

Matematika II: Řešené příklady

Radomír Paláček, Petra Schreiberová, Petr Volný

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie

VŠB - Technická univerzita Ostrava

Řešené příklady – Integrální počet funkcí jedné proměnné

68 - Přímá metoda

Zadání Vypočtete integrál $\int \left(7\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{1+x^2} \right) dx$.

Řešení **Video** **Teorie: 11, 12, 13** **Příklady: 157, 158, 159** 

Integrand je složen ze součtu tří funkcí, proto využijeme vlastnosti o integraci součtu funkcí (13.), dostaneme součet tří integrálů:

$$\int 7\sqrt[3]{x^2} dx + \int \frac{1}{2} \sin x dx - \int \frac{2}{1+x^2} dx,$$

ve všech integrálech je funkce ve tvaru konstanta krát funkce, využijeme tedy druhé vlastnosti (14.) a konstanty vytkneme před integrál:

$$7 \int \sqrt[3]{x^2} dx + \frac{1}{2} \int \sin x dx - 2 \int \frac{1}{1+x^2} dx,$$

funkci $\sqrt[3]{x^2}$ si napíšeme ve tvaru mocninné funkce $x^{\frac{2}{3}}$.

S využitím vlastností jsme získali základní integrály, které již podle vzorců (2.), (6.) a (11.) integrujeme.

Výsledek:

$$\int \left(7\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{1+x^2} \right) dx = 7 \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} - \frac{1}{2} \cos x - 2 \arctan x + c = \frac{21}{5} \sqrt[3]{x^5} - \frac{1}{2} \cos x - 2 \arctan x + c.$$

Poznámky*Základní integrály*

1. $\int 0 dx = c$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
3. $\int e^x dx = e^x + c$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
5. $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + c$
7. $\int \cos x dx = \sin x + c$
8. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$
9. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$
10. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$
11. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$
12. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$
 $f = f(x) \quad g = g(x)$
13. $\int (f \pm g) dx = \int f dx \pm \int g dx$
14. $\int (k \cdot f) dx = k \int f dx, k \in \mathbb{R}$

69 - Přímá metoda

Zadání Vypočtete integrál $\int \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1} + \frac{4}{1 - \cos^2 x} \right) dx$.

Řešení **Video** **Teorie: 11, 12, 13** **Příklady: 157, 158, 159, 160** 

Integrand je složen ze součtu funkcí, proto opět využijeme vlastnosti o integraci součtu funkcí (13.), dostaneme součet dvou integrálů:

$$\int \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1} dx + \int \frac{4}{1 - \cos^2 x} dx.$$

Výpočet prvního integrálu:

s využitím vzorce $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ upravíme čítec

$$\int \frac{(e^x - 1)(e^x + 1)}{e^x + 1} dx = \int (e^x - 1) dx,$$

rozdělíme na 2 integrály a pomocí vzorců pro integrování (3.), (1.) vypočítáme

$$\int (e^x - 1) dx = e^x - x + c.$$

Výpočet druhého integrálu:

využijeme vlastnosti (14.), konstantu vytkneme před integrál, jmenovatel si upravíme ($\cos^2 x + \sin^2 x = 1$)

a podle (9.) integrujeme

$$\int \frac{4}{1 - \cos^2 x} dx = 4 \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -4 \cot x + c.$$

Výsledek:

$$\int \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1} + \frac{4}{1 - \cos^2 x} \right) dx = e^x - x - 4 \cot x + c.$$

Poznámky

Základní integrály

1. $\int 0 dx = c$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
3. $\int e^x dx = e^x + c$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
5. $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + c$
7. $\int \cos x dx = \sin x + c$
8. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$
9. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$
10. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$
11. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$
12. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$
 $f = f(x) \quad g = g(x)$
13. $\int (f \pm g) dx = \int f dx \pm \int g dx$
14. $\int (k \cdot f) dx = k \int f dx, k \in \mathbb{R}$

70 - Přímá metoda

Zadání Vypočtěte integrál $\int \frac{-2}{\tan x \cos^2 x} dx$.

Řešení **Video** **Teorie: 11, 12, 13** **Příklady: 157, 158, 159, 160** 

Vidíme integrand ve tvaru zlomku, proto nejdříve kontrolujeme, zda nelze využít vzorec (12.).

$$\text{Víme, že } (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Po úpravě integrandu dostáváme:

$$\int \frac{-2}{\tan x \cos^2 x} dx = -2 \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\tan x} dx.$$

Tedy platí, že derivace jmenovatele je v čitateli a lze využít vzorec (12.).

Výsledek:

$$\int \frac{-2}{\tan x \cos^2 x} dx = -2 \ln |\tan x| + c.$$

Poznámky*Základní integrály*

1. $\int 0 dx = c$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
3. $\int e^x dx = e^x + c$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
5. $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + c$
7. $\int \cos x dx = \sin x + c$
8. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$
9. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$
10. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$
11. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$
12. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$
 $f = f(x) \quad g = g(x)$
13. $\int (f \pm g) dx = \int f dx \pm \int g dx$
14. $\int (k \cdot f) dx = k \int f dx, k \in \mathbb{R}$

71 - Lineární substituce, obecné vzorce

Zadání Vypočtěte integrály: $\int e^{-3x+1} dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{4 - (3x - 1)^2}} dx$.

Řešení **Video** **Teorie: 17** **Příklady: 161, 162** 

Výpočet integrálu $\int e^{-3x+1} dx$.

Integrand je ve tvaru e^{ax+b} , proto k nalezení primitivní funkce využijeme lineární substituce vzorec (1.), varianta (3.), kde $a = -3$, $b = 1$.

Výsledek:

$$\int e^{-3x+1} dx = -\frac{1}{3} e^{-3x+1} + c.$$

Výpočet integrálu $\int \frac{1}{\sqrt{4 - (3x - 1)^2}} dx$.

Integrand je ve tvaru $\frac{1}{\sqrt{d^2 - (ax + b)^2}}$, proto k nalezení primitivní funkce využijeme opět lineární substituci vzorec (1.) varianta (7.), kde $a = 3$, $b = -1$, $d = 2$.

Výsledek:

$$\int \frac{1}{\sqrt{4 - (3x - 1)^2}} dx = \frac{1}{3} \arcsin \frac{3x - 1}{2} + c.$$

Poznámky

Lineární substituce, obecné vzorce

1. $\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + c$
2. $\int (ax + b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax + b)^{n+1}}{n + 1} + c$
3. $\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$
4. $\int \frac{1}{ax + b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax + b| + c$
5. $\int \sin(ax + b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + c$
6. $\int \cos(ax + b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + c$
7. $\int \frac{1}{\sqrt{d^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{d} + c$
8. $\int \frac{1}{d^2 + x^2} dx = \frac{1}{d} \arctan \frac{x}{d} + c$

72 - Metoda per partes

Zadání Vypočtete integrál $\int (-2x + 3) \cos 3x dx$.

Řešení

Video **Teorie: 14, 15** **Příklady: 163, 164, 165** 

Integrál je ve tvaru $\int P(x) \cos ax dx$, což je integrál typický pro výpočet metodou per partes, kde polynom $P(x)$ derivujeme a funkci $\cos ax$ integrujeme.

$$\begin{aligned} u &= -2x + 3 & v' &= \cos 3x \\ u' &= -2 & v &= \frac{1}{3} \sin 3x \end{aligned}$$

Po aplikaci PP :

$$\int (-2x + 3) \cos 3x dx = \frac{-2x + 3}{3} \sin 3x - \int \frac{-2}{3} \sin 3x dx = \frac{-2x + 3}{3} \sin 3x + \frac{2}{3} \int \sin 3x dx.$$

Dostali jsme jednodušší integrál $\int \sin 3x dx$, který již umíme vyřešit pomocí vzorců,

$$\int \sin 3x dx = -\frac{1}{3} \cos 3x + c.$$

Výsledek:

$$\int (-2x + 3) \cos 3x dx = \frac{-2x + 3}{3} \sin 3x - \frac{2}{9} \cos 3x + c.$$

Poznámky

Metoda per partes

$$\begin{aligned} u &= u(x) & v' &= v'(x) \\ u' &= u'(x) & v &= v(x) \end{aligned}$$

$$\int (u \cdot v') dx = u \cdot v - \int (u' \cdot v) dx$$

73 - Metoda per partes

Zadání Vypočtete integrál $\int \ln^2 x dx$.

Řešení

Video **Teorie: 14, 15** **Příklady: 163, 164, 165** 

Funkci $\ln^2 x$ integrovat neumíme, proto musíme k výpočtu využít metodu per partes, kde si integrand napíšeme ve tvaru součinu funkce s jedničkou: $\int 1 \cdot \ln^2 x dx$.

Volíme

$$\begin{aligned} u &= \ln^2 x & v' &= 1 \\ u' &= 2 \frac{\ln x}{x} & v &= x \end{aligned}$$

Po aplikaci PP :

$$\int \ln^2 x dx = x \ln^2 x - 2 \int x \frac{\ln x}{x} dx = x \ln^2 x - 2 \int \ln x dx.$$

Dostali jsme jednodušší integrál $\int \ln x dx$, který řešíme opět metodou PP

$$\begin{aligned} u &= \ln x & v' &= 1 \\ u' &= \frac{1}{x} & v &= x \end{aligned}$$

Po aplikaci PP :

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + c.$$

Výsledek:

$$\int \ln^2 x dx = x \ln^2 x - 2(x \ln x - x) + c.$$

Poznámky

Metoda per partes

$$\begin{aligned} u &= u(x) & v' &= v'(x) \\ u' &= u'(x) & v &= v(x) \end{aligned}$$

$$\int (u \cdot v') dx = u \cdot v - \int (u' \cdot v) dx$$

74 - Substituční metoda

Zadání Vypočtěte integrál $\int x \tan(x^2 - 2) dx$.

Řešení

Video **Teorie: 16, 17** **Příklady: 166, 167, 168** 

Derivace vnitřní funkce je rovna (až na násobek) druhé funkci v součinu, $(x^2 - 2)' = 2x$, využijeme tedy substituce:

$$\begin{aligned}x^2 - 2 &= t \\2x dx &= dt \\x dx &= \frac{1}{2} dt\end{aligned}$$

Po aplikaci:

$$\int x \tan(x^2 - 2) dx = \frac{1}{2} \int \tan t dt.$$

Dostali jsme integrál $\int \tan t dt$, který si napíšeme ve tvaru $\int \frac{\sin t}{\cos t} dt$.

Všimneme si, že derivace jmenovatele je v čitateli (liší se pouze konstantou), proto tento integrál řešíme přímou metodou s využitím vzorce $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$. Do nalezené primitivní funkce vrátíme substituci.

Výsledek:

$$\int x \tan(x^2 - 2) dx = -\frac{1}{2} \ln |\cos(x^2 - 2)| + c.$$

Poznámky

Substituce typu $\varphi(x) = t$

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int f(t) dt$$

Postup

1. označíme substituci $\varphi(x) = t$
2. rovnost diferencujeme: $\varphi'(x) dx = dt$
3. v integrálu $\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx$ nahradíme za $\varphi(x)$ proměnnou t a za výraz $\varphi'(x) dx$ diferenciál dt
4. řešíme integrál $\int f(t) dt$ proměnné t
5. do nalezené primitivní funkce vrátíme substituci $F(t) + c = F(\varphi(x)) + c$

75 - Substituční metoda

Zadání Vypočtěte integrál $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

Řešení

Video **Teorie: 16, 17** **Příklady: 166, 167, 168** 

Integrand je ve tvaru součinu dvou funkcí: $\int \arcsin x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$. Derivace jedné funkce je rovna druhé funkci v součinu, $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, využijeme tedy substituci:

$$\begin{aligned} \arcsin x &= t \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= dt \end{aligned}$$

Po aplikaci:

$$\int \arcsin x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int t dt.$$

Získali jsme tabulkový integrál, který již umíme pomocí vzorce vypočítat.

$$\int t dt = \frac{t^2}{2} + c.$$

Do nalezené primitivní funkce vrátíme substituci.

Výsledek:

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\arcsin^2 x}{2} + c.$$

Poznámky

Substituce typu $\varphi(x) = t$

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(t)dt$$

Postup

1. označíme substituci $\varphi(x) = t$
2. rovnost diferencujeme: $\varphi'(x)dx = dt$
3. v integrálu $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$ nahradíme za $\varphi(x)$ proměnnou t a za výraz $\varphi'(x)dx$ diferenciál dt
4. řešíme integrál $\int f(t)dt$ proměnné t
5. do nalezené primitivní funkce vrátíme substituci $F(t) + c = F(\varphi(x)) + c$

76 - Substituční metoda

Zadání Vypočtete integrál $\int \sin \sqrt{2x+3} dx$.

Řešení

Video **Teorie: 18** **Příklady: 169** 

V prvním kroku potřebujeme odstranit odmocninu z argumentu funkce sinus.

$$\begin{aligned} 2x + 3 &= t^2 \\ x &= \frac{t^2 - 3}{2} \\ dx &= t dt \end{aligned}$$

Po nahrazení novou proměnnou:

$$\int \sin \sqrt{2x+3} dx = \int t \sin \sqrt{t^2} dt = \int t \sin t dt.$$

Nový integrál proměnné t je ve tvaru $\int P(t) \sin at dt$, který řešíme pomocí metody per partes.

$$\begin{aligned} u &= t & v' &= \sin t \\ u' &= 1 & v &= -\cos t \end{aligned}$$

Po aplikaci PP a přímé metody:

$$\int t \sin t dt = -t \cos t + \int \cos t dt = -t \cos t + \sin t + c.$$

Do nalezené primitivní funkce vrátíme substituci $t = \sqrt{2x+3}$.

Výsledek:

$$\int \sin \sqrt{2x+3} dx = -\sqrt{2x+3} \cos \sqrt{2x+3} + \sin \sqrt{2x+3} + c.$$

Poznámky

Substituce typu $x = \varphi(t)$

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

Postup

1. označíme substituci $x = \varphi(t)$
2. rovnost diferencujeme: $dx = \varphi'(t) dt$
3. v integrálu $\int f(x) dx$ nahradíme proměnnou x funkcí $\varphi(t)$ a diferenciál dx výrazem $\varphi'(t) dt$
4. řešíme integrál $\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$ proměnné t
5. do nalezené primitivní funkce vrátíme substituci $F(t) + c = F(\varphi^{-1}(x)) + c$

77 - Integrace racionální lomené funkce

Zadání Vypočtete integrál $\int \frac{x^4 + 2}{x - 1} dx$.

Řešení **Video** **Teorie: 19** **Příklady: 171, 172, 173** 

V čitateli funkce je stupeň polynomu roven čtyřem, a polynom ve jmenovateli je 1. stupně. Stupeň ve jmenovateli je menší, polynomy tedy lze dělit. Dělíme tak, že vždy vezmeme v čitateli člen s nejvyšší mocninou a vydělíme členem s nejvyšší mocninou ve jmenovateli. Dalším krokem je vynásobení výsledku získaného dělení se jmenovatelem a odečtení od původního polynomu v čitateli (snížíme stupeň čitatele). Provedeme kontrolu, zda získaný polynom je již nižšího stupně než polynom, kterým dělíme. Pokud ano, jedná se o zbytek (ryze lomená funkce), pokud ne, musíme dělit dále.

$$\begin{array}{r} (x^4 + 2) : (x - 1) = x^3 + x^2 + x + 1 + \frac{3}{x - 1} \\ -(x^4 - x^3) \\ \hline x^3 + 2 \\ -(x^3 - x^2) \\ \hline x^2 + 2 \\ -(x^2 - x) \\ \hline x + 2 \\ -(x - 1) \\ \hline 3 \end{array}$$

Po dělení

$$\int \frac{x^4 + 2}{x - 1} dx = \int \left(x^3 + x^2 + x + 1 + \frac{3}{x - 1} \right) dx.$$

Využitím vlastností a vzorců řešíme 5 tabulkových integrálů.

Výsledek:

$$\int \frac{x^4 + 2}{x - 1} dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + 3 \ln |x - 1| + c.$$

Poznámky

Racionální lomená funkce

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

Ryze lomená racionální funkce

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \quad n < m$$


Neryze lomená racionální funkce

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \quad n \geq m$$

- každou neryze lomenou racionální funkci lze dělením upravit na součet polynomu a ryze lomené racionální funkce

78 - Integrace racionální lomené funkce

Zadání Vypočtěte integrál $\int \frac{x+2}{x^2+x-6} dx$.

Řešení **Video** **Teorie: 20** **Příklady: 174, 175, 176** 

Funkce je ryze lomená, rozložíme ji na parciální zlomky. Jmenovatel rozložíme na kořenové činitele,

$$x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3).$$

Tvar rozkladu :
$$\frac{x+2}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}.$$

Vynásobíme výrazem $(x-2)(x+3)$,

$$x+2 = A(x+3) + B(x-2).$$

Využijeme dosazovací metodu:

$$x = 2 : \quad 4 = 5A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{4}{5}$$

$$x = -3 : \quad -1 = -5B \quad \Rightarrow \quad B = \frac{1}{5}$$

Řešíme tedy 2 integrály dle prvního vzorce v „Poznámkách“.

$$\int \frac{x+2}{x^2+x-6} dx = \frac{4}{5} \int \frac{1}{x-2} dx + \frac{1}{5} \int \frac{1}{x+3} dx.$$

Výsledek:

$$\int \frac{x+2}{x^2+x-6} dx = \frac{4}{5} \ln |x-2| + \frac{1}{5} \ln |x+3| + c.$$

Poznámky

Postup

1. najdeme kořeny polynomu ve jmenovateli
2. napíšeme předpokládaný tvar rozkladu
3. celou rovnici rozkladu vynásobíme polynomem ve jmenovateli
4. nalezneme koeficienty rozkladu: srovnávací metodou, dosazovací metodou nebo kombinací těchto metod

Integrace parciálních zlomků

$$\int \frac{A}{x-\alpha} dx = A \ln |x-\alpha| + c$$

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^k} dx = \frac{A}{(1-k)(x-\alpha)^{k-1}} + c,$$

$$k \geq 2$$


$$\int \frac{B(2x+p)}{x^2+px+q} dx = B \ln |x^2+px+q| + c$$

$$\int \frac{C}{x^2+px+q} dx = \frac{C}{a} \arctan \frac{x+p/2}{a} + c,$$

$$a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$$

79 - Integrace racionální lomené funkce

Zadání Vypočtěte integrál $\int \frac{-3x + 1}{x^2 + 4x + 4} dx$.

Řešení **Video** **Teorie: 20 Příklady: 174, 175, 176** 

Funkce je ryze lomená, rozložíme ji na parciální zlomky. Jmenovatel rozložíme na kořenové činitele,

$$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2.$$

$$\text{Tvar rozkladu : } \frac{-3x + 1}{(x + 2)^2} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{(x + 2)^2}.$$

Vynásobíme výrazem $(x + 2)^2$,

$$-3x + 1 = A(x + 2) + B.$$

Využijeme kombinaci dosazovací a srovnávací metody:

$$x = -2 : 7 = B$$

$$x^0 : 1 = 2A + B \Rightarrow -6 = 2A \Rightarrow A = -3$$

Řešíme tedy 2 integrály dle prvního a druhého vzorce v „Poznámkách“,

$$\int \frac{-3x + 1}{x^2 + 4x + 4} dx = -3 \int \frac{1}{x + 2} dx + 7 \int \frac{1}{(x + 2)^2} dx.$$

Výsledek:

$$\int \frac{-3x + 1}{x^2 + 4x + 4} dx = -3 \ln |x + 2| - \frac{7}{x + 2} + c.$$

Poznámky

Postup

1. najdeme kořeny polynomu ve jmenovateli
2. napíšeme předpokládaný tvar rozkladu
3. celou rovnicí rozkladu vynásobíme polynomem ve jmenovateli
4. nalezneme koeficienty rozkladu: srovnávací metodou, dosazovací metodou nebo kombinací těchto metod

Integrace parciálních zlomků

$$\int \frac{A}{x - \alpha} dx = A \ln |x - \alpha| + c$$

$$\int \frac{A}{(x - \alpha)^k} dx = \frac{A}{(1 - k)(x - \alpha)^{k-1}} + c,$$

$$k \geq 2$$

$$\int \frac{B(2x + p)}{x^2 + px + q} dx = B \ln |x^2 + px + q| + c$$

$$\int \frac{C}{x^2 + px + q} dx = \frac{C}{a} \arctan \frac{x + p/2}{a} + c,$$

$$a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$$

80 - Integrace racionální lomené funkce

Zadání Vypočtěte integrál $\int \frac{x}{x^2 + 3x + 4} dx$.

Řešení **Video** **Teorie: 20 Příklady: 174, 175, 176** 

Funkce je ryze lomená, rozložíme ji na parciální zlomky. Jmenovatel má dva komplexně sdružené kořeny.

$$\text{Tvar rozkladu : } \frac{x}{x^2 + 3x + 4} = \frac{B(2x + 3)}{x^2 + 3x + 4} + \frac{C}{x^2 + 3x + 4}.$$

Vynásobíme výrazem $(x^2 + 3x + 4)$,

$$x = B(2x + 3) + C.$$

Využijeme srovnávací metody:

$$\begin{aligned} x^1 : 1 &= 2B & \Rightarrow B &= \frac{1}{2} \\ x^0 : 0 &= 3B + C & \Rightarrow C &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Počítáme tedy dva integrály dle třetího a čtvrtého vzorce v „Poznámkách“,

$$\int \frac{x}{x^2 + 3x + 4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x + 3}{x^2 + 3x + 4} dx - \frac{3}{2} \int \frac{1}{x^2 + 3x + 4} dx.$$

Jmenovatel druhého integrandu si upravíme na tvar $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$.

Výsledek:

$$\int \frac{x}{x^2 + 3x + 4} dx = \frac{\ln(x^2 + 3x + 4)}{2} - \frac{3}{\sqrt{7}} \arctan \frac{2\left(x + \frac{3}{2}\right)}{\sqrt{7}} + c.$$

Poznámky

Postup

1. najdeme kořeny polynomu ve jmenovateli
2. napíšeme předpokládaný tvar rozkladu
3. celou rovnici rozkladu vynásobíme polynomem ve jmenovateli
4. nalezneme koeficienty rozkladu: srovnávací metodou, dosazovací metodou nebo kombinací těchto metod

Integrace parciálních zlomků

$$\int \frac{A}{x - \alpha} dx = A \ln |x - \alpha| + c$$

$$\int \frac{A}{(x - \alpha)^k} dx = \frac{A}{(1 - k)(x - \alpha)^{k-1}} + c,$$

$$k \geq 2$$

$$\int \frac{B(2x + p)}{x^2 + px + q} dx = B \ln |x^2 + px + q| + c$$

$$\int \frac{C}{x^2 + px + q} dx = \frac{C}{a} \arctan \frac{x + p/2}{a} + c,$$

$$a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$$

81 - Integrace goniometrických funkcí

Zadání Vypočtěte integrál $\int \cos^2 x \sin^5 x dx$.

Řešení **Video** **Teorie: 21 Příklady: 177, 178** 

Integrand je typu $\int \sin^m x \cos^n x dx$, kde u funkce kosinus je sudá mocnina a u funkce sinus lichá, tudíž využijeme substituci (viz 1.):

$$\begin{aligned} \cos x &= t \\ -\sin x dx &= dt \end{aligned}$$

Musíme si integrand upravit tak, aby byl složen pouze z funkce $\cos x$ a jedné funkce $\sin x$:

$$\int \cos^2 x \sin^4 x \sin x dx = \int \cos^2 x (1 - \cos^2 x)^2 \sin x dx.$$

Po aplikaci substituce:

$$-\int t^2 (1 - t^2)^2 dt = -\int (t^2 - 2t^4 + t^6) dt = -\frac{t^3}{3} + 2\frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + c.$$

Do nalezené primitivní funkce vrátíme substituci.

Výsledek:

$$\int \cos^2 x \sin^5 x dx = -\frac{\cos^3 x}{3} + 2\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^7 x}{7} + c.$$

Poznámky

Výpočet integrálů typu $\int \sin^m x \cos^n x dx$, kde $m, n \in \mathbb{Z}$

1. m je liché \Rightarrow substituce $\cos x = t$
2. n je liché \Rightarrow substituce $\sin x = t$
3. m i n sudé, alespoň jedno záporné \Rightarrow substituce $\tan x = t$, pak
$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$
4. m i n sudé nezáporné \Rightarrow využití vzorců na dvojnásobný úhel:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

82 - Integrace goniometrických funkcí

Zadání Vypočtěte integrál $\int \sin^2 x \cos x dx$.

