nechť tedy $A \neq B$.

1. Nechť S je středem dvojice bodů A, B. Potom podle Důsledku 8.1, platí symbolická rovnice $S = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$, z níž po rozepsání a užitím (12.3) dostáváme $\overline{SA} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \overline{SB}$, tzn. platí (12.4).

2. Naopak, nechť platí (12.4). Pak $\overline{AS} + \overline{SB} = \overline{AB}$ a podle Věty 12.2 je $S \in [A, B]$, tzn. $\overrightarrow{AS} = t\overrightarrow{AB}$, kde $0 \leq t \leq 1$. Potom však $\|\overrightarrow{AS}\| = |t| \cdot \|\overrightarrow{AB}\|$ neboli $\overline{SA} = t\,\overline{AB}$, odkud plyne (podle (12.4)) vzhledem k tomu, že $\overline{AB} \neq 0$, $t = \frac{1}{2}$. Podle Věty 8.5 je pak bod S středem dvojice bodů A, B. □

Transformační rovnice pro souřadnice bodů, respektive vektorů, při přechodu od jednoho afinního repéru k druhému, jak jsme odvodili v Paragrafu 3, budou opět beze změny platit i pro dva kartézské repéry. Ukážeme si však, že v případě kartézskřch souřadnic bude mít matice přechodu A speciální tvar, který umožní jednodušší manipulaci s transformačními rovnicemi.

Věta 12.4. *Nechť jsou dány dvě ortonormální báze zaměření $Z(\mathcal{E}_n)$*

$$\mathscr{B} = \langle \underline{\mathbf{e}}_1, \dots, \underline{\mathbf{e}}_n \rangle\,, \tag{12.5}$$

$$\mathscr{B}' = \langle \underline{\mathbf{e}}'_1, \dots, \underline{\mathbf{e}}'_n \rangle\,, \tag{12.6}$$

a nechť $A = (a_{ij})$ je matice přechodu od (12.5) k (12.6) a A' je transponovaná matice k matici A. Pak platí:

1. *$A'A = E_n$, kde E_n značí jednotkovou matici řádu n ;*
2. *$A^{-1} = A'$;*
3. *$|A| = \pm 1$.*

Důkaz. 1. Z definice matice přechodu plyne, že

$$\underline{\mathbf{e}}'_i = a_{1i}\underline{\mathbf{e}}_1 + \cdots + a_{ni}\underline{\mathbf{e}}_n, \quad \text{pro} \;\; i = 1, \dots, n\,.$$

Potom prvek stojící v i-tém řádku a j-tém sloupci matice $A'A$ je tvaru:

$$a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \cdots + a_{ni}a_{nj} = (\underline{\mathbf{e}}'_i, \underline{\mathbf{e}}'_j) = \begin{cases} 1\,, \text{ pro } i = j\,, \\ 0\,, \text{ pro } i \neq j\,, \end{cases}$$

a tedy je $A'A = E_n$.

2. Z 1. a z Cauchyovy věty plyne, že matice A je regulární, tzn. existuje pak inverzní matice A^{-1}. Vynásobíme-li rovnost $A'A = E_n$ zprava maticí A^{-1}, dostáváme $A' = A^{-1}$.

3. Z algebry víme, že $|A'| = |A|$; pak z 1. užitím Cauchyovy věty dostáváme $1 = |E_n| = |A'A| = |A'| \cdot |A| = |A|^2$, odkud $|A| = \pm 1$. □

Poznámka 12.4. Předchozí věta má bezprostřední využití při studiu transformačních rovnic pro souřadnice bodů, respektive vektorů, v euklidovském prostoru. Známe-li totiž vyjádření *nečárkovaných* souřadnic pomocí *čárkovaných* (tj. vztahy (3.9), (3.12)), pak u kartézskřch souřadnic můžeme opačné transformační rovnice (tj. vyjádření *čárkovaných* souřadnic pomocí *nečárkovaných*) psát na základě 2. části předchozí věty prakticky okamžitě pomocí transponované matice A'.

13 Kolmost

Definice 13.1. Nechť $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ jsou podprostory euklidovského (bodového) prostoru $\mathcal{E}$. Řekneme, že podprostory $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ jsou *kolmé*, jsou-li kolmá jejich zaměření $Z(\mathcal{B}_1), Z(\mathcal{B}_2)$. Píšeme pak $\mathcal{B}_1 \perp \mathcal{B}_2$.

Podobně, podprostory $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ nazýváme *totálně kolmé*, jsou-li totálně kolmá jejich zaměření $Z(\mathcal{B}_1), Z(\mathcal{B}_2)$.

Poznámka 13.1. Z definice je vidět, že kolmost i totální kolmost podprostorů euklidovského prostoru závisí pouze na zaměřeních těchto podprostorů. Vyšetřování kolmosti a totální kolmosti bude tedy probíhat ve vektorových prostorech se skalárním součinem, přičemž zřejmě podstatně využijeme výsledků odvozených v Paragrafu 11. ♢

Věta 13.1. *Nechť $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2$ jsou podprostory euklidovského prostoru $\mathcal{E}$ a nechť $\mathcal{B}_i \| \mathcal{B}'_i$, $\dim \mathcal{B}_i = \dim \mathcal{B}'_i$, pro $i = 1, 2$. Potom:*

$$\mathcal{B}_1 \perp \mathcal{B}_2 \qquad \textit{právě když} \qquad \mathcal{B}'_1 \perp \mathcal{B}'_2 \,.$$

Důkaz. Je-li $\mathcal{B}_i \| \mathcal{B}'_i$ a $\dim \mathcal{B}_i = \dim \mathcal{B}'_i$, potom musí být $Z(\mathcal{B}_i) = Z(\mathcal{B}'_i)$, pro $i = 1, 2$. Tedy $Z(\mathcal{B}_1) = Z(\mathcal{B}'_1)$ a $Z(\mathcal{B}_2) = Z(\mathcal{B}'_2)$, odkud ihned plyne tvrzení. □

Věta 13.2. *Nechť $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ jsou podprostory euklidovského prostoru $\mathcal{E}$. Potom:*

1. *libovolným bodem $A \in \mathcal{E}$ prochází právě jeden podprostor, který je totálně kolmý k $\mathcal{B}$.*
2. *Jsou-li podprostory $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ totálně kolmé, pak jejich průnikem je bod.*

Důkaz. 1. Podprostor $\{A; Z(\mathcal{B})^{\perp}\}$ je totálně kolmý k $\mathcal{B}$, prochází bodem A a zřejmě je jediný s těmito vlastnostmi.

2. Nechť podprostory $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ jsou totálně kolmé; potom $Z(\mathcal{B}) = Z(\mathcal{C})^{\perp}$, odkud plyne, že $\dim Z(\mathcal{B}) + \dim Z(\mathcal{C}) = \dim Z(\mathcal{E})$, a tedy podle Věty 11.4 (část 1.) je $Z(\mathcal{B}) \cap Z(\mathcal{C}) = \{\underline{\mathbf{o}}\}$. Ale $Z(\mathcal{B}) + Z(\mathcal{C}) = Z(\mathcal{E})$, tzn. podle Věty 2.3 se podprostory $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ protínají. Dohromady dostáváme, že průnikem $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ je 0-rozměrný podprostor, tzn. bod. □

Věta 13.3. *Nechť $\mathcal{B}$ je k-rozměrný podprostor v $\mathcal{E}$ $(0 < k < n = \dim \mathcal{E})$; vyjádřený neparametricky*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 \ + \cdots + \ a_{1n}x_n \quad &= \ b_1\,, \\ &\ \vdots \\ a_{n-k,1}x_1 + \cdots + a_{n-k,n}x_n \quad &= \ b_{n-k}\,. \end{aligned} \tag{13.1}$$

Označme $\underline{\mathbf{a}}_i = (a_{i1}; \ldots ; a_{in})$, $i = 1, \ldots , n-k$, vektory ze $Z(\mathcal{E}_n)$, jejichž souřadnicemi jsou koeficienty v jednotlivřch rovnicích systému (13.1). Potom vektory $\underline{\mathbf{a}}_1, \ldots , \underline{\mathbf{a}}_{n-k}$ tvoří bázi ortogonálního doplňku zaměření $Z(\mathcal{B})$, a tedy

$$Z(\mathcal{B})^{\perp} = L(\underline{\mathbf{a}}_1, \ldots , \underline{\mathbf{a}}_{n-k})\,. \tag{13.2}$$

Důkaz. Podle Věty 5.3 je zaměření $Z(\mathcal{B})$ rovno podprostoru řešení zhomogenizovaného systému k systému (13.1). Pro každý vektor $\underline{\mathbf{x}} = (x_1; \ldots ; x_n) \in Z(\mathcal{B})$ tedy platí $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = 0$, tj. $(\underline{\mathbf{a}}_i, \underline{\mathbf{x}}) = 0$ neboli $\underline{\mathbf{a}}_i \perp \underline{\mathbf{x}}$, pro $i = 1, \ldots , n-k$.

Tedy $\underline{\mathbf{a}}_1, \ldots , \underline{\mathbf{a}}_{n-k} \in Z(\mathcal{B})^{\perp}$, přičemž podle předpokladu jsou vektory $\underline{\mathbf{a}}_1, \ldots , \underline{\mathbf{a}}_{n-k}$ lineárně nezávislé. Poněvadž $\dim Z(\mathcal{B})^{\perp} = n-k$, jsou vektory $\underline{\mathbf{a}}_1, \ldots , \underline{\mathbf{a}}_{n-k}$ bází podprostoru $Z(\mathcal{B})^{\perp}$. Zbytek tvrzení je pak triviální. □

Věta 13.4. *Nechť platí označení předchozí Věty 13.3 a nechť $\mathcal{C}$ je podprostor v $\mathcal{E}_n$. Potom:*

$$\mathcal{B} \perp \mathcal{C} \ \textit{právě když}\ Z(\mathcal{C}) \subseteq L(\underline{\mathbf{a}}_1, \ldots , \underline{\mathbf{a}}_{n-k}) \ \textit{nebo}\ Z(\mathcal{C}) \supseteq L(\underline{\mathbf{a}}_1, \ldots , \underline{\mathbf{a}}_{n-k})\,.$$

Důkaz. Tvrzení věty plyne bezprostředně z definice kolmosti a z Věty 13.3. □

Poznámka 13.2. Pokud by rovnice (13.1) zadávající podprostor $\mathcal{B}$ byly lineárně závislé (což se někdy v praxi stává), pak jistě neplatí 1. část tvrzení Věty 13.3, ovšem zřejmě zůstávají v platnosti (13.2) a Věta 13.4 (neboť pak vektory $\underline{\mathbf{a}}_1, \underline{\mathbf{a}}_2, ..$ jsou generátory $Z(\mathcal{B})^{\perp}$). ♢

Dále, je-li dána nadrovina $\mathcal{N} \equiv a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a = 0$, pak zřejmě vektor $\underline{\mathbf{n}} = (a_1; \ldots ; a_n)$ je kolmý k $Z(\mathcal{N})$. Zavedeme pro něj následující označení.

Definice 13.2. Nechť $\mathcal{N} \equiv a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a = 0$ je nadrovina v $\mathcal{E}_n$. Pak vektor $\underline{\mathbf{n}} = (a_1; \ldots ; a_n)$ budeme nazývat *normálovým vektorem nadroviny $\mathcal{N}$* a každou přímku, jejímž směrovým vektorem je vektor $\underline{\mathbf{n}}$, budeme nazývat *normálou nadroviny $\mathcal{N}$*.

Následující věty se zabývají speciálními případy kolmosti podprostorů v $\mathcal{E}$, a sice kolmostí přímky a nadroviny, respektive kolmostí dvou nadrovin.

Věta 13.5. *Nechť $p \equiv X = A + t\underline{\mathbf{u}}$ je přímka a $\mathcal{N} \equiv a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a = 0$ je nadrovina v $\mathcal{E}_n$. Potom p a $\mathcal{N}$ jsou totálně kolmé právě když existuje reálné číslo k takové, že $\underline{\mathbf{u}} = k(a_1; \ldots ; a_n)$.*

Důkaz. Uvědomme si, že $\dim p + \dim \mathcal{N} = \dim \mathcal{E}$, a tedy podle Věty 11.3 se v případě kolmosti přímky p a nadroviny $\mathcal{N}$ musí jednat o totální kolmost. Zbytek tvrzení pak plyne přímo z Věty 13.4. $\square$

Věta 13.6. *Nechť $\mathcal{N}_1 \equiv a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a = 0$, $\mathcal{N}_2 \equiv b_1x_1 + \cdots + b_nx_n + b = 0$ jsou nadroviny v $\mathcal{E}$. Potom:*

$$\mathcal{N}_1 \perp \mathcal{N}_2 \text{ právě když } a_1b_1 + \cdots + a_nb_n = 0\,.$$

Důkaz. Podle Věty 13.4 a podle Věty 5.3 je $\mathcal{N}_1 \perp \mathcal{N}_2 \Leftrightarrow (a_1; \ldots ; a_n) \in Z(\mathcal{N}_2)$ $\Leftrightarrow a_1b_1 + \cdots + a_nb_n = 0$. $\square$

Poznámka 13.3. Aplikujeme-li předchozí dvě věty na 2-rozměrný (respektive 3-rozměrnř) euklidovský prostor, dostaneme věty o kolmosti přímek a rovin známé ze střední školy. Například, máme-li dány v rovině dvě přímky

$$p_1 \equiv y = k_1x + q_1, \quad p_2 \equiv y = k_2x + q_2\,,$$

pak podle Věty 13.6 jsou p_1 a p_2 kolmé právě když (po úpravě) $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$, což je výsledek dokazovaný na střední škole. $\diamondsuit$

Poznámka 13.4. Jednou z nejčastějších praktickřch úloh o kolmosti je úloha nalézt k danému k-rozměrnému podprostoru $\mathcal{B}$ totálně kolmý podprostor $\mathcal{C}$ procházející pevným bodem Q. K vyřešení této úlohy stačí zřejmě nalézt $Z(\mathcal{C})$, přičemž $Z(\mathcal{C}) = Z(\mathcal{B})^\perp$. V podstatě mohou nastat dvě situace:

a) Podprostor $\mathcal{B}$ je zadán parametricky, tzn. $\mathcal{B} \equiv X = A + t_1\underline{\mathbf{u}}_1 + \cdots + t_k\underline{\mathbf{u}}_k$, kde $\underline{\mathbf{u}}_i = (u_{i1}; \ldots ; u_{in})$, $i = 1, \ldots, k$. Potom $Z(\mathcal{B})^\perp$ je množinou řešení homogenního systému lineárních rovnic

$$\begin{aligned} u_{11}x_1 + \cdots + u_{1n}x_n &= 0\,, \\ &\vdots \\ u_{k1}x_1 + \cdots + u_{kn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

a hledaný podprostor $\mathcal{C}$ bude výhodné vyjadřovat neparametricky.

b) Podprostor $\mathcal{B}$ je zadán neparametricky, tzn.

$$\mathcal{B} = \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1\,, \\ \qquad\vdots \\ a_{n-k,1}x_1 + \cdots + a_{n-k,n} = b_{n-k}\,. \end{cases}$$

Potom vektory řádkovřch koeficientů tvoří bázi $Z(\mathcal{B})^\perp$ a hledaný podprostor $\mathcal{C}$ bude výhodné vyjadřovat parametricky. $\diamondsuit$

Věta 13.7. *Nechť $\mathcal{B}$ je podprostor euklidovského prostoru $\mathcal{E}$ a $R \in \mathcal{E}$ je bod neležící v $\mathcal{B}$. Pak existuje právě jedna přímka p procházející bodem R, která je kolmá k $\mathcal{B}$ a protíná $\mathcal{B}$.*

Důkaz. Označme $\mathcal{B}^\perp = \{R; Z(\mathcal{B})^\perp\}$; zřejmě je $\dim \mathcal{B}^\perp = \dim \mathcal{E} - \dim \mathcal{B}$ a libovolná přímka, ležící v $\mathcal{B}^\perp$, musí být kolmá k $\mathcal{B}$.

Dále označme $\mathcal{C} = \mathcal{B} + \{R\}$. Podle předpokladu $R \notin \mathcal{B}$, tzn. podle Věty 2.6 je $\dim \mathcal{C} = \dim \mathcal{B} + 1$. Zřejmě je $\mathcal{B}^\perp + \mathcal{C} = \mathcal{E}$.

Uvažujme nyní průnik $(\mathcal{B}^\perp \cap \mathcal{C})$. Poněvadž $R \in \mathcal{B}^\perp \cap \mathcal{C}$, je $\mathcal{B}^\perp \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$ a platí $\dim(\mathcal{B}^\perp \cap \mathcal{C}) = \dim \mathcal{B}^\perp + \dim \mathcal{C} - \dim(\mathcal{B}^\perp + \mathcal{C}) = \dim \mathcal{E} - \dim \mathcal{B} + \dim \mathcal{B} + 1 - \dim \mathcal{E} = 1$. Je tedy $\mathcal{B}^\perp \cap \mathcal{C}$ přímka, kterou označíme p a ukážeme, že je hledanou přímkou.

Zřejmě $R \in p$ a $p \perp \mathcal{B}$, tzn. zbývá ukázat, že p protíná $\mathcal{B}$. Nechť $B \in \mathcal{B}$ libovolný bod. Pak lze psát $\overrightarrow{BR} = \underline{\mathbf{y}} + \underline{\mathbf{z}}$, $\underline{\mathbf{v}} \in Z(\mathcal{B})$, $\underline{\mathbf{z}} \in Z(\mathcal{B})^\perp$, odkud $R = (B + \underline{\mathbf{y}}) + \underline{\mathbf{z}}$, přičemž $B + \underline{\mathbf{y}} \in \mathcal{B}$. Potom $\underline{\mathbf{z}} \in Z(\mathcal{C})$, odkud

$$\overrightarrow{BR} = \underline{\mathbf{y}} + \underline{\mathbf{z}} \in Z(\mathcal{B}) + (Z(\mathcal{B})^\perp \cap Z(\mathcal{C}))\,,$$

což podle Věty 2.3 znamená, že $\mathcal{B}$ a p se protínají.

Jednoznačnost hledané přímky plyne z provedené konstrukce: je-li totiž q přímka, $R \in q$, $q \perp \mathcal{B}$, $q \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$, pak existuje bod $Q \in q \cap \mathcal{B}$ a platí $Z(q) = L(\overrightarrow{RQ})$. Ale $\overrightarrow{RQ} \in Z(\mathcal{B})^\perp$, $\overrightarrow{RQ} \in Z(\mathcal{B} + \{R\}) = Z(\mathcal{C})$, odkud $\overrightarrow{RQ} \in Z(\mathcal{B})^\perp \cap Z(\mathcal{C}) = Z(p)$. Musí tedy být $Z(q) = Z(p)$, odkud již plyne, že $q = p$. □

Definice 13.3. Přímka p, která prochází daným bodem R, protíná daný podprostor $\mathcal{B}$ a je k němu kolmá, se nazývá *kolmice vedená bodem (kolmice spuštěná z bodu) R na podprostor $\mathcal{B}$*. Průsečík přímky p s podprostorem $\mathcal{B}$ se pak nazývá *pata kolmice* vedené bodem R na podprostor $\mathcal{B}$ (nebo též *kolmý průmět bodu R* na podprostor $\mathcal{B}$).

Poznámka 13.5. Uvědomme si, že předchozí definice nic nepředpokládá o poloze bodu R. Jestliže bod R neleží v podprostoru $\mathcal{B}$, pak podle Věty 13.7 kolmice vedená bodem R na $\mathcal{B}$, respektive kolmý průmět bodu R na $\mathcal{B}$, jsou určeny jednoznačně. Jestliže však $R \in \mathcal{B}$, pak splřívá bod R s kolmým průmětem R na $\mathcal{B}$, ovšem kolmice vedená bodem R na podprostor $\mathcal{B}$ může, ale nemusí být určena jednoznačně. Například je-li $\mathcal{B}$ rovina (respektive přímka) ve 3-rozměrném prostoru a $R \in \mathcal{B}$, pak existuje jedna kolmice (respektive nekonečně mnoho kolmic) vedená bodem R na $\mathcal{B}$. ♢

Úloha 13.1. Nalezněte podprostor $\mathcal{C}$ v $\mathcal{E}_5$, který prochází bodem Q a je totálně kolmý k rovině $\varrho \equiv \{A; L(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}})\}$. Přitom $Q = [-1; 2; 5; 1; 4]$, $A = [3; 2; 1; 1; 2]$, $\underline{\mathbf{u}} = (7; 2; 1; 1; 3)$, $\underline{\mathbf{v}} = (0; 4; -2; 1; -1)$.

Řešení: Rovina ϱ je zadána parametricky, a proto bude výhodné hledat neparametrické vyjádření podprostoru $\mathcal{C}$. Ale $Z(\mathcal{C})$ je dán homogenní soustavou lineárních rovnic, kterou získáme pomocí souřadnic vektorů $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}$, tj.

$$\begin{aligned} 7x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 &= 0\,,\\ 4x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 &= 0\,. \end{aligned}$$

Pravé strany neparametrického vyjádření $\mathcal{C}$ dostaneme dosazením souřadnic bodu Q. Pak $b_1 = -7 + 4 + 5 + 1 + 12 = 15$; $b_2 = 8 - 10 + 1 - 4 = -5$.

Výsledek: hledaný podprostor $\mathcal{C}$ má neparametrické vyjádření

$$\mathcal{C} \equiv \begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 &= 15\,, \\ \phantom{7x_1 +{}} 4x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 &= -5\,. \end{cases} \qquad \triangle$$

Úloha 13.2. Nalezněte podprostor $\mathcal{C}$ v $\mathcal{E}_5$, který prochází bodem Q a je totálně kolmý k podprostoru $\mathcal{B}$. Přitom $Q = [1; 0; 1; 0; 1]$, respektive

$$\mathcal{B} = \begin{cases} 19x_1 + 11x_2 - 4x_3 + 5x_4 + x_5 &= 3\,, \\ 7x_1 + 2x_2 \phantom{{}- 4x_3} + x_4 &= 1\,. \end{cases}$$

Řešení: Zřejmě je $\dim \mathcal{B} = 3$, a tedy hledaným podprostorem $\mathcal{C}$ bude rovina (tj. $\dim \mathcal{C} = 2$). Podle Věty 13.3 však bázi $Z(\mathcal{B})^\perp = Z(\mathcal{C})$ tvoří vektory, jejichž souřadnicemi jsou koeficienty u neznámřch v neparametrickém vyjádření podprostoru $\mathcal{B}$. Dostáváme tedy okamžitě hledané řešení (v parametrickém tvaru).

Výsledek: podprostor $\mathcal{C}$ je určen parametricky $\mathcal{C} \equiv X = Q + r\underline{\mathbf{u}} + s\underline{\mathbf{v}}$, kde $Q = [1; 0; 1; 0; 1]$, $\underline{\mathbf{u}} = (19; 11; -4; 5; 1)$, $\underline{\mathbf{v}} = (7; 2; 0; 1; 0)$. $\triangle$

Úloha 13.3. Bodem $Q \in \mathcal{E}_3$ veďte v rovině ϱ přímku q, která je kolmá k přímce $p \equiv X = A + t\underline{\mathbf{u}}$. Přitom $Q = [2; 1; -3]$, $\varrho \equiv 3x - 2y + z = 1$, $A = [4; 5; 3]$, $\underline{\mathbf{u}} = (-6; 6; 1)$.

Řešení: Především je vidět, že $Q \in \varrho$, a úloha má tedy smysl. Hledejme přímku q v parametrickém tvaru za použití daného bodu Q, tzn. že

$$q \equiv X = Q + y\underline{\mathbf{w}},\ \text{kde musíme nalézt vektor } \underline{\mathbf{w}} = (w_1; w_2; w_3)\,.$$

Ale podle zadání je $\underline{\mathbf{w}} \in Z(\varrho)$, respektive $\underline{\mathbf{w}} \perp \underline{\mathbf{u}}$, tzn. po rozepsání

$$\begin{aligned} 3w_1 - 2w_2 + w_3 &= 0\,, \\ -6w_1 + 6w_2 + w_3 &= 0\,, \end{aligned}$$

odkud po vyřešení (například Gaussovou metodou) dostáváme $w_3 = 2k$, $w_2 = -3k$, $w_1 = -\frac{8}{3}k$, tzn. je například $\underline{\mathbf{w}} = (-8; -9; 6)$.

Výsledek: přímka q má parametrické vyjádření

$$q \equiv \begin{cases} x &= 2 - 8t\,, \\ y &= 1 - 9t\,, \\ z &= -3 + 6t\,. \end{cases} \qquad \triangle$$

14 Vnější a vektorový součin

V tomto paragrafu uvedeme nejprve další vlastnosti euklidovských vektorových prostorů, respektive orientovaných euklidovských vektorových prostorů, a potom některé jejich aplikace.

Úmluva 14.1. Nebude-li výslovně řečeno jinak, pak všude v tomto paragrafu předpokládáme, že ve studovaném n-rozměrném euklidovském vektorovém prostoru V_n je pevně zadána ortonormální báze

$$\mathscr{B} = \langle \underline{\mathbf{e}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{e}}_n \rangle \,, \tag{14.1}$$

v níž vyjadřujeme všechny souřadnice. Je-li prostor V_n navíc orientovaný, pak orientace je zvolena tak, že báze (14.1) je kladná. ♢

Definice 14.1. Nechť V_n je orientovaný n-rozměrný euklidovský vektorový prostor a nechť $\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_n$ je konečná posloupnost n vektorů z V_n, přičemž je $\underline{\mathbf{u}}_i = (u_{1i}; u_{2i}; \ldots; u_{ni})$, pro $i = 1, \ldots, n$. Pak reálné číslo

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \ldots & u_{nn} \end{vmatrix}$$

nazýváme *vnějším součinem vektorů* $\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_n$ a označujeme $[\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_n]$.

Poznámka 14.1. Rozmyslíme-li si důkladněji předchozí definici, vidíme ihned, že vnější součin $[\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_n]$ je definován pomocí souřadnic vektorů $\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_n$ v pevné kladné ortonormální bázi (14.1) a tudíž je na první pohled závislý na volbě této báze (což by se tedy mělo nějak projevit v slovním vyjádření a v symbolice). Následující věta však ukáže, že tomu tak není, a tedy definice vnějšího součinu je zformulována korektně. ♢

Věta 14.1. *Vnější součin vektorů $\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_n \in V_n$ nezávisí na volbě kladné ortonormální báze prostoru V_n.*

Důkaz. Nechť (14.1), respektive

$$\mathscr{B}' = \langle \underline{\mathbf{e}}'_1, \ldots, \underline{\mathbf{e}}'_n \rangle \tag{14.2}$$

jsou dvě kladné ortonormální báze prostoru V_n. Označme $[\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_n]_{\mathscr{B}}$, respektive $[\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_n]_{\mathscr{B}'}$, vnější součin vektorů $\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_n$ vyjádřený pomocí souřadnic těchto vektorů v bázi (14.1), respektive (14.2). Nechť A značí matici přechodu od báze (14.1) k bázi (14.2). Podle Věty 12.3 (3. část) je $|A| = \pm 1$ a protože (14.1) a (14.2) jsou souhlasné báze, je tedy $|A| = 1$.

Nechť nyní $\underline{\mathbf{u}}_i = (u_{1i}; u_{2i}; \ldots; u_{ni})$ vyjádřeno v bázi (14.1), respektive $\underline{\mathbf{u}}_i = (u'_{1i}; u'_{2i}; \ldots; u'_{ni})$ vyjádřeno v bázi (14.2), pro $i = 1, \ldots, n$. Užitím transformačních rovnic pro souřadnice vektorů (viz (3.12)) dostáváme pro $i = 1, \ldots, n$

$$\begin{pmatrix} u_{1i} \\ \vdots \\ u_{ni} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u'_{1i} \\ \vdots \\ u'_{ni} \end{pmatrix}, \text{ tzn. } \begin{pmatrix} u_{11} & \ldots & u_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & \ldots & u_{nn} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u'_{11} & \ldots & u'_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ u'_{n1} & \ldots & u'_{nn} \end{pmatrix},$$

odkud přechodem k determinantům užitím Cauchyovy věty a toho, že $|A| = 1$, dostáváme

$$\begin{vmatrix} u_{11} & \ldots & u_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & \ldots & u_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u'_{11} & \ldots & u'_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ u'_{n1} & \ldots & u'_{nn} \end{vmatrix}$$

neboli $[\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_n]_{\mathscr{B}} = [\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_n]_{\mathscr{B}'}$. □

Věta 14.2. *Nechť $\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_n$ je konečná posloupnost vektorů z V_n, $\underline{\mathbf{v}} \in V_n$ a $r \in \mathbb{R}$. Pak:*

1. $[\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_i + \underline{\mathbf{v}}, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_n] = [\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_n] + [\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{v}}, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_n]$ *pro všechna $i = 1, \ldots, n$.*
2. $[\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, r\underline{\mathbf{u}}_i, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_n] = r[\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_n]$ *pro všechna $i = 1, \ldots, n$.*
3. *Je-li $(k_1; \ldots; k_n)$ libovolné pořadí indexů $1, 2, \ldots, n$ a značí-li t celkový počet dvojic tvořících inverzi v tomto pořadí, pak*
$$[\underline{\mathbf{u}}_{k_1}, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_{k_n}] = (-1)^t [\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_n].$$
4. *Vnější součin $[\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_n] = 0 \Leftrightarrow$ vektory $\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_n$ jsou lineárně závislé.*
5. *Vnější součin $[\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_n]$ je kladný (respektive záporný) $\Leftrightarrow$ vektory $\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_n$ tvoří kladnou (respektive zápornou) bázi prostoru V_n.*

Důkaz. Vlastnosti 1. až 4. plynou ihned z vět o základních vlastnostech determinantů, uváděných v algebře. Část 5. pak plyne z 4. a z definice orientace prostoru V_n, uvědomíme-li si, že jsou-li vektory $\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_n$ lineárně nezávislé, pak (neboť $\dim V_n = n$) musí tvořit bázi V_n a vnější součin je vlastně determinantem matice přechodu od báze (14.1) k bázi $\langle \underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_n \rangle$. Přitom stále v rámci Úmluvy 14.1 předpokládáme, že báze (14.1) je kladná. □

Poznámka 14.2. Vlastnosti 1. až 5. v předchozí větě jednoznačně určují vnější součin vektorů. Mohli bychom tedy definovat vnější součin jako zobrazení

$$\underbrace{V_n \times \cdots \times V_n}_{n-\text{krát}} \to \mathbb{R},$$

které je

1. lineární v každé složce (vlastnosti 1. a 2.),

2. antisymetrické (vlastnost 3.),
3. splňuje vlastnosti 4. a 5.

Tato definice by byla evidentně nezávislá na zvolené bázi, ale odvodit z ní souřadnicové vyjádření vnějšího součinu vektorů by bylo obtížné. Proto jsme z "technických" důvodů zvolili opačný postup a definovali vnější součin přímo v souřadnicích a teprve odtud snadno odvodili vlastnosti 1. až 5. $\diamondsuit$

Definice 14.2. Nechť $\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_k$ je konečná posloupnost k vektorů z V_n. Pak determinant

$$\begin{vmatrix} (\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_1) & (\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2) & \ldots & (\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_k) \\ (\underline{\mathbf{u}}_2, \underline{\mathbf{u}}_1) & (\underline{\mathbf{u}}_2, \underline{\mathbf{u}}_2) & \ldots & (\underline{\mathbf{u}}_2, \underline{\mathbf{u}}_k) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\underline{\mathbf{u}}_k, \underline{\mathbf{u}}_1) & (\underline{\mathbf{u}}_k, \underline{\mathbf{u}}_2) & \ldots & (\underline{\mathbf{u}}_k, \underline{\mathbf{u}}_k) \end{vmatrix}$$

se nazývá *Grammův determinant* vektorů $\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_k$ a označuje se symbolem $G(\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_k)$.

