Matematika I: Řešené příklady

Dagmar Dlouhá, Radka Hamříková

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie

VŠB - Technická univerzita Ostrava

Řešené příklady – Funkce jedné proměnné

82 - Definiční obor - zlomek

Zadání Určete definiční obor funkce $y = \frac{1}{3-x^2}, y = \frac{1}{1-2\sin x}$ a $y = \frac{1}{1-2^x}$.

Řešení **Video** **Teorie: 11 Příklady: 173, 174, 175**

V zadání se objevuje zlomek. Jmenovatel zlomku musí být různý od nuly.

$3 - x^2 \neq 0$	Budeme řešit kvadratickou (ne)rovnici.
$D = b^2 - 4ac = 0 + 12 = 12$	Použijeme diskriminant k jejímu vyřešení.
$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a} = \frac{0\pm\sqrt{12}}{-2} = \frac{\pm2\sqrt{3}}{-2} = \mp\sqrt{3}$	Dostali jsme dva různé reálné kořeny.

Definiční obor funkce je $D(f) = \mathbf{R} - \left\{\mp\sqrt{3}\right\}$.

$1 - 2\sin x \neq 0$	Budeme řešit goniometrickou (ne)rovnici.
$1 \neq 2\sin x$	
$\sin x \neq \frac{1}{2}$	Kladnou hodnotu má funkce $\sin x$ v prvním a druhém kvadrantu.
$x \neq \frac{\pi}{6} + 2k\pi$	Řešení z prvního kvadrantu.
$x \neq \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$	Řešení z druhého kvadrantu.

Definiční obor funkce je $D(f) = \mathbf{R} - \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\right\}$

$1 - 2^x \neq 0$	Budeme řešit exponenciální (ne)rovnici.
$1 \neq 2^x$	Levou stranu upravíme.
$2^0 \neq 2^x$	Rovnají-li se základy, rovnají se také exponenty.
$x \neq 0$	

Definiční obor funkce je $D(f) = \mathbf{R} - \{0\}$

Poznámky

83 - Definiční obor - logaritmus

Zadání Určete definiční obor funkce $y = \log\left(x^2 - 4x + 4\right)$ a $y = \ln \frac{2-x}{x^2+x}$.

Poznámky

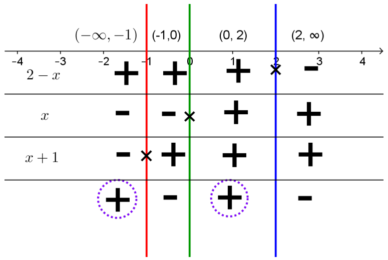
Řešení **Video** **Teorie: 11 Příklady: 173, 174, 175**

V zadání se objevuje logaritmus. Argument musí být kladný.

$x^2 - 4x + 4 > 0$	Budeme řešit kvadratickou nerovnici.
$D = 16 - 16 = 0$	Dostaneme jeden dvojnásobný kořen.
$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2} = 2$	
$(x-2)^2 > 0$	Druhá mocnina je vždy nezáporná (větší nebo rovna nule), vadí nám tedy pouze možnost, že se závorka bude nule rovnat .
$x \neq 2$	Vyloučíme tedy tento bod.

Definiční obor funkce je $D(f) = \mathbf{R} - \{2\}$

$\frac{2-x}{x^2+x} > 0$	Budeme řešit nerovnici.
$\frac{2-x}{x(x+1)} > 0$	Jmenovatele upravíme.
$x = 2, x = 0, x = -1$	Nulové body.



Definiční obor funkce je $D(f) = (-\infty, -1) \cup (0, 2)$

84 - Definiční obor - sudá odmocnina

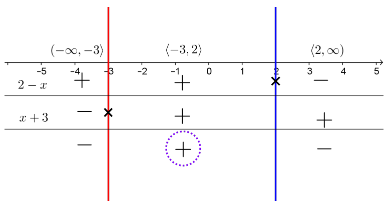
Poznámky

Zadání Určete definiční obor funkce $y = \sqrt{6 - x - x^2}$ a $y = \sqrt{\ln x}$.

Řešení **Video** **Teorie: 11 Příklady: 173, 174, 175**

V zadání se objevuje sudá odmocnina. Argument musí být nezáporný.

$6 - x - x^2 \geq 0$	Budeme řešit kvadratickou nerovnici.
$D = 1 + 24 = 25$	Dostaneme jeden dvojnásobný kořen.
$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{24}}{-2}$	
$x_1 = -3$	
$x_{1,2} = 2$	
$(2 - x)(x + 3) \geq 0$	Máme nulové body, sestavíme tabulku a najdeme definiční obor.



Definiční obor funkce je $D(f) = \langle -3, 2\rangle$

V zadání se objevuje sudá odmocnina a logaritmus. Argument odmocniny musí být nezáporný. Argument logaritmu musí být kladný.

$\ln x \geq 0 \wedge x > 0$	Budeme řešit první nerovnici, druhá je vyřešena.
$x \geq 1$	Průnik intervalů je hledaným definičním oborem.