Řešení

Video Teorie: 21 Příklady: 177, 178 

Integrand je typu $\int \sin^m x \cos^n x dx$, kde u funkce kosinus je lichá mocnina a u funkce sinus sudá, tudíž využijeme substituci (viz 2.):

$$\begin{aligned}\sin x &= t \\ \cos x dx &= dt\end{aligned}$$

Po aplikaci substituce:

$$\int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + c.$$

Do nalezené primitivní funkce vrátíme substituci.

Výsledek:

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \frac{\sin^3 x}{3} + c.$$

Poznámky

Výpočet integrálů typu $\int \sin^m x \cos^n x dx$, kde $m, n \in \mathbb{Z}$

1. m je liché \Rightarrow substituce $\cos x = t$
2. n je liché \Rightarrow substituce $\sin x = t$
3. m i n sudé, alespoň jedno záporné \Rightarrow substituce $\tan x = t$, pak
$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$
4. m i n sudé nezáporné \Rightarrow využití vzorců na dvojnásobný úhel:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

83 - Integrace goniometrických funkcí

Zadání Vypočtěte integrál $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^8 x} dx$.

Řešení **Video** **Teorie: 21 Příklady: 177, 178** 

Integrand je typu $\int \sin^m x \cos^n x dx$, kde u obou funkcí jsou sudé mocniny a jedna je záporná, tudíž využijeme substituci (viz 3.):

$$\begin{aligned} \tan x &= t \\ \frac{1}{\cos^2 x} dx &= dt \end{aligned}$$

Integrand si upravíme:

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^8 x} dx = \int \tan^4 x \frac{1}{\cos^2 x} \frac{1}{\cos^2 x} dx.$$

Po aplikaci substituce:

$$\int t^4(1+t^2) dt = \frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + c.$$

Do nalezené primitivní funkce vrátíme substituci.

Výsledek:

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^8 x} dx = \frac{\tan^5 x}{5} + \frac{\tan^7 x}{7} + c.$$

Poznámky

Výpočet integrálů typu $\int \sin^m x \cos^n x dx$, kde $m, n \in \mathbb{Z}$

1. m je liché \Rightarrow substituce $\cos x = t$
2. n je liché \Rightarrow substituce $\sin x = t$
3. m i n sudé, alespoň jedno záporné \Rightarrow substituce $\tan x = t$, pak $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$
4. m i n sudé nezáporné \Rightarrow využití vzorců na dvojnásobný úhel:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

84 - Integrace goniometrických funkcí

Zadání Vypočtěte integrál $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$.

Řešení **Video** **Teorie: 21 Příklady: 177, 178** 

Integrand je typu $\int \sin^m x \cos^n x dx$, kde u obou funkcí jsou sudé nezáporné mocniny, tudíž využijeme goniometrických vzorců (viz 4.):

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right) dx = \frac{1}{4} \int (1 - \cos^2 2x) dx.$$

Opět využijeme stejného vzorce:

$$\frac{1}{4} \int (1 - \cos^2 2x) dx = \frac{1}{4} \int \left(1 - \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) dx.$$

Využitím základních integračních vzorců spočítáme.

Výsledek:

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + c.$$

Poznámky

Výpočet integrálů typu $\int \sin^m x \cos^n x dx$, kde $m, n \in \mathbb{Z}$

1. m je liché \Rightarrow substituce $\cos x = t$
2. n je liché \Rightarrow substituce $\sin x = t$
3. m i n sudé, alespoň jedno záporné \Rightarrow substituce $\tan x = t$, pak
 $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$
4. m i n sudé nezáporné \Rightarrow využití vzorců na dvojnásobný úhel:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

85 - Integrace goniometrických funkcí

Zadání Vypočtěte integrál $\int \frac{-3}{2 + \cos x} dx$.

Řešení **Video** **Teorie: 22** **Příklady: 179** 

Integrandem je racionální funkce obsahující goniometrické funkce, využijeme tedy univerzální substituci:

$$\int \frac{-3}{2 + \cos x} dx = \int \frac{-3}{2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{-6}{3+t^2} dt.$$

Využitím obecného vzorce $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c$ spočítáme:

$$\int \frac{-6}{3+t^2} dt = \frac{-6}{\sqrt{3}} \arctan \frac{t}{\sqrt{3}} + c.$$

Vrátíme substituci a dostáváme výsledek:

$$\int \frac{-3}{2 + \cos x} dx = -2\sqrt{3} \arctan \frac{\sqrt{3} \tan \frac{x}{2}}{3} + c.$$

Poznámky

Výpočet integrálů typu $\int R(\sin x, \cos x) dx$, kde $R(u, v)$ představuje racionální funkci dvou proměnných $u = \sin x$ a $v = \cos x$

Univerzální substituce

$$\tan \frac{x}{2} = t, x \in (-\pi, \pi)$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$x = 2 \arctan t$$

$$dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

86 - Integrace goniometrických funkcí

Zadání Vypočtěte integrál $\int \frac{1}{\sin x} dx$.

Řešení Video **Teorie: 22 Příklady: 179** 

1. způsob řešení:

Integrandem je racionální funkce obsahující goniometrickou funkci, využijeme univerzální substituci:

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1+t^2}{2t} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{t} dt.$$

Využitím základního integračního vzorce spočítáme a vrátíme substituci:

$$\int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + c = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + c.$$

2. způsob řešení:

Integrand je typu $\int \sin^m x \cos^n x dx$, kde u funkce sinus je lichá mocnina, tudíž využijeme substituci $\cos x = t$.

Integrand si upravíme:

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx = - \int \frac{dt}{1 - t^2}.$$

Rozložíme na parciální zlomky a po nalezení primitivní funkce vrátíme substituci:

$$\int \left(\frac{1}{2(t-1)} - \frac{1}{2(t+1)} \right) dt = \frac{1}{2} \ln |\cos x - 1| - \frac{1}{2} \ln |\cos x + 1| + c.$$

Poznámky

Výpočet integrálů typu $\int R(\sin x, \cos x) dx$, kde $R(u, v)$ představuje racionální funkci dvou proměnných $u = \sin x$ a $v = \cos x$

Univerzální substituce

$$\tan \frac{x}{2} = t, x \in (-\pi, \pi)$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$x = 2 \arctan t$$

$$dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

87 - Integrace iracionálních funkcí

Zadání Vypočtěte integrál $\int \frac{3}{\sqrt[3]{2x-1}+2} dx$.

Řešení **Video** **Teorie: 18** **Příklady: 169, 180** 

Integrand obsahuje výraz $\sqrt[n]{ax+b}$, využijeme substituci:

$$\begin{aligned} 2x-1 &= t^3 \\ dx &= \frac{3}{2}t^2 dt \end{aligned}$$

Dostáváme:

$$\int \frac{3}{\sqrt[3]{2x-1}+2} dx = \int \frac{9t^2}{2(t+2)} dt.$$

Získali jsme racionální lomenou funkci, kde v čitateli je stupeň větší než ve jmenovateli, musíme dělit:

$$\int \frac{9t^2}{2(t+2)} dt = \frac{9}{2} \int \left(t - 2 + \frac{4}{t+2} \right) dt = \frac{9}{2} \left(\frac{t^2}{2} - 2t + 4 \ln |t+2| \right) + c.$$

Vrátíme substituci a dostáváme výsledek:

$$\int \frac{3}{\sqrt[3]{2x-1}+2} dx = \frac{9}{2} \left(\frac{\sqrt[3]{(2x-1)^2}}{2} - 2\sqrt[3]{2x-1} + 4 \ln |\sqrt[3]{2x-1}+2| \right) + c.$$

Poznámky

Iracionální funkce integrujeme většinou substituční metodou.

a) integrand obsahuje výraz $\sqrt[n]{ax+b}$
 \Rightarrow substituce $ax+b = t^n$

b) integrand obsahuje více odmocnin s různými odmocniteli $\sqrt[n_1]{ax+b}$, $\sqrt[n_2]{ax+b}$, ...
 \Rightarrow substituce $ax+b = t^n$, kde n je nejmenší společný násobek čísel n_1, n_2, \dots

c) integrand obsahuje výraz $\sqrt{a^2 - b^2x^2}$
 \Rightarrow goniometrická substituce $bx = a \sin t$ nebo $bx = a \cos t$

88 - Integrace iracionálních funkcí

Zadání Vypočtěte integrál $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x} + 2} dx$.

Řešení **Video** **Teorie: 18 Příklady: 169, 180** 

Integrand obsahuje více odmocnin s různými odmocniteli, využijeme substituci (viz. b)):

$$\begin{aligned}x &= t^4 \\ dx &= 4t^3 dt\end{aligned}$$

Dostáváme:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x} + 2} dx = 4 \int \frac{t^2}{t + 2} t^3 dt.$$

Získali jsme racionální lomenou funkci, kde v čitateli je stupeň větší než ve jmenovateli, musíme dělit:

$$4 \int \left(t^4 - 2t^3 + 4t^2 - 8t + 16 - \frac{32}{t+2} \right) dt = 4 \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^4}{2} + \frac{4t^3}{3} - 4t^2 + 16t - 32 \ln |t+2| \right) + c.$$

Vrátíme substituci a dostáváme výsledek:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x} + 2} dx = 4 \left(\frac{\sqrt[4]{x^5}}{5} - \frac{x}{2} + \frac{4\sqrt[4]{x^3}}{3} - 4\sqrt{x} + 16\sqrt[4]{x} - 32 \ln |\sqrt[4]{x} + 2| \right) + c.$$

Poznámky

Iracionální funkce integrujeme většinou substituční metodou.

a) integrand obsahuje výraz $\sqrt[n]{ax+b}$
 \Rightarrow substituce $ax+b = t^n$

b) integrand obsahuje více odmocnin s různými odmocniteli $\sqrt[n_1]{ax+b}$, $\sqrt[n_2]{ax+b}$, ...
 \Rightarrow substituce $ax+b = t^n$, kde n je nejmenší společný násobek čísel n_1, n_2, \dots

c) integrand obsahuje výraz $\sqrt{a^2 - b^2x^2}$
 \Rightarrow goniometrická substituce $bx = a \sin t$ nebo $bx = a \cos t$

89 - Integrace iracionálních funkcí

Zadání Vypočtěte integrál $\int \sqrt{9 - 16x^2} dx$.

Řešení

Video **Teorie: 18** **Příklady: 169, 181** 

Integrand obsahuje $\sqrt{a^2 - b^2x^2}$, využijeme substituci (viz. c)):

$$\begin{aligned} 4x &= 3 \sin t \\ 4dx &= 3 \cos t dt \end{aligned}$$

Dostáváme:

$$\int \sqrt{9 - 16x^2} dx = \frac{3}{4} \int \sqrt{9 - 9 \sin^2 t} \cos t dt = \frac{3}{4} \int \sqrt{9(1 - \sin^2 t)} \cos t dt = \frac{3}{4} \int 3 \cos^2 t dt.$$

Získali jsme integrál goniometrické funkce se sudou mocninou, musíme využít vzorce pro dvojnásobný úhel:

$$\begin{aligned} \frac{9}{4} \int \cos^2 t dt &= \frac{9}{8} \int (1 + \cos 2t) dt = \frac{9}{8} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) + c = \frac{9}{8} \left(t + \frac{2 \sin t \cos t}{2} \right) + c \\ &= \frac{9}{8} \left(t + \sin t \sqrt{1 - \sin^2 t} \right) + c. \end{aligned}$$

Vrátíme substituci a dostáváme výsledek:

$$\int \sqrt{9 - 16x^2} dx = \frac{9}{8} \left(\arcsin \frac{4x}{3} + \frac{4x}{3} \sqrt{1 - \frac{16x^2}{9}} \right) + c = \frac{9}{8} \arcsin \frac{4x}{3} + \frac{x}{2} \sqrt{9 - 16x^2} + c.$$

Poznámky

Iracionální funkce integrujeme většinou substituční metodou.

a) integrand obsahuje výraz $\sqrt[n]{ax + b}$
 \Rightarrow substituce $ax + b = t^n$

b) integrand obsahuje více odmocnin s různými odmocniteli $\sqrt[n_1]{ax + b}$, $\sqrt[n_2]{ax + b}$, ...
 \Rightarrow substituce $ax + b = t^n$, kde n je nejmenší společný násobek čísel n_1, n_2, \dots

c) integrand obsahuje výraz $\sqrt{a^2 - b^2x^2}$
 \Rightarrow goniometrická substituce $bx = a \sin t$ nebo $bx = a \cos t$

90 - Určitý integrál, výpočet a vlastnosti

Zadání Vypočtěte integrál $\int_0^{\pi} ((4-x)^2 + \cos 2x) dx$.

Řešení **Video** **Teorie: 24** **Příklady: 186** 

Integrand upravíme a s využitím vlastností dostaneme součet 4 integrálů:

$$\int_0^{\pi} (16 - 8x + x^2 + \cos 2x) dx = 16 \int_0^{\pi} dx - 8 \int_0^{\pi} x dx + \int_0^{\pi} x^2 dx + \int_0^{\pi} \cos 2x dx.$$

Všechny integrály jsou tabulkové, tzn. umíme nalézt primitivní funkci. Využijeme tedy N-L formuli.

$$\begin{aligned} 16 \int_0^{\pi} dx - 8 \int_0^{\pi} x dx + \int_0^{\pi} x^2 dx + \int_0^{\pi} \cos 2x dx &= 16[x]_0^{\pi} - 4[x^2]_0^{\pi} + \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} + \left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi} \\ &= 16(\pi - 0) - 4(\pi^2 - 0) + \left(\frac{\pi^3}{3} - 0\right) + (0 - 0) = 16\pi - 4\pi^2 + \frac{\pi^3}{3}. \end{aligned}$$

Výsledek:

$$\int_0^{\pi} ((4-x)^2 + \cos 2x) dx = 16\pi - 4\pi^2 + \frac{\pi^3}{3}.$$

Poznámky

Newtonova-Leibnizova formule

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Vlastnosti

$$f = f(x) \quad g = g(x)$$

$$\text{a) } \int_a^b (f + g) dx = \int_a^b f dx + \int_a^b g dx$$

$$\text{b) } \int_a^b c f dx = c \int_a^b f dx$$

91 - Určitý integrál sudé a liché funkce

Zadání Vypočtěte integrály: $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$, $\int_{-1}^1 \frac{x^4}{2} dx$.

Řešení Video **Teorie: 25 Příklady: 187** 

Výpočet integrálu $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$:

Funkce tangens je na intervalu $\langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \rangle$ lichá, tudíž využijeme vlastnosti určitého integrálu pro lichou funkci (viz. b)) a víme tedy, že integrál je roven 0.

Ověříme:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = -[\ln |\cos x|]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = -\left(\ln \frac{\sqrt{2}}{2} - \ln \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0.$$

Výpočet integrálu $\int_{-1}^1 \frac{x^4}{2} dx$:

Funkce $\frac{x^4}{2}$ je na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ sudá, tudíž využijeme vlastnosti určitého integrálu pro sudou funkci (viz. a)):

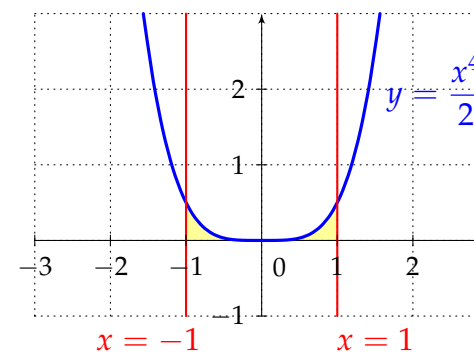
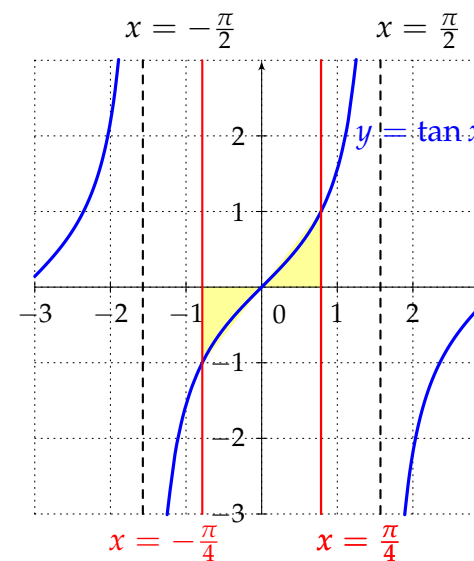
$$\int_{-1}^1 \frac{x^4}{2} dx = 2 \int_0^1 \frac{x^4}{2} dx = \frac{1}{5} [x^5]_0^1 = \frac{1}{5} (1 - 0) = \frac{1}{5}.$$

Poznámky

Výpočet integrálu sudé a liché funkce

a) sudá funkce: $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

b) lichá funkce: $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$



92 - Metoda per partes pro určité integrály

Zadání Vypočtete integrál $\int_1^2 \ln x^2 dx$.

Řešení

Video **Teorie: 26** **Příklady: 188** 

Integrand je složená funkce, zkusíme využít metody per partes:

$$\begin{aligned} u &= \ln x^2 & v' &= 1 \\ u' &= \frac{2}{x} & v &= x \end{aligned}$$

Po aplikaci PP :

$$\int_1^2 \ln x^2 dx = [x \ln x^2]_1^2 - \int_1^2 2 dx = 2 \ln 4 - \ln 1 - 2[x]_1^2 = 2 \ln 4 - 2(2 - 1).$$

Výsledek:

$$\int_1^2 \ln x^2 dx = 2(\ln 4 - 1).$$

Poznámky

Metoda per partes pro určitý integrál

$$\begin{aligned} u &= u(x) & v' &= v'(x) \\ u' &= u'(x) & v &= v(x) \end{aligned}$$

$$\int_a^b (u \cdot v') dx = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b (u' \cdot v) dx$$

93 - Substituční metoda pro určité integrály

Zadání Vypočtěte integrál $\int_0^{\pi} x \cos x^2 dx$.

Řešení

Video **Teorie: 26 Příklady: 189, 190** 

Integrand je ve tvaru součinu dvou funkcí, kde derivace vnitřní funkce je přímo druhá funkce součinu (lišící se pouze konstantou), využijeme tedy substituci:

$$\begin{aligned}x^2 &= t \\2x dx &= dt\end{aligned}$$

Musíme přepočítat meze pro novou proměnnou t :

dolní mez: $0 \mapsto 0^2 = 0$

horní mez: $\pi \mapsto \pi^2$

Po aplikaci:

$$\int_0^{\pi} x \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi^2} \cos t dt = \frac{1}{2} [\sin t]_0^{\pi^2} = \frac{1}{2} (\sin \pi^2 - 0).$$

Výsledek:

$$\int_0^{\pi} x \cos x^2 dx = \frac{\sin \pi^2}{2}.$$

Poznámky

Substituční metoda

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) dt$$

Po zavedení vhodné substituce musíme určit nové meze.

94 - Substituční metoda pro určité integrály

Zadání Vypočtete integrál $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x+1}+1} dx$.

Řešení

Video **Teorie: 26 Příklady: 189, 190** 

Jedná se o integrál obsahující odmocninu. Využijeme substituci:

$$\begin{aligned}x + 1 &= t^2 \\ dx &= 2t dt\end{aligned}$$

Musíme přepočítat meze pro novou proměnnou t :

dolní mez: $3 \mapsto \sqrt{3+1} = 2$

horní mez: $8 \mapsto \sqrt{8+1} = 3$

Po aplikaci:

$$\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x+1}+1} dx = \int_2^3 2t \frac{t^2-1}{t+1} dt = 2 \int_2^3 t(t-1) dt = 2 \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right]_2^3 = 2 \left(\frac{27}{3} - \frac{9}{2} - \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} \right) \right).$$

Výsledek:

$$\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x+1}+1} dx = \frac{23}{3}.$$

Poznámky

Substituce typu $x = \varphi(t)$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

Po zavedení vhodné substituce musíme určit nové meze.

95 - Určitý integrál, racionální lomená funkce

Zadání Vypočtěte integrál $\int_1^3 \frac{12x + 6}{x^2(x^2 + x + 6)} dx$.

Řešení **Video** **Příklady: 191** 

Funkce je ryze lomená, rozložíme ji na parciální zlomky. Jmenovatel má dva komplexně sdružené kořeny a jeden dvojnásobný reálný kořen roven 0.

$$\text{Tvar rozkladu: } \frac{12x + 6}{x^2(x^2 + x + 6)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C(2x + 1)}{x^2 + x + 6} + \frac{D}{x^2 + x + 6}$$

Vynásobíme $x^2(x^2 + x + 6)$

$$12x + 6 = Ax(x^2 + x + 6) + B(x^2 + x + 6) + C(2x + 1)x^2 + Dx^2$$

Využijeme srovnávací metody:

$$x^3: \quad 0 = A + 2C \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{1}{2}A \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{1}{2}$$

$$x^2: \quad 0 = A + B + C + D \quad \Rightarrow \quad D = -\frac{3}{2}$$

$$x^1: \quad 12 = 6A + 6B \quad \Rightarrow \quad A = 1$$

$$x^0: \quad 6 = 6B \quad \Rightarrow \quad B = 1$$

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{12x + 6}{x^2(x^2 + x + 6)} dx &= \int_1^3 \frac{1}{x} dx + \int_1^3 \frac{1}{x^2} dx - \frac{1}{2} \int_1^3 \frac{2x + 1}{x^2 + x + 6} dx - \frac{3}{2} \int_1^3 \frac{1}{x^2 + x + 6} dx = [\ln |x|]_1^3 \\ &- \left[\frac{1}{x} \right]_1^3 - \frac{1}{2} [\ln(x^2 + x + 6)]_1^3 - \frac{6}{\sqrt{23}} \left[\arctan \frac{2(x + \frac{1}{2})}{\sqrt{23}} \right]_1^3 = \ln 3 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{2} (\ln 16 - \ln 8) \\ &- \frac{6\sqrt{23}}{23} \left(\arctan \frac{7\sqrt{23}}{23} - \arctan \frac{3\sqrt{23}}{23} \right). \end{aligned}$$

Poznámky

Integrace parciálních zlomků

$$\int_a^b \frac{A}{x - \alpha} dx = A \cdot [\ln |x - \alpha|]_a^b$$

$$\int_a^b \frac{A}{(x - \alpha)^k} dx = \left[\frac{A}{(1 - k)(x - \alpha)^{k-1}} \right]_a^b, \quad k \geq 2$$

$$\int_a^b \frac{B(2x + p)}{x^2 + px + q} dx = B \cdot [\ln |x^2 + px + q|]_a^b$$

$$\int_a^b \frac{C}{x^2 + px + q} dx = \frac{C}{m} \cdot \left[\arctan \frac{x + p/2}{m} \right]_a^b,$$

$$m = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$$

96 - Nevlastní integrál prvního druhu

Zadání Vypočtete integrál: $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$, $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x} dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$.

Řešení

Video Teorie: 27 Příklady: 192 

Výpočet prvního integrálu:

Zadaná funkce je na intervalu $\langle 0, \infty \rangle$ ohraničená, jedná se nevlastní integrál 1. druhu:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{c \rightarrow \infty} ([\arctan]_0^c) = \lim_{c \rightarrow \infty} \arctan c = \frac{\pi}{2}.$$

Nevlastní integrál konverguje.

Výpočet druhého integrálu:

Zadaná funkce je na intervalu $(-\infty, -1)$ ohraničená, jedná se nevlastní integrál 1. druhu:

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x} dx = \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^{-1} \frac{1}{x} dx = \lim_{c \rightarrow -\infty} ([\ln|x|]_c^{-1}) = \lim_{c \rightarrow -\infty} ([\ln(-x)]_c^{-1}) = \lim_{c \rightarrow -\infty} (-\ln(-c)) = -\infty.$$

Nevlastní integrál diverguje.