Věta 14.3. *Nechť $\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_n$ je konečná posloupnost n vektorů z V_n. Pak platí*

$$G(\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_n) = [\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_n]^2 .$$

Důkaz. Tvrzení věty plyne bezprostředně rozepsáním z definice vnějšího součinu, užitím věty o determinantu transponované matice a vztahu (12.2) pro skalární součin dvou vektorů. $\square$

Poznámka 14.3. Uvědomme si především, že pojem Grammova determinantu je definován pro libovolný konečný počet vektorů. Je-li tento počet speciálně roven dimenzi prostoru V_n, pak (podle předchozí věty a Věty 14.2 (2. část)) je Grammův determinant $G(\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_n)$ nezáporné reálné číslo, které je rovno nule právě když vektory $\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_n$ jsou lineárně závislé. V dalším ukážeme, že Grammův determinant má stejnou vlastnost pro každou konečnou posloupnost vektorů. $\diamondsuit$

Věta 14.4. *Nechť $\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_k$ je libovolná posloupnost vektorů z V; respektive $\underline{\mathbf{z}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{z}}_k$ je ortogonální posloupnost vektorů z V taková, že*

$$\underline{\mathbf{z}}_1 = \underline{\mathbf{u}}_1; \quad \underline{\mathbf{z}}_i = t_{i1}\underline{\mathbf{u}}_1 + \cdots + t_{i,i-1}\underline{\mathbf{u}}_{i-1} + \underline{\mathbf{u}}_i; \quad t_{ij} \in \mathbb{R},\ i = 2, \ldots, k.$$

Potom je

$$G(\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_k) = (\underline{\mathbf{z}}_1, \underline{\mathbf{z}}_1) \cdot \cdots \cdot (\underline{\mathbf{z}}_k, \underline{\mathbf{z}}_k) .$$

Důkaz. Nechť $2 \le i \le k$; pak dosazením z předpokladů věty dostáváme pro libovolné $j = 1, \ldots, k$

$$(\underline{\mathbf{z}}_i, \underline{\mathbf{u}}_j) = t_{i1}(\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_j) + \cdots + t_{i,i-1}(\underline{\mathbf{u}}_{i-1}, \underline{\mathbf{u}}_j) + (\underline{\mathbf{u}}_i, \underline{\mathbf{u}}_j) ,$$

odkud plyne, že záměna vektoru $\underline{\mathbf{u}}_i$ vektorem $\underline{\mathbf{z}}_i$ v celém i-tém řádku ($2 \le i \le k$) Grammova determinantu $G(\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_k)$ je ekvivalentní přičtení k tomuto řádku jisté lineární kombinace předchozích řádků, což je úprava, která nezmění hodnotu determinantu. Dále podle předpokladu je $\underline{\mathbf{z}}_1 = \underline{\mathbf{u}}_1$, tzn. $(\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_j) = (\underline{\mathbf{z}}_1, \underline{\mathbf{u}}_j)$ pro libovolné $j = 1, \dots, n$. Dohromady tedy

$$\begin{vmatrix} (\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_1) & \dots & (\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_k) \\ \vdots & & \vdots \\ (\underline{\mathbf{u}}_k, \underline{\mathbf{u}}_1) & \dots & (\underline{\mathbf{u}}_k, \underline{\mathbf{u}}_k) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\underline{\mathbf{z}}_1, \underline{\mathbf{u}}_1) & \dots & (\underline{\mathbf{z}}_1, \underline{\mathbf{u}}_k) \\ \vdots & & \vdots \\ (\underline{\mathbf{z}}_k, \underline{\mathbf{u}}_1) & \dots & (\underline{\mathbf{z}}_k, \underline{\mathbf{u}}_k) \end{vmatrix}.$$

Podobně, nechť $2 \leq j \leq k$; pak pro libovolné $i = 1, \dots, k$ je

$$(\underline{\mathbf{z}}_i, \underline{\mathbf{z}}_j) = t_{j1}(\underline{\mathbf{z}}_i, \underline{\mathbf{u}}_1) + \dots + t_{j,j-1}(\underline{\mathbf{z}}_i, \underline{\mathbf{u}}_{j-1}) + (\underline{\mathbf{z}}_i, \underline{\mathbf{u}}_j)\,,$$

respektive $\underline{\mathbf{z}}_1 = \underline{\mathbf{u}}_1$, tzn. stejnou úvahou jako výše můžeme v posledně napsaném determinantu ve všech sloupcích místo $\underline{\mathbf{u}}_j$ psát $\underline{\mathbf{z}}_j$. Dostáváme

$$\begin{vmatrix} (\underline{\mathbf{z}}_1, \underline{\mathbf{u}}_1) & \dots & (\underline{\mathbf{z}}_1, \underline{\mathbf{u}}_k) \\ \vdots & & \vdots \\ (\underline{\mathbf{z}}_k, \underline{\mathbf{u}}_1) & \dots & (\underline{\mathbf{z}}_k, \underline{\mathbf{u}}_k) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\underline{\mathbf{z}}_1, \underline{\mathbf{z}}_1) & \dots & (\underline{\mathbf{z}}_1, \underline{\mathbf{z}}_k \\ \vdots & & \vdots \\ (\underline{\mathbf{z}}_k, \underline{\mathbf{z}}_1) & \dots & (\underline{\mathbf{z}}_k, \underline{\mathbf{z}}_k) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (\underline{\mathbf{z}}_1, \underline{\mathbf{z}}_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\underline{\mathbf{z}}_2, \underline{\mathbf{z}}_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (\underline{\mathbf{z}}_k, \underline{\mathbf{z}}_k) \end{vmatrix},$$

kde jsme využili toho, že posloupnost $\underline{\mathbf{z}}_1, \dots, \underline{\mathbf{z}}_k$ je ortogonální, tzn. $(\underline{\mathbf{z}}_i, \underline{\mathbf{z}}_j) = 0$, pro $i \neq j$. Dohromady pak $G(\underline{\mathbf{u}}_1, \dots, \underline{\mathbf{u}}_k) = (\underline{\mathbf{z}}_1, \underline{\mathbf{z}}_1) \cdot \dots \cdot (\underline{\mathbf{z}}_k, \underline{\mathbf{z}}_k)$. □

Důsledek 14.1. *Nechť $\underline{\mathbf{u}}_1, \dots, \underline{\mathbf{u}}_k$ je libovolná posloupnost vektorů z V_n. Pak platí:*

1. $G(\underline{\mathbf{u}}_1, \dots, \underline{\mathbf{u}}_k) \geq 0\,.$
2. $G(\underline{\mathbf{u}}_1, \dots, \underline{\mathbf{u}}_k) = 0 \Leftrightarrow$ *vektory $\underline{\mathbf{u}}_1, \dots, \underline{\mathbf{u}}_k$ jsou lineárně závislé.*

Důkaz. Nechť $\underline{\mathbf{z}}_1, \dots, \underline{\mathbf{z}}_k$ je ortogonální posloupnost vektorů z V_n, která vznikne z posloupnosti $\underline{\mathbf{u}}_1, \dots, \underline{\mathbf{u}}_k$ provedením Gramm-Schmidtova ortogonalizačního procesu. Jak bylo ukázáno v algebře, taková posloupnost existuje a má právě vlastnosti požadované v předpokladech Věty 14.4. Podle ní je tedy

$$G(\underline{\mathbf{u}}_1, \dots, \underline{\mathbf{u}}_k) = (\underline{\mathbf{z}}_1, \underline{\mathbf{z}}_1) \cdot \dots \cdot (\underline{\mathbf{z}}_k, \underline{\mathbf{z}}_k)\,,$$

odkud již plyne 1., neboť $(\underline{\mathbf{z}}_i, \underline{\mathbf{z}}_i) \geq 0$, respektive 2., neboť (jak víme z algebry) vektory $\underline{\mathbf{u}}_1, \dots, \underline{\mathbf{u}}_k$ jsou lineárně závislé právě když alespoň jeden z vektorů $\underline{\mathbf{z}}_1, \dots, \underline{\mathbf{z}}_k$ je nulový. □

V Kapitole 1 jsme v afinním prostoru zavedli pojem k-rozměrného rovnoběžnostěnu $\mathcal{R}_k = \mathcal{R}(A; \underline{\mathbf{u}}_1, \dots, \underline{\mathbf{u}}_k)$ daného bodem A a lineárně nezávislými vektory $\underline{\mathbf{u}}_1, \dots, \underline{\mathbf{u}}_k$ a dokázali jsme, že $\mathcal{R}_k$ je konvexní množinou. Nyní v euklidovském prostoru budeme definovat objem rovnoběžnostěnu $\mathcal{R}_k$ a odvodíme poměrně jednoduchý algoritmus pro jeho výpočet. Připomeňme, že na střední škole se počítala plocha rovnoběžníka, respektive objem rovnoběžnostěnu (což jsou v našem pojetí 2-, respektive 3-rozměrné rovnoběžnostěny) podle vzorce, který by se nepřesně, ale názorně dal vyjádřit obratem *velikost základny krát výška*. Uvidíme, že oba tyto vztahy vyjdou jako speciální případy našich obecných úvah.

Definice 14.3. Nechť $\mathcal{R}_k = \mathcal{R}(A; \underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_k)$ je k-rozměrný rovnoběžnostěn v $\mathcal{E}$. Pak *objem rovnoběžnostěnu* $\mathcal{R}_k$ označujeme symbolem $|\mathcal{R}_k|$ a definujeme induktivně takto:

Pro $k = 1$ je $|\mathcal{R}_1| = \|\underline{\mathbf{u}}_1\|$.

Je-li definován $|\mathcal{R}_{i-1}|$ pro $2 \le i \le k$, pak

$$|\mathcal{R}_i| = |\mathcal{R}_{i-1}| \cdot \|\underline{\mathbf{z}}_i\|\,,$$

kde $\underline{\mathbf{z}}_i = \overrightarrow{Y_{i-1}X_i}$, přičemž $X_i = A + \underline{\mathbf{u}}_i$ a Y_{i-1} je kolmý průmět bodu X_i na podprostor $\mathcal{B}_{i-1} = \{A; L(\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_{i-1})\}$.

Poznámka 14.4. Uvědomme si, že Věta 13.2 zaručuje existenci a jednoznačnost bodu Y_{i-1}. Explicitně zapsáno je

$$Y_{i-1} = \mathcal{B}_{i-1} \cap \mathcal{C}_{i-1}\,,$$

kde $\mathcal{C}_{i-1} = \{X_i; L(\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_{i-1})^\perp\}$. ♢

Poznámka 14.5. Předchozí definice zavádí objem k-rozměrného rovnoběžnostěnu pro libovolné $k \ge 1$. Je nutno si uvědomit, že pro $k = 1$ je $\mathcal{R}_1$ úsečka a její objem je totožný s délkou úsečky. Pro $k = 2$ budeme místo 2-rozměrného rovnoběžnostěnu používá obvyklejší název *rovnoběžník* a místo pojmu objem rovnoběžníka budeme používat název *obsah rovnoběžníka*. ♢

Z předchozí definice tedy plyne, že objem rovnoběžnostěnu $\mathcal{R}_k$ můžeme (pro $k \ge 2$) vyjádřit ve tvaru

$$|\mathcal{R}_k| = \|\underline{\mathbf{u}}_1\| \cdot \|\underline{\mathbf{z}}_2\| \cdot \ \ldots\ \cdot \|\underline{\mathbf{z}}_k\|\,, \tag{14.3}$$

kde vetory $\underline{\mathbf{z}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{z}}_k$ jsou konstruovány postupně, způsobem popsaným v definici. Je ihned vidět, že vztah (14.3) je nevhodný k praktickřm výpočtům, pro které bude výhodnější používat následující větu.

Věta 14.5. *Nechť $\mathcal{R}_k = \mathcal{R}(A; \underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_k)$ je k-rozměrný rovnoběžnostěn v $\mathcal{E}$. Pak pro jeho objem platí*

$$|\mathcal{R}_k| = +\sqrt{G(\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_k)}\,.$$

Důkaz. Je-li $k = 1$, pak $|\mathcal{R}_1| = \|\underline{\mathbf{u}}_1\| = \sqrt{(\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_1)} = \sqrt{G(\underline{\mathbf{u}}_1)}$ a tvrzení platí. Nechť tedy je $k \ge 2$. Pak umocněním vztahu (14.3) dostáváme

$$|\mathcal{R}_k|^2 = (\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_1) \cdot (\underline{\mathbf{z}}_2, \underline{\mathbf{z}}_2) \cdot \cdots \cdot (\underline{\mathbf{z}}_k, \underline{\mathbf{z}}_k)\,, \tag{14.4}$$

kde pro $i = 2, \dots, k$ je $\underline{\mathbf{z}}_i = \overrightarrow{Y_{i-1}X_i}$, přičemž $X_i = A + \underline{\mathbf{u}}_i$, respektive $Y_{i-1} \in \mathcal{B}_{i-1} = \{A; L(\underline{\mathbf{u}}_1, \dots, \underline{\mathbf{u}}_{i-1})\}$ a platí

$$\underline{\mathbf{z}}_i \perp \underline{\mathbf{u}}_1, \dots, \underline{\mathbf{u}}_{i-1} \,. \tag{14.5}$$

Nyní nejprve dokážeme, že posloupnost vektorů

$$\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{z}}_2, \dots, \underline{\mathbf{z}}_k \tag{14.6}$$

splňuje předpoklady Věty 14.4. Ale zřejmě (pro $i = 2, \dots, k$) platí

$$\underline{\mathbf{z}}_i = \overrightarrow{Y_{i-1}X_i} = \overrightarrow{Y_{i-1}A} + \overrightarrow{AX_i} = t_{i1}\underline{\mathbf{u}}_1 + \cdots + t_{i,i-1}\underline{\mathbf{u}}_{i-1} + \underline{\mathbf{u}}_i \,, \tag{14.7}$$

odkud vzhledem k (14.5) plyne, že $\underline{\mathbf{z}}_i \perp \underline{\mathbf{u}}_1$ a $\underline{\mathbf{z}}_i \perp \underline{\mathbf{z}}_s$ pro $s = 2, \dots, i-1$, a tedy posloupnost (14.6) je ortogonální.

Dostali jsme tedy posloupnost vektorů (14.6), která splňuje předpoklady Věty 14.4 a podle této věty platí

$$G(\underline{\mathbf{u}}_1, \dots, \underline{\mathbf{u}}_k) = (\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_1) \cdot (\underline{\mathbf{z}}_2, \underline{\mathbf{z}}_2) \cdot \dots \cdot (\underline{\mathbf{z}}_k, \underline{\mathbf{z}}_k) \,,$$

což spolu s (14.4) dává $|\mathcal{R}_k|^2 = G(\underline{\mathbf{u}}_1, \dots, \underline{\mathbf{u}}_k)$, odkud odmocněním dostáváme dokazované tvrzení. □

Důsledek 14.2. *Nechť $\mathcal{R}_n = \mathcal{R}(A; \underline{\mathbf{u}}_1, \dots, \underline{\mathbf{u}}_n)$ je n-rozměrný rovnoběžnostěn v n-rozměrném euklidovském prostoru $\mathcal{E}_n$. Pak objem rovnoběžnostěnu $\mathcal{R}_n$ je roven absolutní hodnotě vnějšího součinu vektorů $\underline{\mathbf{u}}_1, \dots, \underline{\mathbf{u}}_n$, tzn.*

$$|\mathcal{R}_n| = |[\underline{\mathbf{u}}_1, \dots, \underline{\mathbf{u}}_n]| \,.$$

Důkaz. Tvrzení plyne přímo z předchozí věty a z Věty 14.3. □

Definice 14.4. Nechť V_n, $n \geq 2$, je orientovaný euklidovský vektorový prostor. Nechť $\underline{\mathbf{u}}_1, \dots, \underline{\mathbf{u}}_{n-1} \in V_n$ a $\underline{\mathbf{w}} \in V_n$ je vektor takový, že pro každý vektor $\underline{\mathbf{x}} \in V_n$ je

$$(\underline{\mathbf{w}}, \underline{\mathbf{x}}) = [\underline{\mathbf{u}}_1, \dots, \underline{\mathbf{u}}_{n-1}, \underline{\mathbf{x}}] \,. \tag{14.8}$$

Pak vektor $\underline{\mathbf{w}}$ nazýváme *vektorovým součinem vektorů* $\underline{\mathbf{u}}_1, \dots, \underline{\mathbf{u}}_{n-1}$ a označujeme $\underline{\mathbf{w}} = \underline{\mathbf{u}}_1 \times \cdots \times \underline{\mathbf{u}}_{n-1}$.

Poznámka 14.6. Připomeňme, že podle Úmluvy 14.1 jsou všechny souřadnice vyjadřovány v pevné kladné ortonormální bázi (14.1) prostoru V_n. Vyjádříme-li nyní vztah (14.8) v souřadnicích, dostaneme

$$w_1x_1 + \cdots + w_nx_n = \begin{vmatrix} u_{11} & \dots & u_{1,n-1} & x_1 \\ u_{21} & \dots & u_{2,n-1} & x_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_{n1} & \dots & u_{n,n-1} & x_n \end{vmatrix}, \tag{14.9}$$

kde $\underline{\mathbf{u}}_i = (u_{1i}; u_{2i}; \ldots; u_{ni})$ pro $i = 1, \ldots, n-1$, $\underline{\mathbf{x}} = (x_1; \ldots; x_n)$, $\underline{\mathbf{w}} = (w_1; \ldots; w_n)$.

Vidíme, že souřadnice vektoru $\underline{\mathbf{w}}$ v (14.9) získáme rozvojem výše uvedeného determinantu podle posledního sloupce Laplaceovou větou (w_i je tedy algebraickým doplňkem prvku x_i). Z toho je zřejmé, že vektorový součin vektorů $\underline{\mathbf{w}}$ vždy existuje, je určen jednoznačně a závisí na pořadí vektorů $\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_{n-1}$.

Vektor $\underline{\mathbf{w}}$ je definován pomocí svých souřadnic v bázi (14.1). Při přechodu k jiné kladné ortonormální bázi budou jeho souřadnice samozřejmě jiné. Zůstává tedy otázkou, zda se pak jedná opět o tentýž vektor, tzn. zda je předchozí definice korektní. Ale pro každý vektor $\underline{\mathbf{x}} \in V_n$ jsou skalární součin $(\underline{\mathbf{w}}, \underline{\mathbf{x}})$ i vnější součin vektorů $[\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_{n-1}, \underline{\mathbf{x}}]$ nezávislé na volbě kladné ortonormální báze prostoru V_n, a tedy i vektorový součin vektorů je na volbě kladné báze nezávislý. $\diamondsuit$

Věta 14.6. *Nechť $\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_{n-1} \in V_n$ a nechť $\underline{\mathbf{w}}$ značí vektorový součin vektorů $\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_{n-1}$. Potom*

$$\underline{\mathbf{w}} = \underline{\mathbf{o}} \iff \text{vektory } \underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_{n-1} \text{ jsou lineárně závislé.}$$

Důkaz. Tvrzení ihned plyne z toho, že (viz algebra) hodnost matice je rovna maximálnímu řádu nenulového minoru, respektive maximálnímu počtu lineárně nezávislých sloupců. $\square$

Věta 14.7. *Nechť $\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_{n-1}$ jsou lineárně nezávislé vektory ve V_n, $n \geq 2$, a nechť $\underline{\mathbf{w}}$ je jejich vektorový součin. Označme $W = L(\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_{n-1})$. Pak platí:*

1. *$L(\underline{\mathbf{w}}) = W^\perp$ (to znamená, že podprostor generovaný vektorovým součinem vektorů $\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_{n-1}$ je roven ortogonálnímu doplňku podprostoru generovaného vektory $\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_{n-1}$).*
2. *$\|\underline{\mathbf{w}}\| = |[\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_{n-1}]_W|$ (to znamená, že velikost vektorového součinu $\underline{\mathbf{w}}$ vektorů $\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_{n-1}$ je rovna absolutní hodnotě vnějšího součinu těchto vektorů ve W).*
3. *$\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_{n-1}, \underline{\mathbf{w}}$ (v tomto pořadí) tvoří kladnou bázi prostoru V.*

Důkaz. 1. Užitím Věty 14.2 (4. část) a rovnice (14.8) dostáváme okamžitě rovnost $(\underline{\mathbf{w}}, \underline{\mathbf{u}}_i) = [\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_{n-1}, \underline{\mathbf{u}}_i] = 0$, tzn. $\underline{\mathbf{w}} \perp \underline{\mathbf{u}}_i$ pro každé $i = 1, \ldots, n-1$. Potom je $\underline{\mathbf{w}} \in W^\perp$, a tedy $L(\underline{\mathbf{w}}) \subseteq W^\perp$. Podle předpokladu věty je $\dim W = n-1$, tzn. $\dim W^\perp = 1 = \dim L(\underline{\mathbf{w}})$, odkud již dohromady dostáváme, že $L(\underline{\mathbf{w}}) = W^\perp$.

2. Nechť

$$\underline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{v}}_{n-1} \tag{14.10}$$

je libovolná kladná ortonormální báze W. Z 1. části plyne, že pro vhodné $k \in \mathbb{R}$ $(k \neq 0)$ je

$$\underline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{v}}_{n-1}, k\underline{\mathbf{w}} \tag{14.11}$$

kladnou ortonormální bází celého prostoru V. Nechť $\underline{\mathbf{u}}_i = (u_{1i}; \ldots; u_{n-1,i})$, $i = 1, \ldots, n-1$, v bázi (14.10) podprostoru W. Pak v bázi (14.11) celého prostoru V_n

je zřejmě

$$\underline{\mathbf{u}}_i = (u_{1i}; \dots; u_{n-1,i}; 0), \text{ pro } i = 1, \dots, n-1, \text{ respektive } \underline{\mathbf{w}} = (0; \dots; 0; \frac{1}{k}).$$

Označíme-li $[\underline{\mathbf{u}}_1, \dots, \underline{\mathbf{u}}_{n-1}]_W$ vnější součin vektorů $\underline{\mathbf{u}}_1, \dots, \underline{\mathbf{u}}_{n-1}$ ve W, respektive $[\underline{\mathbf{u}}_1, \dots, \underline{\mathbf{u}}_{n-1}, \underline{\mathbf{w}}]_{V_n}$ vnější součin vektorů $\underline{\mathbf{u}}_1, \dots, \underline{\mathbf{w}}$ ve V_n, pak je

$$\begin{aligned}
[\underline{\mathbf{u}}_1, \dots, \underline{\mathbf{u}}_{n-1}]_W &= \begin{vmatrix} u_{11} & \dots & u_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{n-1,1} & \dots & u_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \\
&= k \cdot \begin{vmatrix} u_{11} & \dots & u_{1,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_{n-1,1} & \dots & u_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{k} \end{vmatrix} = k \cdot [\underline{\mathbf{u}}_1, \dots, \underline{\mathbf{u}}_{n-1}, \underline{\mathbf{w}}]_{V_n} \\
&= k \cdot (\underline{\mathbf{w}}, \underline{\mathbf{w}}) = k \cdot \frac{1}{k^2} = \frac{1}{k}\,.
\end{aligned}$$

Ale zřejmě $\|\underline{\mathbf{w}}\| = \left|\frac{1}{k}\right|$, a tedy $\|\underline{\mathbf{w}}\| = \left|\frac{1}{k}\right| = |[\underline{\mathbf{u}}_1, \dots, \underline{\mathbf{u}}_{n-1}]_W|$.

3. Z předpokladu věty, užitím (14.8) a Věty 14.6 dostáváme, že

$$[\underline{\mathbf{u}}_1, \dots, \underline{\mathbf{u}}_{n-1}, \underline{\mathbf{w}}] = (\underline{\mathbf{w}}, \underline{\mathbf{w}}) > 0\,,$$

a tedy podle Věty 14.2 (5. část) vektory $\underline{\mathbf{u}}_1, \dots, \underline{\mathbf{u}}_{n-1}, \underline{\mathbf{w}}$ tvoří kladnou bázi prostoru V_n. □

Důsledek 14.3. *Nechť $\mathcal{R}_{n-1} = \mathcal{R}(A; \underline{\mathbf{u}}_1, \dots, \underline{\mathbf{u}}_{n-1})$ je $(n-1)$-rozměrný rovnoběžnostěn v euklidovském prostoru $\mathcal{E}_n$, $n \geq 2$. Pak objem rovnoběžnostěnu $\mathcal{R}_{n-1}$ je roven velikosti vektorového součinu vektorů $\underline{\mathbf{u}}_1, \dots, \underline{\mathbf{u}}_{n-1}$, tzn.*

$$|\mathcal{R}_{n-1}| = \|\underline{\mathbf{u}}_1 \times \dots \times \underline{\mathbf{u}}_{n-1}\|\,.$$

Důkaz. Tvrzení plyne přímo z 2. části předchozí věty a z Důsledku 14.2. □

Poznámka 14.7. Podrobnějším rozborem bychom mohli ukázat, že vektorový součin $\underline{\mathbf{w}}$ vektorů $\underline{\mathbf{u}}_1, \dots, \underline{\mathbf{u}}_{n-1}$ je jednoznačně charakterizován čtyřmi vlastnostmi vyslovenými v předchozích dvou větách. Pro $n = 3$ se tímto způsobem vektorový součin většinou dokonce definuje. V dalším se budeme blíže zabývat právě tímto, tj. 3-rozměrným případem. Je tedy pro dva vektory $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}} \in V_3$ vektorový součin $\underline{\mathbf{u}} \times \underline{\mathbf{v}} \in V_3$ jednoznačně určen následujícími vlastnostmi (podle Vět 14.6 a 14.7 a Důsledku 14.3):

(1) $\underline{\mathbf{u}} \times \underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{o}}$ právě když vektory $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}$ jsou lineárně závislé.

Jsou-li vektory $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}$ lineárně nezávislé, je

(2) $\underline{\mathbf{u}} \times \underline{\mathbf{v}} \perp \underline{\mathbf{u}}\,,\ \underline{\mathbf{u}} \times \underline{\mathbf{v}} \perp \underline{\mathbf{v}}\,,$

(3) vektory $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}$, $\underline{\mathbf{u}} \times \underline{\mathbf{v}}$ (v tomto pořadí) tvoří kladnou bázi V_3,

(4) $\|\underline{\mathbf{u}} \times \underline{\mathbf{v}}\|$ je roven obsahu rovnoběžníka určeného vektory $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}$ (viz Věta 14.7 (2. část) a Důsledek 14.2). ♢

Věta 14.8. *Nechť* $\underline{\mathbf{u}} = (u_1; u_2; u_3)$, $\underline{\mathbf{v}} = (v_1; v_2; v_3)$ *jsou vektory z* V_3. *Pak platí*

$$\left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right).$$

Důkaz. Přepišme vztah (14.10) pro $n = 3$ a vektory $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}$. Dostáváme

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x_1 \\ u_2 & v_2 & x_2 \\ u_3 & v_3 & x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} x_1 - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} x_3 =$$

$$= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} x_3\,,$$

a odtud přímo plyne tvrzení věty. □

Další vlastnosti vektorového součinu ve V_3 popisují následující věty.

Věta 14.9. *Nechť* $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{w}} \in V_3$, $r \in \mathbb{R}$ *libovolné. Pak platí:*

1. $\underline{\mathbf{v}} \times \underline{\mathbf{u}} = -(\underline{\mathbf{u}} \times \underline{\mathbf{v}})\,.$
2. $(r\underline{\mathbf{u}}) \times \underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{u}} \times (r\underline{\mathbf{v}}) = r(\underline{\mathbf{u}} \times \underline{\mathbf{v}})\,.$
3. $\underline{\mathbf{u}} \times (\underline{\mathbf{v}} + \underline{\mathbf{w}}) = (\underline{\mathbf{u}} \times \underline{\mathbf{v}}) + (\underline{\mathbf{u}} \times \underline{\mathbf{w}})$;
   $(\underline{\mathbf{v}} + \underline{\mathbf{w}}) \times \underline{\mathbf{u}} = (\underline{\mathbf{v}} \times \underline{\mathbf{u}}) + (\underline{\mathbf{w}} \times \underline{\mathbf{u}})\,.$
4. $(\underline{\mathbf{u}} \times \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{w}}) = [\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{w}}]\,.$

Důkaz. Části 1., 2. a 3. věty vyplřvají okamžitě z Věty 14.2 a Definice 14.4. Můžeme je dokázat snadno také tak, že vektory $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{w}}$ vyjádříme pomocí souřadnic a použijeme Větu 14.8, respektive běžná pravidla pro počítání se souřadnicemi vektorů.

Část 4. je speciálním případem (14.8), pro $n = 3$. □

Věta 14.10. *Nechť* $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{u}}', \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{v}}', \underline{\mathbf{w}} \in V_3$. *Pak platí:*

1. $(\underline{\mathbf{u}} \times \underline{\mathbf{v}}) \times \underline{\mathbf{w}} = (\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{w}})\underline{\mathbf{v}} - (\underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{w}})\underline{\mathbf{u}}\,.$
2. $(\underline{\mathbf{u}} \times \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{u}}' \times \underline{\mathbf{v}}') = \begin{vmatrix} (\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{u}}') & (\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}') \\ (\underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{u}}') & (\underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{v}}') \end{vmatrix}.$

Důkaz. Tvrzení dokážeme rozepsáním tak, že všechny vektory vyjádříme pomocí souřadnic a použijeme Větu 14.8, respektive běžná pravidla pro počítání se souřadnicemi vektorů. □

Důsledek 14.4. *Pro nenulové vektory* $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}} \in V_3$ *platí*

$$\|\underline{\mathbf{u}} \times \underline{\mathbf{v}}\| = \|\underline{\mathbf{u}}\| \cdot \|\underline{\mathbf{v}}\| \cdot \sin\varphi\,, \tag{14.12}$$

kde φ *je odchylka vektorů* $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}$.

Důkaz. Pro nenulové lineárně závislé vektory je tvrzení zřejmé.

Pro lineárně nezávislé vektory $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}$ dostaneme z druhé části předchozí věty a (11.1) při $\underline{\mathbf{u}}' = \underline{\mathbf{u}}$, $\underline{\mathbf{v}}' = \underline{\mathbf{v}}$

$$\begin{aligned}\|\underline{\mathbf{u}} \times \underline{\mathbf{v}}\|^2 &= \|\underline{\mathbf{u}}\|^2 \cdot \|\underline{\mathbf{v}}\|^2 - (\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}})^2 = \|\underline{\mathbf{u}}\|^2 \cdot \|\underline{\mathbf{v}}\|^2 - \|\underline{\mathbf{u}}\|^2 \cdot \|\underline{\mathbf{v}}\|^2 \cdot \cos^2 \varphi \\ &= \|\underline{\mathbf{u}}\|^2 \cdot \|\underline{\mathbf{v}}\|^2 (1 - \cos^2 \varphi) = \|\underline{\mathbf{u}}\|^2 \cdot \|\underline{\mathbf{v}}\|^2 \cdot \sin^2 \varphi \,.\end{aligned}$$

Odmocněním dostaneme požadované tvrzení. □

Poznámka 14.8. Objasněme si tvrzení před- chozí věty v názorné rovině, kde je obsah rovnoběžníka $\mathcal{R}(A; \underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}})$ dán jednak jako veli- kost vektorového součinu $\|\underline{\mathbf{u}} \times \underline{\mathbf{v}}\|$ (viz Poz- námka 14.7), jednak jako součin délky pod- stavy $\|\underline{\mathbf{u}}\|$ krát výška v (důsledek Poznámky 14.6). Ale z vlastností pravoúhlřch trojú- helníků je $v = \|\underline{\mathbf{v}}\| \cdot \sin \varphi$, kde φ je odchylka vektorů $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}$. Odtud dostaneme okamžitě (14.12). ♢

Obr. 14.1

Poznámka 14.9. Jak již bylo řečeno, pro $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}} \in V_3$ je $\underline{\mathbf{u}} \times \underline{\mathbf{v}} \in V_3$. Vidíme tedy, že vektorový součin je možno chápat jako operaci na množině V_3. Přitom tato operace není komutativní (plyne z Věty 14.9) a není ani asociativní, neboť například pro vektory $\underline{\mathbf{e}}_1, \underline{\mathbf{e}}_2$ dané kladné ortonormální báze $\underline{\mathbf{e}}_1, \underline{\mathbf{e}}_2, \underline{\mathbf{e}}_3$ je

$(\underline{\mathbf{e}}_1 \times \underline{\mathbf{e}}_1) \times \underline{\mathbf{e}}_2 = \underline{\mathbf{o}} \times \underline{\mathbf{e}}_2 = \underline{\mathbf{o}}\,,$

$\underline{\mathbf{e}}_1 \times (\underline{\mathbf{e}}_1 \times \underline{\mathbf{e}}_2) = \underline{\mathbf{e}}_1 \times \underline{\mathbf{e}}_3 = -\underline{\mathbf{e}}_2 \neq \underline{\mathbf{o}}\,.$

Na druhé straně je ale operace vektorového součinu oboustranně distributivní vzhledem k operaci sčítání vektorů (plyne z Věty 14.9).

Připomeňme, že vektorového součinu můžeme s výhodou použít v různých situacích při řešení úloh v 3-rozměrném euklidovském prostoru. Máme-li například zadánu přímku p neparametricky

$$p \equiv \begin{cases} a_1 x + a_2 y + a_3 z + a &= 0\,, \\ b_1 x + b_2 y + b_3 z + b &= 0\,, \end{cases}$$

pak vektor $\underline{\mathbf{u}}$, určující přímku p, vypočteme nejsnáze jako vektorový součin obou normálovřch vektorů (a_1, a_2, a_3) a (b_1, b_2, b_3), tzn.

$$\underline{\mathbf{u}} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) .$$ ♢

Úloha 14.1. Nalezněte všechny hodnoty parametru a, pro které jsou přímky p, q kolmé. Přitom:

$$p \equiv \begin{cases} 4x - y + az - 2 &= 0\,, \\ \quad ay - \ z + 7 &= 0\,, \end{cases} \qquad q \equiv \begin{cases} x + \ y - \ z - 3 &= 0\,, \\ 3x - ay - 4z + 1 &= 0\,. \end{cases}$$

Řešení: K okamžitému vyřešení úlohy stačí znát vektory určující dané přímky. Je-li totiž $Z(p) = L(\underline{\mathbf{u}})$, $Z(q) = L(\underline{\mathbf{v}})$, pak z definice kolmosti bezprostředně plyne, že $p \perp q$ právě když $(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}) = 0$. Vektory $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}$ však nejrychleji zjistíme jako vektorové součiny normálovřch vektorů rovin určujících obě zadané přímky. Tedy je

$$\underline{\mathbf{u}} = \left(\begin{vmatrix} -1 & a \\ a & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & a \end{vmatrix} \right) = (1 - a^2; 4; 4a)\,,$$

$$\underline{\mathbf{v}} = \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -a & -4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -a \end{vmatrix} \right) = (-4 - a; 1; -a - 3)\,.$$

Potom $(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}) = (1 - a^2)(-4 - a) + 4 + 4a(-a - 3) = a^3 - 13a$. Je tedy $(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}) = 0$ právě když $a^3 - 13a = a(a^2 - 13) = 0$, tzn. $a = 0$ nebo $a = \sqrt{13}$ nebo $a = -\sqrt{13}$.

Výsledek: přímky p, q jsou kolmé pro tři hodnoty parametru a: $a = 0$, $a = \sqrt{13}$, $a = -\sqrt{13}$. △

15 Vzdálenost

S pojmem vzdálenosti jsme se setkali již v Paragrafu 12, kdy jsme definovali vzdálenost dvou bodů. Na střední škole se kromě toho vyšetřuje vzdálenost bodu od přímky (v rovině), respektive vzdálenost bodu od roviny, a vzdálenost dvou rovnoběžných rovin (v 3-rozměrném prostoru). My se v tomto paragrafu budeme zabývat obecně pojmem vzdálenosti dvou podprostorů a některými jeho speciálními případy.

Definice 15.1. Nechť $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ jsou podprostory euklidovského (bodového) prostoru $\mathcal{E}$. Pak *vzdáleností podprostorů* $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ nazýváme nezáporné reálné číslo $v(\mathcal{B}, \mathcal{C})$, definované

$$v(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \min\{\overline{XY} | X \in \mathcal{B},\ Y \in \mathcal{C}\}.$$

Poznámka 15.1. Ve speciálních případech z definice plyne:

1. Jsou-li $\mathcal{B} = \{B\}$, $\mathcal{C} = \{C\}$ body, tzn. 0-rozměrné podprostory v $\mathcal{E}$, pak zřejmě $v(\{B\}, \{C\}) = \overline{BC}$. V tomto případě budeme místo $v(\{B\}, \{C\})$ psát stručněji $v(B, C)$. Podobně, je-li jeden z podprostorů 0-rozměrný, například $\mathcal{B} = \{B\}$, pak budeme psát $v(B, \mathcal{C})$ a hovořit o vzdálenosti bodu B od podprostoru $\mathcal{C}$.