Výpočet třetího integrálu:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

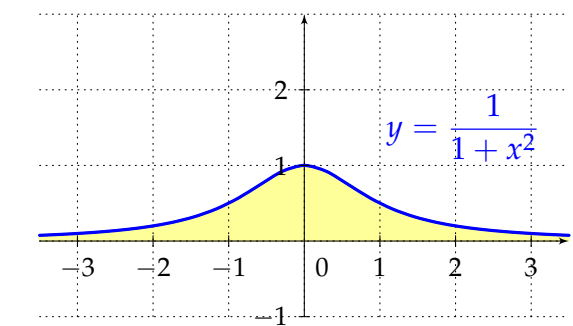
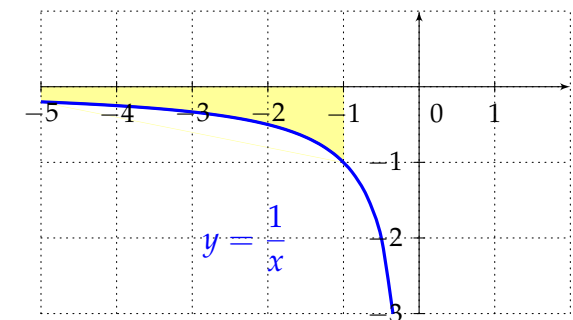
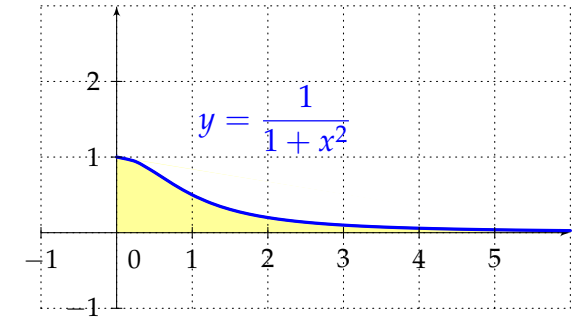
Integrační obor $(-\infty, \infty)$ si vhodně rozdělíme na dvě části. Ještě poznamenejme, že integrujeme sudou funkci, nevlastní integrál na levé a pravé části integračního oboru vyjde stejně.

Poznámky

Výpočet nevlastního integrálu 1. druhu

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_a^c f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^a f(x) dx$$



97 - Nevlastní integrál druhého druhu

Zadání Vypočtěte integrál: $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

Řešení Video **Teorie: 27 Příklady: 193** 

Výpočet prvního integrálu:

Zadaná funkce je na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ neohraničená, jedná se nevlastní integrál 2. druhu:

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{c \rightarrow 1^-} \int_0^c \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Integrál řešíme substitucí:

$$\begin{aligned} 1 - x^2 &= t \\ -2x dx &= dt \end{aligned}$$

Musíme přepočítat meze pro novou proměnnou t :

dolní mez: $0 \mapsto 1$

horní mez: $c \mapsto 1 - c^2$

Po aplikaci:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \lim_{c \rightarrow 1^-} \int_0^c \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{c \rightarrow 1^-} \left(-\frac{1}{2} \int_0^{1-c^2} \frac{dt}{\sqrt{t}} \right) = \lim_{c \rightarrow 1^-} \left[-\sqrt{t} \right]_1^{1-c^2} \\ &= \lim_{c \rightarrow 1^-} \left(-\sqrt{1-c^2} + 1 \right) = 1 \end{aligned}$$

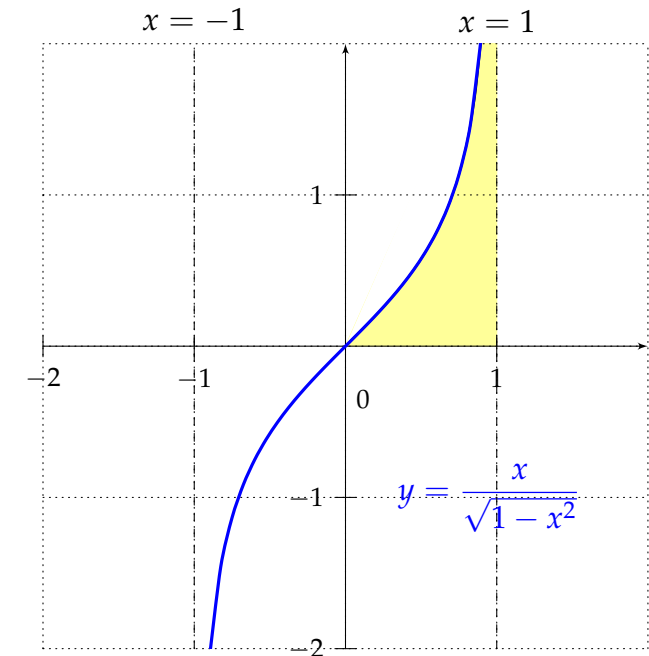
Nevlastní integrál konverguje.

Poznámky

Výpočet nevlastního integrálu 2. druhu

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx$$



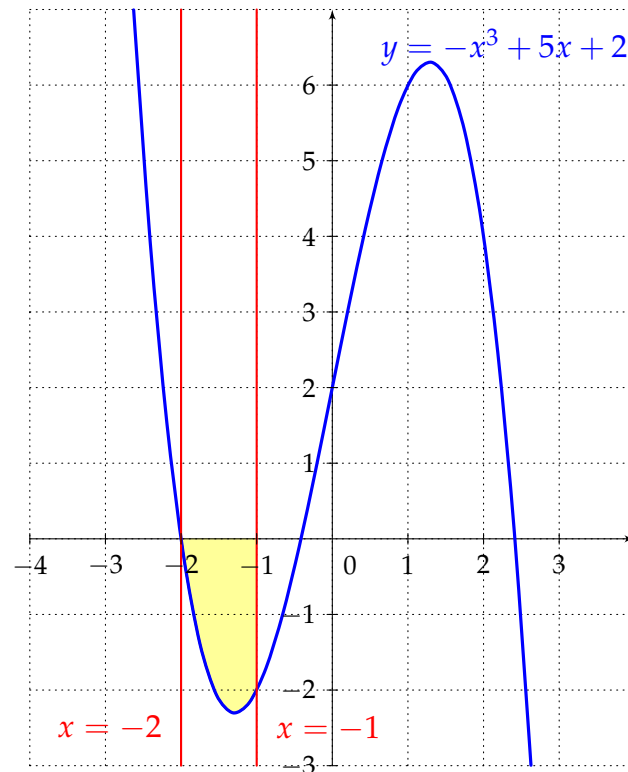
98 - Užití určitého integrálu, obsah rovinného obrazce

Zadání Znázorněte graf funkce $y = -x^3 + 5x + 2$ a vypočítejte obsah plochy ohraničené touto funkcí, osou x a přímkami $x = -2$ a $x = -1$.

Řešení

Video **Teorie: 29 Příklady: 194** 

Znázorníme si plochu, jejíž obsah máme určit:



Z grafu vidíme, že funkce je na intervalu $\langle -2, -1 \rangle$ záporná:

$$P = - \int_{-2}^{-1} (-x^3 + 5x + 2) dx = \int_{-2}^{-1} (x^3 - 5x - 2) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{5x^2}{2} - 2x \right]_{-2}^{-1} = \left(\frac{1}{4} - \frac{5}{2} + 2 - (4 - 10 + 4) \right) = \frac{7}{4}.$$

Poznámky

Obsah křivočarého lichoběžníka pro nezápornou funkci $f(x)$ na $\langle a, b \rangle$

$$P = \int_a^b f(x) dx$$

Obsah křivočarého lichoběžníka pro zápornou funkci $f(x)$ na $\langle a, b \rangle$

$$P = - \int_a^b f(x) dx$$

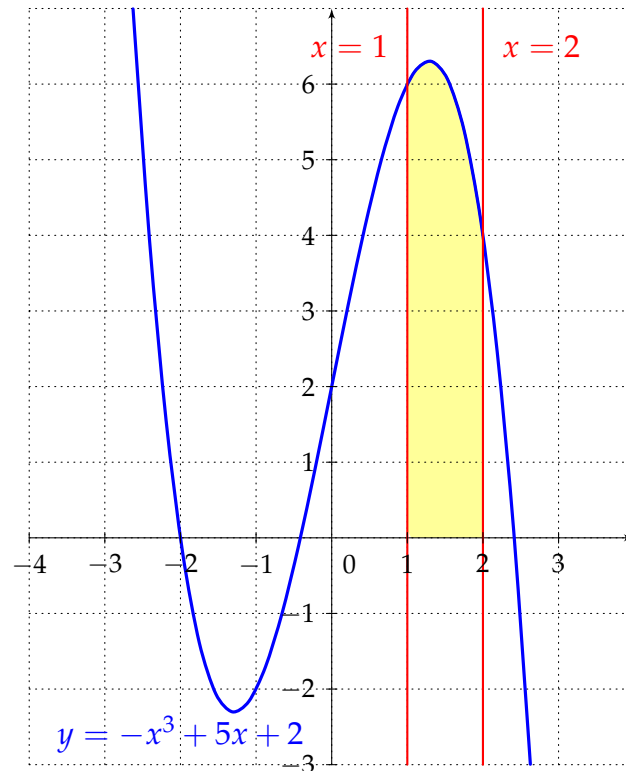
99 - Užití určitého integrálu, obsah rovinného obrazce

Zadání Znázorněte graf funkce $y = -x^3 + 5x + 2$ a vypočítejte obsah plochy ohraničené touto funkcí, osou x a přímkami $x = 1$ a $x = 2$.

Řešení

Video Teorie: 29 Příklady: 194 

Znázorníme si plochu, jejíž obsah máme určit:



Z grafu vidíme, že funkce je na intervalu $\langle 1, 2 \rangle$ nezáporná:

$$P = \int_1^2 (-x^3 + 5x + 2) dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{5x^2}{2} + 2x \right]_1^2 = \left(-4 + 10 + 4 - \left(-\frac{1}{4} + \frac{5}{2} + 2 \right) \right) = \frac{23}{4}.$$

Poznámky

Obsah křivočarého lichoběžníka pro nezápornou funkci $f(x)$ na $\langle a, b \rangle$

$$P = \int_a^b f(x) dx$$

Obsah křivočarého lichoběžníka pro zápornou funkci $f(x)$ na $\langle a, b \rangle$

$$P = - \int_a^b f(x) dx$$

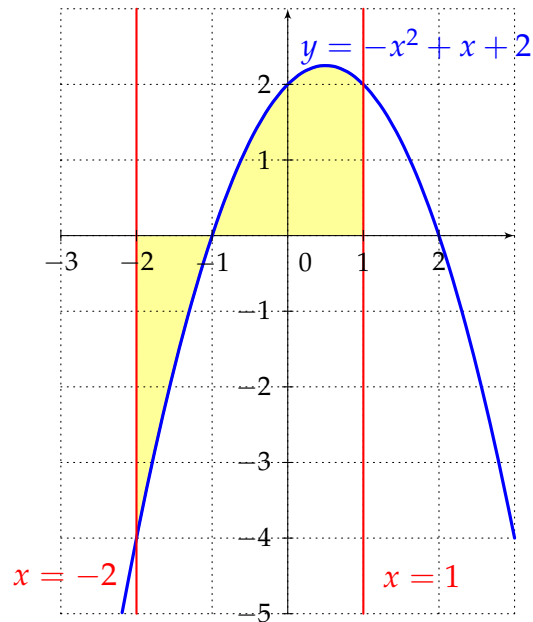
100 - Užití určitého integrálu, obsah rovinného obrazce

Zadání Znázorněte graf funkce $y = -x^2 + x + 2$ a vypočítejte obsah plochy ohraničené touto funkcí, osou x a přímkami $x = -2$ a $x = 1$.

Řešení

Video **Teorie: 29 Příklady: 195** 

Znázorníme si plochu, jejíž obsah máme určit:



Z grafu vidíme, že funkce na intervalu $\langle -2, 1 \rangle$ mění znaménko, musíme proto určit zvlášť obsah části pod osou x a nad osou x , určíme si průsečík s osou x na intervalu $\langle -2, 1 \rangle$:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} \Rightarrow \text{hledaný průsečík je } x = -1.$$

$$\begin{aligned} P &= - \int_{-2}^{-1} (-x^2 + x + 2) dx + \int_{-1}^1 (-x^2 + x + 2) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right]_{-2}^{-1} + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^1 \\ &= \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \left(-\frac{8}{3} - 2 + 4 \right) \right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right) \right) = \frac{11}{6} + \frac{10}{3} = \frac{31}{6} \end{aligned}$$

Poznámky

Pokud funkce mění znaménko, je nutno brát části nad osou x kladně a části pod osou x záporně.

Obsah křivočarého lichoběžníka

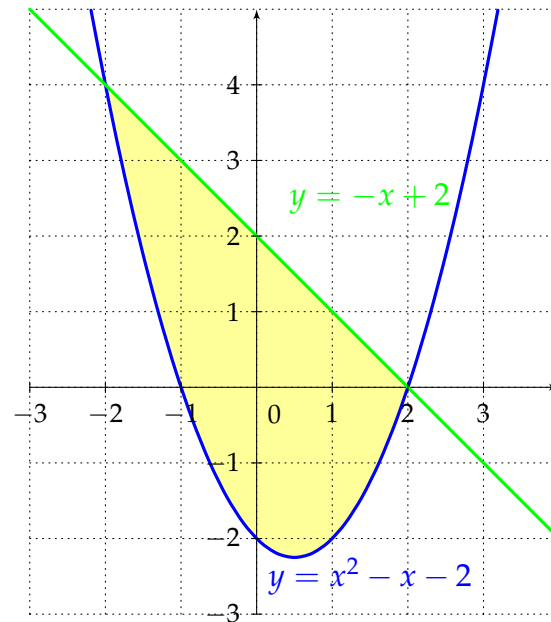
$$P = \int_a^b |f(x)| dx$$

101 - Užití určitého integrálu, obsah rovinného obrazce

Zadání Vypočtete obsah rovinného obrazce (danou plochu znázorněte) ohraničeného křivkami $y = x^2 - x - 2$, $y = -x + 2$.

Řešení Video **Teorie: 30 Příklady: 196, 197** 

Znázorníme si plochu, jejíž obsah máme určit:



Z grafu vidíme, že plocha je ohraničená shora funkcí $y = -x + 2$ a zdola kvadratickou funkcí $y = x^2 - x - 2$, potřebujeme určit interval omezující daný útvar, tzn. určíme si průsečíky funkcí:

$$-x + 2 = x^2 - x - 2 \Rightarrow \text{řešíme tedy kvadratickou rovnici } x^2 - 4 = 0,$$

hledané průsečíky jsou $x_1 = -2, x_2 = 2$.

$$P = - \int_{-2}^2 (-x + 2 - (x^2 - x - 2)) dx = \int_{-2}^2 (-x^2 + 4) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 4x \right]_{-2}^2 = -\frac{8}{3} + 8 - \left(\frac{8}{3} - 8 \right) = \frac{32}{3}.$$

Poznámky

Obsah křivočarého lichoběžníka ohraničeného dvěma funkcemi

pokud platí: $f(x) \geq g(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$

$$\Rightarrow P = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx,$$

kde a, b jsou průsečíky funkcí,

tzn. řešíme rovnici $f(x) = g(x)$

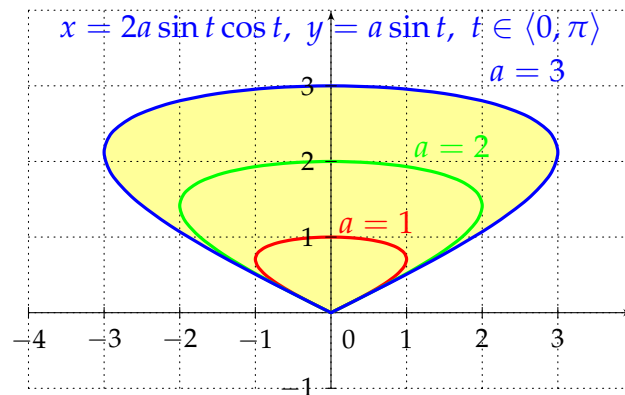
102 - Užití určitého integrálu, obsah rovinného obrazce

Zadání Vypočítejte obsah rovinného obrazce (danou plochu znázorněte) ohraničeného křivkami $x = 2a \sin t \cos t$, $y = a \sin t$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$.

Řešení

Video **Teorie: 30 Příklady: 198** 

Znázorníme si plochu, jejíž obsah máme určit:



Pro výpočet obsahu rovinné plochy ohraničené parametrickými rovnicemi potřebujeme znát derivaci funkce $x = 2a \sin t \cos t$:

$$\dot{\varphi}(t) = 2a(\cos^2 t - \sin^2 t) = 2a(1 - 2\sin^2 t).$$

Dosadíme do vzorečku:

$$\begin{aligned} P &= \left| \int_0^{\pi} 2a^2(\sin t - 2\sin^3 t) dt \right| = \left| -2a^2[\cos t]_0^{\pi} - 4a^2 \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 t) \sin t dt \right| \\ &= \left| 4a^2 + 4a^2 \left[\cos t - \frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^{\pi} \right| = \left| 4a^2 + 4a^2 \left(-1 + \frac{1}{3} - \left(1 - \frac{1}{3} \right) \right) \right| = \frac{4}{3}a^2. \end{aligned}$$

Poznámky

Obsah křivočarého lichoběžníka ohraničeného funkcí danou parametrickými rovnicemi

$x = \varphi(t)$ a $y = \psi(t)$, kde $t \in \langle \alpha; \beta \rangle$

$$\Rightarrow P = \left| \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \dot{\varphi}(t) dt \right|$$

103 - Užití určitého integrálu, délka rovinné křivky

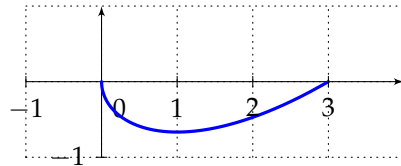
Zadání Vypočítejte velikost dráhy, kterou urazí bod od $t = 0$ do $t = \sqrt{3}$ při pohybu po křivce dané parametrickými rovnicemi $x = t^2$, $y = \frac{t}{3}(t^2 - 3)$.

Řešení

Video [Teorie: 31](#) [Příklady: 201](#) 

Znázorníme si křivku, jejíž délku máme spočítat:

$$x = t^2, \quad y = \frac{t}{3}(t^2 - 3), \quad t \in \langle 0, \sqrt{3} \rangle$$



Pro výpočet délky křivky dané parametrickými rovnicemi potřebujeme znát derivace funkcí:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}(t) &= 2t \\ \dot{\psi}(t) &= \frac{t^2 - 3}{3} + \frac{2t^2}{3} = t^2 - 1\end{aligned}$$

Dosadíme do vzorečku:

$$l = \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4t^2 + t^4 - 2t^2 + 1} dt = \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{t^4 + 2t^2 + 1} dt = \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{(t^2 + 1)^2} dt = \left[\frac{t^3}{3} + t \right]_0^{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$

Poznámky

Délka oblouku křivky dané parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$ a $y = \psi(t)$, kde $t \in \langle \alpha; \beta \rangle$

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\dot{\varphi}(t))^2 + (\dot{\psi}(t))^2} dt$$

104 - Užití určitého integrálu, délka rovinné křivky

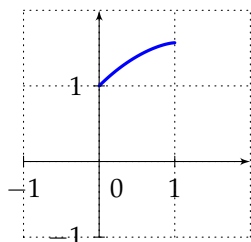
Zadání Vypočtete délku křivky $y = \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$ pro $0 \leq x \leq 1$.

Řešení

Video Teorie: 31 Příklady: 200 

Znáznorníme si křivku, jejíž délku máme spočítat:

$$y = \arcsin(x) + \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in \langle 0, 1 \rangle$$



Pro výpočet délky křivky potřebujeme znát druhou mocninu derivace funkce:

$$(f'(x))^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} \right)^2 = \frac{1-x}{1+x}.$$

Dosadíme do vzorečku:

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1-x}{1+x}} dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{1+x+1-x}{1+x}} dx = \sqrt{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx = \sqrt{2} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2t}{t} dt = 2\sqrt{2} [t]_1^{\sqrt{2}} = 4 - 2\sqrt{2}.$$

Poznámky

Délka oblouku křivky na $\langle a; b \rangle$

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

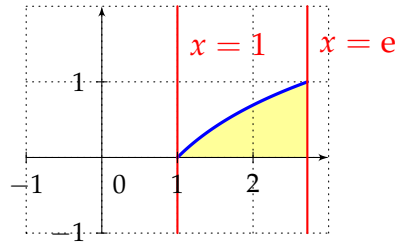
105 - Užití určitého integrálu, objem rotačního tělesa

Zadání Vypočtete objem tělesa vzniklého rotací (kolem osy x) oblasti ohraničené funkcí $y = \ln x$, osou x v $\langle 1, e \rangle$.

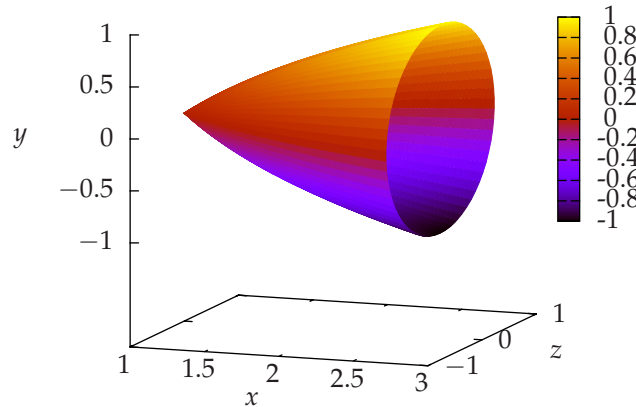
Řešení

Znázorníme si oblast, která bude rotovat:

$$y = \ln x, \quad x \in \langle 1, e \rangle$$



Video [Teorie: 32](#) [Příklady: 202, 203, 204](#)



Oblast je ohraničena pouze jednou funkcí, tzn. budeme počítat integrál z druhé mocniny dané funkce.

Dosadíme do vzorečku:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^e \ln^2 x dx = (PP) = \pi [x \ln^2 x]_1^e - 2\pi \int_1^e \ln x dx = (PP) = \pi e - 2\pi \left([x \ln x]_1^e - \int_1^e dx \right) \\ &= \pi e - 2\pi e + 2\pi [x]_1^e = \pi(e - 2). \end{aligned}$$

Poznámky

Objem rotačního tělesa

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

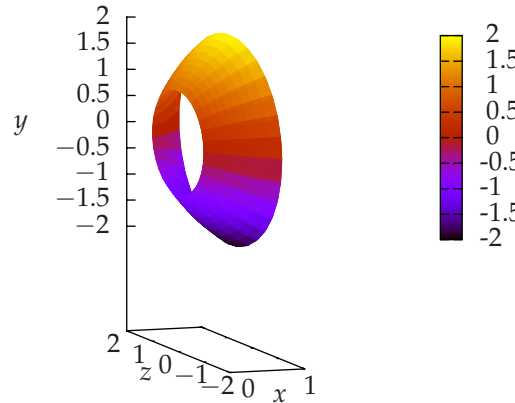
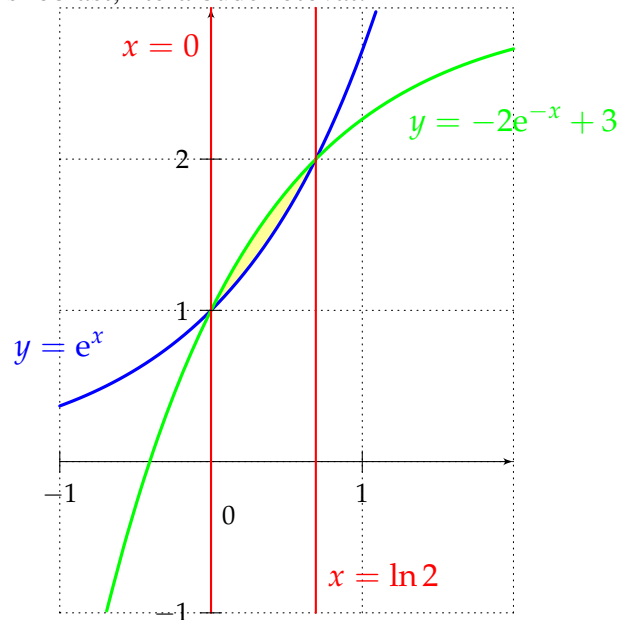
106 - Užití určitého integrálu, objem rotačního tělesa

Zadání Vypočtete objem tělesa, vzniklého rotací oblasti (oblast načrtněte) ohraničené funkcemi $y = e^x$, $y = -2e^{-x} + 3$ kolem osy x .

Řešení

Video Teorie: 32 Příklady: 205 

Znáznorníme si oblast, která bude rotovat:



Z grafu vidíme, že oblast je ohraničená shora funkcí $y = -2e^{-x} + 3$ a zdola funkcí $y = e^x$, potřebujeme určit interval omezující daný útvar, tzn. určíme si průsečíky funkcí:

$$-2e^{-x} + 3 = e^x \Rightarrow \frac{2}{e^x} - 3 + e^x = 0 \Rightarrow \frac{2 - 3e^x + e^{2x}}{e^x} = 0 \Rightarrow 2 - 3e^x + e^{2x} = 0,$$

zavedeme substituci $e^x = t$ a řešíme kvadratickou rovnici $t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \ln 2$.

$$V = \pi \int_0^{\ln 2} \left| (-2e^{-x} + 3)^2 - e^{2x} \right| dx = \pi \int_0^{\ln 2} (4e^{-2x} - 12e^{-x} + 9 - e^{2x}) dx$$

$$= \pi \left[-2e^{-2x} + 12e^{-x} + 9x - \frac{e^{2x}}{2} \right]_0^{\ln 2} = \pi(9 \ln 2 - 6).$$

Poznámky

Objem rotačního tělesa

$$V = \pi \int_a^b \left| f^2(x) - g^2(x) \right| dx,$$

kde a, b jsou průsečíky funkcí,

tzn. řešíme rovnici $f(x) = g(x)$

107 - Užití určitého integrálu, objem rotačního tělesa

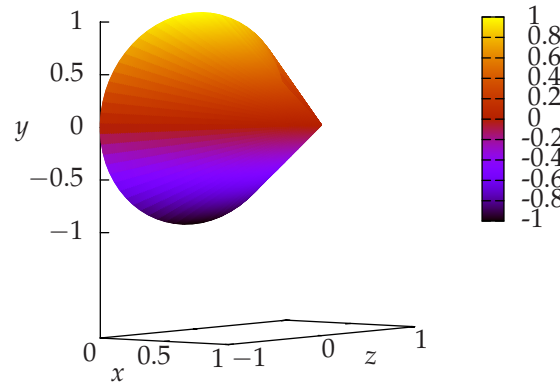
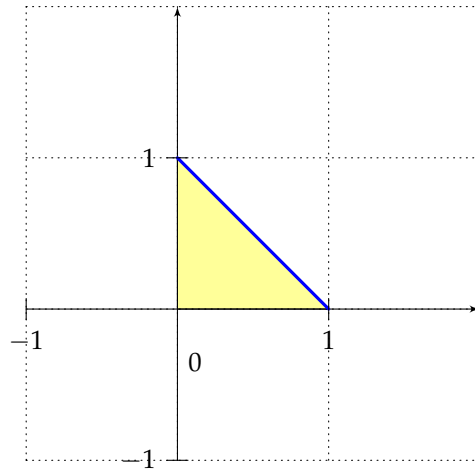
Zadání Vypočítejte objem tělesa vzniklého rotací parametricky zadané funkce $x = \cos^2 t$, $y = \sin^2 t$, kde $t \in \left\langle \frac{\pi}{2}, \pi \right\rangle$ kolem osy x .

Řešení

Video **Teorie: 32** **Příklady: 206** 

Znázorníme si oblast, která bude rotovat:

$$x = \cos^2 t, y = \sin^2 t, t \in \left\langle \frac{\pi}{2}, \pi \right\rangle$$



Potřebujeme znát derivaci funkce $x = \cos^2 t$:

$$\dot{\varphi}(t) = -2 \cos t \sin t.$$

Dosadíme do vzorečku:

$$V = -2\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos t \sin^5 t dt = (\text{substituce: } \sin t = u) = 2\pi \int_0^1 u^5 du = \frac{1}{3}\pi [u^6]_0^1 = \frac{1}{3}\pi.$$

Poznámky

Objem rotačního tělesa

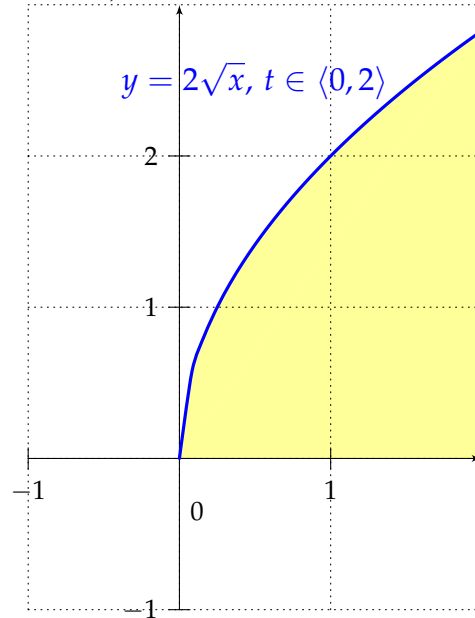
$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi^2(t) |\dot{\varphi}(t)| dt$$

108 - Užití určitého integrálu, obsah rotační plochy

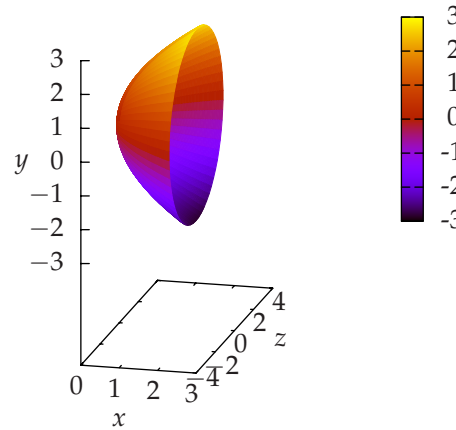
Zadání Vypočítejte povrch rotačního tělesa vzniklého rotací křivky $y = 2\sqrt{x}$ pro $x \in \langle 0; 2 \rangle$ kolem osy x .

Řešení

Znázorníme si oblast, která bude rotovat:



Video **Teorie: 33 Příklady: 207, 208** 



Potřebujeme znát druhou mocninu derivace funkce:

$$(y')^2 = \frac{1}{x}.$$

Dosadíme do vzorečku:

$$S = 4\pi \int_0^2 \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} dx = 4\pi \int_0^2 \sqrt{x} \sqrt{\frac{x+1}{x}} dx = 4\pi \int_0^2 \sqrt{x+1} dx = \frac{8}{3}\pi \left[(x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^2 = \frac{8}{3}\pi(\sqrt{27} - 1).$$

Poznámky

Obsah rotační plochy

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

$$f(x) \geq 0$$

109 - Užití určitého integrálu, obsah rotační plochy

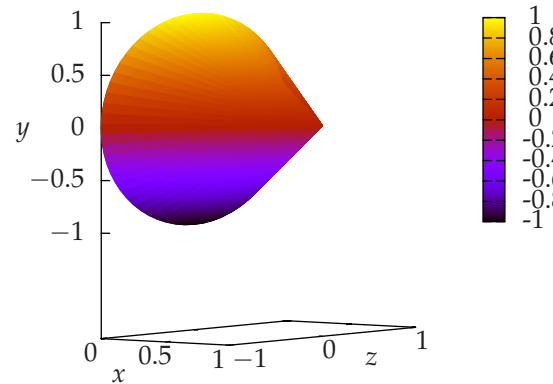
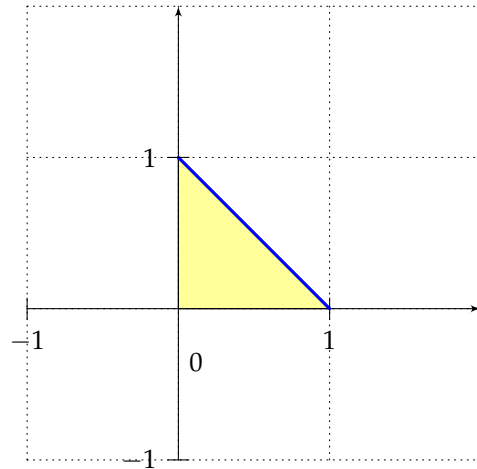
Zadání Vypočtete obsah rotačního tělesa vzniklého rotací parametricky zadané funkce $x = \cos^2 t$, $y = \sin^2 t$ kolem osy x , kde $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$.

Řešení

Video Teorie: 33 Příklady: 207, 208 

Znáznorníme si oblast, která bude rotovat:

$$x = \cos^2 t, y = \sin^2 t, t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$$



Potřebujeme určit druhé mocniny derivací obou funkcí:

$$(\dot{\varphi}(t))^2 = 4 \cos^2 t \sin^2 t$$

$$(\dot{\psi}(t))^2 = 4 \cos^2 t \sin^2 t$$

Dosadíme do vzorečku:

$$S = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \sqrt{8 \cos^2 t \sin^2 t} dt = 2\pi\sqrt{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin^3 t dt = \left| \begin{array}{l} \text{subst. :} \\ \sin t = u \end{array} \right| = 2\pi\sqrt{8} \int_0^1 u^3 du = \pi\sqrt{2} [u^4]_0^1 = \pi\sqrt{2}.$$

Poznámky

Obsah rotační plochy

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \sqrt{(\dot{\varphi}(t))^2 + (\dot{\psi}(t))^2} dt$$

$$\psi(t) \geq 0$$

Řešené příklady – Funkce dvou proměnných

111 - Definiční obor

Zadání Určete a graficky znázorněte definiční obor funkce $z = \frac{\ln(1-x)}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$.

Řešení

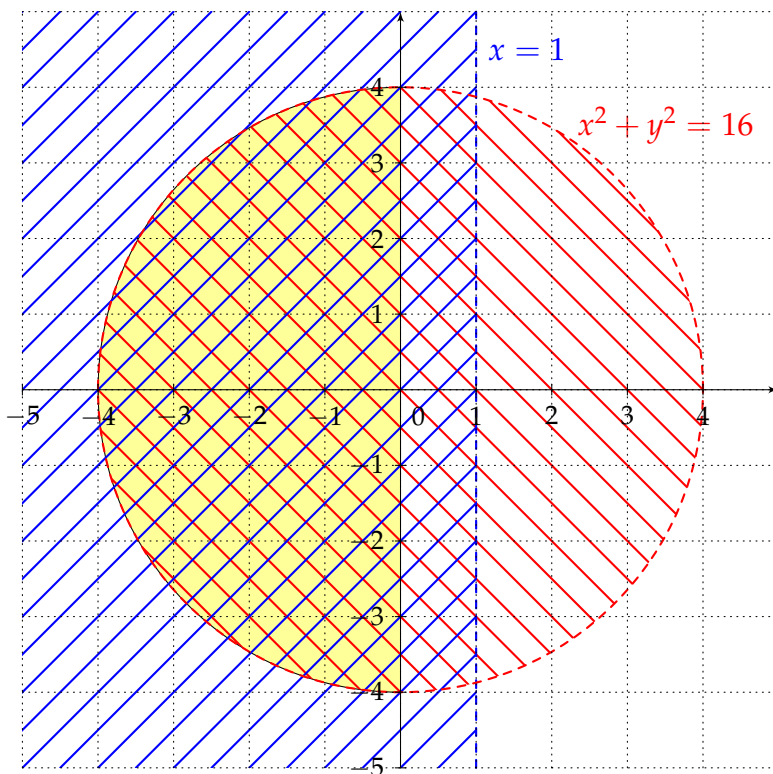
Video **Teorie: 35 Příklady: 210-219** 

Sestavíme omezující podmínky na definiční obor.

Podmínka $1 - x > 0$ zaručí existenci logaritmu $\Rightarrow x < 1$. Jedná se o polorovinu s hraniční přímkou o rovnici $x = 1$, která ovšem do definičního oboru nepatří, bude vyznačena čárkovaně.

Podmínka $16 - x^2 - y^2 \geq 0$ zajistí existenci druhé odmocniny, podmínka $\sqrt{16 - x^2 - y^2} \neq 0$ vyloučí možnost dělení nulou. Tyto dvě podmínky se dají sloučit do jediné podmínky, $16 - x^2 - y^2 > 0 \Rightarrow x^2 + y^2 < 4^2$. Jedná se o kruh se středem v počátku a poloměrem 4. Hraniční kružnice do definičního oboru patřit nebude, bude vyznačena čárkovaně.

Definičním oborem je pak průnik obou ploch, na obrázku žlutě vyznačená plocha.

**Poznámky**

Zlomek
jmenovatel je různý od 0

Sudá odmocnina
výraz pod odmocninou je
nezáporný

Logaritmus
argument je kladný

Tangens
argument je různý od $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$,
 $k \in \mathbb{Z}$

Kotangens
argument je různý od $k \cdot \pi$,
 $k \in \mathbb{Z}$

Arkussinus, arkuskosinus
argument leží v intervalu
 $\langle -1, 1 \rangle$

112 - Definiční obor

Zadání Určete a graficky znázorněte definiční obor funkce $z = \sqrt{\sin x}$.

Řešení

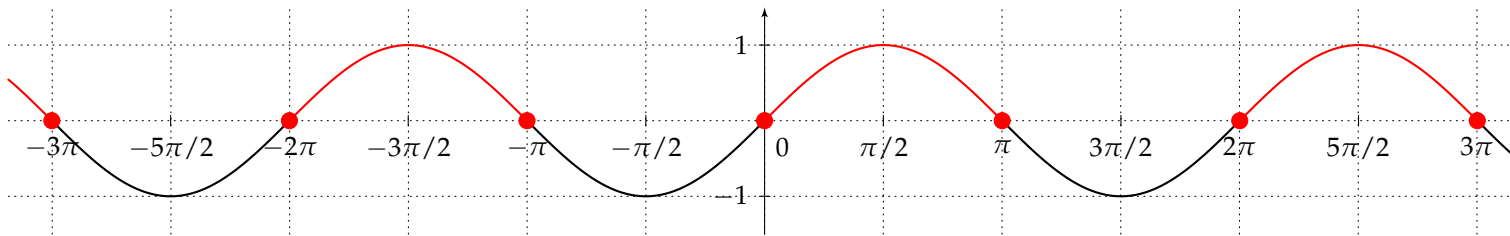
Video Teorie: 35 Příklady: 210-219 

Sestavíme omezující podmínky na definiční obor. Podmínka $y \sin x \geq 0$ zaručí existenci odmocniny. Součin $y \sin x$ je nezáporný, když jsou oba činitele nezáporní, nebo jsou oba nekladní, tedy

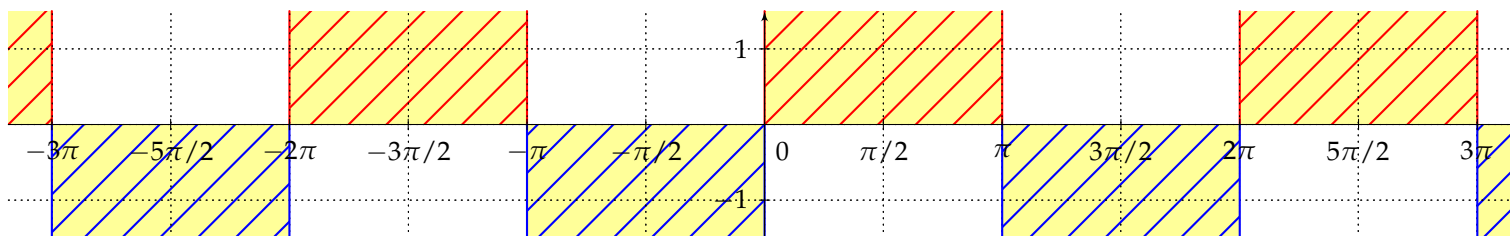
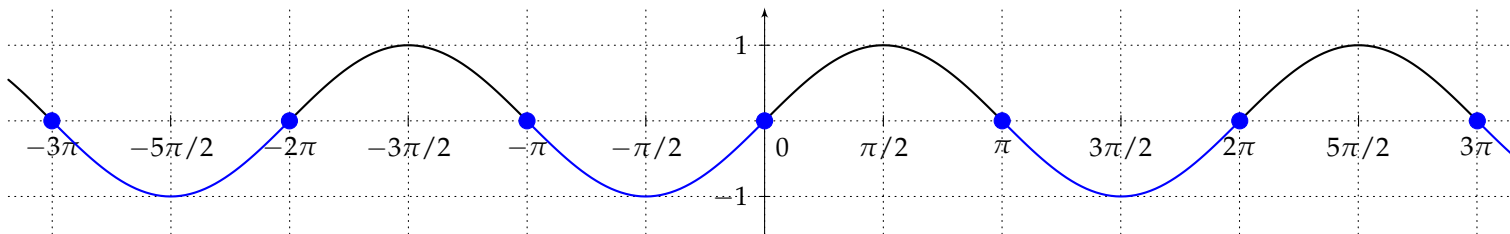
$$(y \geq 0 \wedge \sin x \geq 0) \vee (y \leq 0 \wedge \sin x \leq 0).$$

Ještě je nutné vyřešit nerovnici $\sin x \geq 0$ resp. $\sin x \leq 0$, ptáme se, kdy je funkce sinus nezáporná a kdy je nekladná.

$$\sin x \geq 0 \Rightarrow x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \langle 0 + k2\pi, \pi + k2\pi \rangle$$



$$\sin x \leq 0 \Rightarrow x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \langle -\pi + k2\pi, 0 + k2\pi \rangle$$



Poznámky

Zlomek
jmenovatel je různý od 0

Sudá odmocnina
výraz pod odmocninou je nezáporný

Logaritmus
argument je kladný

Tangens
argument je různý od $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Kotangens
argument je různý od $k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Arkussinus, arkuskosinus
argument leží v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$

113 - Vrstevnicový graf

Zadání Nalezněte vrstevnicový graf funkce $z = \frac{5x}{x^2 + y^2 + 1}$.

Řešení

Dosadíme do zadané funkce $z = k$, kde $k \in \mathbb{R}$, tedy

$$k = \frac{5x}{x^2 + y^2 + 1} \Rightarrow x^2 + y^2 + 1 = \frac{5x}{k} \Rightarrow x^2 - \frac{5x}{k} + y^2 + 1 = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{5}{2k}\right)^2 + y^2 - \frac{25}{4k^2} + 1 = 0.$$

Výraz $x^2 - \frac{5x}{k}$ jsme doplnili na úplný čtverec, $x^2 - \frac{5x}{k} = \left(x - \frac{5}{2k}\right)^2 - \frac{25}{4k^2}$.

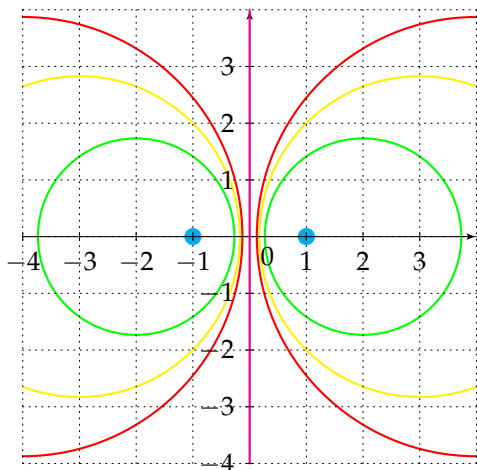
Nyní je třeba diskutovat konkrétní hodnoty k .

1. Pro $k = 0$ (řez grafu funkce z s půdorysnou rovinou) dostáváme $0 = \frac{5x}{x^2 + y^2 + 1} \Rightarrow x = 0$, vrstevnicí je osa y .

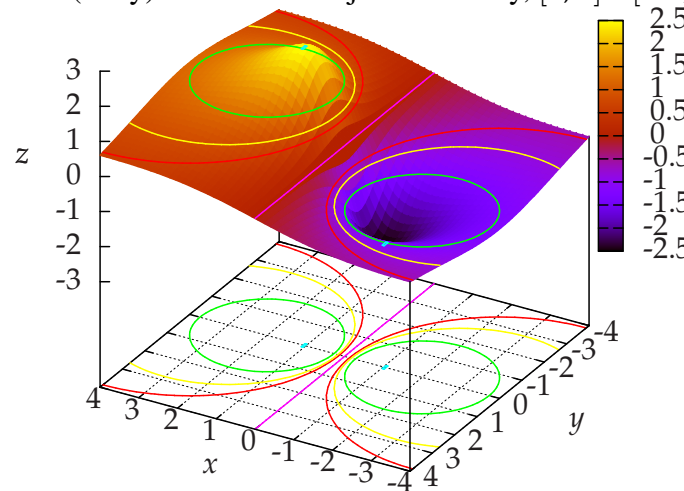
2. Pro $k \neq 0$ dostáváme $\left(x - \frac{5}{2k}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{4k^2} - 1$. Vrstevnicemi budou kružnice pouze v případě, kdy pravá strana rovnice bude větší než 0,

$$\frac{25}{4k^2} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{25}{4k^2} > 1 \Rightarrow 25 > 4k^2 \Rightarrow k^2 < \frac{25}{4} \Rightarrow |k| < \frac{5}{2} \Rightarrow k \in \left(-\frac{5}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{5}{2}\right)$$

3. Pro $k = \pm \frac{5}{2}$ platí $(x \mp 1)^2 + y^2 = 0$. Jedná se o dvě singulární kružnice (body). Vrstevnicemi jsou dva body, $[1, 0]$ a $[-1, 0]$.



- $k = 0$
- $k = \pm \frac{5}{2}$
- $k = \pm \frac{5}{4}$
- $k = \pm \frac{5}{6}$
- $k = \pm \frac{5}{8}$



Poznámky

Hledáme průniky grafu funkce s rovinami rovnoběžnými s půdorysnou rovinou, tj. dosadíme $z = k, k \in \mathbb{R}$.

Číslo k je možné volit libovolně. Ovšem může se stát, že při nevhodné volbě se plochy neprotínají.

Seznam příkazů pro Gnuplot:

```
set view 62,210; set view equal xy
set iso 50; set samp 50
set xrange [-4:4]; set yrange [-4:4]
set ztics 1; set pm3d
set contour both
set cntrparam levels discrete 0, 2.485, -2.485, 1.25, -1.25, .83, -.83, .625, -.625
set style increment user
set style line 1 lc rgb 'black' lw 2
set style line 2 lc rgb 'red'
set style line 3 lc rgb 'red'
set style line 4 lc rgb 'yellow'
set style line 5 lc rgb 'yellow'
set style line 6 lc rgb 'green'
set style line 7 lc rgb 'green'
set style line 8 lc rgb 'cyan'
set style line 9 lc rgb 'cyan'
set style line 10 lc rgb 'magenta'
set grid; unset surf; unset key
set xlabel "x"
set ylabel "y"
set zlabel "z"
splot 5*x/(x**2+y**2+1)
```

114 - Limita funkce

Zadání Vypočítejte limitu funkce $z = \frac{y(x+1)}{x^3+1}$ v bodě $[-1, 0]$ a dokažte, že limita funkce $z = \frac{x^2+x}{xy+y}$ v bodě $[0, 0]$ neexistuje.

Řešení

Video **Teorie: 38** **Příklady: 222** 

Řešíme první část úlohy,

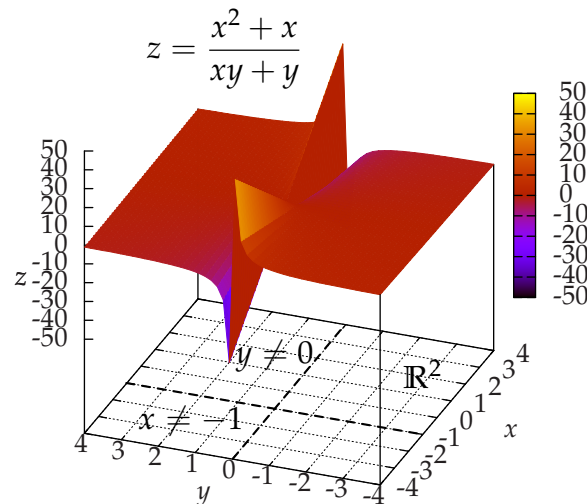
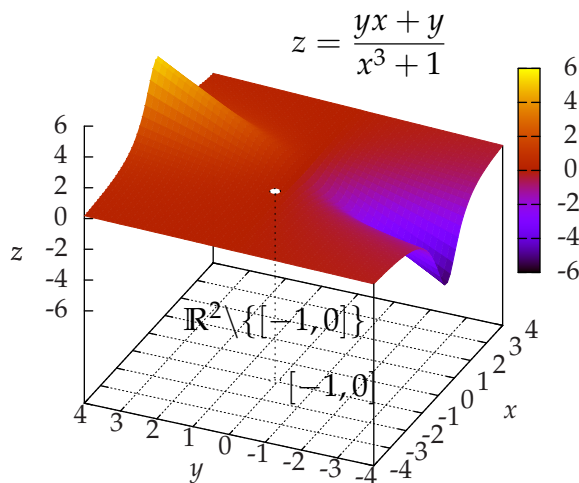
$$\lim_{[x,y] \rightarrow [-1,0]} \frac{yx+y}{x^3+1} = \frac{0}{0} = \lim_{[x,y] \rightarrow [-1,0]} \frac{y(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \lim_{[x,y] \rightarrow [-1,0]} \frac{y}{x^2-x+1} = 0.$$

Ve druhé části úlohy musíme dokázat, že limita neexistuje. Na rozdíl od funkcí jedné proměnné, kdy se k limitnímu bodu můžeme blížit pouze ze dvou stran (zleva a zprava), v případě funkcí dvou i více proměnných se k limitnímu bodu můžeme blížit nekonečně mnoha způsoby. Limita neexistuje v případě, že její hodnota závisí na volbě přibližování, či se pro různé volby přibližování mění. Pokud ovšem limita na konkrétní volbě přibližování nezávisí, pak to ještě neznamená, že existuje.