2. Jestliže se podprostory $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ protínají, pak (volbou $X = Y \in \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$) je zřejmě $v(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = 0$.

Obecně však definice vzdálenosti podprostorů nezaručuje, že vyšetřované minimum vůbec existuje. Kladnou odpověď na tuto otázku dá následující věta. ♢

Věta 15.1. *Nechť $\mathcal{B} = \{B; W\}$, $\mathcal{C} = \{C; S\}$ jsou libovolné podprostory v $\mathcal{E}$. Pak jejich vzdálenost je rovna velikosti komponenty vektoru $\overrightarrow{BC}$ vzhledem k součtu zaměření $(W + S)$.*

Důkaz. Nechť

$$\overrightarrow{BC} = \underline{\mathbf{y}} + \underline{\mathbf{z}}, \text{ kde } \underline{\mathbf{y}} \in W + S, \ \underline{\mathbf{z}} \in (W+S)^{\perp}. \tag{15.1}$$

Podle důsledku Věty 11.3 toto vyjádření existuje a je jednoznačné. Chceme nyní dokázat, že $v(\mathcal{B},\mathcal{C}) = \|\underline{\mathbf{z}}\|$.

a) Pro libovolné body $X \in \mathcal{B}$, $Y \in \mathcal{C}$ ukážeme, že $\overline{XY} \geq \|\underline{\mathbf{z}}\|$. Ale $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CY} = (\overrightarrow{XB} + \overrightarrow{CY} + \underline{\mathbf{y}}) + \underline{\mathbf{z}}$, přičemž je zřejmě $(\overrightarrow{XB} + \overrightarrow{CY} + \underline{\mathbf{y}}) \in W + S$, a tudíž $\underline{\mathbf{z}} \perp (\overrightarrow{XB} + \overrightarrow{CY} + \underline{\mathbf{y}})$. Potom $\overline{XY}^2 = (\overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XY}) = ((\overrightarrow{XB} + \overrightarrow{CY} + \underline{\mathbf{y}}) + \underline{\mathbf{z}}, (\overrightarrow{XB} + \overrightarrow{CY} + \underline{\mathbf{y}}) + \underline{\mathbf{z}}) = \|\overrightarrow{XB} + \overrightarrow{CY} + \underline{\mathbf{y}}\|^2 + \|\underline{\mathbf{z}}\|^2 \geq \|\underline{\mathbf{z}}\|^2$. Tedy je $\overline{XY} \geq \|\underline{\mathbf{z}}\|$.

b) Nalezneme dva body $X_0 \in \mathcal{B}$, $Y_0 \in \mathcal{C}$, pro něž uvažované minimum nastane, tzn. pro něž $\overline{X_0Y_0} = \|\underline{\mathbf{z}}\|$. Podle (15.1) je $\underline{\mathbf{y}} \in W + S$, tzn. existují vektory $\underline{\mathbf{w}} \in W$, $\underline{\mathbf{s}} \in S$ tak, že $\underline{\mathbf{y}} = \underline{\mathbf{w}} + \underline{\mathbf{s}}$. Potom $\overrightarrow{BC} = \underline{\mathbf{w}} + \underline{\mathbf{s}} + \underline{\mathbf{z}}$, neboli $C = B + \underline{\mathbf{w}} + \underline{\mathbf{s}} + \underline{\mathbf{z}}$, odkud

$$C - \underline{\mathbf{s}} = (B + \underline{\mathbf{w}}) + \underline{\mathbf{z}}.$$

Označíme-li $B + \underline{\mathbf{w}} = X_0$, $C - \underline{\mathbf{s}} = Y_0$, pak $X_0 \in \mathcal{B}$, $Y_0 \in \mathcal{C}$ a $\underline{\mathbf{z}} = \overrightarrow{X_0Y_0}$. Je tedy $\|\underline{\mathbf{z}}\| = \|\overrightarrow{X_0Y_0}\| = \overline{X_0Y_0}$. □

Poznámka 15.2. Předchozí věta nám umožňuje výpočet vzdálenosti jakřchkoliv dvou podprostorů v $\mathcal{E}$ (včetně protínajících se podprostorů $\mathcal{B},\mathcal{C}$, pro něž vzhledem k Větě 2.3 musí vyjít $\underline{\mathbf{z}} = \underline{\mathbf{o}}$, a tedy $v(\mathcal{B},\mathcal{C}) = 0$). Poněvadž však popsaný výpočet může být někdy dosti pracnř, budeme se nyní zabývat speciálními typy podprostorů (body, přímkami, nadrovinami), pro něž odvodíme jednodušší vztahy k nalezení vzdálenosti. Některé z nich pak pro $\dim \mathcal{E} = 2$ (respektive $\dim \mathcal{E} = 3$) dají vzorce pro vzdálenost, známé ze střední školy. ♢

Věta 15.2. *Nechť R je bod a $\mathcal{B}$ je podprostor euklidovského prostoru $\mathcal{E}$. Nechť Q je pata kolmice vedené bodem R na podprostor $\mathcal{B}$. Pak pro vzdálenost bodu R od podprostoru $\mathcal{B}$ platí*

$$v(R,\mathcal{B}) = \overline{RQ}.$$

Důkaz. Je-li $R \in \mathcal{B}$, pak tvrzení zřejmě platí; nechť tedy $R \notin \mathcal{B}$. Nechť podprostor $\mathcal{B}$ je zadán bodem B a zaměřením W, tzn. $\mathcal{B} = \{B; W\}$. Nechť $\overrightarrow{RB} = \underline{\mathbf{y}} + \underline{\mathbf{z}}$, kde $\underline{\mathbf{y}} \in W$, $\underline{\mathbf{z}} \in W^{\perp}$. Označme $Q = R + \underline{\mathbf{z}}$, tzn. $\underline{\mathbf{z}} = \overrightarrow{RQ}$.

Podle Věty 15.1 (kde R uvažujeme jako 0-rozměrný podprostor se zaměřením $\{\underline{\mathbf{o}}\}$) je $v(R,\mathcal{B}) = \|\underline{\mathbf{z}}\| = \|\overrightarrow{RQ}\| = \overline{RQ}$.

Zbývá dokázat, že zvolený bod Q je právě pata kolmice vedené bodem R na podprostor $\mathcal{B}$. K tomu ale stačí si uvědomit, že ze vztahu $\overrightarrow{RB} = k + \underline{\mathbf{z}}$ plyne $B - \underline{\mathbf{y}} = R + \underline{\mathbf{z}} = Q \in \mathcal{B}$ a dále, že přímka $q = \{R; L(\underline{\mathbf{z}})\}$ je kolmá k $\mathcal{B}$ (neboť $\underline{\mathbf{z}} \in W^{\perp}$), přičemž $q \cap \mathcal{B} = Q$. □

Věta 15.3. *Nechť $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ jsou dva rovnoběžné podprostory v $\mathcal{E}$ takové, že $\dim \mathcal{B} \leq \dim \mathcal{C}$. Pak platí*

$$v(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = v(B_0, \mathcal{C}), \text{ kde } B_0 \text{ je libovolný bod z } \mathcal{B}.$$

Důkaz. Je-li $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$, pak tvrzení zřejmě platí; nechť tedy $\mathcal{B} \nsubseteq \mathcal{C}$. Vzhledem k předpokladům věty to však znamená, že $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \emptyset$. Nechť Q je pata kolmice vedené bodem B_0 na podprostor $\mathcal{C}$ a nechť $X \in \mathcal{B}$, $Y \in \mathcal{C}$ jsou libovolné body. Budeme dokazovat, že $\overline{XY} \geq \overline{B_0Q}$. Platí $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{XB_0} + \overrightarrow{B_0Q} + \overrightarrow{QY} = (\overrightarrow{XB_0} + \overrightarrow{QY}) + \overrightarrow{B_0Q}$, přičemž $\overrightarrow{B_0Q} \perp (\overrightarrow{XB_0} + \overrightarrow{QY})$, poněvadž $\overrightarrow{XB_0} \in Z(\mathcal{B}) \subseteq Z(\mathcal{C})$ a $\overrightarrow{QY} \in Z(\mathcal{C})$. Potom $\|\overrightarrow{XY}\|^2 = ((\overrightarrow{XB_0} + \overrightarrow{QY}) + \overrightarrow{B_0Q}, (\overrightarrow{XB_0} + \overrightarrow{QY}) + \overrightarrow{B_0Q}) = \|\overrightarrow{XB_0} + \overrightarrow{QY}\|^2 + \|\overrightarrow{B_0Q}\|^2 \geq \|\overrightarrow{B_0Q}\|^2$. Odmocněním dostáváme $\overline{XY} \geq \overline{B_0Q} = v(B_0, \mathcal{C})$, odkud podle definice vzdálenosti plyne tvrzení věty. □

Důsledek 15.1. *Nechť $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ jsou rovnoběžné podprostory v $\mathcal{E}$ takové, že $\dim \mathcal{B} = \dim \mathcal{C}$. Pak jejich vzdálenost $v(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ je rovna vzdálenosti libovolného bodu jednoho z těchto podprostorů od druhého podprostoru.*

Důkaz. Tvrzení je bezprostředním důsledkem předchozí věty. □

Věta 15.4. *Nechť $R = [r_1; \ldots ; r_n]$ je bod a $\mathcal{N} \equiv a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a = 0$ je nadrovina v euklidovském prostoru $\mathcal{E}_n$. Pak pro vzdálenost bodu R od nadroviny $\mathcal{N}$ platí*

$$v(R, \mathcal{N}) = \frac{|a_1r_1 + \cdots + a_nr_n + a|}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}} \,. \tag{15.2}$$

Důkaz. Z Věty 15.2 plyne, že $v(R, \mathcal{N}) = \overline{RQ}$, kde Q je pata kolmice q vedené bodem R na nadrovinu $\mathcal{N}$.

Hledejme nejprve souřadnice bodu Q. Zřejmě je $q \equiv X = R + t\underline{\mathbf{a}}$, kde $\underline{\mathbf{a}} = (a_1; \ldots ; a_n)$ je normálovř vektor nadroviny $\mathcal{N}$. Pak existuje $t_0 \in \mathbb{R}$ takové, že $Q = R + t_0\underline{\mathbf{a}}$, přičemž však $Q \in \mathcal{N}$, tzn.

$$a_1(r_1 + t_0a_1) + \cdots + a_n(r_n + t_0a_n) + a = 0\,,$$

odkud po úpravě dostáváme $t_0 = -\dfrac{a_1r_1 + \cdots + a_nr_n + a}{a_1^2 + \cdots + a_n^2}$. Je tedy

$$Q = \left[r_1 - \frac{a_1r_1 + \cdots + a_nr_n + a}{a_1^2 + \cdots + a_n^2}a_1, \ldots, r_n - \frac{a_1r_1 + \cdots + a_nr_n + a}{a_1^2 + \cdots + a_n^2}a_n\right].$$

Potom

$$
\begin{aligned}
v(R,\mathcal{N}) &= \overline{RQ} = \\
&= \sqrt{\frac{(a_1r_1+\cdots+a_nr_n+a)^2a_1^2}{(a_1^2+\cdots+a_n^2)^2}+\cdots+\frac{(a_1r_1+\cdots+a_nr_n+a)^2a_n^2}{(a_1^2+\cdots+a_n^2)^2}} = \\
&= \sqrt{\frac{(a_1r_1+\cdots+a_nr_n+a)^2(a_1^2+\cdots+a_n^2)}{(a_1^2+\cdots+a_n^2)^2}} = \\
&= \frac{|a_1r_1+\cdots+a_nr_n+a|}{\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}}.
\end{aligned}
$$

□

Definice 15.2. Nechť p, q jsou dvě mimoběžky v euklidovském prostoru $\mathcal{E}_n$, $n \geq 3$. Příčka p, q, která je k oběma mimoběžkám kolmá, se nazývá *osa mimoběžek* p, q.

Poznámka 15.3. Jsou-li $p = \{A; L(\underline{\mathbf{u}})\}$, $q = \{B; L(\underline{\mathbf{v}})\}$ dané mimoběžky v $\mathcal{E}_n$, $n \geq 3$, pak množina všech vektorů $\underline{\mathbf{w}} \in L(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}, \overrightarrow{AB})$, které jsou ortogonální k $\underline{\mathbf{u}}$ i $\underline{\mathbf{v}}$, je právě podprostor $L(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}})^\perp \subset L(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}, \overrightarrow{AB})$, který je zřejmě jednodimenzionální. Jinak řečeno, existuje (až na násobek nenulovým reálným číslem) jediný nenulový vektor $\underline{\mathbf{w}} \in L(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}, \overrightarrow{AB})$ takový, že $\underline{\mathbf{w}} \perp \underline{\mathbf{u}}$, $\underline{\mathbf{w}} \perp \underline{\mathbf{v}}$. Poněvadž však jistě $\underline{\mathbf{w}} \notin L(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}})$, pak podle výsledku Příkladu 6.1 existuje právě jedna osa mimoběžek p, q. ♢

Následující věta ukáže, jak se využije osy mimoběžek při výpočtu jejich vzdálenosti.

Věta 15.5. *Nechť p, q jsou mimoběžky v $\mathcal{E}_n$, $n \geq 3$. Pak vzdálenost $v(p, q)$ je rovna vzdálenosti průsečíků mimoběžek p, q s jejich osou.*

Důkaz. Nechť P (respektive Q) jsou průsečíky mimoběžek p (respektive q) s jejich osou. Nechť $X \in p$, $Y \in q$ jsou libovolné body. Dokážeme, že $\overline{XY} \geq \overline{PQ}$.

Platí $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{XP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QY} = (\overrightarrow{XP} + \overrightarrow{QY}) + \overrightarrow{PQ}$, přičemž zřejmě $\overrightarrow{PQ} \perp (\overrightarrow{XP} + \overrightarrow{QY})$. Potom však $\|\overrightarrow{XY}\|^2 = ((\overrightarrow{XP} + \overrightarrow{QY}) + \overrightarrow{PQ}, (\overrightarrow{XP} + \overrightarrow{QY}) + \overrightarrow{PQ}) = \|\overrightarrow{XP} + \overrightarrow{QY}\|^2 + \|\overrightarrow{PQ}\|^2 \geq \|\overrightarrow{PQ}\|^2$, odkud odmocněním dostáváme $\overline{XY} \geq \overline{PQ}$, což podle definice vzdálenosti dvou podprostorů dává tvrzení věty. □

Metody popsané v předchozích větách jsou někdy poměrně početně pracné. Pracnost je v podstatné míře ovlivněna způsobem zadání podprostorů. Následující věta dává pro parametrické určení podprostorů velice jednoduchý a rychlý způsob výpočtu, který je použitelný v libovolném případě.

Věta 15.6. *Nechť $\mathcal{B} = \{A; L(\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_r)\}$, $\mathcal{C} = \{B; L(\underline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{v}}_s)\}$ jsou dva podprostory v $\mathcal{E}_n$. Pak*

$$v(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \frac{\sqrt{G(\underline{\mathbf{w}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{w}}_m, \overrightarrow{AB})}}{\sqrt{G(\underline{\mathbf{w}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{w}}_m)}}, \tag{15.3}$$

kde posloupnost vektorů $\underline{\mathbf{w}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{w}}_m$ je bází prostoru $L(\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_r, \underline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{v}}_s)$.

Důkaz. Uvažujme dva rovnoběžné podprostory $\mathcal{D}_1 = \{A; L(\underline{\mathbf{w}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{w}}_m)\}$ a $\mathcal{D}_2 = \{B; L(\underline{\mathbf{w}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{w}}_m)\}$. Zřejmě $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{D}_1$ a $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}_2$. Z Věty 15.1 plyne, že $v(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = v(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ (plyne z toho, že $Z(\mathcal{B}) + Z(\mathcal{C}) = Z(\mathcal{D}_1) + Z(\mathcal{D}_2) = L(\underline{\mathbf{w}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{w}}_m)$). Zbytek tvrzení vyplřvá z Věty 14.5. V čitateli zlomku (15.3) je objem $(m+1)$-rozměrného rovnoběžnostěnu, který je určen vektory $\underline{\mathbf{w}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{w}}_m$, $\overrightarrow{AB}$, a ve jmenovateli je objem m-rozměrného rovnoběžnostěnu, který je určen vektory $\underline{\mathbf{w}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{w}}_m$. Podíl těchto objemů je tedy "výška" rovnoběžnostěnu, která udává vzdálenost rovnoběžných podprostorů, ve kterých leží odpovídající "základny". V našem případě je to vzdálenost podprostorů $\mathcal{D}_1$ a $\mathcal{D}_2$. $\square$

Důsledek 15.2. *Nechť $p = \{A; L(\underline{\mathbf{u}})\}$ je přímka a R je bod v $\mathcal{E}_n$, $n \geq 2$. Pak*

$$v(p, R) = \frac{\sqrt{G(\underline{\mathbf{u}}, \overrightarrow{AR})}}{\|\underline{\mathbf{u}}\|}\,. \tag{15.4}$$

Pro $n = 3$ je navíc

$$v(p, R) = \frac{\|\underline{\mathbf{u}} \times \overrightarrow{AR}\|}{\|\underline{\mathbf{u}}\|}\,. \tag{15.5}$$

Důkaz. První část tvrzení je důsledkem Věty 15.6, protože $G(\underline{\mathbf{u}}) = \|\underline{\mathbf{u}}\|^2$.

Druhá část tvrzení vyplřvá z toho, že číslo $\sqrt{G(\underline{\mathbf{u}}, \overrightarrow{AR})}$ udává obsah rovnoběžníka $\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}(A; \underline{\mathbf{u}}, \overrightarrow{AR})$, ale na základě Poznámky 14.7 (4) je tento obsah roven velikosti vektorového součinu $\underline{\mathbf{u}} \times \overrightarrow{AR}$. $\square$

Důsledek 15.3. *Nechť $p = \{A; L(\underline{\mathbf{u}})\}$, $q = \{B; L(\underline{\mathbf{v}})\}$ jsou mimoběžky v $\mathcal{E}_n$, $n \geq 3$. Pak*

$$v(p, q) = \frac{\sqrt{G(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}, \overrightarrow{AB})}}{\sqrt{G(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}})}}\,. \tag{15.6}$$

Důkaz. Toto tvrzení je důsledkem Věty 15.6 (situace v $\mathcal{E}_3$ viz Obr. 15.1). $\square$

Obr. 15.1

Úloha 15.1. Jsou dány roviny $\varrho = \{B; L(\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2)\}$, $\sigma = \{C; L(\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2)\}$. Určete vzdálenost rovin ϱ, σ (v závislosti na parametru a), je-li $B = [2; -1; 0; -1; -2]$,

$\underline{\mathbf{u}}_1 = (1;0;0;1;0)$, $\underline{\mathbf{u}}_2 = (2;-1;0;0;1)$; $C = [0;2;1;1;3]$, $\underline{\mathbf{v}}_1 = (1;1;1;1;0)$, $\underline{\mathbf{v}}_2 = (0;1;-1;4;a)$.

Řešení: Nejprve zjistíme, jak závisí vzájemná poloha rovin ϱ, σ na hodnotě parametru a. Použijeme Větu 6.9, tzn. vyšetříme hodnosti matic sestavených z vektorů $\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2$, resp. $\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2, \overrightarrow{BC}$. Dostaneme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & a \\ \hdashline -2 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+2 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix},$$

odkud plyne:

1. $a \neq -2 \implies$ roviny ϱ, σ jsou různoběžné, a $v(\varrho, \sigma) = 0$.
2. $a = -2 \implies$ roviny ϱ, σ jsou mimoběžné.

élohu tedy dále řešíme jen pro $a = -2$.

a) Metoda určení vzdálenosti podle Věty 15.1.

Označme $W = L(\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2) + L(\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2)$. Vidíme, že například vektory $\underline{\mathbf{u}} = (1,0,0,1,0)$, $\underline{\mathbf{v}} = (0;1;1;0;0)$, $\underline{\mathbf{w}} = (0;0;1;-2;1)$ tvoří bázi W. Hledáme vyjádření $\overrightarrow{BC} = \underline{\mathbf{y}} + \underline{\mathbf{z}}$, kde $\underline{\mathbf{y}} \in W$, $\underline{\mathbf{z}} \in W^{\perp}$, tzn. pak

$$\underline{\mathbf{z}} = \overrightarrow{BC} - t_1\underline{\mathbf{u}} - t_2\underline{\mathbf{v}} - t_3\underline{\mathbf{w}}\,,$$

odkud po dosazení a vynásobení obou stran skalárně vektorem $\underline{\mathbf{u}}$, respektive $\underline{\mathbf{v}}$, respektive $\underline{\mathbf{w}}$, dostaneme systém 3 lineárních rovnic o neznámřch t_1, t_2, t_3, který řešíme:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= 0 - 2t_1 \phantom{{}-2t_2} + 2t_3\,, \\ 0 &= 4 \phantom{{}+2t_1} - 2t_2 - t_3\,, \\ 0 &= 2 + 2t_1 - t_2 - 6t_3\,, \end{aligned}\right\} \implies t_1 = 0,\ t_2 = 2,\ t_3 = 0.$$

Tedy $\underline{\mathbf{z}} = \overrightarrow{BC} - 2\underline{\mathbf{v}} = (-2;1;-1;2;5)$, odkud pak $v(\varrho, \sigma) = \|\underline{\mathbf{z}}\| = \sqrt{35}$.

b) Metoda určení vzdálenosti podle Věty 15.6.

$$G(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{w}}, \overrightarrow{BC}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 43 \end{vmatrix} = 490;$$

$$G(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{w}}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 14. \text{ Odtud } v(\varrho, \sigma) = \frac{\sqrt{490}}{\sqrt{14}} = \sqrt{35}.$$

Výsledek: pro $a = -2$ je $v(\varrho, \sigma) = \sqrt{35}$; pro $a \neq -2$ je $v(\varrho, \sigma) = 0$. △

Úloha 15.2. Na přímce p v $\mathcal{E}_4$ nalezněte bod Q mající stejnou vzdálenost od bodů A, B. Přitom $A = [-1; 1; 1; 1]$, $B = [3; -1; -2; 2]$, respektive

$$p \equiv \begin{cases} x_1 + x_2 \qquad + x_4 &= 7\,, \\ x_1 \qquad + 2x_3 + x_4 &= 7\,, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 &= 9\,. \end{cases}$$

Řešení: Nalezneme parametrické vyjádření přímky p:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 9 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right),$$

odkud $x_3 = t$, tj. $x_4 = 5 - 3t$, $x_2 = 2t$, $x_1 = 2 + t$ (zde si povšimněte toho, že volba $x_3 = t$ je mnohem praktičtější než obvyklá volba $x_4 = t$, která by okamžitě vedla k počítání se zlomky). Tedy

$$p \equiv \begin{cases} x_1 &= 2 + t\,, \\ x_2 &= 2t\,, \\ x_3 &= t\,, \\ x_4 &= 5 - 3t\,, \end{cases}$$

a tedy $Q = [2 + t; 2t; t; 5 - 3t]$ pro pevné $t \in \mathbb{R}$, které určíme tak, aby platilo $\overline{QA} = \overline{QB}$, neboli (což je zde totéž) $\overline{QA}^2 = \overline{QB}^2$. Tedy $(3 + t)^2 + (2t - 1)^2 + (t - 1)^2 + (4 - 3t)^2 = (-1 + t)^2 + (2t + 1)^2 + (t + 2)^2 + (3 - 3t)^2$, odkud po úpravě dostáváme: $-12t = -12$, tzn. $t = 1$.

Výsledek: $Q = [3; 2; 1; 2]$. △

Poznámka 15.4. Je užitečné si rozmyslet, jak je to obecně s řešitelností předchozí úlohy. Zřejmě tato úloha nemusí mít vždy jediné řešení tak, jak tomu bylo výše. Stačí si totiž uvědomit, že množina bodů v $\mathcal{E}$, mající od daných dvou různých bodů stejnou vzdálenost, je jistá nadrovina $\mathcal{N}$ (ukáže se bezprostředním rozepsáním). Je-li přímka p zadána tak, že $p \parallel \mathcal{N}$, pak daná úloha nemá řešení, respektive má nekonečně mnoho řešení (podle toho, zda $p \nsubseteq \mathcal{N}$, respektive $p \subseteq \mathcal{N}$). ♢

16 Odchylka

Jednou ze základních metrickřch úloh středoškolské geometrie v rovině a ve 3-rozměrném prostoru bylo zjišťování odchylky dvou přímek, odchylky dvou rovin a odchylky přímky od roviny. V tomto paragrafu budeme provádět analogické úlohy v n-rozměrném euklidovském bodovém prostoru $\mathcal{E}$, přesněji řečeno, budeme určovat odchylky některých speciálních podprostorů (přímek a nadrovin) a popíšeme obecný algoritmus nalezení odchylky libovolných dvou podprostorů v $\mathcal{E}$. Připomeňme si naši dřívější úmluvu o tom, že souřadnice bodů, respektive vektorů, jsou vždy vyjadřovány v pevném kartézském repéru.

V Paragrafu 11 jsme definovali (Definice 11.2) odchylku vektorů v euklidovském vektorovém prostoru. Někdy (zejména v algebře) se místo termínu *odchylka vektorů* $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}$ používá též termínu *úhel vektorů* $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}$, který však z našeho hlediska není zcela adekvátní, neboť pojem úhlu byl zaveden v Paragrafu 9 v jiné souvislosti. Je však možné pomocí odchylky zavést pojem míry úhlu, jak ukážeme na závěr tohoto paragrafu.

Poznámka 16.1. Vztah (11.1) pro odchylku vektorů budeme často používat ve tvaru

$$(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}) = \|\underline{\mathbf{u}}\| \cdot \|\underline{\mathbf{v}}\| \cdot \cos\varphi\,,$$

který se na střední škole používá k definování skalárního součinu. ♢

Přímo z definice odchylky vektorů plynou její jednoduché vlastnosti. Jsou-li $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}} \in V$ nenulové vektory, φ jejich odchylka, pak zřejmě:

1. $\underline{\mathbf{u}} \perp \underline{\mathbf{v}} \Leftrightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

2. $\|\underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{v}}\|^2 = \|\underline{\mathbf{u}}\|^2 + \|\underline{\mathbf{v}}\|^2 - 2(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}) = \|\underline{\mathbf{u}}\|^2 + \|\underline{\mathbf{v}}\|^2 - 2 \cdot \|\underline{\mathbf{u}}\| \cdot \|\underline{\mathbf{v}}\| \cdot \cos\varphi$, (což lze interpretovat jako kosinovou větu pro trojúhelník ABC, kde $\underline{\mathbf{u}} = \overrightarrow{AB}$, $\underline{\mathbf{v}} = \overrightarrow{AC}$, a tedy $\underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{v}} = \overrightarrow{CB}$).

3. $\|\underline{\mathbf{u}} \times \underline{\mathbf{v}}\| = \|\underline{\mathbf{u}}\| \cdot \|\underline{\mathbf{v}}\| \cdot \sin\varphi$ (viz Důsledek 14.4).

Uvažme dále, že je-li φ odchylka nenulových vektorů $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}$, pak pro reálná čísla $r, s \neq 0$ je odchylka vektorů $r\underline{\mathbf{u}}$, $s\underline{\mathbf{v}}$ rovna buď φ nebo $(\pi - \varphi)$ (podle toho, zda čísla r, s mají stejná nebo opačná znaménka, jak plyne z (11.1) a z vlastností funkce kosinus, viz také Obr. 16.1). Proto je třeba odchylku jednorozměrných podprostorů ve V definovat následovně.

Obr. 16.1

Definice 16.1. Nechť $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}} \in V$ jsou nenulové vektory. Pak *odchylkou jednorozměrných podprostorů* $L(\underline{\mathbf{u}})$, $L(\underline{\mathbf{v}})$ ve V rozumíme reálné číslo φ splňující vztahy

$$\cos\varphi = \frac{|(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}})|}{\|\underline{\mathbf{u}}\| \cdot \|\underline{\mathbf{v}}\|} \quad \text{a} \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\,.$$

Označujeme $\varphi = \sphericalangle(L(\underline{\mathbf{u}}), L(\underline{\mathbf{v}}))$.

Poznámka 16.2. Poněvadž každý jednorozměrný podprostor ve V lze napsat ve tvaru $L(\underline{\mathbf{u}})$, pro vhodné $\underline{\mathbf{o}} \neq \underline{\mathbf{u}} \in V$, jedná se skutečně o definici odchylky jednorozměrných podprostorů ve V.

Aby byla předchozí definice korektní, je třeba ukázat její nezávislost na volbě vektorů báze podprostorů $L(\underline{\mathbf{u}})$, $L(\underline{\mathbf{v}})$. Nechť tedy $L(\underline{\mathbf{u}}) = L(\underline{\mathbf{u}}')$, $L(\underline{\mathbf{v}}) = L(\underline{\mathbf{v}}')$. Pak existují reálná čísla $r, s \neq 0$ tak, že $\underline{\mathbf{u}}' = r\underline{\mathbf{u}}$, $\underline{\mathbf{v}}' = s\underline{\mathbf{v}}$ a platí

$$\frac{|(\underline{\mathbf{u}}', \underline{\mathbf{v}}')|}{\|\underline{\mathbf{u}}'\| \cdot \|\underline{\mathbf{v}}'\|} = \frac{|(r\underline{\mathbf{u}}, s\underline{\mathbf{v}})|}{\|r\underline{\mathbf{u}}\| \cdot \|s\underline{\mathbf{v}}\|} = \frac{|rs| \cdot |(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}})|}{|r| \cdot \|\underline{\mathbf{u}}\| \cdot |s| \cdot \|\underline{\mathbf{v}}\|} = \frac{|(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}})|}{\|\underline{\mathbf{u}}\| \cdot \|\underline{\mathbf{v}}\|} .$$

Dále budeme nyní pomocí odchylky jednorozměrných podprostorů ve V definovat odchylku libovolných netriviálních podprostorů ve V. ♢

Definice 16.2. Nechť W, S jsou netriviální podprostory euklidovského vektorového prostoru V. Pak *odchylku podprostorů* W, S označujeme symbolem $\sphericalangle(W, S)$ a definujeme takto:

(i) Je-li $W \cap S = \{\underline{\mathbf{o}}\}$, pak klademe

$$\sphericalangle(W, S) = \min\{ \sphericalangle(L(\underline{\mathbf{u}}), L(\underline{\mathbf{v}})) | \underline{\mathbf{u}} \in W, \underline{\mathbf{v}} \in S, \underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}} \neq \underline{\mathbf{o}}\} .$$

(ii) Je-li $W \cap S \neq \{\underline{\mathbf{o}}\}$, označíme $P = W \cap (W \cap S)^{\perp}$, $Q = S \cap (W \cap S)^{\perp}$. Potom platí $P \cap Q = \{\underline{\mathbf{o}}\}$ a je-li $P \neq \{\underline{\mathbf{o}}\}$ a $Q \neq \{\underline{\mathbf{o}}\}$, klademe

$$\sphericalangle(W, S) = \sphericalangle(P, Q) .$$

Je-li $P = \{\underline{\mathbf{o}}\}$ nebo $Q = \{\underline{\mathbf{o}}\}$, klademe $\sphericalangle(W, S) = 0$.

Poznámka 16.3. Existence minima potřebného v předchozí definici plyne z Weierstrassovy věty (viz [DoDo]). Důkaz tohoto tvrzení nepatří do rámce těchto skript. ♢

Poznámka 16.4. Připomeňme, že netriviálním podprostorem ve V rozumíme podprostor různý od $\{\underline{\mathbf{o}}\}$ a od V.

Ověřme si výpočtem, že je skutečně $P \cap Q = \{\underline{\mathbf{o}}\}$, jak se tvrdí v definici. Ale $P \cap Q = W \cap (W \cap S)^{\perp} \cap S \cap (W \cap S)^{\perp} = (W \cap S) \cap (W \cap S)^{\perp} = \{\underline{\mathbf{o}}\}$.

Konečně, je nutné se přesvědčit o tom, že v případě jednorozměrných podprostorů W, S obě předchozí definice splřvají. Ale, je-li v tomto případě $W \cap S = \{\underline{\mathbf{o}}\}$, pak je to zřejmé, respektive je-li $W \cap S \neq \{\underline{\mathbf{o}}\}$, pak musí být zřejmě $W = S$, odkud $(W \cap S)^{\perp} = W^{\perp}$, a tedy $P = S = \{\underline{\mathbf{o}}\}$. Podle obou definic je shodně $\sphericalangle(W, S) = 0$.

Vidíme tedy, že předchozí definice je korektní a nyní ji obvyklřm způsobem použijeme k definování odchylky netriviálních podprostorů euklidovského bodového prostoru. ♢

Definice 16.3. Nechť $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ jsou netriviální podprostory euklidovského bodového prostoru $\mathcal{E}$. Pak odchylkou podprostorů $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ rozumíme odchylku jejich zaměření $Z(\mathcal{B}), Z(\mathcal{C})$ a označujeme ji symbolem $\sphericalangle(\mathcal{B}, \mathcal{C})$.

Poznámka 16.5. Vidíme, že odchylka podprostorů $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ závisí pouze na jejich zaměřeních a nikoliv na bodech určujících tyto podprostory. Jinak řečeno, jsou-li $\mathcal{B}', \mathcal{C}'$ podprostory v $\mathcal{E}$ takové, že $\mathcal{B}' \parallel \mathcal{B}$ a $\dim \mathcal{B}' = \dim \mathcal{B}$, respektive $\mathcal{C}' \parallel \mathcal{C}$ a $\dim \mathcal{C}' = \dim \mathcal{C}$, pak je $\sphericalangle(\mathcal{B}', \mathcal{C}') = \sphericalangle(\mathcal{B}, \mathcal{C})$. Je zřejmé, že předpoklad o rovnostech dimenzí byl v obou případech podstatný a nelze jej vynechat! ♢

Poznámka 16.6. Druhá část Definice 16.2 odchylky podprostorů je poněkud nenázorná. Jestliže se ale nad ní hlouběji zamyslíme, zjistíme, že se jedná o zobecnění definice odchylky dvou rovin v $\mathcal{E}_3$. Připomeňme, že na střední škole se odchylka dvou různoběžných rovin $\alpha = \{A; W\}$ a $\beta = \{B; S\}$ v $\mathcal{E}_3$ definovala tak, že se sestrojila rovina γ kolmá na $\alpha \cap \beta$. Ale $Z(\gamma) = (W \cap S)^\perp$, a potom $\sphericalangle(\alpha, \beta) = \sphericalangle(p, q)$, kde $p = \alpha \cap \gamma$ a $q = \beta \cap \gamma$. V našem případě $Z(p) = P = W \cap (W \cap S)^\perp$ a $Z(q) = Q = S \cap (W \cap S)^\perp$, a tedy dostáváme přesně druhou část Definice 16.2. $\diamondsuit$

Dále se budeme nejprve zabývat otázkou nalezení odchylky pro některé speciální podprostory v $\mathcal{E}$. Uvidíme, že pro $\dim \mathcal{E} = 2$, respektive 3, budou získané výsledky odpovídat výsledkům odvozeným na střední škole.