Zkusme se k limitnímu bodu blížit po přímkách prochazejících počátkem, tj. volíme $y = kx, k \in \mathbb{R}$. Dosadíme $y = kx$ do funkce $z = \frac{x^2+x}{xy+y}$,

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x^2+x}{xy+y} = \frac{0}{0} \stackrel{y=kx}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+x}{kx^2+kx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+x}{k(x^2+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{k},$$

limita závisí na parametru k , pro různé volby parametru k vyjde různě. Tzn. limita funkce $z = \frac{x^2+x}{xy+y}$ v bodě $[0, 0]$ neexistuje.



Poznámky

Limity funkcí dvou proměnných řešíme většinou přímým dosazením, nebo se pokusíme limitu upravit.

V případě limit funkcí dvou proměnných se spíše řeší jiný typ úlohy. Dokazuje se, že daná limita neexistuje.

115 - Parciální derivace

Zadání Určete parciální derivace prvního řádu funkce $z = x^2 \sin^2(xy^2)$ v bodě $[\pi, 0]$.

Řešení

Video **Teorie: 39, 40** **Příklady: 223-227** 

Parciální derivace prvního řádu počítáme vzhledem k jednotlivým proměnným funkce z . Funkce z je funkcí dvou nezávislých proměnných, proměnné x a y . Parciální derivace tedy budeme počítat jak podle proměnné x , tak i podle proměnné y .

Vzhledem k definici parciální derivace budeme postupovat tak, že s proměnnou, podle které se nederivuje, budeme pracovat jako s konstantou. To ale v konečném důsledku znamená, že ve funkci z zůstane pouze jedna nezávislá proměnná. Funkce z se stává funkcí jedné proměnné. Ale takovou funkci již umíme snadno zderivovat s využitím formulí 1. až 19.

Parciální derivace $\frac{\partial z}{\partial x}$ funkce z podle proměnné x :

jelikož funkci z derivujeme podle x , pak s proměnnou y budeme pracovat jako s konstantou, naším úkolem je tedy derivovat součin dvou funkcí proměnné x , funkce x^2 a složené funkce $\sin^2(xy^2)$, kterou derivujeme po jednotlivých složkách v pořadí: druhá mocnina, sinus, xy^2 ; ve výrazu xy^2 je y^2 konstanta v součinu a proto se derivuje pouze x ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2) \cdot \sin^2(xy^2) + x^2 \cdot \frac{\partial}{\partial x}(\sin^2(xy^2)) \\ &= 2x \sin^2(xy^2) + x^2 \cdot 2 \sin(xy^2) \cdot \cos(xy^2) \cdot y^2 = 2x \sin^2(xy^2) + 2x^2 y^2 \sin(xy^2) \cos(xy^2).\end{aligned}$$

Parciální derivace $\frac{\partial z}{\partial y}$ funkce z podle proměnné y :

derivujeme zcela analogicky, v tomto případě budeme jako s konstantou pracovat s proměnnou x , derivujeme tedy složenou funkci; x^2 je konstanta v součinu, proto se derivuje podle y pouze druhý činitel jako složená funkce v pořadí: druhá mocnina, sinus, xy^2 ; ve výrazu xy^2 je x konstanta v součinu a proto se derivuje pouze y^2 ,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cdot \frac{\partial}{\partial y}(\sin^2(xy^2)) = x^2 \cdot 2 \sin(xy^2) \cdot \cos(xy^2) \cdot x2y = 4x^3 y \sin(xy^2) \cos(xy^2).$$

Poznamenejme, že jestliže derivujeme podle y , tak samozřejmě lze použít formule uvedené v sekci „Poznámky“, stačí formálně místo x psát y .

Parciální derivace jsou opět funkce dvou proměnných a snadno je vyčíslíme na zadaném bodě přímým dosazením:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(\pi, 0) = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(\pi, 0) = 0.$$

Poznámky

1. $(c)' = 0$
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$
3. $(e^x)' = e^x$
4. $(a^x)' = a^x \ln a$
5. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
6. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
10. $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
14. $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
 $u = u(x) \quad v = v(x)$
15. $[c \cdot u]' = c \cdot u'$
16. $[u \pm v]' = u' \pm v'$
17. $[u \cdot v]' = u' \cdot v + u \cdot v'$
18. $\left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
19. $[u(v)]' = u'(v) \cdot v'$

116 - Parciální derivace

Zadání Určete parciální derivace druhého řádu funkce $z = x^y$ v bodě $[1, 1]$.

Řešení

Video **Teorie: 39, 40 Příklady: 223-227** 

Nejdříve určíme parciální derivace prvního řádu,

derivace podle x , derivujeme mocninou funkci podle vzorce č. 2. $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$

derivace podle y , derivujeme exponenciální funkci podle vzorce č. 4. $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$

K určení parciálních derivací druhého řádu je třeba parciální derivace prvního řádu jako funkce dvou proměnných opět derivovat jak podle x , tak i podle y ,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (yx^{y-1}) = y(y-1)x^{y-2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (yx^{y-1}) = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (x^y \ln x) = yx^{y-1} \ln x + x^y \frac{1}{x},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (x^y \ln x) = x^y \ln x \ln x = x^y \ln^2 x.$$

Zdůrazněme, že v případě spojitých funkcí se spojitými parciálními derivacemi se smíšené parciální derivace podle Schwarzovy věty rovnají.

Vskutku:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = yx^{y-1} \ln x + x^y \frac{1}{x} = yx^{y-1} \ln x + x^y x^{-1} = yx^{y-1} \ln x + x^{y-1} = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

Opět zbývá jednoduché vyčíslení parciálních derivací druhého řádu přímým dosazením zadaného bodu $[1, 1]$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1, 1) = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1, 1) = 1, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(1, 1) = 1, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(1, 1) = 0.$$

Poznámky

1. $(c)' = 0$
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$
3. $(e^x)' = e^x$
4. $(a^x)' = a^x \ln a$
5. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
6. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
10. $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
14. $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
15. $[c \cdot u]' = c \cdot u'$
16. $[u \pm v]' = u' \pm v'$
17. $[u \cdot v]' = u' \cdot v + u \cdot v'$
18. $\left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
19. $[u(v)]' = u'(v) \cdot v'$

117 - Parciální derivace

Zadání Určete parciální derivaci $\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2}$ funkce $z = 2x^2 e^y + \sin(xy^2)$.

Řešení

Video **Teorie: 39, 40** **Příklady: 223-227** 

Derivujeme funkci z postupně podle jednotlivých proměnných. Nejdříve derivujeme podle x , poté ještě jednou podle x a pak postupně dvakrát podle y .

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4xe^y + \cos(xy^2) \cdot y^2 = 4xe^y + y^2 \cos(xy^2)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4e^y + y^2(-\sin(xy^2) \cdot y^2) = 4e^y - y^4 \sin(xy^2)$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 4e^y - [4y^3 \sin(xy^2) + y^4 \cos(xy^2) \cdot x2y] = 4e^y - 4y^3 \sin(xy^2) - 2xy^5 \cos(xy^2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} &= 4e^y - [12y^2 \sin(xy^2) + 4y^3 \cos(xy^2) \cdot x2y] - [10xy^4 \cos(xy^2) + 2xy^5(-\sin(xy^2) \cdot x2y)] \\ &= 4e^y - 12y^2 \sin(xy^2) - 8xy^4 \cos(xy^2) - 10xy^4 \cos(xy^2) + 4x^2 y^6 \sin(xy^2) \\ &= 4e^y - 12y^2 \sin(xy^2) - 18xy^4 \cos(xy^2) + 4x^2 y^6 \sin(xy^2) \end{aligned}$$

Poznámky

1. $(c)' = 0$
 2. $(x^n)' = nx^{n-1}$
 3. $(e^x)' = e^x$
 4. $(a^x)' = a^x \ln a$
 5. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
 6. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
 7. $(\sin x)' = \cos x$
 8. $(\cos x)' = -\sin x$
 9. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
 10. $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
 11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
 12. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
 13. $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
 14. $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
- $u = u(x) \quad v = v(x)$
15. $[c \cdot u]' = c \cdot u'$
 16. $[u \pm v]' = u' \pm v'$
 17. $[u \cdot v]' = u' \cdot v + u \cdot v'$
 18. $\left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
 19. $[u(v)]' = u'(v) \cdot v'$

118 - Diferenciál funkce

Zadání Vypočítejte diferenciál funkce $z = f(x, y) = \sqrt{xy}$ v bodě $A = [2, 1]$. Určete přibližně hodnotu $f(2,04; 0,99)$.

Řešení **Video** **Teorie: 41 Příklady: 228, 229, 230, 231** 

Nejdříve určíme parciální derivace prvního řádu podle proměnných x a y ,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{2\sqrt{xy}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{xy}}.$$

Sestavíme diferenciál funkce z ,

$$dz = \frac{y}{2\sqrt{xy}}dx + \frac{x}{2\sqrt{xy}}dy = \frac{1}{2\sqrt{xy}}(ydx + xdy).$$

Dosadíme do diferenciálu dz bod A ,

$$dz(A) = dz(2, 1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1(x-2) + 2(y-1)) = \frac{\sqrt{2}}{4}(x + 2y - 4).$$

Všimněme si, že diferenciál v bodě je lineární funkce dvou proměnných.

Pro přibližný výpočet funkčních hodnot použijeme poslední vztah v sekci „Poznámky“. Určíme přírůstky od bodu $A = [2, 1]$ k bodu $[2,04; 0,99]$,

$$dx = x - x_0 = 2,04 - 2 = 0,04; \quad dy = y - y_0 = 0,99 - 1 = -0,01.$$

Určíme funkční hodnotu $f(A) = f(2, 1) = \sqrt{2}$. Určíme hodnotu diferenciálu $dz(A)(dx, dy)$ při známých přírůstcích,

$$dz(A)(dx, dy) = dz(2, 1)(0,04; -0,01) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1 \cdot 0,04 - 2 \cdot 0,01) = \frac{1}{2\sqrt{2}}0,02 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{2}{100} = \frac{\sqrt{2}}{200}.$$

Přibližná hodnota funkce $f(2,04; 0,99)$ pak bude

$$f(2,04; 0,99) \approx f(A) + df(A)(dx, dy) = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{200} = \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{200} \right).$$

Poznámky

Diferenciál funkce $z = f(x, y)$

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Diferenciál funkce z v bodě $A = [x_0, y_0]$

$$dz(A) = \frac{\partial f}{\partial x}(A) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(A) \cdot (y - y_0)$$

Diferenciál funkce z v bodě $A = [x_0, y_0]$ při známých přírůstcích dx, dy

$$dz(A)(dx, dy) = \frac{\partial f}{\partial x}(A) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(A) \cdot dy \in \mathbb{R}$$

Diferenciál druhého řádu funkce $z = f(x, y)$

$$d^2z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2$$

Přibližný výpočet funkčních hodnot

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)(dx, dy)$$

119 - Diferenciál funkce

Zadání Vypočítejte diferenciál druhého řádu funkce $z = f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$.

Řešení **Video** **Teorie: 41 Příklady: 228, 229, 230, 231** 

Nejdříve určíme parciální derivace prvního řádu podle proměnných x a y ,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1 \cdot (x-y) - (x+y) \cdot 1}{(x-y)^2} = \frac{-2y}{(x-y)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1 \cdot (x-y) - (x+y) \cdot (-1)}{(x-y)^2} = \frac{2x}{(x-y)^2}.$$

Určíme parciální derivace druhého řádu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (-2y(x-y)^{-2}) = -2y(-2)(x-y)^{-3} \cdot 1 = \frac{4y}{(x-y)^3},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-2y}{(x-y)^2} \right) = \frac{-2(x-y)^2 - (-2y)2(x-y) \cdot (-1)}{(x-y)^4} = \frac{-2(x+y)}{(x-y)^3},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2x}{(x-y)^2} \right) = \frac{2(x-y)^2 - 2x \cdot 2(x-y) \cdot 1}{(x-y)^4} = \frac{-2(x+y)}{(x-y)^3},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (2x(x-y)^{-2}) = 2x(-2)(x-y)^{-3} \cdot (-1) = \frac{4x}{(x-y)^3}.$$

Sestavíme diferenciál druhého řádu

$$d^2z = \frac{4y}{(x-y)^3} dx^2 - 4 \frac{x+y}{(x-y)^3} dx dy + \frac{4x}{(x-y)^3} dy^2 = \frac{4}{(x-y)^3} (y dx^2 - (x+y) dx dy + x dy^2).$$

Poznámky

Diferenciál funkce $z = f(x, y)$

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Diferenciál funkce z v bodě $A = [x_0, y_0]$

$$dz(A) = \frac{\partial f}{\partial x}(A) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(A) \cdot (y - y_0)$$

Diferenciál funkce z v bodě $A = [x_0, y_0]$
při známých přírůstcích dx, dy

$$dz(A)(dx, dy) = \frac{\partial f}{\partial x}(A) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(A) \cdot dy \in \mathbb{R}$$

Diferenciál druhého řádu funkce $z = f(x, y)$

$$d^2z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2$$

Přibližný výpočet funkčních hodnot

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)(dx, dy)$$

120 - Tečná rovina, normála

Zadání Nalezněte tečnou rovinu a normálu ke grafu funkce $z = f(x, y) = \sqrt{2x} - \sqrt{3y} - x$ v bodě $A = [2, 3, ?]$.

Řešení **Video** **Teorie: 43 Příklady: 232, 233** 

Bod A je bod dotyku, $x_0 = 2$, $y_0 = 3$, určíme jeho z -ovou složku, $z_0 = f(x_0, y_0) = f(2, 3) = -3$.

Vypočítáme parciální derivace prvního řádu funkce f v bodě $A = [2, 3]$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} - 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\sqrt{y}}$$

a tyto funkce dvou proměnných vyčíslíme na bodě $A = [2, 3]$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(A) = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{2}.$$

Sestavíme rovnici tečné roviny

$$\tau : z + 3 = -\frac{1}{2}(x - 2) - \frac{1}{2}(y - 3),$$

rovnici převedeme na obecný tvar

$$\tau : x + y + 2z + 1 = 0.$$

Pro parametrické rovnice normály dostáváme

$$\begin{aligned} x &= 2 - \frac{1}{2}t \\ n : \quad y &= 3 - \frac{1}{2}t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z &= -3 - t \end{aligned}$$

Poznámky

Tečná rovina τ ke grafu funkce $z = f(x, y)$ v bodě $A = [x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0)]$, $A = [x_0, y_0]$

$$\tau : z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(A)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)(y - y_0)$$

Normála n grafu funkce $z = f(x, y)$ v bodě $A = [x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0)]$, $A = [x_0, y_0]$

$$x = x_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(A)t$$

$$n : \quad y = y_0 + \frac{\partial f}{\partial y}(A)t, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$z = z_0 - t$$

121 - Taylorův polynom

Zadání Nalezněte Taylorův polynom druhého řádu funkce $z = f(x, y) = 2x^2 - xy + 3y^2 + x - y + 1$ v bodě $A = [1, 1]$.

Řešení

Video **Teorie: 43** **Příklady: 234, 235** 

Určíme hodnoty $f(A)$, $df(A)$ a $d^2f(A)$. Poté dosadíme do formule pro Taylorův polynom druhého řádu. Bod $A = [x_0, y_0] = [1, 1]$.

$$f(A) = 5$$

$$\begin{aligned} df(A) &= (4x - y + 1)|_{[1,1]}(x - 1) + (-x + 6y - 1)|_{[1,1]}(y - 1) \\ &= 4(x - 1) + 4(y - 1) \\ &= 4x + 4y - 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^2f(A) &= 4|_{[1,1]}(x - 1)^2 + 2 \cdot (-1)|_{[1,1]}(x - 1)(y - 1) + 6|_{[1,1]}(y - 1)^2 \\ &= 4x^2 - 8x + 4 - 2xy + 2x + 2y - 2 + 6y^2 - 12y + 6 \\ &= 4x^2 - 2xy + 6y^2 - 6x - 10y + 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2(A) &= 5 + \frac{4x + 4y - 8}{1!} + \frac{4x^2 - 2xy + 6y^2 - 6x - 10y + 8}{2!} \\ &= 5 + 4x + 4y - 8 + 2x^2 - xy + 3y^2 - 3x - 5y + 4 \\ &= 2x^2 - xy + 3y^2 + x - y + 1 \end{aligned}$$

Poznámky

Taylorův polynom m -tého řádu funkce $z = f(x, y)$ v bodě $A = [x_0, y_0]$

$$T_m(A) = f(A) + \frac{df(A)}{1!} + \dots + \frac{d^m f(A)}{m!}$$

Taylorův polynom druhého řádu funkce $z = f(x, y)$ v bodě $A = [x_0, y_0]$

$$T_2(A) = f(A) + \frac{df(A)}{1!} + \frac{d^2f(A)}{2!}$$

resp.

$$\begin{aligned} T_2(A) &= f(A) + \frac{1}{1!} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(A)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)(y - y_0) \right) \\ &+ \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)(x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A)(x - x_0)(y - y_0) \right. \\ &\left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A)(y - y_0)^2 \right) \end{aligned}$$

Zdůrazněme, že Taylorův polynom funkce je polynom. Pokud počítáme např. Taylorův polynom druhého řádu z polynomu dvou proměnných druhého stupně (viz. řešená úloha), výsledkem je ten samý polynom druhého řádu. Každý polynom stupně n je sám sobě Taylorovým polynomem stupně m pro každé $m \geq n$.

122 - Derivace implicitní funkce

Zadání Oběma způsoby nalezněte derivaci implicitní funkce dané rovnicí $x^3 + y + y^2 - 2xy = 3$ v bodě $A = [1, -1]$.

Řešení

Video **Teorie: 44, 45** **Příklady: 236, 237, 238** 

V našem případě platí

$$F(x, y) = x^3 + y + y^2 - 2xy - 3.$$

Určíme parciální derivace

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 2y, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 1 + 2y - 2x.$$

Jedná se o spojitě funkce, navíc

$$\frac{\partial F}{\partial y}(A) = 1 + 2y - 2x|_{A=[1,-1]} = -3 \neq 0.$$

Derivace implicitní funkce tedy existuje a je jediná. Dosadíme do formule pro derivaci implicitní funkce v bodě $A = [x_0, y_0] = [1, -1]$,

$$f'(1) = -\frac{3x^2 - 2y|_{[1,-1]}}{1 + 2y - 2x|_{[1,-1]}} = -\frac{5}{-3} = \frac{5}{3}.$$

Druhý způsob spočívá v předpokladu, že v rovnici $F(x, y) = 0$ budeme předpokládat závislost $y = y(x)$. Tzn., že v této rovnici zůstává pouze jediná nezávislá proměnná, a to x . Rovnici poté derivujeme podle x , zvlášť pravou i levou stranu rovnice,

$$\frac{d}{dx}(x^3 + y + y^2 - 2xy - 3 = 0) \Rightarrow 3x^2 + y' + 2yy' - 2y - 2xy' = 0.$$

Z rovnice vyjádříme y'

$$y' + 2yy' - 2xy' = -3x^2 + 2y \Rightarrow y'(1 + 2y - 2x) = -3x^2 + 2y \Rightarrow y' = \frac{-3x^2 + 2y}{1 + 2y - 2x} = -\frac{3x^2 - 2y}{1 + 2y - 2x}.$$

Kde se v rovnici po derivaci vzalo y' ? Musíme si uvědomit, že y závisí na x , $y = y(x)$. Nevíme ale, jak konkrétně ta závislost vypadá. Derivujeme tedy pouze formálně, tj. nad y napíšeme čárku. Funkci y^2 musíme ovšem derivovat jako složenou funkci, máme obecnou závislost y na x , na kterou působí druhá mocnina. Derivujeme nejdříve vnější složku (druhou mocninu) v tom samém bodě (v y) a poté násobíme derivací vnitřní funkce, derivací y podle x , což je formálně y' . Výraz $2xy$ musíme derivovat jako součin dvou funkcí proměnné x .

Poznámky

Derivace implicitní funkce $y = f(x)$ dané rovnicí $F(x, y) = 0$

$$y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

Derivace implicitní funkce $y = f(x)$ dané rovnicí $F(x, y) = 0$ v bodě $A = [x_0, y_0]$

$$f'(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(A)}{\frac{\partial F}{\partial y}(A)}$$

Alternativní způsob výpočtu:

- v rovnici $F(x, y) = 0$ předpokládáme závislost y na x , $y = y(x)$,
- rovnice $F(x, y) = 0$ přejde na rovnici $F(x, y(x)) = G(x) = 0$,
- derivujeme funkci jedné proměnné G podle x ,
- vyjádříme y' .

123 - Tečna a normála k implicitní funkci

Zadání Nalezněte tečnu a normálu k implicitní funkci $y = f(x)$ dané rovnicí $e^{xy} = x + 2y$ v bodě $A = [1, 0]$.

Řešení Video **Teorie: 44, 45 Příklady: 239, 240** 

V našem případě je funkce F dána

$$F(x, y) = e^{xy} - x - 2y.$$

Určíme parciální derivace funkce F v bodě $A = [x_0, y_0] = [1, 0]$,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(A) = ye^{xy} - 1|_{[1,0]} = -1,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(A) = xe^{xy} - 2|_{[1,0]} = -1.$$

Sestavíme rovnici tečny t ke grafu implicitní funkce,

$$t : -(x - 1) - y = 0 \Rightarrow y = -x + 1.$$

Sestavíme rovnici normály n ke grafu implicitní funkce,

$$n : -(x - 1) + y = 0 \Rightarrow y = x - 1.$$

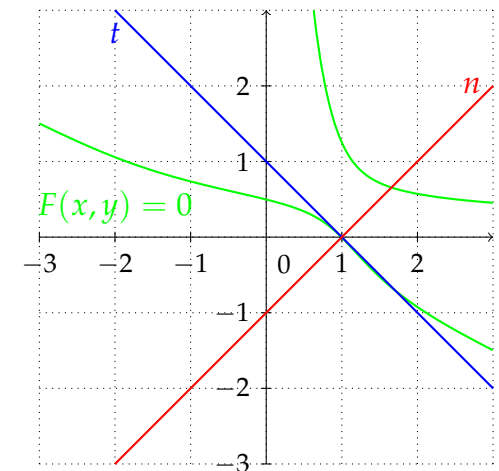
Poznámky

Tečna k implicitní funkci $y = f(x)$ dané rovnicí $F(x, y) = 0$ v bodě $A = [x_0, y_0]$

$$t : \frac{\partial F}{\partial x}(A)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(A)(y - y_0) = 0$$

Normála k implicitní funkci $y = f(x)$ dané rovnicí $F(x, y) = 0$ v bodě $A = [x_0, y_0]$

$$n : \frac{\partial F}{\partial y}(A)(x - x_0) - \frac{\partial F}{\partial x}(A)(y - y_0) = 0$$



124 - Lokální extrémý - první část

Zadání Nalezněte lokální extrémý funkce $z = e^{-x^2-y^2}(2y^2 + x^2)$.

Řešení **Video** **Teorie: 46, 47** **Příklady: 241, 242, 243, 244** 

Definičním oborem funkce z je množina \mathbb{R}^2 . Určíme parciální derivace prvního řádu a sestavíme rovnice pro stacionární body,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= e^{-x^2-y^2}(-2x)(2y^2 + x^2) + e^{-x^2-y^2}2x = -2xe^{-x^2-y^2}(2y^2 + x^2 - 1) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= e^{-x^2-y^2}(-2y)(2y^2 + x^2) + e^{-x^2-y^2}4y = -2ye^{-x^2-y^2}(2y^2 + x^2 - 2) = 0.\end{aligned}$$

Exponenciální funkce $e^{-x^2-y^2}$ je kladná, tedy nikdy nemůže nabýt nulové hodnoty a lze ji z rovnic pro stacionární body vykrátit. Rovnice přejdou na tvar

$$\begin{aligned}x(2y^2 + x^2 - 1) &= 0, \\ y(2y^2 + x^2 - 2) &= 0.\end{aligned}$$

Předpokládejme nejdříve, že $x = 0$. Ze druhé rovnice $y(2y^2 - 2) = 0$ dostaneme řešení $y = 0$ a $y = \pm 1$. Obdržíme tři různé stacionární body, $A_1 = [0, 0]$, $A_2 = [0, 1]$ a $A_3 = [0, -1]$.