Věta 16.1. *Nechť $p \equiv X = A + t\underline{\mathbf{u}}$, $q \equiv X = B + t\underline{\mathbf{v}}$ jsou dvě přímky v $\mathcal{E}$ a nechť φ značí jejich odchylku. Potom*

$$\cos\varphi = \frac{|(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}})|}{\|\underline{\mathbf{u}}\| \cdot \|\underline{\mathbf{v}}\|}\,.$$

Důkaz. Tvrzení ihned plyne z předchozích definic. $\square$

Věta 16.2. *Nechť $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ jsou dva rovnoběžné (netriviální) podprostory v $\mathcal{E}$. Potom $\sphericalangle(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = 0$.*

Důkaz. Nechť $\mathcal{B} = \{B; W\}$, $\mathcal{C} = \{C; S\}$, $\mathcal{B} \parallel \mathcal{C}$. Potom je $W \subseteq S$ nebo $S \subseteq W$. Nechť $W \subseteq S$; potom $\{\underline{\mathbf{o}}\} \neq W \cap S$ a $(W \cap S)^\perp = W^\perp$, tzn. $P = W \cap (W \cap S)^\perp = \{\underline{\mathbf{o}}\}$, odkud podle definice je $\sphericalangle(W, S) = 0$, neboli $\sphericalangle(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = 0$.

V případě $S \subseteq W$ analogickřm způsobem dostaneme stejný výsledek. $\square$

Věta 16.3. *Nechť $p = \{A; L(\underline{\mathbf{u}})\}$ je přímka, $\mathcal{B} = \{B; W\}$ je (netriviální) podprostor v $\mathcal{E}$. Potom*

$$\sphericalangle(p, \mathcal{B}) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\,, & \textit{je-li } \underline{\mathbf{u}} \in W^\perp\,, \\ \sphericalangle(L(\underline{\mathbf{u}}), L(\underline{\mathbf{v}}))\,, & \textit{je-li } \underline{\mathbf{u}} \notin W^\perp\,, \end{cases}$$

kde $\underline{\mathbf{v}}$ značí ortogonální projekci vektoru $\underline{\mathbf{u}}$ na podprostor W.

Důkaz. Podle Definice 16.3 je $\sphericalangle(p, \mathcal{B}) = \sphericalangle(L(\underline{\mathbf{u}}), W)$, tzn. budeme počítat odchylku vektorových podprostorů $L(\underline{\mathbf{u}})$ a W.

1. Nechť $\underline{\mathbf{u}} \in W^\perp$; potom $L(\underline{\mathbf{u}}) \cap W = \{\underline{\mathbf{o}}\}$, přičemž pro libovolný nenulový vektor $\underline{\mathbf{w}} \in W$ je $\underline{\mathbf{w}} \perp \underline{\mathbf{u}}$, tzn. pak $\sphericalangle(L(\underline{\mathbf{u}}), L(\underline{\mathbf{w}})) = \frac{\pi}{2}$, a tedy dostáváme, že $\sphericalangle(p, \mathcal{B}) = \sphericalangle(L(\underline{\mathbf{u}}), W) = \frac{\pi}{2}$.

2. Nechť $\underline{\mathbf{u}} \notin W^\perp$; nechť $\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{y}} + \underline{\mathbf{z}}$, kde $\underline{\mathbf{y}} \in W$, $\underline{\mathbf{z}} \in W^\perp$ (tzn. $\underline{\mathbf{y}}$ je ortogonální projekce vektoru $\underline{\mathbf{u}}$ na podprostor W). Zřejmě je $\underline{\mathbf{y}} \neq \underline{\mathbf{o}}$ a mohou nastat dva případy:

a) $\underline{\mathbf{u}} \in W$, pak ale $\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{y}}$, a tedy $\sphericalangle(L(\underline{\mathbf{u}}), L(\underline{\mathbf{y}})) = 0$, respektive $L(\underline{\mathbf{u}}) \subseteq W$ a tedy $\sphericalangle(L(\underline{\mathbf{u}}), W) = 0$, podle Věty 16.2. Dohromady pak v tomto případě dostáváme, že $\sphericalangle(p, \mathcal{B}) = \sphericalangle(L(\underline{\mathbf{u}}), W) = \sphericalangle(L(\underline{\mathbf{u}}), L(\underline{\mathbf{y}}))$.

b) $\underline{\mathbf{u}} \notin W$, pak ale je $L(\underline{\mathbf{u}}) \cap W = \{\underline{\mathbf{o}}\}$. Nechť $\underline{\mathbf{w}}$ je libovolný nenulový vektor z W. Potom užitím Cauchyovy nerovnosti dostáváme

$$|(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{w}})| = |(\underline{\mathbf{y}} + \underline{\mathbf{z}}, \underline{\mathbf{w}})| = |(\underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{w}}) + 0| \leq \|\underline{\mathbf{y}}\| \cdot \|\underline{\mathbf{w}}\| \,.$$

Označme $\sphericalangle(L(\underline{\mathbf{u}}), L(\underline{\mathbf{y}})) = \varphi$, respektive $\sphericalangle(L(\underline{\mathbf{u}}), L(\underline{\mathbf{w}})) = \psi$. Potom je

$$\begin{aligned} \cos\psi &= \frac{|(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{w}})|}{\|\underline{\mathbf{u}}\| \cdot \|\underline{\mathbf{w}}\|} \leq \frac{\|\underline{\mathbf{y}}\| \cdot \|\underline{\mathbf{w}}\|}{\|\underline{\mathbf{u}}\| \cdot \|\underline{\mathbf{w}}\|} = \frac{\|\underline{\mathbf{y}}\| \cdot \|\underline{\mathbf{y}}\|}{\|\underline{\mathbf{u}}\| \cdot \|\underline{\mathbf{y}}\|} \\ &= \frac{|(\underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{z}}, \underline{\mathbf{y}})|}{\|\underline{\mathbf{u}}\| \cdot \|\underline{\mathbf{y}}\|} = \frac{|(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{y}})|}{\|\underline{\mathbf{u}}\| \cdot \|\underline{\mathbf{y}}\|} = \cos\varphi \,, \end{aligned}$$

odkud (vzhledem k tomu, že $0 \leq \varphi,\ \psi \leq \frac{\pi}{2}$) plyne, že $\varphi \leq \psi$. Tedy dohromady $\sphericalangle(L(\underline{\mathbf{u}}), L(\underline{\mathbf{y}})) = \min\{\sphericalangle(L(\underline{\mathbf{u}}), L(\underline{\mathbf{w}})) | \underline{\mathbf{w}} \in W, \underline{\mathbf{w}} \neq \underline{\mathbf{o}}\} = \sphericalangle(L(\underline{\mathbf{u}}), W) = \sphericalangle(p, \mathcal{B})$. □

Věta 16.4. *Nechť $p \equiv X = A + t\underline{\mathbf{u}}$, kde $\underline{\mathbf{u}} = (u_1; \dots ; u_n)$ je přímka, $\mathcal{N} \equiv a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a = 0$ je nadrovina v $\mathcal{E}$ a nechť φ značí odchylku přímky p a nadroviny $\mathcal{N}$. Pak platí*

$$\sin\varphi = \frac{|a_1u_1 + \dots + a_nu_n|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}\sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2}} \,. \tag{16.1}$$

Důkaz. Označme $\underline{\mathbf{a}} = (a_1; \dots ; a_n)$. Pak podle Věty 13.3 je $Z(\mathcal{N})^\perp = L(\underline{\mathbf{a}})$, a existuje tedy vyjádření vektoru $\underline{\mathbf{u}}$ ve tvaru

$$\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{y}} + k\underline{\mathbf{a}}, \text{ kde } \underline{\mathbf{y}} \in Z(\mathcal{N}) \,.$$

Potom však $(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{u}}) = (\underline{\mathbf{y}} + k\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{y}} + k\underline{\mathbf{a}}) = (\underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{y}}) + (k\underline{\mathbf{a}}, k\underline{\mathbf{a}})$. Nyní mohou nastat 3 případy:

1. $\underline{\mathbf{y}} = \underline{\mathbf{o}}$. Pak $\underline{\mathbf{u}} = k\underline{\mathbf{a}} = (ka_1; \dots ; ka_n)$, tzn. $\underline{\mathbf{u}} \in Z(\mathcal{N})^\perp$ a podle Věty 16.3 je $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Ale pak

$$\begin{aligned} \frac{|a_1u_1 + \dots + a_nu_n|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}\sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2}} &= \frac{|ka_1^2 + \dots + ka_n^2|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}\sqrt{k^2a_1^2 + \dots + k^2a_n^2}} \\ &= 1 = \sin\frac{\pi}{2} \,, \end{aligned}$$

tzn. platí vztah (16.1).

2. $k = 0$. Pak $\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{y}} \in Z(\mathcal{N})$, tzn. $L(\underline{\mathbf{u}}) \subseteq Z(\mathcal{N})$, a tedy $p \parallel \mathcal{N}$. Pak podle Věty 16.2 je $\varphi = 0$. Zároveň je $\underline{\mathbf{u}} \perp \underline{\mathbf{a}}$, tzn. $a_1u_1 + \dots + a_nu_n = 0$, odkud je již zřejmé, že platí (16.1).

3. $\underline{\mathbf{y}} \neq \underline{\mathbf{o}}$ a $k \neq 0$. Potom podle Věty 16.3 je $\varphi = \sphericalangle(L(\underline{\mathbf{u}}), L(\underline{\mathbf{y}}))$, a tedy je

$$\begin{aligned} \cos^2\varphi &= \frac{|(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{y}})|^2}{\|\underline{\mathbf{u}}\|^2 . \|\underline{\mathbf{y}}\|^2} = \frac{(\underline{\mathbf{y}} + k\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{y}})^2}{(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{u}})(\underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{y}})} = \frac{(\underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{y}})^2}{(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{u}})(\underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{y}})} = \frac{(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{u}}) - (k\underline{\mathbf{a}}, k\underline{\mathbf{a}})}{(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{u}})} = \\ &= 1 - \frac{(k\underline{\mathbf{a}}, k\underline{\mathbf{a}})^2}{(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{u}})(k\underline{\mathbf{a}}, k\underline{\mathbf{a}})} = 1 - \frac{(\underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{y}}, k\underline{\mathbf{a}})^2}{(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{u}})(k\underline{\mathbf{a}}, k\underline{\mathbf{a}})} = 1 - \frac{(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{a}})^2}{(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{u}})(\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{a}})} \,, \end{aligned}$$

a tedy
$$\frac{(\underline{\mathbf{u}},\underline{\mathbf{a}})^2}{(\underline{\mathbf{u}},\underline{\mathbf{u}})(\underline{\mathbf{a}},\underline{\mathbf{a}})}=1-\cos^2\varphi=\sin^2\varphi\,.$$
Protože však $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$, dostáváme odtud (po odmocnění a rozepsání skalárních součinů do souřadnic) dokazovaný vztah (16.1). □

Věta 16.5. *Nechť $\mathcal{N}_1,\mathcal{N}_2$ jsou nadroviny v $\mathcal{E}_n$, $n\ge 2$, nechť $\underline{\mathbf{a}}$, respektive $\underline{\mathbf{b}}$, je normálovř vektor nadroviny $\mathcal{N}_1$, respektive $\mathcal{N}_2$. Pak platí*
$$\sphericalangle(\mathcal{N}_1,\mathcal{N}_2)=\sphericalangle(L(\underline{\mathbf{a}}),L(\underline{\mathbf{b}}))\,.$$

Důkaz. Je-li $\mathcal{N}_1\parallel\mathcal{N}_2$, pak $L(\underline{\mathbf{a}})=L(\underline{\mathbf{b}})$ a věta zřejmě platí. Nechť tedy nadroviny $\mathcal{N}_1,\mathcal{N}_2$ nejsou rovnoběžné. Označme $Z(\mathcal{N}_1)=W$, $Z(\mathcal{N}_2)=S$. Pak dostaneme $\dim(W\cap S)=\dim W+\dim S-\dim(W+S)=n-1+n-1-n=n-2$, a tedy $\dim(W\cap S)^\perp=2$.

1. Předpokládejme, že $\dim\mathcal{E}>2$. Potom $W\cap S\ne\{\underline{\mathbf{o}}\}$ a označme $P=W\cap(W\cap S)^\perp$, $Q=S\cap(W\cap S)^\perp$. Platí $\dim P=\dim W+\dim(W\cap S)^\perp-\dim(W+(W\cap S)^\perp)=n-1+2-n=1$; a podobně $\dim Q=1$. Existují tedy vektory $\underline{\mathbf{u}},\underline{\mathbf{v}}\in Z(\mathcal{E})$ takové, že $P=L(\underline{\mathbf{u}})$, $Q=L(\underline{\mathbf{v}})$ a podle definice je
$$\sphericalangle(\mathcal{N}_1,\mathcal{N}_2)=\sphericalangle(L(\underline{\mathbf{u}}),L(\underline{\mathbf{v}}))\,.\tag{16.2}$$
Podle předpokladů věty je $\underline{\mathbf{a}}\in W^\perp\subseteq(W\cap S)^\perp$; $\underline{\mathbf{b}}\in S^\perp\subseteq(W\cap S)^\perp$. Dostáváme tedy, že $\underline{\mathbf{a}},\underline{\mathbf{b}},\underline{\mathbf{u}},\underline{\mathbf{v}}\in(W\cap S)^\perp$, přičemž jsou nenulové a platí $\underline{\mathbf{a}}\perp\underline{\mathbf{u}}$, $\underline{\mathbf{b}}\perp\underline{\mathbf{v}}$. Tedy například vektory
$$\frac{1}{\|\underline{\mathbf{a}}\|}\underline{\mathbf{a}}\,,\quad\frac{1}{\|\underline{\mathbf{u}}\|}\underline{\mathbf{u}}$$
tvoří ortonormální bázi podprostoru $(W\cap S)^\perp$. Je-li v této bázi $\underline{\mathbf{b}}=(b_1;b_2)$, pak je $\underline{\mathbf{v}}=(-kb_2;kb_1)$, pro vhodné $k\in\mathbb{R}$ (poněvadž $\underline{\mathbf{b}}\perp\underline{\mathbf{v}}$) a dále zřejmě $\underline{\mathbf{a}}=(\|\underline{\mathbf{a}}\|,0)$, $\underline{\mathbf{u}}=(0,\|\underline{\mathbf{u}}\|)$. Označme nyní $\sphericalangle(L(\underline{\mathbf{a}}),L(\underline{\mathbf{b}}))=\varphi$, $\sphericalangle(L(\underline{\mathbf{u}}),L(\underline{\mathbf{v}}))=\psi$. Pak platí
$$\cos\varphi=\frac{|\,\|\underline{\mathbf{a}}\|\cdot b_1|}{\|\underline{\mathbf{a}}\|\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}}=\frac{|b_1|}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}},\ \text{respektive}$$
$$\cos\psi=\frac{|\,\|\underline{\mathbf{u}}\|\cdot kb_1|}{\|\underline{\mathbf{u}}\|\cdot\sqrt{k^2b_1^2+k^2b_2^2}}=\frac{|b_1|}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}},$$
tzn. $\cos\varphi=\cos\psi$, přičemž $0\le\varphi,\psi\le\frac{\pi}{2}$, odkud dostáváme $\varphi=\psi$. Je tedy $\sphericalangle(L(\underline{\mathbf{u}}),L(\underline{\mathbf{v}}))=\sphericalangle(L(\underline{\mathbf{a}}),L(\underline{\mathbf{b}}))$, což spolu s (16.2) dává dokazované tvrzení.

2. Předpokládejme, že $\dim\mathcal{E}=2$. Potom $W\cap S=\{\underline{\mathbf{o}}\}$ a navíc v tomto případě $\mathcal{N}_1,\mathcal{N}_2$ jsou přímky, a tedy $W=L(\underline{\mathbf{w}})$, $S=L(\underline{\mathbf{s}})$ pro vhodné nenulové vektory $\underline{\mathbf{w}},\underline{\mathbf{s}}\in Z(\mathcal{E})$. Podle definice je $\sphericalangle(W,S)=\sphericalangle(L(\underline{\mathbf{w}}),L(\underline{\mathbf{s}}))$. Nyní se analogicky jako v 1. dokáže, že $\sphericalangle(L(\underline{\mathbf{w}}),L(\underline{\mathbf{s}}))=\sphericalangle(L(\underline{\mathbf{a}}),L(\underline{\mathbf{b}}))$. Potom však je $\sphericalangle(W,S)=\sphericalangle(L(\underline{\mathbf{a}}),L(\underline{\mathbf{b}}))$. □

Důsledek 16.1. *Nechť* $\mathcal{N}_1 \equiv a_1x_1+\cdots+a_nx_n+a=0$, $\mathcal{N}_2 \equiv b_1x_1+\cdots+b_nx_n+b=0$ *jsou nadroviny v* $\mathcal{E}$ *a nechť* φ *značí jejich odchylku. Potom*

$$\cos\varphi = \frac{|a_1b_1+\cdots+a_nb_n|}{\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}\,\sqrt{b_1^2+\cdots+b_n^2}}\,.$$

Důkaz. Toto tvrzení plyne bezprostředně z předchozí Věty 16.5 vzhledem k tomu, že $(a_1;\dots;a_n)$, respektive $(b_1;\dots;b_n)$, je normálovř vektor nadroviny $\mathcal{N}_1$, respektive $\mathcal{N}_2$. □

V předchozích větách jsme odvodili vztahy pro výpočet odchylky dvou podprostorů v $\mathcal{E}$ pro některé speciální případy (dvě přímky, dva rovnoběžné podprostory, přímka a podprostor, dvě nadroviny). Z Definic 16.2 a 16.3 je ihned vidět, že k vyřešení obecného případu by nám stačilo umět určit odchylku dvou podprostorů v $\mathcal{E}$, jejichž zaměření mají nulový průnik. Pro tuto situaci skutečně existuje poměrně jednoduchý algoritmus. Rozebereme nejdříve geometricky, jak bude tato situace vypadat, a z geometrického rozboru odvodíme algoritmus výpočtu odchylky i v tomto obecném případě.

Předpokládejme tedy, že W_k, S_l jsou dva podprostory ve V_n takové, že $W_k\cap S_l=\{\underline{\mathbf{o}}\}$. Podle Definice 16.2 je

$$\sphericalangle(W_k,S_l)=\min\{\sphericalangle(L(\underline{\mathbf{u}}),L(\underline{\mathbf{v}}))|\underline{\mathbf{u}}\in W_k,\underline{\mathbf{v}}\in S_l\}\,.$$

Předpokládejme, že nenulové vektory $\underline{\mathbf{u}}\in W_k, \underline{\mathbf{v}}\in S_l$ jsou právě ty vektory, které určují odchylku $\varphi=\sphericalangle(W_k,S_l)$. Potom

$$\sphericalangle(W_k,S_l)=\sphericalangle(L(\underline{\mathbf{u}}),S_l)=\sphericalangle(W_k,L(\underline{\mathbf{v}}))=\sphericalangle(L(\underline{\mathbf{u}}),L(\underline{\mathbf{v}}))\,.$$

Podle Věty 16.3 je

$$\varphi=\sphericalangle(L(\underline{\mathbf{u}}),S_l)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & \underline{\mathbf{u}}\in S_l^\perp\,,\\ \sphericalangle(\underline{\mathbf{u}},\underline{\mathbf{u}}'), & \underline{\mathbf{u}}\notin S_l^\perp\,,\end{cases}$$

kde $\underline{\mathbf{u}}'$ je ortogonální projekce vektoru $\underline{\mathbf{u}}$ na podprostor S_l. Podobně

$$\varphi=\sphericalangle(W,L(\underline{\mathbf{v}}))=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & \underline{\mathbf{v}}\in W_k^\perp\,,\\ \sphericalangle(\underline{\mathbf{v}},\underline{\mathbf{v}}'), & \underline{\mathbf{v}}\notin W_k^\perp\,,\end{cases}$$

kde $\underline{\mathbf{v}}'$ je ortogonální projekce vektoru $\underline{\mathbf{v}}$ na podprostor W_k. Dostáváme tedy, že vektory $\underline{\mathbf{u}}\in W_k$ a $\underline{\mathbf{v}}\in S_l$ určují odchylku podprostorů W_k, S_l jen tehdy, když $\underline{\mathbf{v}}'\in L(\underline{\mathbf{u}})$ a $\underline{\mathbf{u}}'\in L(\underline{\mathbf{v}})$. V případě, že $W_k\perp S_l$, tj. $W_k^\perp\subseteq S_l$ nebo $S_l^\perp\subseteq W_k$, jsou vektory $\underline{\mathbf{u}}'$ a $\underline{\mathbf{v}}'$ nulové a odchylka podprostorů je rovna $\frac{\pi}{2}$. Uvažujme tedy dále situaci, kdy W_k, S_l nejsou kolmé, tj. $\underline{\mathbf{u}}'\neq\underline{\mathbf{o}}\neq\underline{\mathbf{v}}'$.

Vzhledem k definici odchylky jednodimenzionálních podprostorů tak dostáváme, že vektory určující odchylku W_k, S_l musíme hledat mezi takovými vektory, že ortogonální projekce $\underline{\mathbf{u}}''$ vektoru $\underline{\mathbf{u}}'$ na podprostor W_k leží v $L(\underline{\mathbf{u}})$ a podobně ortogonální projekce $\underline{\mathbf{v}}''$ vektoru $\underline{\mathbf{v}}'$ na podprostor S_l leží v $L(\underline{\mathbf{v}})$, tj.

$$\underline{\mathbf{u}}''=s\underline{\mathbf{u}}\,,\qquad \underline{\mathbf{v}}''=r\underline{\mathbf{v}}\,.\tag{16.3}$$

Rozeberme situaci pro vektor $\underline{\mathbf{u}}$. Z Obr. 16.2 je zřejmé, že $0 \leq s \leq 1$ a z vlastností pravoúhlřch trojúhelníků je $\cos\varphi = \sqrt{s}$, kde $\varphi = \sphericalangle(L(\underline{\mathbf{u}}), L(\underline{\mathbf{v}}))$. Pro vektory splňující (16.3) je odchylka minimální pro maximální s.

Problém určení odchylky podprostorů W_k, S_l se tedy redukuje na problém nalezení vektorů $\underline{\mathbf{u}} \in W_k$ nebo ekvivalentně $\underline{\mathbf{v}} \in S_l$, takových, že platí (16.3). Z těchto vektorů potom vybereme ten vektor, který odpovídá maximální hodnotě s, respektive r.

Obr. 16.2

Věta 16.6. *Nechť $\underline{\mathbf{u}}_1, \dots, \underline{\mathbf{u}}_k$ je ortonormální báze W_k a $\underline{\mathbf{v}}_1, \dots, \underline{\mathbf{v}}_l$ je ortonormální báze S_l. Potom ortogonální projekce vektoru*

$$\underline{\mathbf{u}} = u_1\underline{\mathbf{u}}_1 + \dots + u_k\underline{\mathbf{u}}_k \in W_k\,, \quad \textit{resp. } \underline{\mathbf{v}} = v_1\underline{\mathbf{v}}_1 + \dots + v_l\underline{\mathbf{v}}_l \in S_l\,, \tag{16.4}$$

na podprostor S_l, respektive W_k, je vektor

$$\underline{\mathbf{u}}' = u'_1\underline{\mathbf{v}}_1 + \dots + u'_l\underline{\mathbf{v}}_l \in S_l\,, \quad \textit{resp. } \underline{\mathbf{v}}' = v'_1\underline{\mathbf{u}}_1 + \dots + v'_k\underline{\mathbf{u}}_k \in W_k\,, \tag{16.5}$$

takový, že

$$\begin{pmatrix} u'_1 \\ \vdots \\ u'_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{v}}_1) & \cdots & (\underline{\mathbf{u}}_k, \underline{\mathbf{v}}_1) \\ \vdots & & \vdots \\ (\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{v}}_l) & \cdots & (\underline{\mathbf{u}}_k, \underline{\mathbf{v}}_l) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix},$$

respektive

$$\begin{pmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{v}}_1) & \cdots & (\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{v}}_l) \\ \vdots & & \vdots \\ (\underline{\mathbf{u}}_k, \underline{\mathbf{v}}_1) & \cdots & (\underline{\mathbf{u}}_k, \underline{\mathbf{v}}_l) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_l \end{pmatrix}.$$

Důkaz. Rozložme vektor $\underline{\mathbf{u}} \in W_k$ na ortogonální projekci a komponentu vzhledem k podprostoru S_l, tj.

$$\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{u}}' + \underline{\mathbf{y}}\,, \quad \underline{\mathbf{u}}' \in S_l\,, \ \underline{\mathbf{y}} \in S_l^{\perp}\,.$$

Dosazením z (16.4) a (16.5) dostaneme

$$u_1\underline{\mathbf{u}}_1 + \dots + u_k\underline{\mathbf{u}}_k = u'_1\underline{\mathbf{v}}_1 + \dots + u'_l\underline{\mathbf{v}}_l + \underline{\mathbf{y}}$$

a skalárním násobením vektory $\underline{\mathbf{v}}_i$, $i = 1, \dots, l$, dostaneme ihned dokazované tvrzení ve tvaru

$$u'_i = \sum_{j=1}^{k} (\underline{\mathbf{u}}_j, \underline{\mathbf{v}}_i) u_j\,.$$

Pro vektor $\underline{\mathbf{v}} \in S_l$ postupujeme obdobně. $\square$

Matice $A = \begin{pmatrix} (\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{v}}_1) & \cdots & (\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{v}}_l) \\ \vdots & & \vdots \\ (\underline{\mathbf{u}}_k, \underline{\mathbf{v}}_1) & \cdots & (\underline{\mathbf{u}}_k, \underline{\mathbf{v}}_l) \end{pmatrix}$ je tedy maticí lineárního zobrazení z S_l na W_k daného zúžením (na podprostor S_l) ortogonální projekce na W_k a vyjádřeného v ortonormálních bázích $\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_k$ a $\underline{\mathbf{v}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{v}}_l$. Matice A' je potom podobně matice lineárního zobrazení W_k na S_l daného zúžením (na podprostor W_k) ortogonální projekce na S_l.

Jako důsledek dostáváme, že složením ortogonální projekce W_k na S_l a ortogonální projekce S_l na W_k je lineární zobrazení na W_k s maticí AA'. Potom ale vektor $\underline{\mathbf{u}}''$, který je obrazem vektoru $\underline{\mathbf{u}} \in W_k$ v tomto zobrazení, je dán souřadnicově

$$\begin{pmatrix} u_1'' \\ \vdots \\ u_k'' \end{pmatrix} = AA' \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix} .$$

Podmínka $\underline{\mathbf{u}}'' = s\underline{\mathbf{u}}$ pak dává, že hledaný vektor $\underline{\mathbf{u}}$ je vlastním vektorem matice AA', tj. jeho souřadnice $(u_1; \ldots; u_k)$ v bázi $\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_k$ musí splňovat homogenní soustavu rovnic

$$(AA' - \lambda E_k)(\underline{\mathbf{u}}) = (\underline{\mathbf{o}}) ,$$

kde $\lambda \in \mathbb{R}$ a E_k je jednotková matice řádu k. Ale tato soustava má nenulové řešení právě tehdy, je-li

$$|AA' - \lambda E_k| = 0 . \tag{16.6}$$

Z vlastností matic (důkazy těchto tvrzení přesahují rámec těchto skript) jsou všechny kořeny $\lambda_1; \ldots; \lambda_k$ předchozí rovnice reálné (nemusí být navzájem různé) a splňují $0 \leq \lambda_i \leq 1$. Z výše uvedeného rozboru vyplřvá, že

$$\cos\varphi = +\sqrt{s} ,$$

kde s je největší z kořenů rovnice (16.6).

I když se uvedený postup nalezení odchylky φ zdá být celkem jednoduchý, už při povrchním rozboru se ukáže, že má svoje úskalí (například nalezení kořenů rovnice (16.6)). To jsou však úvahy, které již přesahují rámec tohoto textu.

Na závěr tohoto paragrafu se ještě alespoň stručně zmíníme o tom, jak je možno *měřit* úhly, tzn. o zavedení míry úhlu, o níž ukážeme, že je aditivní. Všechny naše úvahy budeme provádět v euklidovské rovině, tzn. ve dvourozměrném euklidovském prostoru.

Připomeňme, že úhel jsme definovali v Paragrafu 9 jakožto průnik dvou polorovin v afinní rovině, jejichž hraniční přímky byly různoběžné. takový úhel byl pak jednoznačně určen svým vrcholem V a dvěma polopřímkami $(V; A)$, $(V; B)$, nazývanými ramena úhlu. Dodejme k tomu, že přímřm úhlem s vrcholem V budeme rozumět polorovinu $\mathcal{P}$ takovou, že V je bodem její hraniční přímky. Obě polopřímky s počátkem V, obsažené v hraniční přímce, budeme pak nazývat rameny tohoto přímého úhlu.

Pod pojmem úhel budeme nyní rozumět buď úhel definovaný v Paragrafu 9 nebo přímř úhel.

Jak jsme již řekli, budeme chtít ukázat, že míra úhlu je aditivní. Pro tento účel bude třeba nejprve říci, co to znamená, že úhel α se dělí na dva jiné úhly.

Definice 16.4. Nechť je dán úhel α s rameny $(V;A)$, $(V;B)$. Řekneme, že *úhel α se dělí na úhly α'* a α'', jestliže existuje bod $C \in \alpha$, $C \notin (V;A)$, $C \notin (V;B)$ tak, že α' je úhel s rameny $(V;A)$, $(V;C)$ a α'' je úhel s rameny $(V;C)$, $(V;B)$ (viz Obr. 16.3).

Poznámka 16.7. Nechť
$$\underline{\mathbf{e}}_1, \underline{\mathbf{e}}_2 \tag{16.7}$$
je kladná ortonormální báze zaměření V euklidovské roviny. Nechť $\underline{\mathbf{x}} \in V$ je normovaný vektor (tzn. $\|\underline{\mathbf{x}}\| = 1$), přičemž $\underline{\mathbf{x}} = (x_1; x_2)$ v bázi (16.7). Platí tedy
$$\underline{\mathbf{x}} = x_1\underline{\mathbf{e}}_1 + x_2\underline{\mathbf{e}}_2\,. \tag{16.8}$$
Jestliže φ značí odchylku vektorů $\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{e}}_1$, pak po skalárním vynásobení (16.8) vektorem $\underline{\mathbf{e}}_1$, respektive $\underline{\mathbf{e}}_2$, dostáváme
$$x_1 = (\underline{\mathbf{x}}; \underline{\mathbf{e}}_1) = \cos\varphi, \;\text{ respektive } x_2 = (\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{e}}_2) = \begin{cases} \sin\varphi\,, & \text{pro } x_2 \geq 0\,, \\ -\sin\varphi\,, & \text{pro } x_2 < 0\,. \end{cases}$$
V závislosti na znaménku souřadnice x_2 tedy dostáváme
$$\underline{\mathbf{x}} = (\cos\varphi, \pm\sin\varphi)\,. \qquad \diamondsuit \tag{16.9}$$

Nyní už je vše připraveno k tomu, abychom mohli definovat míru úhlu a ukázat o ní, že je aditivní.

Definice 16.5. Nechť α je úhel s rameny $(V;A)$, $(V;B)$. Pak odchylku vektorů $\overrightarrow{VA}, \overrightarrow{VB}$ nazýváme *mírou úhlu α* a označujeme symbolem $m(\alpha)$.

Věta 16.7. *Nechť α je úhel, který se dělí na úhly α' a α''. Potom platí*
$$m(\alpha) = m(\alpha') + m(\alpha'')\,.$$

Důkaz. Nechť α je úhel s rameny $(V;A)$, $(V;B)$; nechť α' je úhel s rameny $(V;A)$, $(V;C)$, respektive α'' je úhel s rameny $(V;C)$, $(V;B)$, kde $C \in \alpha$ je bod, $C \notin (V;A)$, $C \notin (V;B)$.

Zvolme normálové vektory $\underline{\mathbf{u}}$, respektive $\underline{\mathbf{v}}$, resp. $\underline{\mathbf{w}}$, tak, aby tyto vektory byly kladnými násobky vektorů $\overrightarrow{VC}$, respektive $\overrightarrow{VA}$, respektive $\overrightarrow{VB}$ (viz Obr. 16.3), a označme φ, respektive φ', respektive φ'', odchylku vektorů $\underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{w}}$, respektive $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}$, respektive $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{w}}$. Potom je tedy $m(\alpha) = \varphi$, respektive $m(\alpha') = \varphi'$, respektive $m(\alpha'') = \varphi''$.

Obr. 16.3

Dále zvolme kladnou ortonormální bázi (16.7) tak, aby $\underline{\mathbf{e}}_1 = \underline{\mathbf{u}}$ (víme, že to lze jistě provést). Potom však druhé souřadnice vektorů $\underline{\mathbf{v}}$ a $\underline{\mathbf{w}}$ musí mít opačná znaménka a ze (16.9) plyne, že

$$\underline{\mathbf{v}} = (\cos\varphi', \pm\sin\varphi'),\ \underline{\mathbf{w}} = (\cos\varphi'', \pm\sin\varphi'')\,.$$

V obou případech však dostáváme

$$\cos\varphi = (\underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{w}}) = \cos\varphi'\cos\varphi'' - \sin\varphi'\sin\varphi'' = \cos(\varphi' + \varphi'')$$

užitím součtovřch vzorců. Odtud pak vyplřvá, že $\varphi = \varphi' + \varphi''$, neboli $m(\alpha) = m(\alpha') + m(\alpha'')$, což jsme měli dokázat. $\square$

Úloha 16.1. Nalezněte odchylku φ přímky $p = \{A; L(\underline{\mathbf{u}})\}$ a podprostoru $\mathcal{B} \equiv X = B + t_1\underline{\mathbf{v}}_1 + t_2\underline{\mathbf{v}}_2 + t_3\underline{\mathbf{v}}_3$, je-li $A = [2; 1; 2; 3]$, $\underline{\mathbf{u}} = (1; 0; 3; 0)$; $B = [1; 1; 1; 1]$, $\underline{\mathbf{v}}_1 = (1; 1; 4; 5)$, $\underline{\mathbf{v}}_2 = (5; 3; 4; -3)$, $\underline{\mathbf{v}}_3 = (2; -1; 1; 2)$.