Ve druhé rovnici předpokládejme, že $y = 0$. Z první rovnice $x(x^2 - 1) = 0$ dostaneme řešení $x = 0$ a $x = \pm 1$. Bod $[0, 0]$ již máme vypočítaný, přibyly další dva nové stacionární body, bod $A_4 = [1, 0]$ a $A_5 = [-1, 0]$.

Pokud $x \neq 0$ i $y \neq 0$, řešíme následující soustavu rovnic,

$$\begin{aligned}2y^2 + x^2 - 1 &= 0, \\ 2y^2 + x^2 - 2 &= 0.\end{aligned}$$

Pokud obě rovnice od sebe odečteme, dostaneme rovnici $1 = 0$, ale 1 se nikdy 0 nerovná. Soustava nemá žádné řešení.

Určili jsme celkem pět stacionárních bodů:

$$A_1 = [0, 0], \quad A_2 = [0, 1], \quad A_3 = [0, -1], \quad A_4 = [1, 0], \quad A_5 = [-1, 0].$$

Poznámky

- určíme definiční obor funkce $z = f(x, y)$
- vypočítáme parciální derivace prvního řádu $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$
- nalezneme stacionární body A jako řešení soustavy rovnic

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

- sestavíme matici $Q(A)$ parciálních derivací druhého řádu ve stacionárních bodech A

$$Q(A) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) \end{pmatrix}$$

- označme

$$\begin{aligned}D_2 &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \right)^2 \\ D_1 &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)\end{aligned}$$

- klasifikujeme lokální extrém

A není extrém, je-li $D_2 < 0$

A je ostrý lokální extrém, je-li $D_2 > 0$

A je ostré lok. minimum, je-li navíc $D_1 > 0$

A je ostré lok. maximum, je-li navíc $D_1 < 0$

125 - Lokální extrémy - druhá část

Zadání Nalezněte lokální extrémy funkce $z = e^{-x^2-y^2}(2y^2 + x^2)$.

Řešení

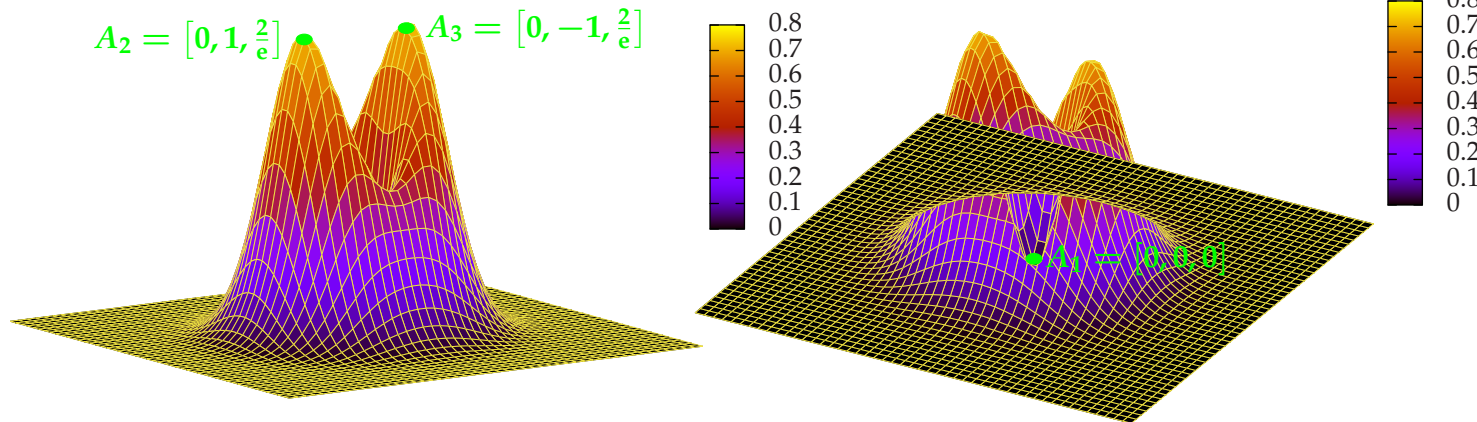
Pokračujeme v hledání lokálních extrémů funkce z předchozího listu. Nalezli jsme celkem pět stacionárních bodů. Určíme matici druhých partiálních derivací a vyhodnotíme ji na jednotlivých stacionárních bodech A_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$,

$$Q = \begin{pmatrix} ((-2 + 4x^2)(2y^2 + x^2 - 1) - 4x^2)e^{-x^2-y^2} & 4xye^{-x^2-y^2}(2y^2 + x^2 - 3) \\ 4xye^{-x^2-y^2}(2y^2 + x^2 - 3) & ((-2 + 4y^2)(2y^2 + x^2 - 2) - 8y^2)e^{-x^2-y^2} \end{pmatrix},$$

$$Q(A_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, Q(A_2) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{8}{e} \end{pmatrix}, Q(A_3) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{8}{e} \end{pmatrix}, Q(A_4) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{e} & 0 \\ 0 & \frac{2}{e} \end{pmatrix}, Q(A_5) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{e} & 0 \\ 0 & \frac{2}{e} \end{pmatrix}.$$

V následující tabulce uvádíme souhrnný přehled klasifikace extrémů v jednotlivých bodech:

Stacionární bod A_i	D_1	D_2	extrém o hodnotě $z = f(A_i)$
$A_1 = [0, 0]$	$2 > 0$	$8 > 0$	ostré lokální minimum $z = 0$
$A_2 = [0, 1]$	$-\frac{2}{e} < 0$	$\frac{16}{e^2} > 0$	ostré lokální maximum $z = \frac{2}{e}$
$A_3 = [0, -1]$	$-\frac{2}{e} < 0$	$\frac{16}{e^2} > 0$	ostré lokální maximum $z = \frac{2}{e}$
$A_4 = [1, 0]$	$-\frac{4}{e} < 0$	$-\frac{8}{e^2} < 0$	extrém neexistuje
$A_5 = [-1, 0]$	$-\frac{4}{e} < 0$	$-\frac{8}{e^2} < 0$	extrém neexistuje



Poznámky

- určíme definiční obor funkce $z = f(x, y)$
- vypočítáme partiální derivace prvního řádu $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$
- nalezneme stacionární body A jako řešení soustavy rovnic

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

- sestavíme matici $Q(A)$ partiálních derivací druhého řádu ve stacionárních bodech A

$$Q(A) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) \end{pmatrix}$$

- označme

$$D_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \right)^2$$

$$D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)$$

- klasifikujeme lokální extrém

A není extrém, je-li $D_2 < 0$

A je ostrý lokální extrém, je-li $D_2 > 0$

A je ostré lok. minimum, je-li navíc $D_1 > 0$

A je ostré lok. maximum, je-li navíc $D_1 < 0$

126 - Lokální extrémý - první část

Zadání Nalezněte lokální extrémý funkce $z = f(x, y) = \sin x + \cos y + \cos(x - y)$, $0 \leq x, y \leq \frac{\pi}{2}$.

Řešení Video **Teorie: 46, 47** **Příklady: 241, 242, 243, 244** 

Určíme parciální derivace prvního řádu a sestavíme rovnice pro stacionární body,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x - \sin(x - y) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\sin y + \sin(x - y) = 0.$$

Ze druhé rovnice dostáváme

$$\sin(x - y) = \sin y.$$

Protože jak x , tak y patří do intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, bude rozdíl $x - y$ patřit do intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$. Nicméně funkce sinus je jak na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, tak i na intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ prostá, to ale znamená, že existuje funkce inverzní, arkussinus, kterou lze aplikovat na druhou rovnici,

$$\arcsin(\sin(x - y) = \sin y) \Rightarrow \arcsin(\sin(x - y)) = \arcsin(\sin y) \Rightarrow x - y = y \Rightarrow y = \frac{x}{2}.$$

Tuto rovnici dosadíme do první rovnice,

$$\cos x - \sin(x - y) = 0 \Rightarrow \cos x - \sin\left(x - \frac{x}{2}\right) = 0 \Rightarrow \cos x - \sin \frac{x}{2} = 0.$$

Využijeme goniometrické identity $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$ a $\cos^2 \frac{x}{2} = 1 - \sin^2 \frac{x}{2}$,

$$\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow 1 - \sin^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow 2 \sin^2 \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} - 1 = 0.$$

Použijeme substituci $\sin \frac{x}{2} = t$,

$$2 \sin^2 \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} - 1 = 0 \Rightarrow 2t^2 + t - 1 = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = -1.$$

Vzhledem k omezení x na interval $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ záporné řešení neuvažujeme,

$$\sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{x}{2}, \sin k = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow y = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \text{stacionární bod } A = \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6} \right].$$

Poznámky

- určíme definiční obor funkce $z = f(x, y)$
- vypočítáme parciální derivace prvního řádu $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$
- nalezneme stacionární body A jako řešení soustavy rovnic

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

- sestavíme matici $Q(A)$ parciálních derivací druhého řádu ve stacionárních bodech A

$$Q(A) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) \end{pmatrix}$$

- označme

$$D_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \right)^2$$

$$D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)$$

- klasifikujeme lokální extrém

A není extrém, je-li $D_2 < 0$

A je ostrý lokální extrém, je-li $D_2 > 0$

A je ostré lok. minimum, je-li navíc $D_1 > 0$

A je ostré lok. maximum, je-li navíc $D_1 < 0$

127 - Lokální extrémy - druhá část

Zadání Nalezněte lokální extrémy funkce $z = f(x, y) = \sin x + \cos y + \cos(x - y)$, $0 \leq x, y \leq \frac{\pi}{2}$.

Řešení

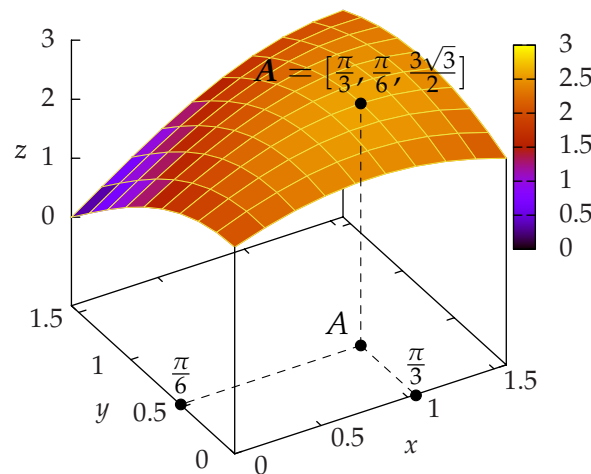
Pokračujeme v hledání lokálních extrémů funkce z předchozího listu. Nalezli jsme jeden stacionární bod. Určíme matici druhých partiálních derivací a vyhodnotíme ji na bodě A ,

$$Q(A) = \begin{pmatrix} -\sin x - \cos(x - y)|_A & \cos(x - y)|_A \\ \cos(x - y)|_A & -\cos y - \cos(x - y)|_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Určíme determinanty D_1 a D_2 ,

$$D_1 = -\sqrt{3}, \quad D_2 = \frac{9}{4}.$$

Protože $D_2 > 0$, v bodě $A = [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}]$ extrém existuje. Protože $D_1 < 0$, má funkce $z = f(x, y) = \sin x + \cos y + \cos(x - y)$ v bodě $A = [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}]$ ostré lokální maximum $z = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

**Poznámky**

- určíme definiční obor funkce $z = f(x, y)$
- vypočítáme partiální derivace prvního řádu $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$
- nalezneme stacionární body A jako řešení soustavy rovnic

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

- sestavíme matici $Q(A)$ partiálních derivací druhého řádu ve stacionárních bodech A

$$Q(A) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) \end{pmatrix}$$

- označme

$$D_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \right)^2$$

$$D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)$$

- klasifikujeme lokální extrém

A není extrém, je-li $D_2 < 0$

A je ostrý lokální extrém, je-li $D_2 > 0$

A je ostré lok. minimum, je-li navíc $D_1 > 0$

A je ostré lok. maximum, je-li navíc $D_1 < 0$

128 - Vázané extrémů

Zadání Nalezněte vázané extrémů funkce $z = f(x, y) = \sqrt{4x + y^2 + 5}$ vzhledem k podmínce $2x - 3 - y = 0$.

Řešení **Video** **Teorie: 48** **Příklady: 245, 246** 

Určíme nejdříve definiční obor funkce z , funkce z bude existovat, pokud bude výraz pod odmocninou nezáporný, tj.

$$4x + y^2 + 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{4}y^2 - \frac{5}{4}, \text{ viz. obrázek v „Poznámkách“.}$$

Z rovnice vazby $2x - 3 - y = 0$ lze jednoznačně vyjádřit jak y , tak x . Vyjádříme y ,

$$y = 2x - 3.$$

Dosadíme vazbu do předpisu funkce z ,

$$z = \sqrt{4x + (2x - 3)^2 + 5} = \sqrt{4x + 4x^2 - 12x + 9 + 5} = \sqrt{4x^2 - 8x + 14},$$

dostaneme funkci jedné proměnné $z = z(x, \varphi(x))$ (proměnné x) a snadno se přesvědčíme, že $D_z = \mathbb{R}$. Určíme první derivaci, poté ji položíme rovnu nule a dostaneme rovnici pro stacionární body této funkce,

$$z' = \frac{dz}{dx} = \frac{8x - 8}{2\sqrt{4x^2 - 8x + 14}} = \frac{4x - 4}{\sqrt{4x^2 - 8x + 14}} = 0 \Rightarrow 4x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1.$$

Definičním oborem první derivace je $D_{z'} = \mathbb{R}$. Na intervalu $(-\infty, 1)$ je první derivace $z' < 0$, funkce z je na tomto intervalu klesající. Na intervalu $(1, \infty)$ je první derivace $z' > 0$, tzn. funkce z je na tomto intervalu rostoucí. Ve stacionárním bodě $x = 1$ se mění znaménko první derivace z – na + což znamená, že v bodě $x = 1$ má funkce z lokální minimum.

Dosadíme bod $x = 1$ do rovnice vazby, dostáváme $y = -1$. Snadno ověříme, že bod A patří do definičního oboru funkce $z = \sqrt{4x + y^2 + 5}$, viz. obrázek vpravo.

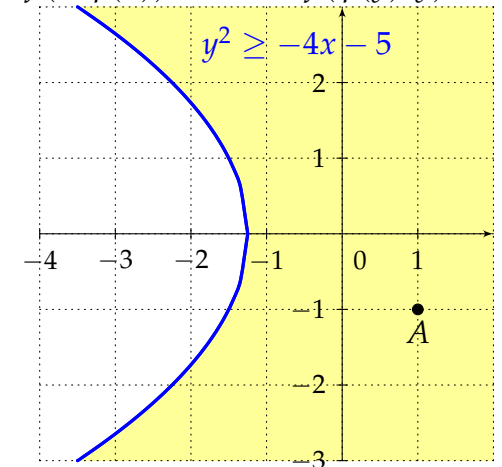
Funkce $z = \sqrt{4x + y^2 + 5}$ má v bodě $A = [1, -1]$ vázané lokální minimum $z = f(1, -1) = \sqrt{10}$.

Zcela analogicky budeme postupovat v případě, kdy lze z rovnice vazby vyjádřit jednoznačně x .

Poznámky

V případě, že lze jednoznačně z rovnice vazby vyjádřit buď x nebo y , budeme postupovat při hledání vázaných extrémů takto:

- vyjádříme buď $y = \varphi(x)$ nebo $x = \psi(y)$
- vázané extrémů hledáme jako lokální extrémů funkce jedné proměnné buď $z = f(x, \varphi(x))$ nebo $z = f(\psi(y), y)$



129 - Vázané extrém

Zadání Nalezněte vázané extrém funkce $z = f(x, y) = -8x + 6y - 5$ vzhledem k podmínce $x^2 + y^2 = 100$.

Řešení **Video** **Teorie: 48** **Příklady: 245, 246** 

Sestavíme Lagrangeovu funkci pro funkci $f(x) = -8x + 6y - 5$ a $g(x, y) = x^2 + y^2 - 100$,

$$\Phi(x, y, \lambda) = -8x + 6y - 5 + \lambda(x^2 + y^2 - 100).$$

Vypočítáme parciální derivace prvního řádu funkce Φ , které položíme rovny nule. Získáme tak rovnice pro stacionární body funkce Φ ,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -8 + 2\lambda x = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 6 + 2\lambda y = 0,$$

ke kterým přidáme rovnici vazby, řešíme následující soustavu rovnic

$$-8 + 2\lambda x = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{\lambda} \quad 6 + 2\lambda y = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{\lambda}$$

dosadíme do rovnice vazby za x a y ,

$$x^2 + y^2 = 100 \Rightarrow \left(\frac{4}{\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{3}{\lambda}\right)^2 = 100 \Rightarrow \frac{16}{\lambda^2} + \frac{9}{\lambda^2} = 100 \Rightarrow 100\lambda^2 = 25 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{2}.$$

Dopočítáme stacionární body $A = [x, y]$ dosazením λ ,

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow A_1 = [8, -6], \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow A_2 = [-8, 6].$$

Sestavíme matici parciálních derivací druhého řádu a vyhodnotíme ji na stacionárních bodech,

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}, \quad Q(A_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q(A_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

V bodě $A_1 = [8, -6]$ je $D_1 > 0$, $D_2 > 0$. Funkce $z = f(x, y)$ má v bodě $A_1 = [8, -6]$ vázané lokální minimum $z = -105$. V bodě $A_2 = [-8, 6]$ je $D_1 < 0$, $D_2 > 0$. Funkce $z = f(x, y)$ má v bodě $A_2 = [-8, 6]$ vázané lokální maximum $z = 95$.

Poznámky

V případě, že nelze jednoznačně z rovnice vazby $g(x, y) = 0$ vyjádřit buď x nebo y budeme postupovat při hledání vázaných extrémů takto:

- sestavíme Lagrangeovu funkci $\Phi(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$
- hledáme lokální extrém funkce Φ
- má-li funkce Φ ve svém stacionárním bodě lokální extrém, má i funkce $z = f(x, y)$ v tomto bodě lokální extrém vázaný podmínkou $g(x, y) = 0$, tzv. vázaný extrém

130 - Globální extrémy

Zadání Nalezněte globální extrémy funkce $z = f(x, y) = x^2 - y$ na čtverci s vrcholy $[1, 1]$, $[3, 1]$, $[3, 3]$, $[1, 3]$.

Řešení Video [Teorie: 49](#) [Příklady: 247, 248, 249](#) 

Definičním oborem funkce z je čtverec, viz. obrázek v „Poznámkách“. Určíme lokální extrémy funkce z ,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -1 = 0.$$

Je zřejmé, že druhá rovnice nemá řešení, lokální extrémy neexistují. Určíme rovnice hraničních křivek, tyto rovnice reprezentují rovnice vazeb,

$$AB : y = 1, x \in (1, 3), \quad BC : x = 3, y \in (1, 3), \quad CD : y = 3, x \in (1, 3), \quad DA : x = 1, y \in (1, 3).$$

Jednotlivé rovnice vazeb dosadíme do funkce z a nalezneme případné vázané extrémy,

$$AB : z = x^2 - 1 \Rightarrow z' = 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow 0 \notin (1, 3) \Rightarrow \text{extrém neexistuje,}$$

$$BC : z = 9 - y \Rightarrow z' = -1 = 0 \Rightarrow \text{rovnice nemá řešení} \Rightarrow \text{extrém neexistuje,}$$

$$CD : z = x^2 - 3 \Rightarrow z' = 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow 0 \notin (1, 3) \Rightarrow \text{extrém neexistuje,}$$

$$DA : z = 1 - y \Rightarrow z' = -1 = 0 \Rightarrow \text{rovnice nemá řešení} \Rightarrow \text{extrém neexistuje.}$$

Zbývá porovnat funkční hodnoty ve vrcholech čtverce,

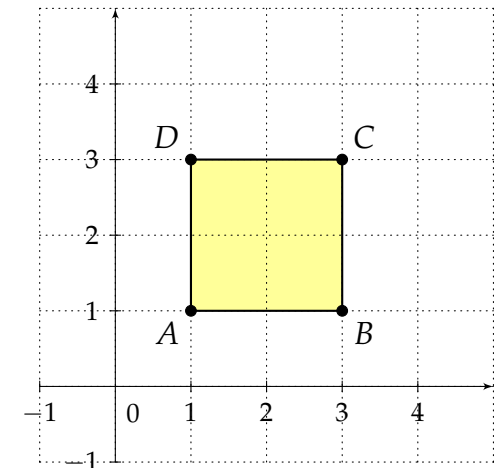
$$f(A) = 0, f(B) = 8, f(C) = 6, f(D) = -2 \Rightarrow f(D) < f(A) < f(C) < f(B).$$

Funkce z má v bodě D globální minimum o hodnotě $z = -2$, v bodě B má globální maximum o hodnotě $z = 8$.

Poznámky

Budeme postupovat takto:

- určíme definiční obor D_f funkce $z = f(x, y)$
- nalezneme lokální extrémy této funkce na množině D_f , ze které vyloučíme hranici $g(x, y) = 0$
- určíme vázané extrémy této funkce vzhledem k podmínce $g(x, y) = 0$
- porovnáme funkční hodnoty všech extrémů, extrém s největší funkční hodnotou bude globálním maximum, extrém s nejmenší funkční hodnotou bude globálním minimum



Řešené příklady – Obyčejné diferenciální rovnice

132 - Diferenciální rovnice - přímá integrace

Zadání Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y''' = 6x - 6$.

Řešení Video **Teorie: 51, 52 Příklady: 251-259** 

V zadání diferenciální rovnice se nachází neznámá funkce y pouze ve své třetí derivaci, proto k nalezení obecného řešení použijeme přímou integraci. Postupným integrováním budeme snižovat řád derivace hledané funkce y . Budeme vycházet ze skutečnosti, že $y''' = \frac{d}{dx}(y'')$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(y'') &= 6x - 6 \Rightarrow d(y'') = (6x - 6)dx, \\ \int d(y'') &= \int (6x - 6)dx \Rightarrow y'' = 3x^2 - 6x + C_1. \end{aligned}$$

Stejným způsobem budeme snižovat řád diferenciální rovnice dokud nedostaneme neznámou funkci y . Tedy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(y') &= 3x^2 - 6x + C_1 \Rightarrow d(y') = (3x^2 - 6x + C_1)dx, \\ \int d(y') &= \int (3x^2 - 6x + C_1)dx \Rightarrow y' = x^3 - 3x^2 + C_1x + C_2 \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(y) &= x^3 - 3x^2 + C_1x + C_2 \Rightarrow d(y) = (x^3 - 3x^2 + C_1x + C_2)dx, \\ \int d(y) &= \int (x^3 - 3x^2 + C_1x + C_2)dx \Rightarrow y = \frac{x^4}{4} - x^3 + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3. \end{aligned}$$

Vidíme, že v obecném řešení této diferenciální rovnice 3. řádu se vyskytují právě 3 integrační konstanty C_1, C_2, C_3 .

Partikulárním řešením rozumíme konkrétní křivku. Tu získáme libovolnou volbou konstant C_1, C_2 a C_3 , např. pro $C_1 = 2, C_2 = 3$ a $C_3 = 5$ dostaneme partikulární řešení

$$y = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 + 3x + 5.$$

Poznámky

Přímá integrace

Diferenciální rovnice typu $y^{(n)} = f(x)$

k-tá derivace
 $y^{(k)} = \frac{d}{dx} \left(y^{(k-1)} \right), \quad 1 \leq k \leq n$

Obecné řešení

$$y = \underbrace{\int \dots \int}_{n\text{-krát}} f(x) \underbrace{dx \dots dx}_{n\text{-krát}},$$

133 - Separovatelné diferenciální rovnice

Zadání Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y' = \frac{x - e^{-x}}{y + e^y}$.