Řešení: Především si uvědomme, že zadávání bodů A, B je pro řešení úlohy naprosto nepodstatné, neboť odchylka φ závisí pouze na zaměřeních obou podprostorů.

Vektory $\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2, \underline{\mathbf{v}}_3$ jsou lineárně nezávislé, tzn. $\dim\mathcal{B} = 3$ a $\mathcal{B}$ je nadrovina v $\mathcal{E}_4$. K výpočtu φ bude zřejmě mnohem výhodnější použít Větu 16.4 než obecnější Větu 16.3. Nalezneme tedy nejprve normálovř vektor $\underline{\mathbf{n}}$ nadroviny $\mathcal{B}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{odkud:} \begin{array}{l} x_3 = -2x_4\,, \\ x_2 = 2x_4\,, \\ x_1 = x_4\,, \end{array}$$

a tedy $\underline{\mathbf{n}} = (1; 2; -2; 1)$.

Podle Věty 16.4 pak je $\sin\varphi = \frac{|-5|}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}} = \frac{1}{2}$, a tedy $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$. $\triangle$

Úloha 16.2. Nalezněte odchylku φ podprostorů $\mathcal{B}, \mathcal{C}$, kde $\mathcal{B} = \{B; W\}$, $\mathcal{C} = \{C; S\}$, $B = [2; 1; 0; 1]$, $W = L(\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2)$, $\underline{\mathbf{u}}_1 = (1; 1; 1; 1)$, $\underline{\mathbf{u}}_2 = (1; -1; 1; -1)$, $C = [1; 0; 1; 1]$, $S = L(\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2)$, $\underline{\mathbf{v}}_1 = (2; 2; 1; 0)$, $\underline{\mathbf{v}}_2 = (1; -2; 2; 0)$.

Řešení: Vidíme, že $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ jsou dvě roviny (nikoliv rovnoběžné) ve 4-rozměrném euklidovském prostoru; nejedná se tedy o žádný ze speciálních případů popsaných ve Větách 16.1 – 16.5. Při výpočtu φ budeme pracovat opět pouze se zaměřeními W, S a budeme postupovat podle definice odchylky.

(i) Nalezení průniku $W \cap S$.

$k_1\underline{\mathbf{u}}_1 + k_2\underline{\mathbf{u}}_2 = k_3\underline{\mathbf{v}}_1 + k_4\underline{\mathbf{v}}_2 \implies k_1\underline{\mathbf{u}}_1 + k_2\underline{\mathbf{u}}_2 - k_3\underline{\mathbf{v}}_1 - k_4\underline{\mathbf{v}}_2 = \underline{\mathbf{o}}$, tzn.:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

tzn. $k_3 = k_4$ (např. $k_3 = k_4 = \frac{1}{3}$), a tedy $W \cap S \neq \{\underline{\mathbf{o}}\}$, přičemž například $\underline{\mathbf{w}} = \frac{1}{3}\underline{\mathbf{v}}_1 + \frac{1}{3}\underline{\mathbf{v}}_2 = (1;0;1;0)$ je bází $W \cap S$.

(ii) Nalezení podprostorů $P = W \cap (W \cap S)^\perp$, $Q = S \cap (W \cap S)^\perp$.

Bezprostředně z (i) plyne, že $(W \cap S)^\perp$ má například bázi $\underline{\mathbf{z}}_1 = (1;0;-1;0)$, $\underline{\mathbf{z}}_2 = (0;1;0;0)$, $\underline{\mathbf{z}}_3 = (0;0;0;1)$. Potom $k_1\underline{\mathbf{z}}_1 + k_2\underline{\mathbf{z}}_2 + k_3\underline{\mathbf{z}}_3 = k_4\underline{\mathbf{u}}_1 + k_5\underline{\mathbf{u}}_2 \implies k_1\underline{\mathbf{z}}_1 + k_2\underline{\mathbf{z}}_2 + k_3\underline{\mathbf{z}}_3 - k_4\underline{\mathbf{u}}_1 - k_5\underline{\mathbf{u}}_2 = \underline{\mathbf{o}}$, tzn.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

tzn. $k_4 = -k_5$ (např. $k_4 = \frac{1}{2}$, $k_5 = -\frac{1}{2}$), a tedy $\dim P = 1$, přičemž například $\underline{\mathbf{a}} = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{u}}_1 - \frac{1}{2}\underline{\mathbf{u}}_2 = (0;1;0;1)$ je bází P, tzn. $P = L(\underline{\mathbf{a}})$.

Dále $k_1\underline{\mathbf{z}}_1 + k_2\underline{\mathbf{z}}_2 + k_3\underline{\mathbf{z}}_3 = k_4\underline{\mathbf{v}}_1 + k_5\underline{\mathbf{v}}_2 \implies k_1\underline{\mathbf{z}}_1 + k_2\underline{\mathbf{z}}_2 + k_3\underline{\mathbf{z}}_3 - k_4\underline{\mathbf{v}}_1 - k_5\underline{\mathbf{v}}_2 = \underline{\mathbf{o}}$, tzn.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

tzn. $k_4 = -k_5$ (např. $k_4 = 1$, $k_5 = -1$), a tedy $\dim Q = 1$, přičemž například $\underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{v}}_1 - \underline{\mathbf{v}}_2 = (1;4;-1;0)$ je bází Q, tzn. $Q = L(\underline{\mathbf{b}})$.

(iii) výpočet odchylky φ.

Podle definice odchylky podprostorů, respektive definice odchylky jednodimenzionálních podprostorů, dostáváme:

$$\cos\varphi = \frac{|(\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}})|}{\|\underline{\mathbf{a}}\| \cdot \|\underline{\mathbf{b}}\|} = \frac{4}{\sqrt{2}\sqrt{18}} = \frac{2}{3}.$$

Výsledek: pro odchylku φ podprostorů $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ platí $\cos\varphi = \dfrac{2}{3}$, neboli $\varphi = \arccos\dfrac{2}{3}$. △

Úloha 16.3. Nalezněte odchylku φ podprostorů $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ takových, že $Z(\mathcal{B}) = W = L(\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2)$, respektive $Z(\mathcal{C}) = S = L(\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2)$. Přitom $\underline{\mathbf{u}}_1 = (1;0;0;0)$; $\underline{\mathbf{u}}_2 = (0;1;0;0)$, $\underline{\mathbf{v}}_1 = (2;3;1;6)$, $\underline{\mathbf{v}}_2 = (3;2;-6;-1)$.

Řešení: Zřejmě je $\dim W = 2$, $\dim S = 2$, tzn. $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ jdou dvě roviny (nikoliv rovnoběžné) ve 4-rozměrném euklidovském prostoru.

(i) Nalezení průniku $W \cap S$.

$k_1\underline{\mathbf{u}}_1 + k_2\underline{\mathbf{u}}_2 = k_3\underline{\mathbf{v}}_1 + k_4\underline{\mathbf{v}}_2 \implies k_1\underline{\mathbf{u}}_1 + k_2\underline{\mathbf{u}}_2 - k_3\underline{\mathbf{v}}_1 - k_4\underline{\mathbf{v}}_2 = \underline{\mathbf{o}}$, tzn.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right), \text{ a tedy } W \cap S = \{\underline{\mathbf{o}}\}.$$

(ii) výpočet odchylky φ.

Vidíme, že se jedná o obecný případ odchylky dvou podprostorů, k jejímuž výpočtu užijeme obecný algoritmus. Nejdříve ověříme, zda $W \perp S$. Máme $W^{\perp} = L((0;0;1;0),(0;0;0;1))$, odkud ihned vidíme, že $S \nsubseteq W^{\perp}$ a $W^{\perp} \nsubseteq S$ a W, S nejsou kolmé. Dále $\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2$ je přímo ortonormální báze W, respektive vektory $\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2$ jsou ortogonální, tzn. stačí je pouze normovat a pak

$$\underline{\mathbf{w}}_1 = \left(\frac{2}{5\sqrt{2}}; \frac{3}{5\sqrt{2}}; \frac{1}{5\sqrt{2}}; \frac{6}{5\sqrt{2}}\right); \underline{\mathbf{w}}_2 = \left(\frac{3}{5\sqrt{2}}; \frac{2}{5\sqrt{2}}; \frac{-6}{5\sqrt{2}}; \frac{-1}{5\sqrt{2}}\right)$$

je ortonormální báze S. (Zde poznamenejme, že v obecném případě je nutné nejprve najít ortogonální bázi W, respektive S, pomocí Gramm-Schmidtova ortogonalizačního procesu.) Potom

$$A = \begin{pmatrix} (\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{w}}_1) & (\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{w}}_2) \\ (\underline{\mathbf{u}}_2, \underline{\mathbf{w}}_1) & (\underline{\mathbf{u}}_2, \underline{\mathbf{w}}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5\sqrt{2}} & \frac{3}{5\sqrt{2}} \\ \frac{3}{5\sqrt{2}} & \frac{2}{5\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

odkud vypočteme

$$AA' = \begin{pmatrix} \frac{13}{50} & \frac{12}{50} \\ \frac{12}{50} & \frac{13}{50} \end{pmatrix}$$

a řešíme rovnici $|AA' - \lambda E_2| = 0$, tj.

$$\begin{vmatrix} \frac{13}{50} - \lambda & \frac{12}{50} \\ \frac{12}{50} & \frac{13}{50} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Po rozepsání a úpravě dostáváme $100\lambda^2 - 52\lambda + 1 = 0$, odkud pak

$$\lambda_{1,2} = \frac{52 \pm \sqrt{2704 - 400}}{200} = \frac{52 \pm 48}{200},$$

tzn. $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1}{50}$. Největším z čísel λ_1, λ_2 je tedy $\frac{1}{2}$, tzn. pak $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ a dostáváme $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Výsledek: odchylka podprostorů $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ je rovna $\dfrac{\pi}{4}$. △

Kapitola 3

CVIČENÍ

Tato kapitola obsahuje soubor 415 cvičení, sdružených do 172 celků, a jejich výsledky. Cvičení nebyla záměrně přiřazována k jednotlivým paragrafům, ale tvoří samostatný celek, přičemž však jejich řazení v podstatě odpovídá sledu probírané látky. Přitom jsou zastoupeny příklady algoritmického i testovacího charakteru i cvičení důkazová. U každého algoritmického cvičení je uveden výsledek (pozor na to, že často je možno výsledek vyjádřit nekonečně mnoha formálně různými způsoby, a je tedy uvedeno jenom jedno z těchto vyjádření). U testovřch cvičení je uváděna odpověď pouze v případě, když je negativní, tzn. požadovanř příklad neexistuje.

U cvičení, v nichž pracujeme se souřadnicemi, jsou souřadnice vždy vyjádřeny v patřičných repérech tak, jak to vyžaduje typ úlohy a v souladu s úmluvami provedenými v textu. Dále, u cvičení, z jejichž zadání je patrný typ prostoru i jeho dimenze, nebudou často tyto údaje výslovně specifikovány. Z důvodů úspory místa budou jednotlivé rovnice v soustavách lineárních rovnic obvykle zapisovány vedle sebe a nikoliv pod sebou, jako tomu bylo v předchozím textu.

0.1. Je zadána množina $\mathcal{A}$ (vždy jako podmnožina množiny $\mathbb{R}^m$), vektorový prostor V (vždy bude tvaru $\mathbb{R}^n$, přičemž $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$) a zobrazení $\vec{\ } : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V$, které libovolným dvěma bodům $A = (a_1; \dots ; a_m)$, $B = (b_1; \dots ; b_m) \in \mathcal{A}$ přiřazuje vektor $\overrightarrow{AB} \in V$.

Rozhodněte, zda $\mathcal{A}$ je afinním prostorem, a pokud tomu tak není, uveďte, který z axiomů afinního prostoru není splněn:

a) $\mathcal{A} = \mathbb{R}^3$, $V = \mathbb{R}^4$, $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3, b_2 - a_2)$;

b) $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2$, $V = \mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2^k - a_2^k)$, k přirozené číslo;

c) $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2$, $V = \mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, (b_2 - a_2)^k)$, k přirozené číslo;

d) $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2$, $V = \mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{AB} = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2)$;

e) $\mathcal{A} = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |a_1| < 1,\ |a_2| < 1\}$, $V = \mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$;

f) $\mathcal{A} = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a_2 = a_1^2\}$, $V = \mathbb{R}$, $\overrightarrow{AB} = a_1 - b_1$;

g) $\mathcal{A} = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a_2 = a_1^2\}$, $V = \mathbb{R}$, $\overrightarrow{AB} = a_2 - b_2$;

h) $\mathcal{A} = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a_1^2 + a_2^2 = 1\}$, $V = \mathbb{R}$, $\overrightarrow{AB} = a_1 - b_1$;

i) $\mathcal{A} = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a_1^2 - a_2^2 = 1, a_1 < 0\}$, $V = \mathbb{R}$, $\overrightarrow{AB} = a_2 - b_2$;

j) $\mathcal{A} = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a_1^2 - a_2^2 = 1, a_2 < 0\}$, $V = \mathbb{R}$, $\overrightarrow{AB} = a_1 - b_1$;

k) $\mathcal{A} = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 4a_1^2 - 9a_2^2 = 1\}$, $V = \mathbb{R}$, $\overrightarrow{AB} = a_2 - b_2$;

l) $\mathcal{A} = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a_2 > 0\}$, $V = \mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{AB} = (\log \frac{a_2}{b_2}, a_1 - b_1 - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2})$.

Řešení: a) ne, neplatí (1); b) pro k liché – ano, pro k sudé – ne, neplatí (1);
c) pro $k = 1$ – ano, pro $k > 1$ ne, a sice pro k liché neplatí (2), respektive pro k sudé neplatí ani (1) ani (2); d) ne, neplatí (1) ani (2);
e) ne, neplatí (1); f) ano; g) ne, neplatí (1); h) ne, neplatí (1); i) ano; j) ne, neplatí (1); k) ne, neplatí (1); l) ano.

0.2. Nechť $\mathcal{A}$ je afinní prostor; $A, B, C, D \in \mathcal{A}$. Dokažte, že platí:

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$;

b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CA}$.

0.3. Nechť $\mathcal{A}$ je afinní prostor; $A, B \in \mathcal{A}$; $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}} \in Z(\mathcal{A})$. Dokažte, že platí:

$(A + \underline{\mathbf{u}}) - (B + \underline{\mathbf{v}}) = (A - B) + (\underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{v}})$.

0.4. Nechť $\mathcal{A}$ značí 2-rozměrný kanonický afinní prostor (viz Příklad 1.2, pro $n = 2$) a nechť $\mathcal{A}'$, respektive $\mathcal{A}''$, značí afinní prostor ze Cvičení 0.1 (b) (kde k je liché přirozené číslo), respektive Cvičení 0.1 (l). Určete ty podmnožiny $\mathbb{R}^2$, které jsou podprostory alespoň dvou z uvedených prostorů $\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}''$.

Řešení: *Triviální řešení*: všechny jednobodové podmnožiny v $\mathbb{R}^2$ a celá množina $\mathbb{R}^2$, respektive je-li $k = 1$, pak každý podprostor v $\mathcal{A}$. *Netriviální řešení*: $\{(a_1; a_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a_2 = t$, pro pevné $t\}$; pak pro $t > 0$ jsou tyto množiny podprostory $\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}''$, respektive pro $t \leq 0$ podprostory $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$. Konečně, $\{(a_1; a_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a_1 = t$, pro pevné $t\}$ jsou podprostory $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$.

0.5. V afinním názorném prostoru udejte příklad

a) dvou podprostorů $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ takových, že $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ není podprostorem,

b) bodů A_0, A_1, A_2, A_3, které jsou v obecné poloze,

c) bodů B_0, B_1, B_2 tak, aby $\dim\langle B_0, B_1, B_2\rangle = 3$.

Řešení: c) neexistuje.

0.6. V afinním názorném prostoru je dána přímka p a rovina ϱ. Charakterizujte možnou vzájemnou polohu přímky p a roviny ϱ v případě, že $\dim(p+\varrho)=3$, respektive $\dim(p+\varrho)=2$.

Řešení: $\dim(p+\varrho)=3$ právě když p,ϱ jsou různoběžné nebo rovnoběžné různé; respektive $\dim(p+\varrho)=2$ právě když $p\subset\varrho$.

0.7. Nechť $\mathcal{B}_1=\{B_1;W_1\}$, $\mathcal{B}_2=\{B_2;W_2\}$ jsou podprostory v $\mathcal{A}$. Potom $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$ jsou totožné právě když $W_1=W_2$ a $\overrightarrow{B_1B_2}\in W_1$. Dokažte.

0.8. Nechť $\varrho=\{B_1;W_1\}$, $\sigma=\{B_2;W_2\}$ jsou dvě neprotínající se roviny ve 4-rozměrném afinním prostoru $\mathcal{A}$. Potom je $\dim(W_1+W_2)<4$. Dokažte.

0.9. Nechť v $\mathcal{A}_n$, $n\geq 2$, je dána přímka $p=\{A;L(\underline{\mathbf{u}})\}$ a nadrovina $\mathcal{N}=\{B;W\}$. Jestliže se p a $\mathcal{N}$ neprotínají, pak $\underline{\mathbf{u}}\in W$. Dokažte.

0.10. Nechť v $\mathcal{A}_n$, $n\geq 2$, jsou dány nadroviny $\mathcal{N}_1=\{B_1;W_1\}$, $\mathcal{N}_2=\{B_2;W_2\}$. Jestliže se nadroviny $\mathcal{N}_1,\mathcal{N}_2$ neprotínají, pak $W_1=W_2$. Dokažte.

0.11. Nechť $\mathcal{B},\mathcal{C},\mathcal{D}$ jsou podprostory afinního prostoru $\mathcal{A}$ takové, že každé dva z nich se protínají. Dokažte, že platí:

a) $\mathcal{B}\cap(\mathcal{C}+\mathcal{D})\supseteq(\mathcal{B}\cap\mathcal{C})+(\mathcal{B}\cap\mathcal{D})$,

b) $\mathcal{B}+(\mathcal{C}\cap\mathcal{D})\subseteq(\mathcal{B}+\mathcal{C})\cap(\mathcal{B}+\mathcal{D})$

a dále ukažte, že obecně neplatí opačné inkluze.

0.12. Nechť $\mathcal{B}$ je k-rozměrný podprostor v $\mathcal{A}$ a nechť $A_0,A_1,\dots,A_{k+1}\in\mathcal{B}$. Pak těchto $k+2$ bodů není v obecné poloze. Dokažte.

0.13. V afinním prostoru $\mathcal{A}_4$ jsou dány tři afinní repéry:
$\mathscr{R}_1=\langle P;\underline{\mathbf{e}}_1,\underline{\mathbf{e}}_2,\underline{\mathbf{e}}_3,\underline{\mathbf{e}}_4\rangle$, $\mathscr{R}_2=\langle A;\underline{\mathbf{u}}_1,\underline{\mathbf{u}}_2,\underline{\mathbf{u}}_3,\underline{\mathbf{u}}_4\rangle$, $\mathscr{R}_3=\langle B;\underline{\mathbf{v}}_1,\underline{\mathbf{v}}_2,\underline{\mathbf{v}}_3,\underline{\mathbf{v}}_4\rangle$,
přičemž je dáno $\underline{\mathbf{u}}_1=(2;-1;-2;1)$, $\underline{\mathbf{u}}_2=(-1;2;2;-1)$, $\underline{\mathbf{u}}_3=(3;-2;-3;1)$, $\underline{\mathbf{u}}_4=(1;1;1;-1)$, $\underline{\mathbf{v}}_1=(-7;11;13;-6)$, $\underline{\mathbf{v}}_2=(13;-15;-18;7)$,
$\underline{\mathbf{v}}_3=(0;-7;-8;5)$, $\underline{\mathbf{v}}_4=(7;-10;-12;5)$ vzhledem k afinnímu repéru $\mathscr{R}_1$, respektive $B=[0;0;0;1]$ a $X=[1;2;-2;1]$ vzhledem k afinnímu repéru $\mathscr{R}_2$, respektive $Y=[-2;-1;1;2]$ vzhledem k afinnímu repéru $\mathscr{R}_3$. Nalezněte:

a) souřadnice bodu X vzhledem k afinnímu repéru $\mathscr{R}_3$;

b) souřadnice bodu Y vzhledem k afinnímu repéru $\mathscr{R}_2$.

Řešení: a) $X=[-8;-8;-5;6]$; b) $Y=[-5;-3;11;-10]$.

0.14. V afinním prostoru $\mathcal{A}_3$ jsou dány afinní repéry $\mathscr{R}=\langle P;\underline{\mathbf{e}}_1,\underline{\mathbf{e}}_2,\underline{\mathbf{e}}_3\rangle$, $\mathscr{R}'=\langle P';\underline{\mathbf{e}}'_1,\underline{\mathbf{e}}'_2,\underline{\mathbf{e}}'_3\rangle$, přičemž je (v pevném afinním repéru v $\mathcal{A}_3$) $P=[2;1;2]$, $P'=[3;5;1]$, $\underline{\mathbf{e}}_1=(1;2;0)$, $\underline{\mathbf{e}}_2=(0;1;1)$, $\underline{\mathbf{e}}_3=(1;0;1)$, $\underline{\mathbf{e}}'_1=(3;7;4)$, $\underline{\mathbf{e}}'_2=(1;3;1)$, $\underline{\mathbf{e}}'_3=(0;-4;-1)$. Napište transformační rovnice pro souřadnice bodů

a) při přechodu od repéru $\mathscr{R}$ k repéru $\mathscr{R}'$,

b) při přechodu od repéru $\mathscr{R}'$ k repéru $\mathscr{R}$.

Řešení: a) $x = 2x' + y' - z' + 2$, $y = 3x' + y' - 2z'$, $z = x' - z' - 1$;
b) $x = \frac{1}{2}(-x' + y' + z' + 1)$, $y = \frac{1}{2}(5x' - 3y' - z' - 9)$,
$z = \frac{1}{2}(x' - y' + z' - 3)$.

0.15. Nechť $\underline{\mathbf{e}}_1, \underline{\mathbf{e}}_2, \underline{\mathbf{e}}_3$ je kladná báze orientovaného vektorového prostoru V_3. Rozhodněte, zda vektory $\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \underline{\mathbf{u}}_3$ tvoří kladnou nebo zápornou bázi prostoru V_3, je-li:

a) $\underline{\mathbf{u}}_1 = (1; 2; 3)$, $\underline{\mathbf{u}}_2 = (2; 3; 1)$, $\underline{\mathbf{u}}_3 = (3; 1; 2)$ v bázi $\underline{\mathbf{e}}_1, \underline{\mathbf{e}}_2, \underline{\mathbf{e}}_3$;

b) $\underline{\mathbf{u}}_1 = (-1; 1; 0)$, $\underline{\mathbf{u}}_2 = (1; -2; 1)$, $\underline{\mathbf{u}}_3 = (2; 1; 1)$ v bázi $\underline{\mathbf{e}}_1, \underline{\mathbf{e}}_2, \underline{\mathbf{e}}_3$;

c) $\underline{\mathbf{u}}_1 = \underline{\mathbf{e}}_1 + \underline{\mathbf{e}}_2 + \underline{\mathbf{e}}_3$, $\underline{\mathbf{u}}_2 = 2\underline{\mathbf{e}}_1 + \underline{\mathbf{e}}_2 + 3\underline{\mathbf{e}}_3$, $\underline{\mathbf{u}}_3 = 4\underline{\mathbf{e}}_1 + 3\underline{\mathbf{e}}_2 + 5\underline{\mathbf{e}}_3$;

d) $\underline{\mathbf{u}}_1 = 2\underline{\mathbf{e}}_1 + \underline{\mathbf{e}}_2$, $\underline{\mathbf{u}}_2 = -\underline{\mathbf{e}}_1 + \underline{\mathbf{e}}_2 + 2\underline{\mathbf{e}}_3$, $\underline{\mathbf{u}}_3 = 2\underline{\mathbf{e}}_1 + \underline{\mathbf{e}}_2 - 3\underline{\mathbf{e}}_3$.

Řešení: a) záporná; b) kladná; c) není báze; d) záporná.

0.16. Nechť $\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \underline{\mathbf{u}}_3, \underline{\mathbf{u}}_4$ je kladná báze orientovaného vektorového prostoru V_4. Rozhodněte, zda vektory:

a) $\underline{\mathbf{u}}_4, \underline{\mathbf{u}}_3, \underline{\mathbf{u}}_2, \underline{\mathbf{u}}_1$,

b) $\underline{\mathbf{u}}_2, \underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_4, \underline{\mathbf{u}}_3$,

c) $\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_4, \underline{\mathbf{u}}_3, \underline{\mathbf{u}}_2$

tvoří kladnou nebo zápornou bázi prostoru V_4.

Řešení: a) kladná; b) kladná; c) záporná.

0.17. vektorový prostor $\mathbb{R}^4$ je orientován prohlášením báze $\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \underline{\mathbf{u}}_3, \underline{\mathbf{u}}_4$ za kladnou, kde $\underline{\mathbf{u}}_1 = (1; 2; 3; 4)$, $\underline{\mathbf{u}}_2 = (0; 1; -1; 1)$, $\underline{\mathbf{u}}_3 = (0; 0; 2; 1)$, $\underline{\mathbf{u}}_4 = (1; 2; 1; 0)$. Rozhodněte, zda vektory $\underline{\mathbf{w}}_1, \underline{\mathbf{w}}_2, \underline{\mathbf{w}}_3, \underline{\mathbf{w}}_4$ tvoří kladnou nebo zápornou bázi $\mathbb{R}^4$:

a) $\underline{\mathbf{w}}_1 = (1; 2; -2; 3)$, $\underline{\mathbf{w}}_2 = (-2; -5; 1; 0)$, $\underline{\mathbf{w}}_3 = (3; -3; 2; -1)$,
$\underline{\mathbf{w}}_4 = (-2; 0; -4; 1)$;

b) $\underline{\mathbf{w}}_1 = (1; 1; 1; 1)$, $\underline{\mathbf{w}}_2 = (1; -1; 1; 1)$, $\underline{\mathbf{w}}_3 = (1; 1; -1; 1)$,
$\underline{\mathbf{w}}_4 = (1; 1; 1; -1)$;

c) $\underline{\mathbf{w}}_1 = (1; 0; 0; 0)$, $\underline{\mathbf{w}}_2 = (0; 1; 0; 0)$, $\underline{\mathbf{w}}_3 = (0; 0; 1; 0)$, $\underline{\mathbf{w}}_4 = (0; 0; 0; 1)$;

d) $\underline{\mathbf{w}}_1 = (1; 2; 3; 6)$, $\underline{\mathbf{w}}_2 = (3; 7; 1; 11)$, $\underline{\mathbf{w}}_3 = (2; 1; 4; 7)$, $\underline{\mathbf{w}}_4 = (4; 2; 2; 8)$.

Řešení: a) záporná; b) kladná; c) záporná; d) není báze.

0.18. V orientovaném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou dány dvě posloupnosti vektorů $\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \underline{\mathbf{u}}_3$, respektive $\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2, \underline{\mathbf{v}}_3$. Zjistěte, zda se jedná o báze prostoru $\mathbb{R}^3$ a pokud ano, zda jsou tyto báze souhlasné či nesouhlasné.

a) $\underline{\mathbf{u}}_1 = (0; 0; 1)$, $\underline{\mathbf{u}}_2 = (1; 0; 0)$, $\underline{\mathbf{u}}_3 = (0; 1; 0)$;
$\underline{\mathbf{v}}_1 = (1; -2; 1)$, $\underline{\mathbf{v}}_2 = (-1; 1; 0)$, $\underline{\mathbf{v}}_3 = (2; 1; 1)$.

b) $\underline{\mathbf{u}}_1 = (1; 0; 0)$, $\underline{\mathbf{u}}_2 = (0; 1; 0)$, $\underline{\mathbf{u}}_3 = (0; 0; 1)$;
$\underline{\mathbf{v}}_1 = \underline{\mathbf{u}}_2$, $\underline{\mathbf{v}}_2 = \underline{\mathbf{u}}_3$, $\underline{\mathbf{v}}_3 = \underline{\mathbf{u}}_1$.

c) $\underline{\mathbf{u}}_1 = (1; 1; -2)$, $\underline{\mathbf{u}}_2 = (2; 1; 3)$, $\underline{\mathbf{u}}_3 = (-2; 1; -20)$;
$\underline{\mathbf{v}}_1 = (2; 1; 0)$, $\underline{\mathbf{v}}_2 = (-1; 1; 2)$, $\underline{\mathbf{v}}_3 = (2; 1; -3)$.

d) $\underline{\mathbf{u}}_1 = (1; 2; 1)$, $\underline{\mathbf{u}}_2 = (2; 3; 0)$, $\underline{\mathbf{u}}_3 = (-1; 0; 1)$;
$\underline{\mathbf{v}}_1 = (2; 1; -2)$, $\underline{\mathbf{v}}_2 = (3; 1; -1)$, $\underline{\mathbf{v}}_3 = (1; 0; 1)$.

Řešení: a) nesouhlasné; b) souhlasné; c) nesouhlasné;
d) $\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2, \underline{\mathbf{v}}_3$ není báze.

0.19. V $\mathcal{A}_3$ napište parametrické i neparametrické vyjádření

a) roviny $\varrho = \{A; L(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}})\}$, kde $A = [0;0;1]$, $\underline{\mathbf{u}} = (1;0;1)$, $\underline{\mathbf{v}} = (1;-1;0)$,
b) roviny ϱ, která prochází body $A = [1;2;3]$, $B = [2;3;4]$, $C = [2;2;3]$,
c) přímky $p = \{A; L(\underline{\mathbf{u}})\}$, kde $A = [1;1;1]$, $\underline{\mathbf{u}} = (1;1;1)$,
d) přímky p, která prochází body $A = [3;2;1]$, $B = [1;1;3]$,
e) průsečnice rovin $\varrho \equiv 2x - 3y - 3z = 9$, $\sigma \equiv x - 2y + z = -3$.

Řešení: a) $X = A + t\underline{\mathbf{u}} + r\underline{\mathbf{v}}$, respektive $x + y - z + 1 = 0$;
b) $X = A + t(1;1;1) + r(1;0;0)$, respektive $y - z + 1 = 0$;
c) $X = A + t\underline{\mathbf{u}}$, respektive $x - y = 0$, $x - z = 0$;
d) $X = A + t(2;1;-2)$, respektive $x + z - 4 = 0$, $2y + z - 5 = 0$;
e) $X = [0;0;-3] + t(9;5;1)$, respektive $2x - 3y - 3z = 9$, $x - 2y + z = -3$.

0.20. Napište neparametrické vyjádření podprostoru $\mathcal{B}$ v $\mathcal{A}_4$, je-li:

a) $\mathcal{B} = \{A; L(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{w}})\}$, kde $A = [1;-1;3;4]$, $\underline{\mathbf{u}} = (1;0;-3;0)$, $\underline{\mathbf{v}} = (0;-1;1;3)$, $\underline{\mathbf{w}} = (0;1;1;-1)$;
b) $\mathcal{B} \equiv X = [1;-1;0;2] + t(3;2;0;0) + r(1;0;1;-1)$;
c) $\mathcal{B} \equiv X = [1;1;1;1] + t(1;1;1;1)$.

Řešení: a) $3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 4$;
b) $2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5$, $x_3 + x_4 = 2$;
c) $x_1 - x_2 = 0$, $x_1 - x_3 = 0$, $x_1 - x_4 = 0$.

0.21. Napište parametrické vyjádření podprostoru $\mathcal{B}$ v $\mathcal{A}_4$, je-li:

a) $\mathcal{B} \equiv x_1 + x_3 + x_4 = 2;\ \ x_1 + x_3 - x_4 = 0$;
b) $\mathcal{B} \equiv x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 3;\ \ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1$;
c) $\mathcal{B} \equiv x_2 = 1$.

Řešení: a) $X = [1;0;0;1] + t_1(0;1;0;0) + t_2(-1;0;1;0)$;
b) $X = [-1;2;0;0] + t_1(3;-1;1;0) + t_2(-4;1;0;1)$;
c) $X = [0;1;0;0] + t_1(1;0;0;0) + t_2(0;0;1;0) + t_3(0;0;0;1)$.

0.22. V $\mathcal{A}_5$ je dán podprostor $\mathcal{B}$. Je-li dán parametricky (respektive neparametricky), pak nalezněte jeho neparametrické (respektive parametrické) vyjádření:

a) $\mathcal{B} \equiv X = [2;1;-3;3;1] + r(1;1;2;1;3) + s(1;2;1;3;1)$;
b) $\mathcal{B} \equiv X = [1;-2;-1;3;0] + r(1;-3;2;-3;2) + s(-2;1;1;2;-1)$;
c) $\mathcal{B} \equiv x_1 = 1;\ \ x_2 = 2;\ \ x_3 = 3;\ \ x_5 = 5$;
d) $\mathcal{B} \equiv 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 2;$
$3x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 1.$

Řešení: a) $3x_1-x_2-x_3=8$, $x_1-2x_2+x_4=3$, $5x_1-2x_2-x_5=7$;
b) $x_1+x_2+x_3=-2$, $3x_1-4x_2+5x_4=26$, $x_1+x_2-x_5=-1$;
c) $X=[1;2;3;0;5]+t(0;0;0;1;0)$;
d) $X=[-1;0;0;-4;0]+t_1(1;1;0;6;0)+t_2(0;0;1;3;0)+$
$t_3(0;0;0;2;1)$.

0.23. V $\mathcal{A}_3$ určete neparametrické vyjádření roviny ϱ, která

a) prochází bodem $M=[4;0;-1]$ a obsahuje přímku $p=\{A;L(bbu)\}$, kde $A=[2;1;2]$, $\underline{\mathbf{u}}=(-2;1;3)$,

b) obsahuje přímky $p=\{A;L(\underline{\mathbf{u}})\}$, $q=\{B;L(\underline{\mathbf{v}})\}$, kde $A=[3;-1;2]$, $\underline{\mathbf{u}}=(5;2;4)$, $B=[8;1;6]$, $\underline{\mathbf{v}}=(3;1;-2)$,

c) obsahuje přímky $p\equiv x-y+5=0;\ x+y-z-1=0$ a $q=\{A;L(\underline{\mathbf{u}})\}$, kde $A=[1;-2;0]$, $\underline{\mathbf{u}}=(2;3;1)$.

Řešení: a) nekonečně mnoho rovin tvaru $x+(3t+2)y-tz-4-t=0$, pro libovolné $t\in\mathbb{R}$; b) $8x-22y+z=48$; c) neexistuje.

0.24. V afinním repéru $\langle P;\underline{\mathbf{e}}_1,\underline{\mathbf{e}}_2\rangle$ v $\mathcal{A}_2$ je dána rovnice přímky $p\equiv 2x+3y-1=0$ a dále bod $P'=[1;3]$, respektive vektory $\underline{\mathbf{e}}_1'=(1;1)$, $\underline{\mathbf{e}}_2'=(-1;2)$.

Určete rovnici přímky p v afinním repéru $\langle P';\underline{\mathbf{e}}_1',\underline{\mathbf{e}}_2'\rangle$.

Řešení: $p\equiv 5x'+4y'+10=0$.

0.25. V afinní rovině jsou dány afinní repéry $\mathscr{R}=\langle P;\underline{\mathbf{e}}_1,\underline{\mathbf{e}}_2\rangle$, respektive $\mathscr{R}'=\langle P';\underline{\mathbf{e}}_1',\underline{\mathbf{e}}_2'\rangle$, přičemž $P'=P+2\underline{\mathbf{e}}_1-\underline{\mathbf{e}}_2$, $\underline{\mathbf{e}}_1'=\underline{\mathbf{e}}_1-3\underline{\mathbf{e}}_2$, $\underline{\mathbf{e}}_2'=-\underline{\mathbf{e}}_1+\underline{\mathbf{e}}_2$. Nechť dále je $A=[-1;3]$, $p\equiv 3x+5=0$ vzhledem k repéru $\mathscr{R}$, respektive $B=[0;3]$, $q\equiv 2x'+y'=0$ vzhledem k repéru $\mathscr{R}'$. Potom:

a) určete souřadnice bodu A a rovnici přímky p vzhledem k repéru $\mathscr{R}'$;

b) určete souřadnice bodu B a rovnici přímky q vzhledem k repéru $\mathscr{R}$.

Řešení: a) $A=[-0,5;2,5]$, $p\equiv 3x'-3y'+11=0$;
b) $B=[-1;2]$, $q\equiv 5x+3y-7=0$.

0.26. V $\mathcal{A}_4$ zadejte neparametricky roviny ϱ,σ tak, že

a) ϱ,σ se neprotínají,

b) průnikem ϱ a σ je bod,

c) průnikem ϱ a σ je přímka.

0.27. Udejte příklad bodů ve 3-rozměrném afinním prostoru $\mathcal{A}$, které generují rovinu $\varrho\equiv x_1+x_3=0$ a přitom nejsou v obecné poloze.

0.28. V 5-rozměrném afinním prostoru $\mathcal{A}$ udejte příklad

a) dvou rovin ϱ,σ, jejichž součtem je $\mathcal{A}$,

b) bodů A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6, které jsou v obecné poloze,

c) bodů A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6, které nejsou v obecné poloze,

d) dvou nadrovin $\mathcal{N}_1,\mathcal{N}_2$, které se neprotínají,

e) přímky p a roviny ϱ tak, aby $\dim(p+\varrho)=4$,

f) přímky p a roviny ϱ tak, aby $\dim(p+\varrho)=3$.

0.29. Dokažte, že přímky $p = \{A; L(\underline{\mathbf{u}})\}$, $q = \{B; L(\underline{\mathbf{v}})\}$ se neprotínají, a sestrojte 3-rozměrný podprostor obsahující obě tyto přímky. Přitom $A = [8; 2; 5; 15; -3]$, $\underline{\mathbf{u}} = (7; -4; 11; 13; -5)$; $B = [-7; 2; -6; -5; 3]$, $\underline{\mathbf{v}} = (2; 9; -10; -6; 4)$.

Řešení: $\mathcal{B} = p + q$, tj. $\mathcal{B} = \{A; L(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}, \overrightarrow{AB})\}$.

0.30. Určete průnik a součet podprostorů $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$, je-li:

a) $\mathcal{B}_1 = \{B_1; L(\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2)\}$, $\mathcal{B}_2 = \{B_2; L(\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2)\}$, kde
$B_1 = [4; 0; 1; -2]$, $\underline{\mathbf{u}}_1 = (0; 1; -1; 2)$, $\underline{\mathbf{u}}_2 = (1; -2; -3; 0)$;
$B_2 = [1; 2; 1; 1]$, $\underline{\mathbf{v}}_1 = (1; 0; -1; 0)$, $\underline{\mathbf{v}}_2 = (2; 1; 0; -1)$;

b) $\mathcal{B}_1 \equiv x_1 + x_3 + x_4 = 2;\ x_1 + x_3 - x_4 = 0;\ \ \mathcal{B}_2 = \{A; L(\underline{\mathbf{u}})\}$, kde
$A = [1; 0; 1; 0]$, $\underline{\mathbf{u}} = (1; 2; -1; 0)$;

c) $\mathcal{B}_1 \equiv x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0;\ \ x_1 - x_4 = 0;$
$\mathcal{B}_2 \equiv x_2 + x_3 = 4;\ \ x_2 + x_3 + x_4 = 2;$

d) $\mathcal{B}_1 \equiv x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 1 = 0;\ \ \mathcal{B}_2 \equiv X = A + t\underline{\mathbf{u}} + s\underline{\mathbf{v}}$, kde
$A = [1; -1; 1; -2]$, $\underline{\mathbf{u}} = (7; 1; 4; -5)$, $\underline{\mathbf{v}} = (2; 3; -7; 4)$.

Řešení: a) $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$, $\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2 = \mathcal{A}$;
b) $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$, $\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2 = \{A; W\}$, kde
$W = L((0; 1; 0; 0), (-1; 0; 1; 0), (0; 0; -1; 1))$;
c) $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \{[-2; 4; 0; -2]; L((0; -1; 1; 0))\}$;
$\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2 = \{[-2; 4; 0; -2]; L((1; -2; 0; 1), (0; -1; 1; 0), (1; 0; 0; 0))\}$;
d) $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_1$.

0.31. Nalezněte parametrické i neparametrické vyjádření průniku a součtu podprostorů $\mathcal{B}_1 = \{B_1; L(\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2)\}$, $\mathcal{B}_2 = \{B_2; L(\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2, \underline{\mathbf{v}}_3)\}$, kde
$B_1 = [2; 1; 4; 0; 0]$, $\underline{\mathbf{u}}_1 = (1; 0; 1; 1; 0)$, $\underline{\mathbf{u}}_2 = (0; -1; -1; 2; 1)$;
$B_2 = [3; 0; 1; 3; 2]$, $\underline{\mathbf{v}}_1 = (1; 1; 0; 0; 1)$, $\underline{\mathbf{v}}_2 = (1; -1; 0; 3; 1)$, $\underline{\mathbf{v}}_3 = (1; 0; -2; 1; 1)$.

Řešení: $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 \equiv X = [2; 0; 3; 2; 1] + t(1; -1; 0; 3; 1)\}$;
$\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2 \equiv 3x_1 - 6x_2 + x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 4$, odkud již lehce obdržíme zbývající vyjádření.

0.32. Ve 4-rozměrném afinním prostoru udejte příklad přímek p, q, které jsou

a) rovnoběžné různé, b) různoběžné, c) mimoběžné.

0.33. V 5-rozměrném afinním prostoru udejte příklad přímky p a 3-rozměrného podprostoru $\mathcal{B}$ tak, že

a) $p \subseteq \mathcal{B}$, b) $p \parallel \mathcal{B}$ a $\mathcal{B}$ neobsahuje p,
c) $p, \mathcal{B}$ jsou různoběžné, d) $p, \mathcal{B}$ jsou mimoběžné.

0.34. V 5-rozměrném afinním prostoru udejte příklad rovin ϱ, σ, které jsou

a) rovnoběžné různé,
b) různoběžné a protínají se v přímce,
c) různoběžné a protínají se v bodě,
d) mimoběžné a mají společný směr,
e) mimoběžné a nemají společný žádný směr.

0.35. V afinním prostoru $\mathcal{A}$ udejte příklad mimoběžných přímek p, q a bodu M, respektive vektoru $\underline{\mathbf{w}}$, tak, že

a) $\dim \mathcal{A} = 3$ a $M \notin p + q$,
b) $\dim \mathcal{A} = 4$ a $M \notin p + q$,
c) $\dim \mathcal{A} = 3$ a $\underline{\mathbf{w}} \notin Z(p + q)$,
d) $\dim \mathcal{A} = 4$ a $\underline{\mathbf{w}} \notin Z(p + q)$.

Řešení: a) neexistuje; c) neexistuje.

0.36. Ve 3-rozměrném afinním prostoru zadejte mimoběžky p, q tak, že

a) neexistuje jejich příčka rovnoběžná s vektorem $\underline{\mathbf{w}} = (0; 0; 1)$,
b) neexistuje jejich příčka procházející bodem $M = [0; 0; 0]$.

0.37. Udejte příklad nadrovin $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ v $\mathcal{A}$ ($\dim \mathcal{A} = 5$) tak, že

a) $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ jsou mimoběžné,
b) průnikem $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ je rovina,
c) průnikem $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ je 3-rozměrný podprostor v $\mathcal{A}$.

Řešení: a) neexistuje – viz Věta 6.5; b) neexistuje – viz Věta 6.5.

0.38. Existují-li v $\mathcal{A}$ dvě nadroviny, jejichž průnikem je rovina, co pak platí o dimenzi prostoru $\mathcal{A}$?

Řešení: $\dim \mathcal{A} = 3$ nebo $\dim \mathcal{A} = 4$ – viz Věta 6.5.

0.39. Nechť $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ jsou podprostory v $\mathcal{A}$. Udejte libovolnou

a) nutnou, ale nikoliv dostatečnou podmínku pro to, aby $\mathcal{B}_1 \parallel \mathcal{B}_2$,
b) dostatečnou, ale nikoliv nutnou podmínku pro to, aby $\mathcal{B}_1 \parallel \mathcal{B}_2$.

0.40. Nechť p, q jsou mimoběžky v $\mathcal{A}$; $M \in \mathcal{A}$ bod. Udejte libovolnou

a) nutnou, ale nikoliv dostatečnou podmínku,
b) dostatečnou, ale nikoliv nutnou podmínku

pro to, aby neexistovala příčka mimoběžek p, q procházející bodem M.

0.41. Dokažte, že v libovolném 3-rozměrném afinním prostoru $\mathcal{A}$ jsou přímka a rovina buď rovnoběžné nebo různoběžné.

0.42. Nechť $p = \{A; L(\underline{\mathbf{u}})\}$, $q = \{B; L(\underline{\mathbf{v}})\}$ jsou mimoběžky ve 3-rozměrném afinním prostoru $\mathcal{A}$ a nechť $M \in \mathcal{A}$ je bod neležící na žádné z nich. Dokažte:

a) existuje jediná příčka p, q procházející $M \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM} \notin L(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}})$;
b) vynecháme-li předpoklad, že $\dim \mathcal{A} = 3$, pak tvrzení a) neplatí.

0.43. Nechť $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ jsou podprostory v $\mathcal{A}$ takové, že $\mathcal{B} \parallel \mathcal{C}$ a $Z(\mathcal{B}) \subseteq Z(\mathcal{C})$. Dokažte, že pak jsou následující vřroky ekvivalentní:

(i) $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ se neprotínají;

(ii) pro libovolné $B \in \mathcal{B}$ a libovolné $C \in \mathcal{C}$ je $\overrightarrow{BC} \notin Z(\mathcal{C})$;

(iii) existují body $B \in \mathcal{B}$ a $C \in \mathcal{C}$ tak, že $\overrightarrow{BC} \notin Z(\mathcal{C})$.

0.44. Nechť $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ jsou podprostory v $\mathcal{A}$, které nejsou rovnoběžné. Dokažte, že pak následující vřroky jsou ekvivalentní:

(i) $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ jsou různoběžné;

(ii) pro libovolné $B \in \mathcal{B}$ a $C \in \mathcal{C}$ je $\overrightarrow{BC} \in Z(\mathcal{B}) + Z(\mathcal{C})$;

(iii) existují body $B \in \mathcal{B}$, $C \in \mathcal{C}$ tak, že $\overrightarrow{BC} \in Z(\mathcal{B}) + Z(\mathcal{C})$.

0.45. Nechť $\mathcal{B}, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ jsou podprostory afinního prostoru $\mathcal{A}$ takové, že $\mathcal{B}_1 \parallel \mathcal{B}_2$, $\mathcal{B} \cap \mathcal{B}_1 \neq \emptyset$, $\mathcal{B} \cap \mathcal{B}_2 \neq \emptyset$. Dokažte:

a) $\mathcal{B} \cap \mathcal{B}_1$, $\mathcal{B} \cap \mathcal{B}_2$ jsou rovnoběžné podprostory v $\mathcal{A}$;

b) vynecháme-li předpoklad, že $\mathcal{B} \cap \mathcal{B}_2 \neq \emptyset$, pak tvrzení a) neplatí.

0.46. V $\mathcal{A}_3$ určete vzájemnou polohu zadaných přímek, respektive rovin:

a) $p \equiv X = [1; -3; 4] + t(2; 2; -1)$; $q \equiv X = [3; 0; -1] + r(0; 1; 3)$;

b) $p \equiv X = [1; 2; 3] + t(1; -1; 2)$; $q \equiv x - y - z + 4 = 0$, $x + y - 3 = 0$;

c) $p \equiv x + 2y - z = 1$, $x - y = 0$;
$q \equiv 3x - y - z = -1$, $3x - 4y + 2z = 8$;

d) $p \equiv X = [4; 7; -11] + t(1; -8; 3)$;
$\varrho \equiv X = [0; 1; -1] + r(2; 1; 2) + s(1; 2; 5)$;

e) $p \equiv X = [1; 4; -3] + t(1; -3; 4)$; $\varrho \equiv x - y - z = 0$;

f) $p \equiv x + y + z = 3$, $4x + 3z = 3$; $\varrho \equiv 2x + 2y + 2z = 1$;

g) $\varrho \equiv X = [6; 1; 0] + t_1(4; 3; 1) + t_2(-1; 3; 5)$;
$\sigma \equiv X = [3; 0; 1] + r_1(1; 2; 2) + r_2(3; 1; -1)$;

h) $\varrho \equiv X = [3; 5; 8] + r(2; 0; 1) + s(3; -1; 0)$; $\sigma \equiv x + 3y - 2z + 1 = 0$;

i) $\varrho \equiv 2x + 3y + 4z + 5 = 0$; $\sigma \equiv x - y - z + 1 = 0$.

Řešení: a) mimoběžné; b) totožné; c) různoběžné; d) různoběžné;
e) $p \subseteq \varrho$; f) rovnoběžné různé; g) totožné; h) rovnoběžné různé;
i) různoběžné.

0.47. V $\mathcal{A}_3$ vyšetřete vzájemnou polohu zadaných přímek, respektive rovin. Pokud se protínají, pak určete jejich průnik:

a) $p \equiv X = [1;-2;3] + t(1;-3;1)$; $q \equiv X = [1;2;-1] + r(0;1;3)$;

b) $p \equiv X = [2;3;2] + t(1;2;2)$; $q \equiv 2x + 2y - 3z = 1,\ y - z = 2$;

c) $p \equiv 2x - y = 1;\ 2x - z = 2$; $q \equiv 2x - y - 2z = 1,\ y = 1$;

d) $p \equiv X = [-2;1;0] + t(2;-1;2)$;
$\varrho \equiv X = [1;2;2] + r(1;0;0) + s(1;3;-2)$;

e) $p \equiv X = [1;1;-2] + t(-1;3;0)$, $\varrho \equiv 3x + y + 5z + 7 = 0$;

f) $p \equiv x - y - z = -2,\ 4y - z = 11$; $\varrho \equiv 3x - y + 2z = 5$;

g) $\varrho \equiv X = [1;0;-2] + t_1(1;2;-2) + t_2(2;3;1)$;
$\sigma \equiv X = [0;-3;1] + r_1(1;0;4) + r_2(0;1;-1)$;

h) $\varrho \equiv X = [1;2;0] + r(2;-1;2) + s(3;1;-1)$;
$\sigma \equiv 3x + 3y - z + 3 = 0$;

i) $\varrho \equiv x + y - z - 3 = 0$; $\sigma \equiv x - 2y - z + 3 = 0$.

Řešení: a) mimoběžné; b) rovnoběžné různé; c) různoběžné, průsečík $[1;1;0]$; d) různoběžné, průsečík $[2;-1;4]$; e) rovnoběžné různé; f) různoběžné, průsečík $[2;3;1]$; g) různoběžné, průsečnice $X = [1;-1;3] + t(1;1;3)$; h) různoběžné, průsečnice $X = [0;0;3] + t(23;-14;27)$; i) různoběžné, průsečnice $X = [1;2;0] + t(1;0;1)$.

0.48. V $\mathcal{A}_3$ napište parametrické vyjádření podprostorů $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ zadaných jako afinní obal bodů, je-li $\mathcal{B} = \langle B_1, B_2, B_3\rangle$, $\mathcal{C} = \langle C_1, C_2, C_3\rangle$, a zjistěte jejich vzájemnou polohu. Přitom $B_1 = [1;3;-1]$, $B_2 = [-1;5;-4]$, $B_3 = [3;1;2]$; $C_1 = [0;1;2]$, $C_2 = [1;1;1]$, $C_3 = [0;1;1]$.

Řešení: $\mathcal{B} \equiv X = B_1 + t(2;-2;3)$; $\mathcal{C} \equiv X = C_1 + r(1;0;-1) + s(0;0;1)$, různoběžné, průsečík $X = [3;1;2]$.

0.49. Nechť $\varrho \equiv x - y + z = 0$, $\sigma \equiv 3x - y - z + 2 = 0$, $\tau \equiv 4x - y - 2z + k = 0$ jsou roviny v afinním prostoru $\mathcal{A}_3$. Zjistěte, pro které k se tyto roviny protínají v jediné přímce a tuto přímku určete.

Řešení: $k = 3$; $p \equiv X = [-1;-1;0] + t(1;2;1)$.

0.50. Nalezněte přímku p v $\mathcal{A}_3$, která je rovnoběžná s rovinou ϱ, různoběžná s přímkou $q = \{A; L(\underline{\mathbf{u}})\}$ a prochází bodem M. Přitom:

a) $\varrho \equiv x + y - z + 7 = 0$; $A = [0;0;0]$, $\underline{\mathbf{u}} = (1;1;3)$, $M = [1;1;4]$;

b) $\varrho \equiv 18x - 8y - 19z = 0$; $A = [2;3;5]$, $\underline{\mathbf{u}} = (1;-12;6)$, $M = [1;1;1]$.

Řešení: a) $p \equiv X = [0;0;2] + t(1;1;2)$; b) neexistuje.

0.51. Je dána rovina $\varrho \equiv X = [1;0;0;1] + r(5;2;-3;1) + s(4;1;-1;0)$ v $\mathcal{A}_4$. Vyšetřete vzájemnou polohu roviny ϱ a přímky p v $\mathcal{A}_4$, je-li:

a) $p \equiv X = [3;1;-4;1] + t(-1;1;2;1)$;

b) $p \equiv \{A; L(\underline{\mathbf{u}})\}$, kde $A = [3;0;-4;1]$, $\underline{\mathbf{u}} = (-1;1;2;1)$;

c) $p \equiv x_1 - x_2 + 2 = 0,\ 2x_2 + x_3 + 1 = 0,\ x_3 + 2x_4 - 3 = 0$.

Řešení: a) mimoběžné; b) různoběžné, průsečík $[2; 1; -2; 2]$; c) $p \subseteq \varrho$.

0.52. V afinním prostoru $\mathcal{A}_4$ vyšetřete vzájemnou polohu:

a) přímek $p \equiv X = [5; 7; 4; -5] + t(2; 3; 1; -2)$,
$q \equiv x_1 - x_2 = 0,\ x_1 + 2x_3 = 5,\ 3x_1 - 2x_4 = 5$;

b) přímky $p \equiv X = [0; 0; 6; 5] + t(1; 2; -3; 0)$
a roviny $\varrho \equiv X = [1; 0; 0; 2] + r(1; -1; 0; 0) + s(1; 2; 0; -1)$;

c) rovin $\varrho \equiv X = [0; 3; 1; 3] + t_1(1; 1; -2; -2) + t_2(1; 5; -4; 0)$;
$\sigma \equiv X = [-9; 2; 1; -5] + r_1(5; -1; 0; 2) + r_2(3; 1; 2; 0)$;

d) rovin $\varrho \equiv x_1 - x_2 + x_4 = 2,\ 2x_1 - x_2 = 0$;
$\sigma \equiv 2x_3 + 9x_4 = 35,\ x_1 - x_4 = -2$;

e) přímky $p \equiv X = [3; 2; 0; -2] + k(1; 1; -1; 1)$
a nadroviny $\mathcal{N} \equiv X = [2; 1; 1; 1] + r(1; 1; 1; 1) + s(1; 1; 1; -1) + t(1; 1; -1; -1)$;

f) přímky $p \equiv X = [0; 0; 0; 3] + t(1; 1; 1; 0)$ a nadroviny $\mathcal{N} \equiv x_4 = 0$;

g) nadrovin $\mathcal{N}_1 \equiv 2x_1 + x_2 - x_3 = 1$; $\mathcal{N}_2 \equiv 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2$.

Řešení: a) protínají se v bodě $[1; 1; 2; -1]$; b) mimoběžné; c) protínají se v bodě $[1; 0; 1; -1]$; d) protínají se v přímce $X = [1; 2; 4; 3] + t(2; 4; -9; 2)$; e) $p \subseteq \mathcal{N}$; f) $p \parallel \mathcal{N}$; g) protínají se v rovině $X = [0; 0; -1; -3] + r(1; 0; 2; 5) + s(0; 1; 1; 0)$.

0.53. Nalezněte přímku r, která protíná přímku p, rovinu ϱ a prochází bodem M. Přitom
$p \equiv X = [0; 0; -6; -7] + t(1; 1; 2; 1)$;
$\varrho \equiv X = [2; 1; 1; 1] + r(1; 2; -1; 1) + s(-1; 2; 1; 2)$; $M = [7; -2; -1; 0]$.

Řešení: $r \equiv X = [1; 1; -4; -6] + t(7; -6; 5; 7)$.

0.54. Je dána přímka $p \equiv X = [0; 1; 0; 1] + t(1; 0; -1; 1)$ a rovina $\varrho \equiv x_1 + x_3 = 0$; $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$. Nalezněte:

a) rovinu σ, která obsahuje p a je rovnoběžná s ϱ;

b) nadrovinu $\mathcal{N}$, která obsahuje p a je rovnoběžná s ϱ.

Řešení: a) neexistuje; b) $\mathcal{N} \equiv X = [0; 1; 0; 1] + r(-1; 0; 1; 0) + s(0; -1; 0; 1) + t(1; 0; -1; 1)$.

0.55. Ve 4-rozměrném afinním prostoru $\mathcal{A}_4$

a) určete parametry a, b tak, aby přímka p ležela v rovině ϱ, kde
$p \equiv X = [1; 2; 1; 2] + t(1; a; 0; 2)$;
$\varrho \equiv X = [1; 1; 2; b] + r(1; 2; 1; 2) + s(1; 1; 2; 2)$;

b) určete hodnotu parametru a tak, aby roviny ϱ, σ byly mimoběžné, kde
$\varrho \equiv X = [3; -1; 1; -3] + t_1(2; 1; 1; -3) + t_2(0; 0; 1; a)$;
$\sigma \equiv X = [1; -1; -1; 4] + r_1(1; 2; 2; -3) + r_2(1; 1; 0; 2)$;

c) určete hodnoty parametrů a, b tak, aby roviny ϱ, σ byly rovnoběžné, kde
$\varrho \equiv x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1;\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 2$;
$\sigma \equiv x_1 + x_3 + ax_4 = 0;\ 2x_1 + 5x_2 + bx_3 - 4x_4 = 5$;

d) určete parametry a, b tak, aby přímky p, q byly různoběžné a nalezněte pak jejich průsečík, je-li $p \equiv X = [3; 2; 1; 0] + t(0; a; 1; b)$,
$q \equiv X = [-2; 4; 4; -1] + r(5; -5; -6; 4)$.

Řešení: a) $a = 3$, $b = 2$; b) $a = -4$; c) $a = 3$, $b = 2$;
d) $a = 1$, $b = -1$, průsečík $[3; -1; -2; 3]$.

0.56. Vyšetřete vzájemnou polohu přímky $p \equiv X = [4; 1; 3; a] + t(2; 2; -1; -1)$ a roviny $\varrho \equiv X = [3; -1; -1; 6] + r(-2; 1; -2; 1) + s(4; -1; -1; 0)$ v závislosti na parametru a.

Řešení: pro $a \neq \frac{11}{4}$ mimoběžné, pro $a = \frac{11}{4}$ různoběžné, průsečík
$[\frac{34}{24}; -\frac{38}{24}; \frac{103}{24}; \frac{97}{24}]$.

0.57. Vyšetřete vzájemnou polohu podprostorů $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ v $\mathcal{A}$, a určete jejich průnik, je-li:

a) $\mathcal{B} \equiv X = [-2; 10; -1; 2; -1] + t(2; -8; 3; -5; 1)$,
$\mathcal{C} \equiv X = [1; 1; 2; -1; 3] + r(1; -1; 0; 2; 3) + s(0; 2; -1; 3; 5)$;

b) $\mathcal{B} \equiv X = [1; 1; 1; 1; 1] + t(2; -8; 3; -5; -9)$,
$\mathcal{C} \equiv X = [1; 1; 2; -1; 3] + r(1; -1; 0; 2; 3) + s(0; 2; -1; 3; 5)$;

c) $\mathcal{B} \equiv X = [2; -3; 1; 5; 0] + r(3; -2; 1; 0; 1) + s(-1; 5; -2; 0; 3)$,
$\mathcal{C} \equiv X = [0; -1; 0; 4; 1] + t(1; 2; 4; 0; -2) + q(6; 3; 4; 0; 3)$;

d) $\mathcal{B} \equiv X = [-2; -3; 2; 0; 5] + r(1; -1; 1; 1; 3) + s(-1; 2; 1; 2; -2)$,
$\mathcal{C} \equiv X = [-1; 0; 3; 3; 8] + t(1; 1; -3; -3; 1) + q(0; 1; 2; 3; 1)$;

e) $\mathcal{B} \equiv X = [2; 0; 2; 0; 1] + r(2; 1; 0; 0; 0) + s(0; 0; 1; 2; 3)$,
$\mathcal{C} \equiv X = [1; 0; 0; 1; 0] + t(1; 0; 0; 0; 0) + q(1; 1; 0; 0; 0) +$
$k(1; 1; 0; 0; 1)$;

f) $\mathcal{B} \equiv X = [1; 2; 1; 0; 1] + r(1; 1; 0; 0; -1) + s(0; 1; 1; 1; 0)$,
$\mathcal{C} \equiv x_1 + x_2 + x_4 - 3 = 0,\ \ x_1 + x_2 + x_3 - x_5 - 2 = 0$;

g) $\mathcal{B} \equiv x_1 + x_2 - 1 = 0,\ \ \mathcal{C} \equiv x_4 + x_5 - 2 = 0$.

Řešení: a) různoběžné, průnikem je bod $[0;2;2;-3;0]$;
b) rovnoběžné různé;
c) mimoběžné, mají společný směr $(5;1;0;0;5)$;
d) různoběžné, průnikem je přímka $X=[-2;-1;6;6;7]+$ $+t(0;1;2;3;1)$;
e) mimoběžné, mají společný směr $(0;0;-2;1;0)$;
f) různoběžné, průnikem je bod $[0;2;2;1;2]$;
g) různoběžné, průnikem je podprostor $X=[1;0;0;2;0]+$ $+r(-1;1;0;0;0)+s(0;0;1;0;0)+t(0;0;0;-1;1)$.

0.58. V $\mathcal{A}$ jsou dány mimoběžky $p=\{A;L(\underline{\mathbf{u}})\}$, $q=\{B;L(\underline{\mathbf{v}})\}$ a bod M. Určete průsečíky P,Q obou mimoběžek s jejich příčkou procházející bodem M, je-li:

a) $A=[3;-1;4]$, $\underline{\mathbf{u}}=(1;-1;2)$;
$B=[-1;2;-2]$, $\underline{\mathbf{v}}=(2;0;1)$; $M=[1;3;-2]$;

b) $A=[3;3;3]$, $\underline{\mathbf{u}}=(2;2;1)$; $B=[1;6;0]$, $\underline{\mathbf{v}}=(1;1;1)$; $M=[4;5;3]$;

c) $A=[3;1;8]$, $\underline{\mathbf{u}}=(2;4;3)$;
$B=[0;2;-5]$, $\underline{\mathbf{v}}=(5;-1;2)$; $M=[4;0;-1]$;

d) $A=[1;1;1;1]$, $\underline{\mathbf{u}}=(1;2;1;0)$;
$B=[2;2;3;1]$, $\underline{\mathbf{v}}=(1;0;1;3)$; $M=[4;5;2;7]$;

e) $A=[1;3;0;1]$, $\underline{\mathbf{u}}=(0;2;1;2)$;
$B=[2;4;0;2]$, $\underline{\mathbf{v}}=(1;1;1;2)$; $M=[0;2;1;1]$;

f) $A=[0;2;-5;-10]$, $\underline{\mathbf{u}}=(1;1;-1;-1)$;
$B=[0;0;-1;0]$, $\underline{\mathbf{v}}=(1;1;-1;-2)$; $M=[8;9;-11;-15]$.

Řešení: a) $P=[1;1;0]$, $Q=[1;2;-1]$;
b) $P=[5;5;4]$, $Q=[0;5;-1]$;
c) $P=[1;-3;5]$, $Q=[5;1;-3]$;
d) $P=[2;3;2;1]$, $Q=[1;2;2;-2]$; e) neexistují;
f) $P=[12;14;-17;-22]$, $Q=[4;4;-5;-8]$.

0.59. V $\mathcal{A}$ jsou dány mimoběžky $p=\{A;L(\underline{\mathbf{u}})\}$, $q=\{B;L(\underline{\mathbf{v}})\}$ a vektor $\underline{\mathbf{w}}$. Určete průsečíky P,Q obou mimoběžek s jejich příčkou rovnoběžnou s vektorem $\underline{\mathbf{w}}$, je-li:

a) $A=[1;-2;5]$, $\underline{\mathbf{u}}=(1;3;-1)$;
$B=[-1;1;-5]$, $\underline{\mathbf{v}}=(1;1;2)$; $\underline{\mathbf{w}}=(1;-2;3)$;

b) $A=[2;1;1]$, $\underline{\mathbf{u}}=(1;-1;2)$; $B=[1;3;2]$, $\underline{\mathbf{v}}=(0;1;1)$; $\underline{\mathbf{w}}=(1;1;4)$;

c) $A=[0;9;-2]$, $\underline{\mathbf{u}}=(1;0;0)$; $B=[1;2;-1]$, $\underline{\mathbf{v}}=(1;-1;1)$;
$\underline{\mathbf{w}}=(1;2;0)$;

d) $A=[1;2;3;1]$, $\underline{\mathbf{u}}=(0;1;0;2)$; $B=[2;2;2;1]$, $\underline{\mathbf{v}}=(1;0;2;-1)$;
$\underline{\mathbf{w}}=(1;1;2;1)$;

e) $A=[2;1;0;2]$, $\underline{\mathbf{u}}=(-1;0;1;2)$; $B=[2;0;1;1]$, $\underline{\mathbf{v}}=(1;1;1;1)$;
$\underline{\mathbf{w}}=(0;2;1;4)$;

f) $A=[7;1;2;5]$, $\underline{\mathbf{u}}=(0;1;1;-1)$; $B=[5;2;2;4]$, $\underline{\mathbf{v}}=(2;3;0;1)$;
$\underline{\mathbf{w}}=(1;1;1;1)$.

Řešení: a) $P = [2; 1; 2]$, $Q = [1; 3; -1]$; b) neexistují;
c) $P = [3; 9; -2]$, $Q = [0; 3; -2]$; d) neexistují;
e) $P = [1; 1; 1; 4]$, $Q = [1; -1; 0; 0]$; f) neexistují.

0.60. V $\mathcal{A}_3$ nalezněte parametrické vyjádření příčky mimoběžek p, q, která je rovnoběžná s rovinami ϱ, σ. Přitom $p \equiv X = [-5; 2; 2] + t(2; 0; 1)$; $q \equiv z - 2 = 0$, $5x - 8y + 9z + 100 = 0$; $\varrho \equiv X = [3; 0; 0] + r(3; 2; 0) + s(1; 0; 2)$; $\sigma \equiv x - 4y - 3z + 12 = 0$

Řešení: $X = [-27; 2; -9] + t(1; 1; -1)$.

0.61. Stanovte číslo m tak, aby roviny $\alpha_1 \equiv x - y + z = 0$, $\alpha_2 \equiv 3x - y - z + 2 = 0$ a $\alpha_3 \equiv 4x - y - 2z + m = 0$ patřily do téhož svazku rovin.

Řešení: $m = 3$.

0.62. Jaká podmínka musí být splněna, aby tři roviny $\alpha_1 \equiv x - ay + bz = 0$, $\alpha_2 \equiv -bx + y - az = 0$ a $\alpha_3 \equiv bx - ay + z = 0$ v $\mathcal{A}_3$ patřily do téhož svazku rovin? Jaká je podmínka, aby byly navíc tyto roviny různé?

Řešení: $b = 1$, a libovolné, nebo $a + b = -1$ nebo $a = 1$, b libovolné;
roviny různé $\Leftrightarrow a + b = -1$, $a \neq \pm 1$, $a \neq 0$, $a \neq -2$.