Řešení

Video **Teorie: 52, 53** **Příklady: 251-259** 

Nejprve nahradíme derivaci y' podílem diferenciálů $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - e^{-x}}{y + e^y}.$$

Nyní budeme chtít rovnici zapsat v tzv. separovaném tvaru, tj. na levé straně chceme mít pouze výraz obsahující proměnnou y a na pravé ty, které obsahují proměnnou x

$$(y + e^y) dy = (x - e^{-x}) dx$$

Integrací obou stran rovnice dostaneme

$$\int (y + e^y) dy = \int (x - e^{-x}) dx \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{2} + e^y = \frac{x^2}{2} + e^{-x} + C.$$

Obecné řešení obdržíme ve tvaru

$$\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + e^y - e^{-x} = C.$$

Protože C je konstanta, bude po vynásobení dvěma hodnota $2C$ také konstantou a v zápise ji můžeme nahradit písmenem K . Po úpravě dostaneme výsledek:

$$y^2 - x^2 + 2e^y - 2e^{-x} = K.$$

Poznámky

Separovatelná diferenciální rovnice

typu $y' = P(x)Q(y)$

Derivace

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Obecné řešení

$$\int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x) dx + C,$$

pro $Q(y) \neq 0$

134 - Separovatelné diferenciální rovnice

Zadání Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y' = \cos^2 x \cos^2 2y$.**Řešení** Video **Teorie: 52, 53 Příklady: 251-259** Nejprve nahradíme derivaci y' podílem diferenciálů $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \cos^2 x \cos^2 2y$$

Rovnici za předpokladu, že $\cos 2y \neq 0$, upravíme na rovnici v separovaném tvaru

$$\frac{dy}{\cos^2 2y} = \cos^2 x dx.$$

Integrací obou stran rovnice

$$\int \frac{dy}{\cos^2 2y} = \int \cos^2 x dx,$$

dostaneme

$$\frac{1}{2} \tan 2y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

Po úpravě získáme obecné řešení ve tvaru

$$2 \tan 2y - \sin 2x - 2x = K.$$

Poznámky*Separovatelná diferenciální rovnice*typu $y' = P(x)Q(y)$ *Derivace*

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Obecné řešení

$$\int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x)dx + C,$$

pro $Q(y) \neq 0$

135 - Separovatelné diferenciální rovnice

Zadání Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y^2 \sqrt{1-x^2} y' = \arcsin x$.

Řešení Video **Teorie: 52, 53** **Příklady: 251-259** 

Nejprve nahradíme derivaci y' podílem diferenciálů $\frac{dy}{dx}$

$$y^2 \sqrt{1-x^2} \frac{dy}{dx} = \arcsin x.$$

Za předpokladu, že $\sqrt{1-x^2} \neq 0$ výraz upravíme na rovnici v separovaném tvaru

$$y^2 dy = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Abychom našli obecné řešení, budeme integrovat nyní obě strany rovnice

$$\int y^2 dy = \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Integrál na pravé straně rovnice si můžeme spočítat zvlášť

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left[\begin{array}{l} t = \arcsin x \\ dt = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \end{array} \right] = \int t dt = \frac{t^2}{2} = \frac{1}{2} \arcsin^2 x + C.$$

Po dosazení obdržíme rovnici

$$\frac{y^3}{3} = \frac{1}{2} \arcsin^2 x + C.$$

Odtud plyne, že obecné řešení má tvar

$$y^3 - \frac{3}{2} \arcsin^2 x = C.$$

Poznámky

Separovatelná diferenciální rovnice

typu $y' = P(x)Q(y)$

Derivace

$$y' = \frac{dy}{dx}$$


Obecné řešení

$$\int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x) dx + C,$$

pro $Q(y) \neq 0$

136 - Separovatelné diferenciální rovnice

Zadání Řešte Cauchyho úlohu $(8y^7 + 6y^5 + 4y^3 + 2y) y' = 5x$, $y\left(\frac{4}{5}\right) = 1$.

Řešení **Video** **Teorie: 52, 53** **Příklady: 251-259** 

Nejprve nahradíme derivaci y' podílem diferenciálů $\frac{dy}{dx}$

$$(8y^7 + 6y^5 + 4y^3 + 2y) \frac{dy}{dx} = 5x.$$

Výraz upravíme na rovnici v separovaném tvaru

$$(8y^7 + 6y^5 + 4y^3 + 2y) dy = 5x dx.$$

Nyní obě strany rovnice integrujeme

$$\int (8y^7 + 6y^5 + 4y^3 + 2y) dy = \int 5x dx.$$

Obecné řešení má tvar

$$y^8 + y^6 + y^4 + y^2 = \frac{5}{2}x^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Dosazením počáteční podmínky určíme hodnotu konstanty C

$$1^8 + 1^6 + 1^4 + 1^2 = \frac{5}{2} \left(\frac{4}{5}\right)^2 + C \Rightarrow C = \frac{5}{2}.$$

Hledané řešení je tedy

$$y^8 + y^6 + y^4 + y^2 = \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}.$$

Poznámky

Separovatelná diferenciální rovnice

typu $y' = P(x)Q(y)$

Derivace

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Obecné řešení

$$\int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x) dx + C,$$

pro $Q(y) \neq 0$

137 - Separovatelné diferenciální rovnice

Zadání Řešte Cauchyho úlohu $\frac{y'}{y} = -2 \sin x$, $y(\pi) = 1$.

Řešení

Video **Teorie: 52, 53** **Příklady: 251-259** 

Nejprve nahradíme derivaci y' podílem diferenciálů $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = -2 \sin x.$$

Výraz upravíme na rovnici v separovaném tvaru

$$\frac{1}{y} dy = -2 \sin x dx.$$

Po integraci máme

$$\int \frac{1}{y} dy = -2 \int \sin x dx \Rightarrow \ln |y| = 2 \cos x + C$$

Podle pravidel pro počítání s logaritmy a exponenciálními výrazy je

$$|y| = e^{2 \cos x + C} \Rightarrow |y| = e^{2 \cos x} e^C \Rightarrow y = \pm e^C e^{2 \cos x}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Protože C je konstanta, tak bude i výraz $\pm e^C$ konstantou a můžeme ho nahradit symbolem K ($K \neq 0$, protože funkce $y = 0$ není řešením zadané diferenciální rovnice)

$$y = Ke^{2 \cos x}.$$

Dosazením počáteční podmínky určíme hodnotu konstanty K

$$1 = Ke^{2 \cos \pi} \Rightarrow K = e^2.$$

Hledané řešení je tedy

$$y = e^2 e^{2 \cos x} \Rightarrow y = e^{2 \cos x + 2}.$$

Poznámky

Separovatelná diferenciální rovnice

typu $y' = P(x)Q(y)$

Derivace

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Obecné řešení

$$\int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x) dx + C,$$

pro $Q(y) \neq 0$

138 - Separovatelné diferenciální rovnice

Zadání Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y' = 3x - 2y + 5$.

Řešení **Video** **Teorie: 52, 53** **Příklady: 260, 261** 

Zavedeme substituci $u = 3x - 2y + 5 \Rightarrow u' = 3 - 2y' \Rightarrow y' = \frac{3 - u'}{2}$ a dosadíme do dané diferenciální rovnice

$$\frac{3 - u'}{2} = u$$

V rovnici nahradíme derivaci u' podílem diferenciálů $\frac{du}{dx}$ a upravíme ji na rovnici v separovaném tvaru

$$\frac{3 - \frac{du}{dx}}{2} = u \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3 - 2u \Rightarrow \frac{du}{3 - 2u} = dx$$

Nyní obě strany rovnice budeme integrovat

$$\int \frac{du}{3 - 2u} = \int dx \Rightarrow -\frac{1}{2} \ln |3 - 2u| = x + C$$

Podle pravidel pro počítání s logaritmy a exponenciálními výrazy je

$$\ln \frac{1}{\sqrt{3 - 2u}} = x + C \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3 - 2u}} = e^{x+C} \Rightarrow \frac{1}{e^{x+C}} = \sqrt{3 - 2u} \Rightarrow e^{-(x+C)} = \sqrt{3 - 2u},$$

tedy

$$e^{-x} e^{-C} = \sqrt{3 - 2(3x - 2y + 5)}.$$

Protože C je konstanta, tak bude i výraz e^{-C} konstantou a můžeme ho nahradit symbolem K a po jednoduché úpravě obdržíme obecné řešení ve tvaru

$$Ke^{-x} = \sqrt{4y - 6x - 7}.$$

Pozn.: Tuto diferenciální rovnici můžeme řešit také jako diferenciální rovnici lineární.

Poznámky

Separovatelná diferenciální rovnice

typu $y' = f(ax + by + c)$

Derivace

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Substituce

$u = ax + by + c$, kde $u = u(x)$,
odtud

$$u' = a + by' \Rightarrow y' = \frac{u' - a}{b}$$

pro $b \neq 0$

139 - Separovatelné diferenciální rovnice

Zadání Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y' = \cos(x - y)$.

Řešení **Video** **Teorie: 52, 53** **Příklady: 260, 261** 

Zavedeme substituci $u = x - y \Rightarrow u' = 1 - y' \Rightarrow y' = 1 - u'$ a dosadíme do dané diferenciální rovnice

$$1 - u' = \cos u$$

V rovnici nahradíme derivaci u' podílem diferenciálů $\frac{du}{dx}$ a upravíme ji na rovnici v separovaném tvaru

$$1 - \frac{du}{dx} = \cos u \Rightarrow \frac{du}{1 - \cos u} = dx$$

Nyní budeme obě strany rovnice integrovat

$$\int \frac{du}{1 - \cos u} = \int dx$$

Integrál na levé straně rovnice si spočítáme zvlášť

$$\int \frac{du}{1 - \cos u} = \left[\begin{array}{l} t = \tan \frac{u}{2} \\ \cos u = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ du = \frac{2}{1+t^2} dt \end{array} \right] = \int \frac{1}{1 - \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{\tan \frac{u}{2}} + c_1 = -\cot \frac{u}{2} + c_1,$$

tedy

$$-\cot \frac{u}{2} = x + c_2.$$

Po návratu k substituci a jednoduché úpravě dostaneme obecné řešení ve tvaru

$$-x - \cot \frac{x-y}{2} = c_2 \Rightarrow x + \cot \frac{x-y}{2} = C.$$

Poznámky

Separovatelná diferenciální rovnice

typu $y' = f(ax + by + c)$

Derivace

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Substituce

$u = ax + by + c$, kde $u = u(x)$,
odtud

$$u' = a + by' \Rightarrow y' = \frac{u' - a}{b}$$

pro $b \neq 0$

140 - Separovatelné diferenciální rovnice

Zadání Určete obecné řešení diferenciální rovnice $xy' - y = 2\sqrt{xy}$.

Řešení **Video** **Teorie: 52, 54** **Příklady: 262-269** 

Obě strany rovnice nejprve vynásobíme výrazem $\frac{1}{x}$ a upravíme

$$xy' - y = 2\sqrt{xy} \quad \Rightarrow \quad y' - \frac{y}{x} = 2\sqrt{\frac{y}{x}}$$

Zavedeme substituci $z = \frac{y}{x}$, kde $z = z(x)$. Odtud je $y = zx$ a $y' = z'x + z$.

Po dosazení do zadané homogenní diferenciální rovnice a jednoduché úpravě dostaneme

$$z'x + z - z = 2\sqrt{z} \quad \Rightarrow \quad z'x = 2\sqrt{z}.$$

V rovnici nahradíme derivaci z' podílem diferenciálů $\frac{dz}{dx}$ a pro $\sqrt{z} \neq 0$ a $x \neq 0$ ji upravíme na rovnici v separovaném tvaru

$$\frac{dz}{dx}x = 2\sqrt{z} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{2}{x}dx$$

Nyní obě strany rovnice budeme integrovat

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int \frac{2}{x}dx \quad \Rightarrow \quad \int z^{-\frac{1}{2}}dz = \int \frac{2}{x}dx \quad \Rightarrow \quad \frac{z^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2 \ln|x| + C \quad \Rightarrow \quad \sqrt{z} = \ln|x| + 2C.$$

Konstanta $2C$ může nabývat všech hodnot z množiny reálných čísel stejně jako funkce $\ln x$, napíšeme si jí tedy jako $2C = \ln K$, kde $K > 0$ a podle pravidel pro počítání s logaritmy dostaneme

$$\sqrt{z} = \ln|x| + \ln K \quad \Rightarrow \quad \sqrt{z} = \ln(K|x|) \quad \Rightarrow \quad z = \ln^2(K|x|).$$

Dosazením $z = \frac{y}{x}$ a po úpravě dostaneme obecné řešení ve tvaru

$$\frac{y}{x} = \ln^2(K|x|) \quad \Rightarrow \quad y = x \ln^2(K|x|).$$

Poznámky

Separovatelná diferenciální rovnice typu homogenní rovnice

Dif. rov. $F(x, y, y') = 0$, kterou lze upravit na tvar $y' = \phi\left(\frac{y}{x}\right)$

Derivace

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Substituce

$z = \frac{y}{x}$, kde $z = z(x)$,

odtud $y = zx$ a $y' = z'x + z$

141 - Separovatelné diferenciální rovnice

Zadání Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y' = \frac{3y - 2x}{x + y}$.

Řešení Video **Teorie: 52, 54 Příklady: 262-269** 

Danou rovnici nejprve upravíme na tvar $y' = \frac{3\frac{y}{x} - 2}{1 + \frac{y}{x}}$.

Zavedeme substituci $z = \frac{y}{x}$, kde $z = z(x)$. Odtud je $y = zx$ a $y' = z'x + z$.

Po dosazení do zadané homogenní diferenciální rovnice a jednoduché úpravě dostaneme

$$z'x + z = \frac{3z - 2}{1 + z} \quad \Rightarrow \quad z'x = \frac{3z - 2}{1 + z} - z \quad \Rightarrow \quad z'x = -\frac{z^2 - 2z + 2}{1 + z}.$$

V rovnici nahradíme derivaci z' podílem diferenciálů $\frac{dz}{dx}$ a upravíme na rovnici v separovaném tvaru

$$\frac{dz}{dx}x = -\frac{z^2 - 2z + 2}{1 + z} \quad \Rightarrow \quad \frac{1 + z}{z^2 - 2z + 2}dz = -\frac{dx}{x}.$$

Nyní budeme integrovat obě strany rovnice

$$\int \frac{1 + z}{z^2 - 2z + 2} dz = -\int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad 2 \int \frac{1}{(z - 1)^2 + 1} dz + \frac{1}{2} \int \frac{(2z - 2)}{z^2 - 2z + 2} dz = -\int \frac{dx}{x}$$

$$2 \arctan(z - 1) + \frac{1}{2} \ln |z^2 - 2z + 2| = -\ln |x| + C \quad \Rightarrow \quad 4 \arctan(z - 1) + \ln |z^2 - 2z + 2| = -\ln x^2 + 2C.$$

Konstanta $2C$ může nabývat všech hodnot z množiny reálných čísel stejně jako funkce $\ln x$, napíšeme si jí tedy jako $2C = \ln K$, kde $K > 0$ a podle pravidel pro počítání s logaritmy dostaneme

$$4 \arctan(z - 1) = \ln \frac{K}{x^2(z^2 - 2z + 2)}.$$

Po dosazením $z = \frac{y}{x}$ a úpravě dostaneme obecné řešení: $4 \arctan \frac{y - x}{x} = \ln \frac{K}{y^2 - 2yx + 2x^2}$.

Poznámky

Separovatelná diferenciální rovnice typu homogenní rovnice

Dif. rov. $F(x, y, y') = 0$, kterou lze upravit na tvar $y' = \phi\left(\frac{y}{x}\right)$

Derivace

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Substituce

$z = \frac{y}{x}$, kde $z = z(x)$,

odtud $y = zx$ a $y' = z'x + z$

142 - Separovatelné diferenciální rovnice

Zadání Určete obecné řešení diferenciální rovnice $xy' - y = \sqrt{y^2 - x^2}$.

Řešení Video **Teorie: 52, 54 Příklady: 262-269** 

Danou rovnici nejprve upravíme na tvar $y' = \frac{y}{x} + \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}$.

Zavedeme substituci $z = \frac{y}{x}$, kde $z = z(x)$. Odtud je $y = zx$ a $y' = z'x + z$.

Po dosazení do zadané homogenní diferenciální rovnice a jednoduché úpravě dostaneme

$$z'x + z = z + \sqrt{z^2 - 1} \quad \Rightarrow \quad z'x = \sqrt{z^2 - 1}$$

V rovnici nahradíme derivaci z' podílem diferenciálů $\frac{dz}{dx}$, upravíme na rovnici v separovaném tvaru a poté integrujeme

$$\frac{dz}{dx}x = \sqrt{z^2 - 1} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = \int \frac{dx}{x}$$

Integrál na pravé straně rovnice si spočítáme zvlášť

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{z^2 - 1} + z \\ dt = \left(\frac{1}{2} \frac{2z}{\sqrt{z^2 - 1}} + 1 \right) dz \\ \frac{dt}{t} = \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| = \ln |z + \sqrt{z^2 - 1}| + C_1.$$

Po integraci obou stran dostaneme $\ln |z + \sqrt{z^2 - 1}| = \ln |x| + C$.

Konstanta C může nabývat všech hodnot z množiny reálných čísel stejně jako funkce $\ln x$, napíšeme si jí tedy jako $C = \ln K$, kde $K > 0$ a podle pravidel pro počítání s logaritmy dostaneme

$$\ln |z + \sqrt{z^2 - 1}| = \ln |x| + \ln K \quad \Rightarrow \quad \ln |z + \sqrt{z^2 - 1}| = \ln (K|x|) \quad \Rightarrow \quad z + \sqrt{z^2 - 1} = Kx.$$

Dosazením $z = \frac{y}{x}$ dostaneme obecné řešení ve tvaru

$$\frac{y}{x} + \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1} = Kx \quad \Rightarrow \quad y + \sqrt{y^2 - x^2} = Kx^2.$$

Poznámky

Separovatelná diferenciální rovnice typu homogenní rovnice

Dif. rov. $F(x, y, y') = 0$, kterou lze upravit na tvar $y' = \phi\left(\frac{y}{x}\right)$

Derivace

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Substituce

$z = \frac{y}{x}$, kde $z = z(x)$,

odtud $y = zx$ a $y' = z'x + z$

143 - Separovatelné diferenciální rovnice

Zadání Určete obecné řešení diferenciální rovnice $x^2 y' = y^2 + xy + 4x^2$.

Řešení Video **Teorie: 52, 54 Příklady: 262-269** 

Danou rovnici nejprve upravíme na tvar

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} + 4$$

Zavedeme substituci $z = \frac{y}{x}$, kde $z = z(x)$. Odtud je $y = zx$ a $y' = z'x + z$.

Po dosazení do zadané homogenní diferenciální rovnice a jednoduché úpravě dostaneme

$$z'x + z = z^2 + z + 4 \quad \Rightarrow \quad z'x = z^2 + 4$$

V rovnici nahradíme derivaci z' podílem diferenciálů $\frac{dz}{dx}$, upravíme na rovnici v separovaném tvaru a poté integrujeme

$$\frac{dz}{dx}x = z^2 + 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{z^2 + 4} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dz}{z^2 + 4} = \int \frac{dx}{x}.$$

Po integraci dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \arctan \frac{z}{2} &= \ln |x| + C, \\ \arctan \frac{z}{2} &= 2 \ln |x| + 2C. \end{aligned}$$

Konstanta $2C$ může nabývat všech hodnot z množiny reálných čísel stejně jako funkce $\ln |x|$, napíšeme si jí tedy jako $2C = \ln K$, kde $K > 0$ a podle pravidel pro počítání s logaritmy dostaneme

$$\arctan \frac{z}{2} = 2 \ln |x| + \ln K \quad \Rightarrow \quad \arctan \frac{z}{2} = \ln (Kx^2).$$

Dosazením $z = \frac{y}{x}$ dostaneme obecné řešení

$$\arctan \frac{y}{2x} = \ln (Kx^2).$$

Poznámky

Separovatelná diferenciální rovnice typu homogenní rovnice

Dif. rov. $F(x, y, y') = 0$, kterou lze upravit na tvar $y' = \phi\left(\frac{y}{x}\right)$

Derivace

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Substituce

$z = \frac{y}{x}$, kde $z = z(x)$,

odtud $y = zx$ a $y' = z'x + z$

144 - Exaktní diferenciální rovnice

Zadání Určete obecné řešení diferenciální rovnice $\left(1 - \frac{y}{x^2 + y^2}\right) dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy = 0$.

Řešení Video **Teorie: 55, 56 Příklady: 270, 271** 

Nejprve ověříme, že se jedná o exaktní diferenciální rovnici. Vidíme, že $P(x, y) = 1 - \frac{y}{x^2 + y^2}$ a $Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$. Tedy

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= -\frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \text{DR je exaktní.}$$

Nyní budeme hledat kmenovou funkci $F(x, y)$, pro kterou platí soustava parciálních diferenciálních rovnic

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 - \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Z druhé rovnice integrací podle y dostaneme

$$F(x, y) = \int \frac{x}{x^2 + y^2} dy + \psi(x) = \arctan \frac{y}{x} + \psi(x),$$

odtud derivací podle proměnné x je

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{d\psi}{dx}$$

a porovnáním s první rovnicí

$$1 - \frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{d\psi}{dx} \Rightarrow \frac{d\psi}{dx} = 1 \Rightarrow \psi(x) = x + C.$$

Kmenová funkce je $F(x, y) = \arctan \frac{y}{x} + x + C$ a obecné řešení: $\arctan \frac{y}{x} + x = K$.

Poznámky

Exaktní diferenciální rovnice

Postup řešení

- ověříme, zda platí podmínka exaktnosti $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$
- vypočítáme kmenovou funkci $F(x, y)$
- určíme obecné řešení rovnice ve tvaru $F(x, y) = C$

145 - Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Zadání Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y' - y = e^{2x}$.

Řešení Video **Teorie: 57, 58, 59** **Příklady: 272-279** 

Příslušná zkrácená LDR má tvar $y' - y = 0$. Jedná se o rovnici separovatelnou, jejíž obecné řešení je

$$\frac{dy}{dx} = y \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dx \Rightarrow \ln |y| = x + C_1 \Rightarrow |y| = e^{x+C_1} \Rightarrow y = \pm e^{C_1} e^x.$$

Protože C_1 je konstanta, tak bude i výraz $\pm e^{C_1}$ konstantou a můžeme ho nahradit symbolem C a obdržíme řešení zkrácené rovnice ve tvaru

$$y = Ce^x.$$

Provedeme variaci konstanty: předpokládejme, že $C = C(x)$, potom

$$y = C(x)e^x$$

a její derivace je

$$y' = C'(x)e^x + C(x)e^x.$$

Po dosazení do původní rovnice se nám odečtou dva členy

$$C'(x)e^x + C(x)e^x - C(x)e^x = e^{2x},$$

$$C'(x)e^x = e^{2x} \Rightarrow C'(x) = e^x$$

Odtud přímou integraci

$$C = \int e^x dx = e^x + K.$$

Po dosazení obdržíme obecné řešení

$$y = (e^x + K)e^x.$$

Poznámky

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu (LDR)

$$y' + yp(x) = q(x)$$

derivace

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Postup řešení

- vyřešíme zkrácenou LDR prvního řádu $y' + yp(x) = 0$, jedná se o diferenciální rovnici se separovatelnými proměnnými

- *Lagrangeova metoda variace konstant*
 $C = C(x)$ dosadíme do obecného řešení zkrácené rovnice, zderivujeme a dosadíme do rovnice nezkrácené

- *otázka*: odečetly se nám dva členy? (ano - správně, ne - někde je chyba)

- vyjádříme $C'(x)$, zintegrujeme a dosadíme zpět do obecného řešení

- *výsledek*:

$$y = \frac{1}{E(x)} \left(\int E(x)q(x)dx + K \right),$$

kde $E(x) = e^{\int p(x)dx}$

146 - Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Zadání Určete obecné řešení diferenciální rovnice $x^2y' + xy = \ln x$.

Řešení Video **Teorie: 57, 58, 59** **Příklady: 272-279** 

Rovnici si nejprve upravíme na tvar

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{\ln x}{x^2}$$

a vyřešíme zkrácenou LDR

$$y' + \frac{y}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln |y| = -\ln |x| + C_1.$$

Označíme-li $C_1 = \ln C_2$, $C_2 > 0$ potom

$$\ln |y| = -\ln |x| + \ln C_2 \Rightarrow \ln |y| = \ln \frac{C_2}{|x|} \Rightarrow |y| = \frac{C_2}{|x|} \Rightarrow y = \pm \frac{C_2}{x} \Rightarrow y = \frac{C}{x}, C \in \mathbb{R}.$$

(konstanta C může nabýt hodnoty nula, protože i funkce $y = 0$ je řešením zkrácené LDR).