0.63. Dokažte, že tři roviny $\alpha_1 \equiv 2x + y - 7z - 7 = 0$, $\alpha_2 \equiv x - 2z - 4 = 0$ a $\alpha_3 \equiv x + y + 9z + 8 = 0$ patří do téhož trsu rovin 2. druhu. Určete společný směr těchto rovin.

0.64. Ve svazku nadrovin v $\mathcal{A}_5$ určeném nadrovinami $\mathcal{N}_1 \equiv x_1 + 2x_2 - 4x_4 + 2 = 0$ a $\mathcal{N}_2 \equiv x_2 + 3x_3 - x_5 - 4 = 0$ nalezněte nadrovinu, která prochází společným bodem nadrovin $x_1 + x_2 - 4 = 0$, $x_2 + x_3 - 1 = 0$, $x_3 + x_4 + 2 = 0$, $x_4 - x_5 + 3 = 0$ a $x_1 + x_3 + x_5 + 4 = 0$.

Řešení: $\mathcal{N} \equiv 28x_1 - 43x_2 - 73x_3 - 112x_4 + 43x_5 + 228 = 0$.

0.65. V $\mathcal{A}_3$ určete rovnici roviny, která obsahuje přímku $p \equiv 2x - z = 0, x + y - z + 5 = 0$ a

a) prochází bodem $A = [1; 2; 1]$,
b) je rovnoběžná s přímkou $q \equiv X = [0; 2; -1] + t(7; -1; 4)$.

Řešení: a) $\alpha \equiv -13x + y + 6z + 5 = 0$;
b) $\alpha \equiv -3x - 5y + 4z - 25 = 0$.

0.66. V $\mathcal{A}_3$ určete rovnici roviny, která obsahuje přímku $p \equiv 3x - 4y + z - 12 = 0, 4x - 7y - 3z + 4 = 0$ a je rovnoběžná s přímkou $q \equiv X = [1; 7; 5] + t(82; 0; 79)$.

Řešení: $\alpha \equiv -79x + 147y + 82z - 184 = 0$.

0.67. V $\mathcal{A}_3$ určete rovnici roviny, která je určena body $A = [1; 2; 3]$, $B = [1; 5; 2]$ společným bodem rovin $\alpha \equiv 2x - y + z - 1 = 0$, $\beta \equiv 2x - 3y + z + 5 = 0$, $\gamma \equiv x - z = 0$.

Řešení: $\rho \equiv 6x - y - 3z + 5 = 0$.

0.68. V $\mathcal{A}_3$ jsou dány čtyři roviny $\alpha \equiv 2x + y - z - 2 = 0$, $\beta \equiv x - 3y + z + 1 = 0$, $\gamma \equiv x + y + z - 3 = 0$, $\delta \equiv x + y + 2z = 0$. Dokažte:

a) že žádné tři z těchto rovin nepatří do téhož svazku rovin;

b) že všechny roviny nepatří do téhož trsu rovin.

0.69. Pro roviny ze Cvičení 0.68 určete roviny, které jsou rovnoběžné s jednou rovinou a patří do trsu rovin, který je určen zbývajícími třemi rovinami.

Řešení: $\alpha' \equiv 2x + y - z - 56 = 0$, $\beta' \equiv x - 3y + z + 36 = 0$,
$\gamma' \equiv x + y + z - \frac{9}{19} = 0$, $\delta' \equiv x + y + 2z - 4 = 0$.

0.70. V $\mathcal{A}_3$ určete rovnici roviny, která patří do svazku rovin určeného rovinami $\alpha_1 \equiv 2x - 3y + z - 3 = 0$, $\alpha_2 \equiv x + 3y + 2z + 1 = 0$ a prochází průsečíkem rovin $\beta_1 \equiv 2x + y - z + 3 = 0$, $\beta_2 \equiv 3x - z = 0$ a $\beta_3 \equiv 2y + 2z = 0$.

Řešení: $\rho \equiv 2x + 15y + 7z + 7 = 0$.

0.71. Nakreslete přímku a na ní body A, B, C tak, aby:

a) $(C; A, B) = \dfrac{1}{2}$; b) $(A; B, C) = \dfrac{1}{2}$; c) $(B; A, C) = \dfrac{1}{2}$;

d) $(A; C, B) = -1$; e) $(A; B, C) = -1$; f) $(B; C, A) = 3$.

0.72. Nechť A, B, S jsou tři navzájem různé body na přímce. Pak bod S je středem dvojice bodů A, B právě když $(A; S, B) = \frac{1}{2}$. Dokažte.

0.73. V afinním prostoru $\mathcal{A}_3$ jsou dány dvě mimoběžky p, q a pevné reálné číslo λ, $0 \neq \lambda \neq 1$. Zjistěte, co vyplní všechny body $X \in \mathcal{A}_3$, pro něž platí: existují body $P \in p$, $Q \in q$ tak, že body P, Q, X leží na přímce a je $(X; P, Q) = \lambda$.

Řešení: body vyplní rovinu.

0.74. V afinním prostoru $\mathcal{A}_3$ jsou dány tři navzájem mimoběžné přímky p, q, r. Dále je dáno pevné reálné číslo λ, $0 \neq \lambda \neq 1$. Určete, kolik existuje trojic bodů P, Q, R takových, že $P \in p$, $Q \in q$, $R \in r$, body P, Q, R leží na jedné přímce a platí $(R; P, Q) = \lambda$.

Řešení: právě jedna.

0.75. V afinním prostoru $\mathcal{A}$ ($\dim \mathcal{A} = n \geq 2$) je dán bod A a nadrovina $\mathcal{N}$ tak, že $A \notin \mathcal{N}$. Dále je dáno pevné reálné číslo λ, $0 \neq \lambda \neq 1$. Zjistěte, co vyplní všechny body $X \in \mathcal{A}$, pro něž platí: existuje bod $N \in \mathcal{N}$ tak, že body A, N, X leží na přímce a je $(X; A, N) = \lambda$.

Řešení: body vyplní nadrovinu rovnoběžnou s $\mathcal{N}$.

0.76. Nechť A, B, C, X jsou čtyři navzájem různé body ležící na přímce. Dokažte, že pak platí: $(X; A, B) \cdot (X; B, C) \cdot (X; C, A) = 1$.

0.77. Určete parametry x, y tak, aby $A, B, C \in \mathcal{A}_n$ byly tři navzájem různé body ležící na jedné přímce a pak vypočtěte dělicí poměr $\lambda = (C; A, B)$. Přitom:

ba) $A = [2; 1; -2]$, $B = [x; 11; y]$, $C = [1; 0; -3]$;
b) $A = [x; 2; 1]$, $B = [1; y; 1]$, $C = [-2; 1; 2]$;
c) $A = [1; x; 2]$, $B = [-1; 3; 2]$, $C = [4; 0; y]$;
d) $A = [2; 1; x]$, $B = [-1; -5; y]$, $C = [3; 3; 3]$;
e) $A = [1; 1; 1; 2]$, $B = [x; 2; 3; -1]$, $C = [1; y; 5; -4]$;
f) $A = [3; 2; -1; 0]$, $B = [x, 1, -2, 1]$, $C = [1; 2y; 1; 2]$;
g) $A = [2; 1; 2; 1]$, $B = [0; y; 2; 2]$, $C = [4; 3; 2; 2x]$;
h) $A = [1; -1; 6y; 0]$, $B = [1; 1; x; 2]$, $C = [1; 2; 3; 3]$.

Řešení: a) $x = 12$, $y = 8$, $\lambda = \frac{1}{11}$; b) nelze; c) $x = \frac{9}{5}$, $y = 2$, $\lambda = \frac{3}{5}$;
d) nekonečně mnoho hodnot tvaru $x = t$, $y = 4t - 9$; $\lambda = \frac{1}{4}$;
e) $x = 1$, $y = 3$, $\lambda = 2$; f) nelze;
g) nekonečně mnoho hodnot tvaru $x = t$, $y = -1$; potom $\lambda = \frac{1}{2}$;
h) nekonečně mnoho hodnot tvaru $x = 2t + 2$, $y = t$; potom $\lambda = 3$.

0.78. Je dána přímka $p = \{A; L(\underline{\mathbf{u}})\}$ a rovina $\varrho = \{B; L(\underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{w}})\}$. Na přímce p nalezněte bod C tak, aby $(C; A, P) = \lambda$, kde P je průsečík přímky p a roviny ϱ. Přitom:

a) $A = [2; 2; -1; 11]$, $\underline{\mathbf{u}} = (2; 1; 0; 1)$;
$B = [7; 0; 0; 0]$, $\underline{\mathbf{v}} = (1; 0; 0; -1)$, $\underline{\mathbf{w}} = (0; 0; 1; 0)$; $\lambda = \frac{2}{3}$;
b) $A = [2; -1; 3; 0]$, $\underline{\mathbf{u}} = (-1; 1; 2; 1)$;
$B = [1; 0; 1; 0]$, $\underline{\mathbf{v}} = (1; 1; -1; 1)$, $\underline{\mathbf{w}} = (2; 0; 1; 1)$, $\lambda = 3$;
c) $A = [3; 2; 1; 0]$, $\underline{\mathbf{u}} = (-1; 1; 3; 2)$;
$B = [4; 0; 2; 1]$, $\underline{\mathbf{v}} = (2; 0; 1; 1)$, $\underline{\mathbf{w}} = (0; 1; 0; -1)$; $\lambda = -1$.

Řešení: a) $C = [10; 6; -1; 15]$; b) nelze, neboť $A = P$;
c) nelze, neboť p, ϱ jsou mimoběžné.

0.79. Nalezněte střed S dvojice bodů A, B, je-li:

a) $A = [1; 2; 3; 4; 5]$, $B = [5; 0; 9; 4; 7]$;
b) $A = [2; 1; 0; 1; 1]$, $B = [2; 1; 0; 1; 1]$.

Řešení: a) $S = [3; 1; 6; 4; 6]$; b) $S = A = B = [2; 1; 0; 1; 1]$.

0.80. V afinní rovině udejte příklad dvou různých polorovin $\mathcal{P}, \mathcal{R}$ tak, že

a) $\mathcal{P} \cap \mathcal{R}$ je opět polorovina,
b) $\mathcal{P} \cap \mathcal{R}$ je podprostor,
c) $\mathcal{P} \cap \mathcal{R}$ je úhel,
d) $\mathcal{P} \cap \mathcal{R} = \emptyset$,
e) $\mathcal{P} \cap \mathcal{R} \neq \emptyset$ a není polorovina ani podprostor ani úhel.

0.81. V 5-rozměrném afinním prostoru $\mathcal{A}$ udejte příklad dvou různých poloprostorů $\mathcal{P}, \mathcal{R}$ takových, že

a) $\mathcal{P} \cap \mathcal{R}$ je poloprostor, b) $\mathcal{P} \cap \mathcal{R}$ je nadrovina,
c) $\mathcal{P} \cap \mathcal{R}$ je přímka, d) $\mathcal{P} \cap \mathcal{R} = \emptyset$.

Řešení: c) neexistuje.

0.82. Dokažte, že dva body $R = [r_1; \dots ; r_n]$, $S = [s_1; \dots ; s_n]$ patří do téhož poloprostoru v $\mathcal{A}$, vyťatého nadrovinou $\mathcal{N} \equiv a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a = 0$, právě když:

$$(a_1r_1 + \cdots + a_nr_n + a) \cdot (a_1s_1 + \cdots + a_ns_n + a) \geq 0\,.$$

0.83. V afinním prostoru $\mathcal{A}$ je dána přímka $p = \{A; L(\underline{\mathbf{u}})\}$ a nadrovina $\mathcal{N}$ tak, že se protínají v bodě C. Dokažte, že neexistuje bod $B \in p$ tak, aby body A, B ležely v opačných poloprostorech v $\mathcal{A}$, vyťatřch nadrovinou $\mathcal{N}$ a platilo $(C; A, B) = \frac{1}{2}$.

0.84. Nalezněte průnik úsečky $[A, B]$ a roviny ϱ, je-li

a) $A = [-1; 1; 1]$; $B = [3; 1; -2]$;
$\varrho \equiv X = [1; 0; 0] + r(1; 1; 0) + s(0; 1; -1)$;
b) $A = [1; 1; 3]$; $B = [4; 0; 1]$; $\varrho \equiv X = [3; 1; 4] + r(1; 2; 2) + s(2; 3; 1)$;
c) $A = [5; 1; 3]$; $B = [1; -3; 4]$; $\varrho \equiv 2x - 3y - 4z + 5 = 0$;
d) $A = [-1; 1; 2]$; $B = [0; 3; 2]$; $\varrho \equiv x - 2y - z + 6 = 0$.

Řešení: a) bod $[\frac{9}{7}; 1; -\frac{5}{7}]$; b) $\emptyset$; c) úsečka $[A, B]$; d) bod $[-\frac{2}{3}; \frac{5}{3}; 2]$.

0.85. Rozhodněte, zda body A, B jsou, respektive nejsou, oddělovány nadrovinou $\mathcal{N}$, je-li:

a) $A = [7; 5; 8; 3]$; $B = [3; 2; 7; 8]$;
$\mathcal{N} \equiv X = [1; 2; 2; 1] + r(2; -1; 1; 0) + s(1; 0; 1; 0) + t(0; 1; 1; 1)$;
b) $A = [3; -2; -3; 1]$; $B = [9; -2; 3; -8]$;
$\mathcal{N} \equiv 3x_1 - 7x_2 + 11x_3 + 13x_4 - 17 = 0$;
c) $A = [2; 1; 6; 7]$; $B = [1; -3; 2; 9]$;
$\mathcal{N} \equiv X = [3; 1; 2; 7] + r(1; 2; 2; 1) + s(0; 7; 1; 1) + t(-1; 5; 3; 4)$.

Řešení: a) jsou; b) nejsou; c) nelze rozhodnout, neboť $B \in \mathcal{N}$.

0.86. Rozhodněte o vzájemné poloze bodů A, B, C v poloprostorech v $\mathcal{A}$ vyťatřch nadrovinou $\mathcal{N}$, je-li

a) $A = [1; 2; 1; 1; -1]$; $B = [-1; 6; 3; 0; 1]$; $C = [0; 1; 0; 1; 0]$;
$\mathcal{N} \equiv x_1 - x_2 + x_4 + x_5 + 3 = 0$;
b) $A = [1; 2; 2; 1; 1]$; $B = [8; 7; 6; 5; 4]$; $C = [4; 3; 2; 2; 3]$;
$\mathcal{N} \equiv X = [5; 5; 5; 5; 5] + t_1(1; 1; 1; 0; 1] + t_2(1; 1; 1; 0; 0)+$
$t_3(1; 1; 0; 0; 0) + t_4(1; 0; 0; 0; 0)$.

Řešení: a) A, C patří do stejného poloprostoru, B do opačného jako A, C;
b) $B \in \mathcal{N}$; A, C patří do stejného poloprostoru.

0.87. Jsou dány čtyři body $A = [2; 3; 0; 1]$, $B = [-2; 1; 2; 3]$, $C = [1; 2; 1; -3]$, $D = [4; 2; 1; -18]$. Určete vzájemnou polohu:

a) úsečky $[A, B]$ a polopřímky $(C; D)$;

b) úsečky $[A, B]$ a polopřímky $(D; C)$.

Řešení: a) disjunktní; b) protínají se v bodě $[0; 2; 1; 2]$.

0.88. V afinní rovině udejte příklad tří polorovin tak, že:

a) jejich množinovým sjednocením je konvexní množina;

b) jejich množinovým sjednocením není konvexní množina;

c) jejich průnikem není konvexní množina;

d) jejich průnikem je konvexní mnohostěn;

e) jejich průnikem není konvexní mnohostěn.

Řešení: c) neexistuje.

0.89. Ve 3-rozměrném afinním prostoru $\mathcal{A}$ udejte příklad množin $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ tak, že:

a) $\mathcal{M}_1 \nsubseteq \mathcal{M}_2$ a $K(\mathcal{M}_1) \supseteq K(\mathcal{M}_2)$;

b) $\mathcal{M}_1 \nsubseteq \mathcal{M}_2$ a $K(\mathcal{M}_1) \nsupseteq K(\mathcal{M}_2)$.

Řešení: b) neexistuje.

0.90. Ve 4-rozměrném afinním prostoru $\mathcal{A}$ udejte příklad k-rozměrného rovnoběžnostěnu, přičemž:

a) $k = 1$; b) $k = 3$; c) $k = 5$.

Řešení: c) neexistuje.

0.91. V afinní rovině nalezněte konvexní množinu $\mathcal{K}$, pro niž platí:

a) existují přímky p, q, r, s tak, že $p \subseteq \mathcal{K}$, $q \cap \mathcal{K}$ je polopřímka, $r \cap \mathcal{K}$ je otevřená polopřímka, $s \cap \mathcal{K}$ je úsečka;

b) platí podmínky a) a navíc existuje přímka $t \neq s$ tak, že $t \cap \mathcal{K}$ je úsečka.

Řešení: a) $\mathcal{K}$ je otevřená polorovina sjednocená s úsečkou, která je částí hraniční přímky uvažované otevřené poloroviny; b) neexistuje.

0.92. Nechť I je neprázdná indexová množina a nechť $\mathcal{K}_i$ $(i \in I)$ jsou konvexní množiny, které jsou vzhledem k inkluzi lineárně uspořádány (tzn. pro libovolná $i, j \in I$ je $\mathcal{K}_i \subseteq \mathcal{K}_j$ nebo $\mathcal{K}_j \subseteq \mathcal{K}_i$). Potom množinové sjednocení $\cup \mathcal{K}_i$ $(i \in I)$ je také konvexní množina. Dokažte.

0.93. Nechť $\mathcal{K}$ je podmnožina v $\mathcal{A}$. Pak $\mathcal{K}$ je konvexní množinou právě když je konvexní množinou průnik $\mathcal{K} \cap p$, pro každou přímku p z $\mathcal{A}$. Dokažte.

0.94. Nechť $A \in \mathcal{A}$ je bod, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}$ libovolná podmnožina v $\mathcal{A}$. Dokažte, že platí

$$K(\{A\} \cup \mathcal{M}) = \{X \in \mathcal{A} \,|\, X \in [A, B],\ \text{kde } B \in K(\mathcal{M}) \text{ libovolné}\}$$

a dále ukažte, že požadavek $B \in K(\mathcal{M})$ nelze zeslabit na $B \in \mathcal{M}$.

0.95. Nechť v afinním prostoru $\mathcal{A}_n$ je dáno $(n+2)$ konvexních množin $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_{n+2}$ takových, že každých $(n+1)$ z těchto množin má neprázdný průnik. Potom všechny množiny $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_{n+2}$ mají neprázdný průnik. Dokažte.

0.96. Zformulujte předchozí cvičení pro afinní rovinu (tj. pro $n = 2$) a pomocí obrázku ukažte, že není možno vynechat předpoklad konvexnosti zadaných množin $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_4$.

0.97. Nechť v afinním prostoru $\mathcal{A}$ ($\dim \mathcal{A} = n$) je dáno s konvexních množin $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_s$, kde $s \geq n + 2$. Nechť každých $n + 1$ množin z množin $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_s$ má neprázdný průnik. Potom všechny množiny $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_s$ mají neprázdný průnik. Dokažte.

0.98. V afinní rovině je dána množina $\mathcal{M}$. Rozhodněte, zda $\mathcal{M}$ je konvexní množinou, je-li:

a) $\mathcal{M} = \{[x; y] \,|\, x^2 + 2y^2 - 3 \geq 0\}$;
b) $\mathcal{M} = \{[x; y] \,|\, 3x^2 - y \leq 0\}$;
c) $\mathcal{M} = \{[x; y] \,|\, x^2 - y^2 - 3 \geq 0\}$.

Řešení: a) není konvexní; b) je konvexní; c) není konvexní.

0.99. V afinní rovině je dán bod $A = [2; 0]$ a přímka $p \equiv X = [0; 0] + t(1; 1)$. Rozhodněte, zda body $X = [2; 1]$, $Y = [1; 2]$, $Z = [4; 1]$ leží v množině $K(\{A\} \cup p)$.

Řešení: X leží, Y neleží, Z neleží.

0.100. V afinní rovině jsou dány body $A = [-2; 3]$, $B = [-1; 0]$ a přímky $p \equiv X = [4; 1] + t(7; 2)$, $q \equiv x + 7y - 10 = 0$. Popište množinu $\mathcal{M} = K(\{A\} \cup p) \cap K(\{B\} \cup q)$ a rozhodněte, zda $\mathcal{M}$ je konvexní mnohostěn, respektive simplex, respektive rovnoběžnostěn.

Řešení: $\mathcal{M} = K(\{[0; -\frac{1}{7}], [\frac{11}{3}; \frac{19}{21}], [-5; \frac{15}{7}], [-\frac{26}{3}; \frac{23}{21}]\})$; $\mathcal{M}$ je konvexní mnohostěn, není simplex, je 2-rozměrný rovnoběžnostěn $\mathcal{M} = \mathcal{R}([0; -\frac{1}{7}]; (7; 2), (7; -1))$.

0.101. Nalezněte systém lineárních nerovností určujících konvexní mnohostěn $K(\{A_1, \dots, A_6\})$, jestliže $A_1 = [0; 0; 0; 0]$, $A_2 = [1; 0; 0; 0]$, $A_3 = [0; 1; 0; 0]$, $A_4 = [1; 1; 0; 0]$, $A_5 = [0; 0; 1; 0]$, $A_6 = [0; 0; 0; 1]$.

Řešení: $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_1 + x_3 + x_4 - 1 \geq 0,$
$x_2 + x_3 + x_4 - 1 \leq 0.$

0.102. V $\mathcal{A}_3$ je dána konvexní množina $\mathcal{K}$ systémem lineárních nerovností: $x \geq 0$; $y \geq 0$; $z \geq 0$; $y - 2 \leq 0$; $z - 3 \leq 0$; $x + z - 6 \leq 0$; $2x + 3y + 3z - 18 \leq 0$. Ukažte, že $\mathcal{K}$ je konvexní mnohostěn a nalezněte konečnou množinu $\mathcal{M}$ bodů z $\mathcal{A}_3$ takovou, že $\mathcal{K} = K(\mathcal{M})$.

Řešení: $\mathcal{M} = \{[0;0;0], [0;2;0], [6;2;0], [6;0;0], [0;2;3], [\frac{3}{2};2;3],$
$[3;1;3], [3;0;3], [0;0;3]\}.$

0.103. Ve 4-rozměrném euklidovském vektorovém prostoru V udejte příklad

a) podprostoru W takového, že $W^\perp = L((1;1;1;1))$;
b) vektoru $\underline{\mathbf{x}}$ a podprostoru W tak, že ortogonální projekcí $\underline{\mathbf{x}}$ na W je $\underline{\mathbf{o}}$;
c) podprostorů W, S, které nejsou kolmé;
d) podprostorů W, S, které jsou kolmé, ale nejsou totálně kolmé;
e) podprostorů W, S, které jsou totálně kolmé.

0.104. Dokažte, že v euklidovském vektorovém prostoru V platí:

a) $(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{x}}) = (\underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{x}})$ pro libovolné $\underline{\mathbf{x}} \in V \Leftrightarrow \underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{v}}$;
b) $\underline{\mathbf{u}} \perp \underline{\mathbf{v}} \Leftrightarrow \|\underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{v}}\|^2 = \|\underline{\mathbf{u}}\|^2 + \|\underline{\mathbf{v}}\|^2$;
c) $\|\underline{\mathbf{u}}\| = \|\underline{\mathbf{v}}\| \Leftrightarrow (\underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{v}}) \perp (\underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{v}})$.

0.105. Nechť $\underline{\mathbf{u}}_1, \dots, \underline{\mathbf{u}}_k, \underline{\mathbf{w}}$ jsou vektory z euklidovského vektorového prostoru V takové, že $\underline{\mathbf{w}} \perp \underline{\mathbf{u}}_i$ pro $i = 1, \dots, k$. Pak je $\underline{\mathbf{w}} \perp L(\underline{\mathbf{u}}_1, \dots, \underline{\mathbf{u}}_k)$. Dokažte.

0.106. Jestliže Gramm-Schmidtův ortogonalizační proces aplikujeme na posloupnost $\underline{\mathbf{u}}_1, \dots, \underline{\mathbf{u}}_k$ lineárně nezávislých vektorů, pak výsledná ortogonální posloupnost $\underline{\mathbf{e}}_1, \dots, \underline{\mathbf{e}}_k$ neobsahuje žádný nulový vektor. Dokažte.

0.107. O vektorech $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}$ ověřte, že jsou ortogonální a doplňte je na ortogonální bázi celého prostoru, je-li

a) $\underline{\mathbf{u}} = (1;-2;2;-3)$, $\underline{\mathbf{v}} = (2;-3;2;4)$;
b) $\underline{\mathbf{u}} = (1;1;1;2)$, $\underline{\mathbf{v}} = (1;2;3;-3)$.

Řešení: a) $(2;2;1;0), (-5;2;6;1)$; b) $(1;-2;1;0), (25;4;-17;-6)$.

0.108. Pomocí Gramm-Schmidtova ortogonalizačního procesu nalezněte ortogonální bázi podprostoru W, generovaného vektory:

a) $\underline{\mathbf{u}} = (1;2;2;-1)$, $\underline{\mathbf{v}} = (1;1;-5;3)$, $\underline{\mathbf{w}} = (3;2;8;-7)$;
b) $\underline{\mathbf{u}} = (1;1;-1;-2)$, $\underline{\mathbf{v}} = (5;8;-2;-3)$, $\underline{\mathbf{w}} = (3;9;3;8)$.

Řešení: a) $(1;2;2;-1), (2;3;-3;2), (2;-1;-1;-2)$;
b) $(1;1;-1;-2), (2;5;1;3)$.

0.109. Nalezněte ortonormální bázi podprostoru $W = L(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{w}})$ obsahující násobek vektoru $\underline{\mathbf{x}}$, je-li:

a) $\underline{\mathbf{u}} = (1; -1; 2; 4)$, $\underline{\mathbf{v}} = (1; -2; 2; 3)$, $\underline{\mathbf{w}} = (2; -2; 5; 7)$,
$\underline{\mathbf{x}} = (4; -5; 9; 0)$;

b) $\underline{\mathbf{u}} = (1; -2; 2; 3)$, $\underline{\mathbf{v}} = (1; -2; 2; 0)$, $\underline{\mathbf{w}} = (-1; 1; 0; 0)$,
$\underline{\mathbf{x}} = (-1; 2; -2; 0)$.

Řešení: a) nelze, neboť $\underline{\mathbf{x}} \notin W$;
b) $\frac{1}{3}(-1; 2; -2; 0), (0; 0; 0; 1), \frac{1}{3}(-2; 1; 2; 0)$.

0.110. Nalezněte bázi ortogonálního doplňku $W^{\perp}$ podprostoru W, je-li:

a) $W = L(\underline{\mathbf{u}})$, kde $\underline{\mathbf{u}} = (1; 2; 3; 0)$;

b) $W = L(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}})$, kde $\underline{\mathbf{u}} = (1; 0; 1; 0)$, $\underline{\mathbf{v}} = (0; 1; 0; 1)$;

c) $W = L(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{w}})$, kde $\underline{\mathbf{u}} = (1; 1; 1; 1)$, $\underline{\mathbf{v}} = (1; 1; 1; 0)$, $\underline{\mathbf{w}} = (1; 1; 0; 0)$;

d) $W = L(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{w}})$, kde $\underline{\mathbf{u}} = (1; 2; -1; 1)$, $\underline{\mathbf{v}} = (1; 1; 2; 3)$,
$\underline{\mathbf{w}} = (1; 3; -4; -1)$.

Řešení: a) $(0; 0; 0; 1), (-3; 0; 1; 0), (-2; 1; 0; 0)$;
b) $(1; 0; -1; 0), (0; 1; 0; -1)$; c) $(1; -1; 0; 0)$;
d) $(-5; 2; 0; 1), (-5; 3; 1; 0)$.

0.111. Nalezněte ortogonální projekci $\underline{\mathbf{y}}$ a ortogonální komponentu $\underline{\mathbf{z}}$ vektoru $\underline{\mathbf{x}}$ na podprostor $W = L(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{w}})$, je-li:

a) $\underline{\mathbf{x}} = (5; 2; -2; 2)$; $\underline{\mathbf{u}} = (2; 1; 1; -1)$, $\underline{\mathbf{v}} = (1; 1; 3; 0)$, $\underline{\mathbf{w}} = (1; 2; 8; 1)$;

b) $\underline{\mathbf{x}} = (14; -3; -6; -7)$, $\underline{\mathbf{u}} = (-3; 0; 7; 6)$, $\underline{\mathbf{v}} = (1; 4; 3; 2)$,
$\underline{\mathbf{w}} = (2; 2; -2; -2)$;

c) $\underline{\mathbf{x}} = (2; -5; 3; 4)$, $\underline{\mathbf{u}} = (1; 3; 3; 5)$, $\underline{\mathbf{v}} = (1; 3; -5; -3)$,
$\underline{\mathbf{w}} = (1; -5; 3; -3)$.

Řešení: a) $\underline{\mathbf{y}} = (3; 1; -1; -2)$, $\underline{\mathbf{z}} = (2; 1; -1; 4)$;
b) $\underline{\mathbf{y}} = (5; 2; -9; -8)$, $\underline{\mathbf{z}} = (9; -5; 3; 1)$;
c) $\underline{\mathbf{y}} = (0; -3; 5; 2)$, $\underline{\mathbf{z}} = (2; -2; -2; 2)$.

0.112. Nalezněte ortogonální projekci vektoru $\underline{\mathbf{x}}$ na podprostor W zadaný systémem homogenních lineárních rovnic, je-li:

a) $\underline{\mathbf{x}} = (7; -4; -1; 2)$; $W \equiv 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0$,
$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$, $x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 9x_4 = 0$;

b) $\underline{\mathbf{x}} = (-3; 0; -5; 9)$; $W \equiv 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0$,
$5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0$, $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 0$.

Řešení: a) $(0; -\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}; 0)$; b) $(1; 2; -5; 1)$.

0.113. Zjistěte, zda podprostory W, S jsou kolmé, respektive totálně kolmé, je-li:

a) $W = L((2;1;0;1;0),(1;3;-1;1;0))$;
$S = L((1;1;1;-3;8),(-1;1;1;1;1))$;

b) $W = L((1;2;0;0;0),(0;1;2;0;1))$;
$S = L((4;-2;1;0;0),(2;-1;0;0;1),(-2;1;-1;0;1))$;

c) $W = L((1;-1;1;-1;1),(-1;2;0;1;1),(0;-1;2;2;1))$;
$S = L((1;2;3;4;5),(-1;0;1;2;3),(1;1;1;1;1))$.

Řešení: a) nejsou kolmé; b) kolmé, ale nikoliv totálně kolmé;
c) totálně kolmé.

0.114. Dokažte, že matice A je maticí přechodu mezi dvěmi ortonormálními bázemi 2-rozměrného euklidovského prostoru právě když A je tvaru

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \text{ nebo } A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}, \text{ kde } \alpha \in \mathbb{R}$$

Návod: použijte obrázku na obálce skript a Poznámky 16.7.

0.115. V $\mathcal{E}_3$ udejte příklad podprostorů $\mathcal{B}, \mathcal{C}$, které

a) jsou kolmé, nejsou totálně kolmé a protínají se;
b) jsou kolmé, nejsou totálně kolmé a neprotínají se;
c) jsou totálně kolmé a protínají se;
d) jsou totálně kolmé a neprotínají se.

Řešení: d) neexistuje.

0.116. V $\mathcal{E}_4$ je dána rovina $\varrho \equiv x_1 = 0,\ x_4 - 1 = 0$. Udejte příklad:

a) dvou různých podprostorů, které jsou totálně kolmé k ϱ;
b) podprostoru, který je kolmý, ale není totálně kolmý k ϱ;
c) roviny σ, která je kolmá k ϱ, a průnikem $\varrho \cap \sigma$ je přímka.

Řešení: c) neexistuje.

0.117. V 5-rozměrném euklidovském prostoru $\mathcal{E}$ udejte příklad bodu A a podprostoru $\mathcal{B}$ tak, že bodem A prochází nekonečně mnoho podprostorů

a) kolmých k $\mathcal{B}$; b) totálně kolmých k $\mathcal{B}$.

Řešení: b) neexistuje.

0.118. Nalezněte přímku p, která prochází bodem Q, leží v rovině ϱ a je kolmá k přímce q. Přitom $Q = [-1;1;-1]$; $\varrho \equiv x_1 + x_2 + x_3 + 1 = 0$, $q \equiv x_1 + 2x_2 = 0$, $x_2 - x_3 + 1 = 0$.

Řešení: $p \equiv X = [-1;1;-1] + t(0;1;-1)$.

0.119. V $\mathcal{A}_3$ určete rovnici roviny, která obsahuje společný bod tří rovin $\alpha \equiv 2x + y - z - 2 = 0$, $\beta \equiv x - 3y + z + 1 = 0$, $\gamma \equiv x + y + z - 3 = 0$ a

a) je rovnoběžná s rovinou $\rho \equiv x + y + 2z = 0$,

b) je kolmá na vektor $(2; -1; 3)$.

Řešení: a) $\rho' \equiv x + y + 2z - 4 = 0$; b) $\sigma \equiv 2x - y + 3z - 4 = 0$.

0.120. Nalezněte hodnoty parametru k, pro něž jsou přímka p a rovina ϱ kolmé

a) $p \equiv X = [0; 1; 0] + t(1; 2; 3)$; $\varrho \equiv (k + 4)x_1 + (2 - k)x_2 - 3kx_3 = 5$;

b) $p \equiv X = [2; 1; 0] + t(-1; 1; 2)$; $\varrho \equiv (k + 1)x_1 + (k + 2)x_2 - kx_3 = 1$.

Řešení: a) $k = -2$; b) neexistuje.

0.121. Nalezněte příčku mimoběžek p, q, která je kolmá k p i q. Přitom

a) $p \equiv X = [8; 5; 8] + t(1; 2; -1)$; $q \equiv X = [-4; 3; 4] + r(-7; 2; 3)$;

b) $p \equiv X = [1; -2; 0] + t(2; 3; 1)$; $q \equiv x + y - z = 1$; $-3x + y + z = 9$.

Řešení: a) $X = [3; 1; 1] + t(2; 1; 4)$; b) $X = [-1; 4; 2] + t(-5; 3; 1)$.