Provedeme variaci konstanty: předpokládejme, že $C = C(x)$, potom

$$y = \frac{C(x)}{x}, \quad y' = \frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2}.$$

Po dosazení do původní rovnice se mám odečtou dva členy

$$\frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x} \frac{1}{x} = \frac{\ln x}{x^2} \Rightarrow \frac{C'(x)}{x} = \frac{\ln x}{x^2} \Rightarrow C'(x) = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow C(x) = \frac{1}{2} \ln^2 x + K.$$

Po dosazení obdržíme obecné řešení

$$y = \frac{\frac{1}{2} \ln^2 x + K}{x}.$$

Poznámky

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu (LDR)

$$y' + yp(x) = q(x)$$

derivace

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Postup řešení

- vyřešíme zkrácenou LDR prvního řádu $y' + yp(x) = 0$, jedná se o diferenciální rovnici se separovatelnými proměnnými

- *Lagrangeova metoda variace konstant*
 $C = C(x)$ dosadíme do obecného řešení zkrácené rovnice, zderivujeme a dosadíme do rovnice nezkrácené

- *otázka:* odečty se nám dva členy?
(ano - správně, ne - někde je chyba)

- vyjádříme $C'(x)$, zintegrujeme a dosadíme zpět do obecného řešení

- *výsledek:*

$$y = \frac{1}{E(x)} \left(\int E(x)q(x)dx + K \right),$$

kde $E(x) = e^{\int p(x)dx}$

147 - Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Zadání Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y' - \frac{7y}{x^2 + 3x - 10} = \sqrt{x - 2}$.

Řešení Video **Teorie: 57, 58, 59** **Příklady: 272-279** 

Nejprve vyřešíme zkrácenou LDR

$$y' - \frac{7y}{x^2 + 3x - 10} = 0 \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{7}{x^2 + 3x - 10} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{7}{(x-2)(x+5)} dx,$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{7}{(x-2)(x+5)} dx \Rightarrow \ln |y| = \ln \frac{x-2}{x+5} + \ln C \Rightarrow y = C \frac{x-2}{x+5}.$$

Provedeme variaci konstanty: předpokládejme, že $C = C(x)$, pak

$$y = C(x) \frac{x-2}{x+5}, \quad y' = C'(x) \frac{x-2}{x+5} + C(x) \frac{7}{(x+5)^2}.$$

Po dosazení do původní rovnice se nám odečtou dva členy a po úpravě dostaneme $C'(x) = \frac{(x+5)\sqrt{x-2}}{x-2}$.

Odtud

$$C(x) = \int \frac{(x+5)\sqrt{x-2}}{x-2} dx = \int \frac{(x+5)\sqrt{x-2}}{x-2} dx \left[\begin{array}{l} x-2 = t^2 \\ dx = 2t dt \\ x = t^2 + 2 \end{array} \right] = \int \frac{(t^2+7)t}{t^2} 2t dt$$

$$= \int (2t^2 + 14) dt = \frac{2t^3}{3} + 14t = \frac{2}{3} (\sqrt{x-2})^3 + 14\sqrt{x-2} + K.$$

Po dosazení a úpravě obdržíme obecné řešení

$$y = \left(\frac{2}{3} \sqrt{x-2}(x+19) + K \right) \frac{x-2}{x+5}.$$

Poznámky

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu (LDR)

$$y' + yp(x) = q(x)$$

derivace

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Postup řešení

- vyřešíme zkrácenou LDR prvního řádu $y' + yp(x) = 0$, jedná se o diferenciální rovnici se separovatelnými proměnnými

- *Lagrangeova metoda variace konstant*
 $C = C(x)$ dosadíme do obecného řešení zkrácené rovnice, zderivujeme a dosadíme do rovnice nezkrácené

- *otázka:* odečetly se nám dva členy? (ano - správně, ne - někde je chyba)

- vyjádříme $C'(x)$, zintegrujeme a dosadíme zpět do obecného řešení

- *výsledek:*

$$y = \frac{1}{E(x)} \left(\int E(x)q(x)dx + K \right),$$

kde $E(x) = e^{\int p(x)dx}$

148 - Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Zadání Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y' + y \sin x = \sin^3 x$.

Řešení Video **Teorie: 57, 58, 59** **Příklady: 272-279** 

Nejprve vyřešíme zkrácenou LDR

$$y' + y \sin x = 0 \Rightarrow \frac{y'}{y} = -\sin x \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\sin x dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \sin x dx,$$

$$\ln |y| = \cos x + c \Rightarrow |y| = e^{\cos x} + c \Rightarrow y = \pm e^c e^{\cos x}.$$

Označíme-li $C = \pm e^c$, obdržíme řešení zkrácené rovnice ve tvaru $y = Ce^{\cos x}$.

Provedeme variaci konstanty: předpokládejme, že $C = C(x)$, pak

$$y = C(x)e^{\cos x}, \quad y' = C'(x)e^{\cos x} + C(x)e^{\cos x}(-\sin x).$$

Po dosazení do původní rovnice se nám odečtou dva členy a po úpravě dostaneme

$$C'(x) = e^{-\cos x} \sin^3 x \Rightarrow C(x) = \int e^{-\cos x} \sin^3 x dx = \int e^{-\cos x} (1 - \cos^2 x) \sin x dx.$$

Odtud

$$C(x) = -(\cos x + 1)^2 e^{-\cos x} + K.$$

Dosadíme do předpokládaného tvaru obecného řešení

$$y = \left(-(\cos x + 1)^2 e^{-\cos x} + K \right) e^{\cos x}$$

a po úpravě dostaneme

$$y = -(\cos x + 1)^2 + Ke^{\cos x}.$$

Poznámky

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu (LDR)

$$y' + yp(x) = q(x)$$

derivace

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Postup řešení

- vyřešíme zkrácenou LDR prvního řádu $y' + yp(x) = 0$, jedná se o diferenciální rovnici se separovatelnými proměnnými

- *Lagrangeova metoda variace konstant*
 $C = C(x)$ dosadíme do obecného řešení zkrácené rovnice, zderivujeme a dosadíme do rovnice nezkrácené

- *otázka*: odečetly se nám dva členy? (ano - správně, ne - někde je chyba)

- vyjádříme $C'(x)$, zintegrujeme a dosadíme zpět do obecného řešení

- *výsledek*:

$$y = \frac{1}{E(x)} \left(\int E(x)q(x)dx + K \right),$$

kde $E(x) = e^{\int p(x)dx}$

149 - Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Zadání Řešte Cauchyho úlohu $y' - y \cot x = e^x \sin x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Řešení Video **Teorie: 57, 58, 59** **Příklady: 272-279** 

Nejprve vyřešíme zkrácenou LDR

$$y' - y \cot x = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y \cot x \Rightarrow \frac{dy}{y} = \cot x dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \cot x dx$$

$$\ln |y| = \ln |\sin x| + C_1 \Rightarrow \ln |y| = \ln |\sin x| + \ln C_2, \quad C_2 > 0 \Rightarrow \ln |y| = \ln (C_2 |\sin x|).$$

Tedy

$$|y| = C_2 |\sin x| \Rightarrow y = \pm C_2 |\sin x|.$$

Protože C_2 je konstanta, tak bude i výraz $\pm C_2$ konstantou a můžeme ho nahradit symbolem C . Řešení obdržíme ve tvaru $y = C \sin x$. Provedeme variaci konstanty: předpokládejme, že $C = C(x)$, pak

$$y = C(x) \sin x, \quad y' = C'(x) \sin x + C(x) \cos x.$$

Po dosazení do původní rovnice se nám odečtou dva členy

$$C'(x) \sin x + C(x) \cos x - C(x) \sin x \cot x = e^x \sin x \Rightarrow C'(x) = e^x$$

$$C(x) = \int e^x dx = e^x + K,$$

obecné řešení má tvar

$$y = (e^x + K) \sin x.$$

Dosazením počáteční podmínky určíme hodnotu konstanty K

$$0 = \left(e^{\frac{\pi}{2}} + K\right) \sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow K = -e^{\frac{\pi}{2}}.$$

Hledané řešení je tedy

$$y = \left(e^x - e^{\frac{\pi}{2}}\right) \sin x.$$

Poznámky

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu (LDR)

$$y' + yp(x) = q(x)$$

derivace

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Postup řešení

- vyřešíme zkrácenou LDR prvního řádu $y' + yp(x) = 0$, jedná se o diferenciální rovnici se separovatelnými proměnnými

- *Lagrangeova metoda variace konstant*
 $C = C(x)$ dosadíme do obecného řešení zkrácené rovnice, zderivujeme a dosadíme do rovnice nezkrácené

- *otázka*: odečetly se nám dva členy? (ano - správně, ne - někde je chyba)

- vyjádříme $C'(x)$, zintegrujeme a dosadíme zpět do obecného řešení

- *výsledek*:

$$y = \frac{1}{E(x)} \left(\int E(x)q(x)dx + K \right),$$

kde $E(x) = e^{\int p(x)dx}$

150 - Lineární diferenciální rovnice 2. řádu

Zadání Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y'' + y = 5e^{2x}$.

Řešení **Video** **Teorie: 60-64 Příklady: 280-284** 

Charakteristická rovnice $r^2 + 1 = 0$ má komplexní kořeny $r_1 = i$, $r_2 = -i$, takže fundamentální systém tvoří funkce $\sin x$ a $\cos x$, obecné řešení zkrácené rovnice bude

$$\hat{y}(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Nyní provedeme variaci konstant a nalezneme příslušné partikulární integrály. Pro určení neznámých funkcí $C_1(x)$ a $C_2(x)$ vypočteme příslušné determinanty:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ 5e^{2x} & \cos x \end{vmatrix} = -5e^{2x} \sin x, \quad W_2(x) = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & 5e^{2x} \end{vmatrix} = 5e^{2x} \cos x.$$

Dále bude

$$C_1' = \frac{W_1(x)}{W(x)} = -5e^{2x} \sin x \Rightarrow C_1 = -5 \int e^{2x} \sin x dx = e^{2x}(\cos x - 2 \sin x) + K_1,$$

$$C_2' = \frac{W_2(x)}{W(x)} = 5e^{2x} \cos x \Rightarrow C_2 = 5 \int e^{2x} \cos x dx = e^{2x}(2 \cos x + \sin x) + K_2.$$

Za C_1 a C_2 dosadíme do obecného řešení zkrácené rovnice

$$y = \left(e^{2x}(\cos x - 2 \sin x) + K_1 \right) \cos x + \left(e^{2x}(2 \cos x + \sin x) + K_2 \right) \sin x,$$

které nám po úpravě dá obecné řešení

$$y = K_1 \cos x + K_2 \sin x + e^{2x}.$$

Poznámky

Lineární diferenciální rovnice druhého řádu

s konstantními koeficienty

(metoda variace konstant)

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x)$$

Postup řešení

- vyřešíme charakteristickou rovnici

$$a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$$

- zapíšeme obecné řešení zkrácené LDR druhého řádu

1. $\hat{y}(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$, kde $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ jsou kořeny charakteristické rovnice

2. $\hat{y}(x) = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$,
 $r \in \mathbb{R}$ je dvojnásobný kořen charakteristické rovnice

3. $\hat{y}(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$,
 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ jsou kořeny charakteristické rovnice

- vypočítáme Wronského determinanty

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ b & y_2' \end{vmatrix}, \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & b \end{vmatrix}$$

- vypočítáme funkce

$$C_1(x) = \int \frac{W_1}{W} dx, \quad C_2(x) = \int \frac{W_2}{W} dx$$

- dosadíme $C_1(x)$ a $C_2(x)$ do obecného řešení zkrácené rovnice

151 - Lineární diferenciální rovnice 2. řádu

Zadání Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y'' + 2y' = 6x^2 + 10x - 2$.

Řešení **Video** **Teorie: 60-65 Příklady: 280-284** 

Charakteristická rovnice $r^2 + 2r = 0$ má kořeny $r_1 = 0$, $r_2 = -2$, obecné řešení zkrácené LDR druhého řádu bude

$$\hat{y}(x) = C_1 e^0 + C_2 e^{-2x} = C_1 + C_2 e^{-2x}.$$

Zkonstruujeme $\bar{r} = \lambda \pm i\omega = 0$. Protože $\bar{r} = 0$ je jednonásobným kořenem charakteristické rovnice, a na pravé straně je polynom 2. stupně, budeme partikulární řešení hledat ve tvaru

$$v(x) = x(Ax^2 + Bx + C),$$

kde $A, B, C \in \mathbb{R}$ a příslušné derivace budou

$$v' = 3Ax^2 + 2Bx + C, \quad v'' = 6Ax + 2B.$$

Provedeme dosazení v' a v'' do úplné LDR druhého řádu

$$\underbrace{6Ax + 2B}_{v''(x)} + 2 \underbrace{(3Ax^2 + 2Bx + C)}_{v'(x)} = 6x^2 + 10x - 2$$

a po úpravě dostaneme $6Ax^2 + (6A + 4B)x + 2B + 2C = 6x^2 + 10x - 2$.

Nyní porovnáme koeficienty u stejných mocnin x :

$$\left. \begin{array}{l} x^2: 6A \qquad \qquad \qquad = 6 \\ x^1: 6A + 4B \qquad \qquad = 10 \\ x^0: \qquad 2B + 2C = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow A = 1, B = 1 \text{ a } C = -2.$$

Partikulární řešení bude $v(x) = x(x^2 + x - 2)$ a obecné řešení úplné rovnice má tvar

$$y = \hat{y}(x) + v(x) = C_1 + C_2 e^{-2x} + x(x^2 + x - 2).$$

Poznámky

Lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty
 $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x)$

Postup řešení

- vyřešíme charakteristickou rovnici
 $a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$
- zapíšeme obecné řešení zkrácené LDR druhého řádu
 1. $\hat{y}(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$, kde $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ jsou kořeny charakteristické rovnice
 2. $\hat{y}(x) = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$,
 $r \in \mathbb{R}$ je dvojnásobný kořen charakteristické rovnice
 3. $\hat{y}(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$,
 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ jsou kořeny charakteristické rovnice

- podle pravé strany LDR druhého řádu
 $b(x) = e^{\lambda x} (p_m(x) \cos(\omega x) + q_n(x) \sin(\omega x))$,
 a podle toho, zdali $\bar{r} = \lambda \pm i\omega$ je k -násobným kořenem charakteristické rovnice, volíme partikulární integrál
 $v(x) = x^k e^{\lambda x} (P_M(x) \cos(\omega x) + Q_M(x) \sin(\omega x))$,
 kde $M = \max\{m, n\}$

- zderivujeme $v(x)$, dosadíme do nezkrácené LDR druhého řádu a dopočítáme koeficienty

- zapíšeme obecné řešení LDR druhého řádu
 $y(x) = \hat{y}(x) + v(x)$

152 - Lineární diferenciální rovnice 2. řádu

Zadání Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y'' - 10y' + 24y = (3x - 1)e^{3x}$.

Řešení **Video** **Teorie: 60-65 Příklady: 280-284** 

Charakteristická rovnice $r^2 - 10r + 24 = 0$ má kořeny $r_1 = 4$, $r_2 = 6$, obecné řešení zkrácené LDR druhého řádu bude

$$\hat{y}(x) = C_1 e^{4x} + C_2 e^{6x}.$$

Zkonstruujeme $\bar{r} = \lambda \pm i\omega = 3$. Protože $\bar{r} = 3$ není kořenem charakteristické rovnice, budeme partikulární řešení hledat ve tvaru

$$v(x) = (Ax + B)e^{3x},$$

kde $A, B \in \mathbb{R}$ a příslušné derivace budou

$$\begin{aligned} v' &= Ae^{3x} + 3(Ax + B)e^{3x}, \\ v'' &= 6Ae^{3x} + 9e^{3x}(Ax + B). \end{aligned}$$

Provedeme dosazení v , v' a v'' do úplné LDR druhého řádu

$$\underbrace{6Ae^{3x} + 9e^{3x}(Ax + B)}_{v''(x)} - 10 \underbrace{(Ae^{3x} + 3(Ax + B)e^{3x})}_{v'(x)} + 24 \underbrace{(Ax + B)e^{3x}}_{v(x)} = (3x - 1)e^{3x}$$

a po úpravě dostaneme

$$3Axe^{3x} + (-4A + 3B)e^{3x} = 3xe^{3x} - e^{3x}.$$

Nyní porovnáme koeficienty u výrazů xe^{3x} a e^{3x} na obou stranách rovnice

$$\left. \begin{aligned} xe^{3x} : \quad 3A &= 3 \\ e^{3x} : \quad -4A + 3B &= -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = 1 \text{ a } B = 1.$$

Partikulární řešení bude $v(x) = (x + 1)e^{3x}$ a obecné řešení úplné rovnice má tvar

$$y = \hat{y}(x) + v(x) = C_1 e^{4x} + C_2 e^{6x} + (x + 1)e^{3x}.$$

Poznámky

Lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty
 $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x)$

Postup řešení

- vyřešíme charakteristickou rovnici
 $a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$
- zapíšeme obecné řešení zkrácené LDR druhého řádu
 1. $\hat{y}(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$, kde $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ jsou kořeny charakteristické rovnice
 2. $\hat{y}(x) = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$,
 $r \in \mathbb{R}$ je dvojnásobný kořen charakteristické rovnice
 3. $\hat{y}(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$,
 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ jsou kořeny charakteristické rovnice

- podle pravé strany LDR druhého řádu
 $b(x) = e^{\lambda x} (p_m(x) \cos(\omega x) + q_n(x) \sin(\omega x))$,
 a podle toho, zdali $\bar{r} = \lambda \pm i\omega$ je k -násobným kořenem charakteristické rovnice, volíme partikulární integrál
 $v(x) = x^k e^{\lambda x} (P_M(x) \cos(\omega x) + Q_M(x) \sin(\omega x))$,
 kde $M = \max\{m, n\}$

- zderivujeme $v(x)$, dosadíme do nezkrácené LDR druhého řádu a dopočítáme koeficienty

- zapíšeme obecné řešení LDR druhého řádu
 $y(x) = \hat{y}(x) + v(x)$

153 - Lineární diferenciální rovnice 2. řádu

Zadání Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$.

Řešení **Video** **Teorie: 60-65 Příklady: 280-284** 

Charakteristická rovnice $r^2 - 2r + 2 = 0$ má komplexní kořeny $r_1 = 1 + i$, $r_2 = 1 - i$, obecné řešení zkrácené LDR druhého řádu bude

$$\hat{y}(x) = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x.$$

Zkonstruujeme $\bar{r} = \lambda \pm i\omega = 1 \pm i$. Protože $\bar{r} = 1 \pm i$ jsou jednonásobné kořeny charakteristické rovnice, budeme partikulární řešení hledat ve tvaru

$$v(x) = x e^x (A \sin x + B \cos x),$$

kde $A, B \in \mathbb{R}$ a příslušné derivace budou

$$\begin{aligned} v' &= e^x (A \sin x + B \cos x) + x e^x (A \sin x + B \cos x) + x e^x (A \cos x - B \sin x), \\ v'' &= 2e^x ((A + B + Bx) \cos x - (A - B + Ax) \sin x). \end{aligned}$$

Provedeme dosazení v , v' a v'' do úplné LDR druhého řádu a po úpravě dostaneme

$$2Be^x \cos x - 2Ae^x \sin x = e^x \sin x.$$

Nyní porovnáme koeficienty u výrazů $e^x \cos x$ a $e^x \sin x$ na obou stranách rovnice

$$\left. \begin{array}{l} e^x \cos x : \quad 2B = 0 \\ e^x \sin x : \quad -2A = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow A = -\frac{1}{2} \text{ a } B = 0.$$

Partikulární řešení bude $v(x) = -\frac{1}{2} x e^x \sin x$ a obecné řešení úplné rovnice má tvar

$$y = \hat{y}(x) + v(x) = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x - \frac{1}{2} x e^x \sin x.$$

Poznámky

Lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty
 $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x)$

Postup řešení

- vyřešíme charakteristickou rovnici $a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$
- zapíšeme obecné řešení zkrácené LDR druhého řádu

1. $\hat{y}(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$, kde $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ jsou kořeny charakteristické rovnice

2. $\hat{y}(x) = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$,
 $r \in \mathbb{R}$ je dvojnásobný kořen charakteristické rovnice

3. $\hat{y}(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$,
 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ jsou kořeny charakteristické rovnice

- podle pravé strany LDR druhého řádu $b(x) = e^{\lambda x} (p_m(x) \cos(\omega x) + q_n(x) \sin(\omega x))$, a podle toho, zdali $\bar{r} = \lambda \pm i\omega$ je k -násobným kořenem charakteristické rovnice, volíme partikulární integrál $v(x) = x^k e^{\lambda x} (P_M(x) \cos(\omega x) + Q_M(x) \sin(\omega x))$, kde $M = \max\{m, n\}$

- zderivujeme $v(x)$, dosadíme do nezkrácené LDR druhého řádu a dopočítáme koeficienty

- zapíšeme obecné řešení LDR druhého řádu $y(x) = \hat{y}(x) + v(x)$

154 - Lineární diferenciální rovnice 2. řádu

Zadání Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y'' - 8y' + 16y = 32x \cos 4x$.

Řešení **Video** **Teorie: 60-65 Příklady: 280-284** 

Charakteristická rovnice $r^2 - 8r + 16 = 0$ má dvojnásobné kořeny $r_{1,2} = 4$ a obecné řešení zkrácené LDR druhého řádu bude

$$\hat{y}(x) = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x}.$$

Zkonstruujeme $\bar{r} = \lambda \pm i\omega = \pm i4$. Protože $\bar{r} = \pm i4$ nejsou kořeny charakteristické rovnice, budeme partikulární řešení hledat ve tvaru

$$v(x) = (Ax + B) \cos 4x + (Cx + D) \sin 4x,$$

kde $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ a příslušné derivace budou

$$v' = (A + 4D) \cos 4x + 4Cx \cos 4x + (-4B + C) \sin 4x - 4Ax \sin 4x,$$

$$v'' = (8C - 16B) \cos 4x - 16Ax \cos 4x + (-8A - 16D) \sin 4x - 16Cx \sin 4x.$$

Provedeme dosazení v, v' a v'' do úplné LDR druhého řádu a po úpravě dostaneme

$$(-8A + 8C - 32D) \cos 4x + (-8A + 32B - 8C) \sin 4x - 32Cx \cos 4x + 32Ax \sin 4x = 32x \cos 4x.$$

Nyní porovnáme koeficienty u výrazů $\cos 4x, x \cos 4x, \sin 4x$ a $x \sin 4x$ na obou stranách rovnice

$$\left. \begin{array}{l} \cos 4x : \quad -8A \qquad \qquad + \quad 8C \quad - \quad 32D = 0 \\ \sin 4x : \quad -8A \quad + \quad 32B \quad - \quad 8C \qquad \qquad = 0 \\ x \cos 4x : \qquad \qquad \qquad - \quad 32C \qquad \qquad = 32 \\ x \sin 4x : \quad 32A \qquad \qquad \qquad = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A = 0, \quad B = -\frac{1}{4}, \\ C = -1, \quad D = -\frac{1}{4}. \end{array}$$

Partikulární řešení bude $v(x) = -\frac{1}{4} \cos 4x - x \sin 4x - \frac{1}{4} \sin 4x$ a obecné řešení úplné rovnice má tvar

$$y = \hat{y}(x) + v(x) = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x} - \frac{1}{4} \cos 4x - x \sin 4x - \frac{1}{4} \sin 4x.$$

Poznámky

Lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty
 $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x)$

Postup řešení

- vyřešíme charakteristickou rovnici
 $a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$
- zapíšeme obecné řešení zkrácené LDR druhého řádu
 1. $\hat{y}(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$, kde $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ jsou kořeny charakteristické rovnice
 2. $\hat{y}(x) = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$,
 $r \in \mathbb{R}$ je dvojnásobný kořen charakteristické rovnice
 3. $\hat{y}(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$,
 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ jsou kořeny charakteristické rovnice

- podle pravé strany LDR druhého řádu
 $b(x) = e^{\lambda x} (p_m(x) \cos(\omega x) + q_n(x) \sin(\omega x))$,
 a podle toho, zdali $\bar{r} = \lambda \pm i\omega$ je k -násobným kořenem charakteristické rovnice, volíme partikulární integrál
 $v(x) = x^k e^{\lambda x} (P_M(x) \cos(\omega x) + Q_M(x) \sin(\omega x))$,
 kde $M = \max\{m, n\}$

- zderivujeme $v(x)$, dosadíme do nezkrácené LDR druhého řádu a dopočítáme koeficienty

- zapíšeme obecné řešení LDR druhého řádu
 $y(x) = \hat{y}(x) + v(x)$