0.122. Nalezněte příčku mimoběžek p, q, která je kolmá k nadrovině $\mathcal{N}$. Přitom $p \equiv X = [1; 0; 1; 1] + t(-1; 1; 2; 1)$; $q \equiv X = [3; 1; 3; 4] + r(2; -1; 1; 0)$; $\mathcal{N} \equiv x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 7 = 0$.

Řešení: $X = [0; 1; 3; 2] + t(1; 1; -1; 2)$.

0.123. Určete hodnotu parametru k tak, aby přímky $p = \{A; L(\underline{\mathbf{u}})\}$, $q = \{B; L(\underline{\mathbf{v}})\}$ byly kolmé, případně najděte jejich průsečík. Přitom $A = [3; 6; 5; 10]$, $\underline{\mathbf{u}} = (1; 2; 3 + k; 3)$, $B = [2; 1; 1; 5]$, $\underline{\mathbf{v}} = (1; -1; k; 1)$.

Řešení: přímky jsou kolmé pro $k = -1, -2$; přitom pro $k = -1$ jsou mimoběžné a pro $k = -2$ různoběžné s průsečíkem $[1; 2; 3; 4]$.

0.124. Nalezněte rovinu, která je kolmá k přímkám p, q. Přitom $p \equiv X = [3; 0; 0; -1] + t(2; 0; -1; -1)$; $q \equiv X = [2; -2; 1; 7] + r(0; 4; -2; -3)$.

Řešení: nekonečně mnoho rovin, majících zaměření $L((2; 3; 0; 4), (1; 1; 2; 0))$.

0.125. Nalezněte parametrické vyjádření přímky p procházející bodem A, která leží v rovině ϱ a je kolmá k rovině σ. Přitom:

a) $A = [1; 0; 0; 1]$; $\varrho \equiv X = [1; 1; 1; 0] + r(0; 1; 1; 1) + s(1; 0; 1; 1)$;
$\sigma \equiv x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 1 = 0$; $x_1 + 3x_3 + x_4 = 0$;

b) $A = [1; 0; 0; -1]$; zadání ϱ, σ je stejné jako v a).

Řešení: a) neexistuje, neboť $A \notin \varrho$;
b) $p \equiv X = [1; 0; 0; -1] + t(5; 2; 7; 7)$.

0.126. Nalezněte parametrické i neparametrické vyjádření roviny σ, která prochází bodem Q a je totálně kolmá k rovině ϱ. Přitom:

a) $Q = [0;1;0;1]$; $\varrho \equiv X = [1;2;3;4] + r(1;-1;-1;1) + s(2;2;3;-1)$;

b) $Q = [8;6;4;2]$; $\varrho \equiv x_1 + x_2 = 1,\ x_1 + x_2 + x_4 = 2$.

Řešení: a) $\sigma \equiv X = [0;1;0;1] + r(1;1;-2;-2) + s(1;5;-4;0)$, respektive $\sigma \equiv x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0,\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 - 1 = 0$;
b) $\sigma \equiv X = [8;6;4;2] + r(1;1;0;0) + s(1;1;0;1)$, respektive $\sigma \equiv x_1 - x_2 - 2 = 0,\ x_3 - 4 = 0$.

0.127. Udejte příklad přímek p, q a nadrovin $\mathcal{N}, \mathcal{N}'$ v $\mathcal{E}_4$ takových, že:

a) $v(p,q) = 3$; b) $v(p,\mathcal{N}) = 2$;

c) $v(\mathcal{N},\mathcal{N}') = 1$; d) $v(\mathcal{N},\mathcal{N}') = 0$.

0.128. Nechť R je bod, $\mathcal{B} = \{B; W\}$ je podprostor v $\mathcal{E}$ takový, že $\underline{\mathbf{u}}_1, \dots, \underline{\mathbf{u}}_k$ je báze zaměření W. Dokažte, že pro vzdálenost bodu R od podprostoru $\mathcal{B}$ platí

$$v(R,\mathcal{B}) = \sqrt{\frac{G(\underline{\mathbf{u}}_1, \dots, \underline{\mathbf{u}}_k, \overrightarrow{BR})}{G(\underline{\mathbf{u}}_1, \dots, \underline{\mathbf{u}}_k)}}$$

0.129. Nechť $p = \{A; L(\underline{\mathbf{u}})\}$, $q = \{B; L(\underline{\mathbf{v}})\}$ jsou dvě přímky v $\mathcal{E}$. Dokažte, že pro jejich vzdálenost platí $v(p,q) = \sqrt{\frac{G(\underline{\mathbf{u}}, \overrightarrow{AB})}{(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{u}})}}$, je-li $p \parallel q$, respektive $v(p,q) = \sqrt{\frac{G(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}, \overrightarrow{AB})}{G(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}})}}$, není-li $p \parallel q$.

0.130. Na přímce $p \equiv x + y + 2z - 1 = 0,\ 3x + 4y - z - 29 = 0$ nalezněte bod mající stejnou vzdálenost od bodů $A = [3;4;11]$, $B = [-5;-2;-13]$.

Řešení: $[2;5;-3]$.

0.131. Určete vzdálenost přímky $p \equiv X = [1;6;-6;4] + t(1;-5;8;5)$ a roviny $\varrho \equiv X = [6;3;-5;5] + r(1;-2;2;2) + s(2;-1;-2;1)$.

Řešení: 3.

0.132. Určete vzdálenost rovin ϱ, σ v $\mathcal{E}$, je-li:

a) $\varrho \equiv X = [4;5;3;2] + t_1(1;2;2;2) + t_2(2;0;2;1)$;
$\sigma \equiv X = [1;-2;1;-3] + r_1(2;-2;1;2) + r_2(1;-2;0;-1)$;

b) $\varrho \equiv x_1 + x_2 + 2x_3 - 4 = 0,\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_4 - 9 = 0$;
$\sigma \equiv x_1 - 2x_2 - 2x_4 + 25 = 0,\ x_1 - x_3 + x_4 - 15 = 0$;

c) $\varrho \equiv X = [5;0;-1;9;3] + t_1(1;1;0;-1;-1) + t_2(1;-1;0;-1;1)$;
$\sigma \equiv X = [3;2;-4;7;5] + r_1(1;1;0;1;1) + r_2(0;3;0;1;-2)$;

d) $\varrho \equiv X = [4;2;2;2;0] + t_1(1;2;2;-1;1) + t_2(2;1;-2;1;-1)$;
$\sigma \equiv x_1 - x_2 = 0,\ x_1 - x_3 + x_4 + x_5 + 1 = 0,\ x_3 + x_4 - x_5 - 4 = 0$.

Řešení: a) 3; b) 10; c) 5; d) 0.

0.133. Určete vzdálenost přímek p, q v $\mathcal{E}$, je-li

a) $p \equiv X = [9; -2; 0] + t(4; -3; 1)$; $q \equiv X = [0; -7; 2] + r(-2; 9; 2)$;

b) $p \equiv X = [6; 3; -3] + t(-3; 2; 4)$; $q \equiv X = [-1; -7; 4] + r(-3; 3; 8)$;

c) $p \equiv X = [2; -2; 1; 7] + t(0; 4; -2; -3)$;
$q \equiv X = [3; 0; 0; -1] + r(-2; 0; 1; 1)$;

d) $p \equiv X = [7; 5; 8; 1] + t(2; 0; 3; 1)$;
$q \equiv x_1 - 4x_3 = -7,\ x_2 + 2x_3 = 5,\ x_4 = 3$.

Řešení: a) 7; b) 13; c) 5; d) 6.

0.134. Nalezněte hodnotu parametru k tak, aby přímky p, q byly rovnoběžné a určete pak jejich vzdálenost. Přitom:
$p \equiv X = [0; 3k - 7; 2; -k - 1] + t(2; 8 - 3k; 1; k)$;
$q \equiv X = [2k + 3; 5; 2k + 3; 1] + r(k; 2; k - 1; 2)$.

Řešení: $k = 2$; $v(p, q) = 3$.

0.135. Určete vzdálenost bodu R od podprostoru $\mathcal{B}$, je-li

a) $R = [2; 1; 4; -5]$; $\mathcal{B} \equiv X = [1; -1; 1; 0] + t(0; 1; 2; -2)$;

b) $R = [-9; 2; 1; -5]$; $\mathcal{B} \equiv X = [1; 2; 0; 0] + r(-1; 1; 1; 3)+$
$s(0; -2; 1; -1)$;

c) $R = [4; 2; -5; 1]$; $\mathcal{B} \equiv 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 9$;
$2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 12$;

d) $R = [2; 1; -1; 0]$; $\mathcal{B} \equiv 3x_1 + x_3 - x_4 + 6 = 0$.

Řešení: a) $\sqrt{3}$; b) $2\sqrt{30}$; c) 5; d) $\sqrt{11}$.

0.136. Na přímce $p \equiv \{A; L(\underline{\mathbf{u}})\}$ nalezněte bod B tak, aby $v(A, B) = \sqrt{6}$ a body A, B byly oddělovány nadrovinou $\mathcal{N}$. Přitom $A = [0; 1; -1; 10]$, $\underline{\mathbf{u}} = (2; 1; 0; 1)$, $\mathcal{N} \equiv x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 + 4 = 0$.

Řešení: $B = [-2; 0; -1; 9]$.

0.137. V orientovaném 4-rozměrném euklidovském prostoru udejte příklad vektorů

a) $\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \underline{\mathbf{u}}_3, \underline{\mathbf{u}}_4$ takových, že $[\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \underline{\mathbf{u}}_3, \underline{\mathbf{u}}_4] = -1$;

b) $\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \underline{\mathbf{u}}_3$ takových, že $G(\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \underline{\mathbf{u}}_3) = -1$;

c) $\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \underline{\mathbf{u}}_3$ nenulových tak, že jejich ortogonálním doplňkem je $\underline{\mathbf{o}}$.

Řešení: b) neexistují.

0.138. Jak se změní hodnota Grammova determinantu $G(\underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_k)$, jestliže

a) zaměníme vektory $\underline{\mathbf{u}}_i$ a $\underline{\mathbf{u}}_j$;

b) vektor $\underline{\mathbf{u}}_i$ vynásobíme reálným číslem r;

c) k vektoru $\underline{\mathbf{u}}_i$ přičteme r-násobek vektoru $\underline{\mathbf{u}}_j$ $(j \neq i)$.

Řešení: a) nezmění se; b) vynásobí se r^2; c) nezmění se.

0.139. Spočtěte vnější součin $[\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \underline{\mathbf{u}}_3, \underline{\mathbf{u}}_4]$, je-li:

a) $\underline{\mathbf{u}}_1 = (3; -1; 5; 2)$; $\underline{\mathbf{u}}_2 = (2; 0; 7; 0)$, $\underline{\mathbf{u}}_3 = (-3; 1; 2; 0)$, $\underline{\mathbf{u}}_4 = (5; -4; 1; 2)$;

b) $\underline{\mathbf{u}}_1 = (1; 0; 0; -1)$, $\underline{\mathbf{u}}_2 = (2; 3; 4; 7)$, $\underline{\mathbf{u}}_3 = (-3; 4; 5; 9)$, $\underline{\mathbf{u}}_4 = (-4; -5; 6; 1)$;

c) $\underline{\mathbf{u}}_1 = (1; 2; 1; 0)$, $\underline{\mathbf{u}}_2 = (3; 5; 2; 1)$, $\underline{\mathbf{u}}_3 = (2; 1; 2; 3)$, $\underline{\mathbf{u}}_4 = (0; -2; 1; 2)$.

Řešení: a) -106; b) 216; c) 0.

0.140. V orientovaném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou dány báze $\underline{\mathbf{u}}_1 = (1, -2; 1)$, $\underline{\mathbf{u}}_2 = (0; 1; 1)$, $\underline{\mathbf{u}}_3 = (1; 0; 1)$, respektive $\underline{\mathbf{v}}_1 = (1; 1; 1)$, $\underline{\mathbf{v}}_2 = (0; 1; 0)$, $\underline{\mathbf{v}}_3 = (1; 1; k)$, $k \neq 1$. Určete parametr k tak, aby obě báze byly nesouhlasné.

Řešení: $k > 1$.

0.141. Ve V_3 spočtěte vektorový součin $\underline{\mathbf{u}} \times \underline{\mathbf{v}}$ vektorů $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}$, je-li:

a) $\underline{\mathbf{u}} = (1; 3; 4)$, $\underline{\mathbf{v}} = (-1; 2; 0)$;

b) $\underline{\mathbf{u}} = (1; 2; -1)$, $\underline{\mathbf{v}} = (3; 4; 5)$;

c) $\underline{\mathbf{u}} = (-1; 2; -2)$, $\underline{\mathbf{v}} = (2; -4; 4)$.

Řešení: a) $(-8; -4; 5)$; b) $(14; -8; -2)$; c) $(0; 0; 0)$.

0.142. Ve V_4 vypočtěte vektorový součin vektorů $\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \underline{\mathbf{u}}_3$, je-li:

a) $\underline{\mathbf{u}}_1 = (1; 1; 1; 1)$, $\underline{\mathbf{u}}_2 = (1; 1; 1; 0)$, $\underline{\mathbf{u}}_3 = (1; 1; 0; 0)$;

b) $\underline{\mathbf{u}}_1 = (2; 1; 1; -2)$, $\underline{\mathbf{u}}_2 = (1; 2; -3; 1)$, $\underline{\mathbf{u}}_3 = (1; -1; 4; -3)$;

c) $\underline{\mathbf{u}}_1 = (1; 2; 1; 0)$, $\underline{\mathbf{u}}_2 = (0; 1; 1; -1)$, $\underline{\mathbf{u}}_3 = (2; 0; 1; 0)$.

Řešení: a) $(1; -1; 0; 0)$; b) $(0; 0; 0; 0)$; c) $(-2; -1; 4; 3)$.

0.143. V euklidovské rovině spočtěte obsah rovnoběžníka, který je určen vektory $\underline{\mathbf{u}} = (2; 3)$, $\underline{\mathbf{v}} = (1; -4)$.

Řešení: 11.

0.144. Ve 3-rozměrném euklidovském prostoru spočtěte objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\underline{\mathbf{u}} = (1; -3; 1)$, $\underline{\mathbf{v}} = (2; 1; -3)$, $\underline{\mathbf{w}} = (1; 2; 1)$.

Řešení: 25.

0.145. Ve 4-rozměrném euklidovském prostoru spočtěte objem k-rozměrného rovnoběžnostěnu $\mathcal{R}_k = \mathcal{R}(A; \underline{\mathbf{u}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_k)$, je-li:

a) $k = 2$; $\underline{\mathbf{u}}_1 = (1; 1; 2; 2)$, $\underline{\mathbf{u}}_2 = (2; 1; -1; 1)$;

b) $k = 3$; $\underline{\mathbf{u}}_1 = (2; 0; 1; 0)$, $\underline{\mathbf{u}}_2 = (1; 2; 1; 0)$, $\underline{\mathbf{u}}_3 = (0; 1; 1; -1)$;

c) $k = 4$; $\underline{\mathbf{u}}_1 = (7; 6; 7; 6)$, $\underline{\mathbf{u}}_2 = (7; 6; -7; -6)$, $\underline{\mathbf{u}}_3 = (9; 8; 9; 8)$, $\underline{\mathbf{u}}_4 = (9; 8; -9; -8)$.

Řešení: a) $\sqrt{61}$; b) $\sqrt{30}$ c) 16.

0.146. Nechť $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{w}} \in V_3$. Dokažte, že potom platí:

a) $(\underline{\mathbf{u}} \times \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{w}}) = (\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}} \times \underline{\mathbf{w}})$;

b) $\underline{\mathbf{u}} \times (\underline{\mathbf{v}} \times \underline{\mathbf{w}}) + \underline{\mathbf{v}} \times (\underline{\mathbf{w}} \times \underline{\mathbf{u}}) + \underline{\mathbf{w}} \times (\underline{\mathbf{u}} \times \underline{\mathbf{v}}) = \underline{\mathbf{o}}$;

c) $[\underline{\mathbf{u}} \times \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{v}} \times \underline{\mathbf{w}}, \underline{\mathbf{w}} \times \underline{\mathbf{u}}] = [\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{w}}]^2$;

d) $\underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{v}} + \underline{\mathbf{w}} = \underline{\mathbf{o}} \implies \underline{\mathbf{u}} \times \underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{v}} \times \underline{\mathbf{w}} = \underline{\mathbf{w}} \times \underline{\mathbf{u}}$.

0.147. V 5-rozměrném euklidovském prostoru udejte příklad

a) přímek p, q, které se protínají, a je $\sphericalangle(p,q) = 60°$;

b) přímek p, q, které se neprotínají, a je $\sphericalangle(p,q) = 60°$;

c) přímky p a nadroviny $\mathcal{N}$ tak, že $\sphericalangle(p,\mathcal{N}) = 90°$;

d) nadrovin $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ tak, že $\sphericalangle(\mathcal{N}_1,\mathcal{N}_2) = 30°$.

0.148. Nechť φ, respektive φ', značí odchylku vektorů $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}$, respektive $\underline{\mathbf{u}}', \underline{\mathbf{v}}'$. Je-li $\underline{\mathbf{u}}' = r\underline{\mathbf{u}}$, $\underline{\mathbf{v}}' = s\underline{\mathbf{v}}$ a $r \cdot s > 0$, pak je $\varphi = \varphi'$. Dokažte.

0.149. Nechť p je přímka, $\mathcal{B}$ je netriviální podprostor v $\mathcal{E}$ a nechť $\mathcal{C}$ je podprostor v $\mathcal{E}$, který je totálně kolmý k $\mathcal{B}$. Dokažte, že pak je $\sphericalangle(p,\mathcal{B}) + \sphericalangle(p,\mathcal{C}) = \frac{\pi}{2}$.

0.150. Nechť φ značí odchylku vektorů $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}$, je-li:

a) $\varphi = 60°$, $\|\underline{\mathbf{u}}\| = 5$, $\|\underline{\mathbf{v}}\| = 8$, pak nalezněte $\|\underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{v}}\|$ a $\|\underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{v}}\|$;

b) $\varphi = 30°$, $\|\underline{\mathbf{u}}\| = \sqrt{3}$, $\|\underline{\mathbf{v}}\| = 1$, pak nalezněte odchylku ψ vektorů $\underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{v}}$, $\underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{v}}$;

c) $\varphi = \frac{2}{3}\pi$, $\|\underline{\mathbf{u}}\| = 2$, $\|\underline{\mathbf{v}}\| = 5$, pak určete parametr k tak, aby vektory $\underline{\mathbf{a}} = 3\underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{v}}$; $\underline{\mathbf{b}} = k\underline{\mathbf{u}} + 17\underline{\mathbf{v}}$ byly ortogonální.

Řešení: a) $\|\underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{v}}\| = \sqrt{129}$, $\|\underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{v}}\| = 7$; b) $\cos\psi = \sqrt{\frac{4}{7}}$; c) $k = 40$.

0.151. Určete koncovř bod B úsečky $[A, B]$, je-li $A = [3; 2; 7]$, $\overline{AB} = 15$ a pro odchylky přímky AB a souřadných os platí: $\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = 3 : 4 : 5$.

Řešení: 4 řešení: $[15; 11; 7]$; $[-9; -7; 7]$; $[15; -7; 7]$; $[-9; 11; 7]$.

0.152. Nalezněte odchylku φ přímky $p = \{A; L(\underline{\mathbf{u}})\}$ a podprostoru $\mathcal{B}$, je-li:

a) $\underline{\mathbf{u}} = (1; 2; -2; 1)$; $\mathcal{B} \equiv X = [1; 1; 1; 1] + t(2; -2; 1; -1)$;

b) $\underline{\mathbf{u}} = (-3; 15; 1; -5)$; $\mathcal{B} \equiv X = [0; 0; 0; 0] + r(1; -5; -2; 10) + s(1; 8; -2; -16)$;

c) $\underline{\mathbf{u}} = (1; 3; -1; 3)$; $\mathcal{B} \equiv 3x_1 + x_3 - 4x_4 = 0,\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 + 1 = 0$;

d) $\underline{\mathbf{u}} = (2; 2; 1; 1)$; $\mathcal{B} = \langle A, B, C\rangle$, kde $A = [0; 0; 0; 0]$, $B = [3; 4; -4; -1]$, $C = [0; 1; -1; 2]$;

e) $\underline{\mathbf{u}} = (3; 1; \sqrt{2}; -2)$; $\mathcal{B} \equiv X = [1; 2; 1; 1] + r(-1; 1; -1; 0) + s(-1; 2; -2; 1) + t(2; -1; 2; 1)$;

f) $\underline{\mathbf{u}} = (2; 0; 2; -1)$; $\mathcal{B} \equiv 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 - 7 = 0$.

Řešení: a) $\frac{\pi}{3}$; b) $\frac{\pi}{4}$; c) $\frac{\pi}{4}$; d) $\cos\varphi = \sqrt{\frac{3}{14}}$; e) $\frac{\pi}{3}$; f) $\frac{\pi}{4}$.

0.153. Nalezněte odchylku φ přímky $p = \{A; L(\underline{\mathbf{u}})\}$ a nadroviny $\mathcal{N}$, je-li:

a) $\underline{\mathbf{u}} = (2;0;0;2;1)$; $\mathcal{N} \equiv x_1 + x_2 + x_3 + x_5 - 7 = 0$;

b) $\underline{\mathbf{u}} = (0;1;-1;0;0)$; $\mathcal{N} \equiv X = [2;1;1;2;2] + t_1(2;1;0;1;-1)+$ $t_2(3;2;0;0;1) + t_3(0;1;0;1;0) + t_4(1;0;0;1;3)$.

Řešení: a) $\frac{\pi}{6}$; b) $\frac{\pi}{4}$.

0.154. Nalezněte odchylku φ rovin $\varrho = \{A; L(\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2)\}$, $\sigma = \{B; L(\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2)\}$, kde

a) $\underline{\mathbf{u}}_1 = (1;1;1;1)$, $\underline{\mathbf{u}}_2 = (1;-1;1;-1)$,
$\underline{\mathbf{v}}_1 = (1;0;0;0)$, $\underline{\mathbf{v}}_2 = (1;1;0;0)$;

b) $\underline{\mathbf{u}}_1 = (1;2;0;0)$, $\underline{\mathbf{u}}_2 = (0;1;0;0)$, $\underline{\mathbf{v}}_1 = (1;1;1;1)$, $\underline{\mathbf{v}}_2 = (2;-2;5;2)$.

Řešení: a) $\frac{\pi}{4}$; b) $\cos\varphi = \sqrt{\frac{8}{9}}$.

0.155. V $\mathcal{E}_3$ jsou dány roviny $\varrho \equiv 5x-2y+5z = 3$, $\sigma \equiv 2x+y-7z = -2$. Nalezněte rovinu τ tak, aby $\sphericalangle(\tau,\varrho) = \sphericalangle(\tau,\sigma)$ a rovina τ procházela průsečnicí rovin ϱ, σ.

Řešení: 2 řešení: $\tau \equiv 7x - y - 2z = 1$, resp. $\tau \equiv 3x - 3y + 12z = 5$.

0.156. Určete odchylku přímky $p \equiv x + y + 3z = 0,\ x - y - z = 0$ a roviny $\varrho \equiv 2x + y + z + 1 = 0$.

Řešení: $\frac{\pi}{3}$.

0.157. Je dána přímka $p \equiv 2x - 2y + z = 0,\ x - 3y - 2z = 0$ a rovina $\sigma \equiv X = [1;-1;5] + r(1;-2;1) + s(-2;4;3)$. Přímkou p proložte rovinu ϱ tak, že odchylka $\sphericalangle(\varrho,\sigma) = 60°$.

Řešení: neexistuje.

0.158. V $\mathcal{E}_3$ určete odchylku

a) rovin $\varrho \equiv 2x - y + z - 1 = 0$, $\sigma \equiv x + y + 2z + 3 = 0$;

b) průsečnic roviny $\varrho \equiv x + y + z + 2 = 0$ s rovinami
$\sigma \equiv x - y - 7 = 0$ a $\tau \equiv x - y + z - 1 = 0$;

c) roviny $\varrho \equiv 2x + y - 2z + 1 = 0$ a průsečnice rovin
$\sigma \equiv 3x - y + z = 0$, $\tau \equiv x - 2y + 3z + 4 = 0$.

Řešení: a) $\frac{\pi}{3}$; b) $\frac{\pi}{6}$; c) 0.

0.159. V $\mathcal{E}_3$ nalezněte bod M

a) ležící na přímce $p \equiv x+y+z=2,\ x+2y-z=1$ stejně vzdálenř od rovin $\varrho \equiv x+2y+z=-1$ a $\sigma \equiv x+2y+z=3$;

b) ležící na průsečnici rovin $\varrho \equiv x+y+2z=1,\ \sigma \equiv 3x+4y-z=29$ a stejně vzdálený od bodů $A=[3;4;11],\ B=[-5;-2;-13]$;

c) souměrně sdružený s bodem $A=[-6;7;10]$ podle roviny $\varrho \equiv x+2y+3z=-4$;

d) souměrně sdružený s bodem $A=[10;3;4]$ podle přímky $p \equiv X=[3;2;1]+t(5;4;2)$;

e) ležící na průsečnici rovin $\varrho \equiv 2x+y+z=-8,\ \sigma \equiv x-4y-2z=5$ a mající od roviny $\tau \equiv 3x-6y+2z-10=0$ vzdálenost 5.

Řešení: a) $[3;-1;0]$; b) $[2;5;-3]$; c) $[-12;-5;-8]$; d) $[6;9;2]$;
e) 2 řešení: $[-5;-7;9]$, respektive $[-\frac{5}{3};\frac{4}{3};-6]$.

0.160. V $\mathcal{E}_3$ nalezněte přímku p

a) procházející bodem $A=[4;-1;3]$ kolmou k rovině $\varrho \equiv 3x+2y-z=21$,

b) procházející průsečíkem přímky $q \equiv X=[12;9;1]+t(4;3;1)$ a roviny $\rho \equiv 3x+5y-z=2$ kolmou k rovině $\sigma \equiv x-y+6z=4$,

c) procházející počátkem P kartézského repéru protínající přímku $q \equiv X=[4;3;1]+t(1;4;-3)$ tak, že odchylka p,q je 30°,

d) procházející bodem $A=[1;7;9]$ kolmou k přímce $q \equiv 2x+y-z=-3,\ x-y+4z=0$ tak, že $\sphericalangle(p,\varrho)=30^\circ$, kde $\varrho \equiv X=[2;1;2]+r(1;1;-2)+s(2;2;-5)$.

Řešení: a) $X=A+t(3;2;-1)$; b) $X=[0;0;-2]+t(1;-1;6)$;
c) 2 řešení: $X=P+t(5;7;-2)$, resp. $X=P+t(2;-5;7)$;
d) 2 řešení: $X=A+t(4;1;1)$, resp. $X=A+t(1;0;1)$.

0.161. Ve svazku přímek určeném přímkami $p_1 \equiv x+y+4=0$ a $p_2 \equiv 3x-2y-2=0$ nalezněte přímky, které svírají odchylku $\frac{\pi}{4}$ s přímkou p_1.

Řešení: $p \equiv 5x+6=0$, $p' \equiv 5y+14=0$.

0.162. V $\mathcal{E}_3$ nalezněte rovinu ϱ

a) procházející počátkem P kartézského repéru a kolmou k rovinám $\sigma \equiv 2x - y + 5z = -3$, $\tau \equiv x + 3y - z = 7$,
b) obsahující přímku $p \equiv X = [2;3;-1] + t(5;1;2)$ a kolmou k rovině $\sigma \equiv x + 4y - 3z + 7 = 0$,
c) procházející kolmicemi vedenými bodem $R = [-3;2;5]$ na roviny $\sigma \equiv 4x + y - 3z = 0$, respektive $\tau \equiv X = [0;2;1] + r(1;1;-3) + s(1;2;-1)$,
d) rovnoběžnou s rovinou $\sigma \equiv 3x - 6y - 2z + 14 = 0$ a mající od ní vzdálenost 3,
e) obsahující přímku $p \equiv 5x + y + z = 0$, $y - z + 4 = 0$, přičemž $\sphericalangle(\varrho, \sigma) = 45°$, kde $\sigma \equiv 4x - y + 8z - 12 = 0$,
f) procházející bodem $A = [3;0;0]$ a mající od počátku P vzdálenost 2 a dále $\sphericalangle(\varrho, \sigma) = 45°$, kde $\sigma \equiv x - z + 1 = 0$,
g) procházející počátkem P a kolmou k rovině $\sigma \equiv 5x - 2y + 5z - 10 = 0$, přičemž $\sphericalangle(\varrho, \tau) = 45°$, kde $\tau \equiv X = [0;1;1] + r(4;-1;1) + s(4;3;-1)$.

Řešení: a) $2x - y - z = 0$; b) $11x - 17y - 19z = -10$; c) $5x + 19y + 13z = 88$; d) 2 řešení: $3x - 6y - 2z = 7$, respektive $3x - 6y - 2z = -35$; e) 2 řešení: $20x + y + 7z = 12$, respektive $y - z = -4$; f) 2 řešení: $2x \pm 2y - z = 6$; g) 2 řešení: $x - z = 0$, respektive $x + 20y + 7z = 0$.

0.163. Jsou dány body $A = [-4;1;2]$, $B = [3;5;-1]$. Určete bod C, víte-li, že střed dvojice bodů AC leží na přímce $p \equiv X = [1;0;1] + t(1;1;0)$ a střed dvojice bodů BC leží v rovině $\varrho \equiv x_1 - x_2 + 7x_3 + 1 = 0$.

Řešení: nekonečně mnoho bodů ležících na přímce $p' \equiv X = [6;-1;0] + t(2;2;0)$.

0.164. Jsou dány body $A = [2;-1;7]$, $B = [4;5;-2]$. Určete dělicí poměr bodů $(C; B, A)$, kde C je průsečík přímky AB s přímkou $p \equiv X = [4;1;4] + t(1;2;-3)$.

Řešení: $(C; B, A) = 2$, přičemž $C = [0;-7;16]$.

0.165. Zjistěte, zda $\mathcal{M}$ je konvexní množina v $\mathcal{A}$ ($\dim \mathcal{A} = 3$), je-li:
a) $\mathcal{M} = \{[x_1;x_2;x_3] \mid x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 \leq 2\}$,
b) $\mathcal{M} = \{[x_1;x_2;x_3] \mid x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 \leq 2\}$.

Řešení: a) je konvexní; b) není konvexní.

0.166. Zjistěte, zda body B, resp. C, resp. D patří do konvexního mnohostěnu $\mathcal{K} = K(\{A_1, A_2, A_3, A_4\})$, kde $A_1 = [3;1;-1]$, $A_2 = [-2;2;0]$, $A_3 = [2;2;1]$, $A_4 = [1;0;4]$, $B = [-1;2;1]$, $C = [0;2;\frac{1}{2}]$, $D = [1;1;1]$

Řešení: B nepatří do $\mathcal{K}$; C, D patří do $\mathcal{K}$.

0.167. V $\mathcal{E}$ ($\dim \mathcal{E} = 3$) zadejte přímku p a body A, B tak, aby úloha nalézt na přímce p bod R mající stejnou vzdálenost od bodů A, B měla jediné (respektive nekonečně mnoho, respektive žádné) řešení.

0.168. Určete, která z rovin $\varrho \equiv x - y - 3 = 0$, $\sigma \equiv 2x + y - z + 1 = 0$ má větší vzdálenost od počátku P kartézského repéru.

Řešení: rovina ϱ.

0.169. Vypočtěte vzdálenost daných rovnoběžných rovin $\varrho \equiv x + y + z - 1 = 0$, $\sigma \equiv x + y + z = 0$

Řešení: $v(\varrho, \sigma) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

0.170. Nalezněte kolmici p vedenou bodem $R = [4; -1; 3]$ na rovinu $\varrho \equiv 3x+2y-z = 21$ a určete kolmý průmět bodu R na ϱ.

Řešení: $p \equiv X = [4; -1; 3] + t(3; 2; -1)$; kolmý průmŘt $[7; 1; 2]$.

0.171. Je-li normálovř vektor roviny $\varrho \equiv a_1x + a_2y + a_3z + a = 0$ normovanř, pak pro vzdálenost bodu $R = [r_1; r_2; r_3]$ od roviny ϱ platí

$$v(R, \varrho) = |a_1r_1 + a_2r_2 + a_3r_3 + a|\,.$$

Dokažte.

0.172. Najděte příčku r mimoběžek $p \equiv X = [4; 1; 4] + t(1; -1; 0)$; $q \equiv x + z = 3$, $5x - y = 0$, která je kolmá k rovině $\varrho \equiv 2x + 2y + z = 0$.

Řešení: $r \equiv X = [\frac{1}{10}; \frac{1}{2}; \frac{29}{10}] + t(2; 2; 1)$.

Použitá literatura

Baz В. Т. Базылев, *Сборник задач по геометрии*, Москва 1980.

Ber M. Berger, *Géométrie 1–5*, Paris 1977.

Bic L. Bican, *Lineární algebra*, SNTL, Praha 1979.

Bud B. Budinský, *Analytická a diferenciální geometrie*, SNTL, Praha 1983.

Byd B. Bydžovský, *Úvod do analytické geometrie*, Praha 1956.

Cub О. Н. Цубербиллер, *Задачи и упражнения по аналитической геометрии*, Москва 1957.

ech E. ech, *Základy analytické geometrie*, Praha 1951.

DoDo Z. Došlá, O. Došlř, *Metrické prostory (Teorie a příklady)*, skripta MU, Brno 1996.

Jef Н. В. Ефимов, *Краткий курс по аналитической геометрии*, Москва 1975.

Ho88 P. Horák, *Geometrie I*, skripta MU, Brno 1988.

Ho94 P. Horák, *Algebra a teoretická aritmetika I*, skripta MU, Brno 1994.

JaSe J. Janyška, A. Sekaninová, *Analytická teorie kuželoseček a kvadrik*, skripta MU, Brno 1996.

Kle А. В. Клетеник, *Сборник задач по аналитической геометрии*, Москва 1986.

Kra E. Kraemer, *Analytická geometrie lineárních útvarů*, Praha 1956.

Mo79 П. С. Моденов, *Задачи по геометрии*, Москва 1979.

MoSw M. Moszyńska, J. Świecicka, *Geometria z algebra liniova*, Warszawa 1987.

Pog А. В. Погорелов, *Аналитическая геометрия*, Москва 1978.

Sek M. Sekanina a kol., *Geometrie I*, Praha 1986.

Rejstřík

Rejstřík

Obsah