Definiční obor funkce je $D(f) = \langle 1, \infty)$

85 - Definiční obor - tangens a kotangens

Zadání Určete definiční obor funkce $y = \tan\left(4x + \frac{\pi}{6}\right)$, $y = \cot\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ a $y = \frac{1}{\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$.

Poznámky

Řešení **Video** **Teorie: 11 Příklady: 173, 174, 175**

Pro funkci tangens platí podmínka, že argument musí být různý od $\frac{\pi}{2} + k\pi$, pro kotangens platí podmínka, že argument musí být různý od $k\pi$.

$4x + \frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	Budeme řešit lineární (ne)rovnici.
$4x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi - \frac{\pi}{6}$	Osamostatníme x .
$4x \neq \frac{\pi}{3} + k\pi$	Dostaneme nekonečně mnoho bodů.
$x \neq \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{4}$	

Definiční obor funkce je $D(f) = \mathbf{R} - \left\{\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{4}\right\}$.

$2x - \frac{\pi}{3} \neq k\pi$	Budeme řešit lineární (ne)rovnici.
$2x \neq \frac{\pi}{3} + k\pi$	
$x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$	

Definiční obor funkce je $D(f) = \mathbf{R} - \left\{\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\right\}$

$y = \frac{1}{\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$	Známe vzorec $\frac{1}{\tan x} = \cot x$.
$y = \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$	Použijeme podmínku pro funkci kotangens.
$x + \frac{\pi}{4} \neq k\pi$	Osamostatníme x.
$x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi$	

Definiční obor funkce je $D(f) = \mathbf{R} - \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi\right\}$

86 - Definiční obor - arkussínus, arkuskosínus

Poznámky

Zadání Určete definiční obor funkce $y = \arcsin \frac{4x-5}{3}$ a $y = \arccos \frac{2x-3}{x}$.

Řešení **Video** **Teorie: 11 Příklady: 173, 174, 175**

Pro funkce arkussinus a arkuskosínus platí podmínka, že argument musí být z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$.

$-1 \leq \frac{4x-5}{3} \leq 1$ Ve jmenovateli není proměnná, řešíme nerovnici najednou.

$-3 \leq 4x - 5 \leq 3$ Osamostatníme postupně x .

$2 \leq 4x \leq 8$

$\frac{1}{2} \leq x \leq 2$

Definiční obor funkce je $D(f) = \left\langle \frac{1}{2}, 2 \right\rangle$.

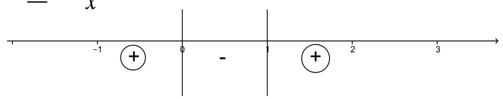
$-1 \leq \frac{2x-3}{x} \leq 1$ Ve jmenovateli je proměnná, nerovnici rozdělíme na dvě.

$-1 \leq \frac{2x-3}{x}$ V nerovnici nesmíme násobit proměnnou!

$0 \leq \frac{2x-3}{x} + 1$ Pravou stranu převedeme na společného jmenovatele.

$0 \leq \frac{2x-3+x}{x}$

$0 \leq \frac{3x-3}{x}$ Nulové body jsou $0, 1$. Sestavíme tabulku.

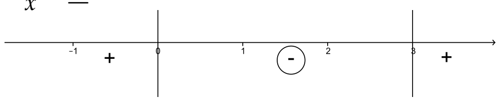


$\frac{2x-3}{x} \leq 1$ V nerovnici nesmíme násobit proměnnou!

$\frac{2x-3}{x} - 1 \leq 0$ Pravou stranu převedeme na společného jmenovatele.

$\frac{2x-3-x}{x} \leq 0$

$\frac{x-3}{x} \leq 0$ Nulové body jsou $0, 3$. Sestavíme tabulku.



Definiční obor funkce je průnik nalezených intervalů $D(f) = \langle 1, 3 \rangle$

87 - Parita funkce - sudá a lichá funkce

Zadání Určete definiční obor funkce a zjistěte, zda je funkce sudá nebo lichá
$y = x \sin x + \sqrt{4 - x^2}$ a $y = x \cos\left(x^2 - 1\right) + \ln \frac{1-x}{1+x}$.

Řešení **Video** **Teorie: 14 Příklady: 193**

V zadání se objevuje odmocnina. Argument musí být nezáporný.

$4 - x^2 \geq 0$ Budeme řešit kvadratickou nerovnici.

$(2 - x)(2 + x) \geq 0$ Doplníme tabulku a získáme definiční obor.

$D(f) = \langle -2, 2 \rangle$ Interval je souměrný podle počátku, platí $x \in D(f) \wedge -x \in D(f)$.

Nyní zjistíme, zda je funkce sudá nebo lichá.

$$f(-x) = -x \sin(-x) + \sqrt{\left(4 - (-x)^2\right)} = x \sin x + \sqrt{(4 - x^2)} = f(x)$$

$f(-x) = f(x)$ Funkce je sudá.

V zadání se objevuje logaritmus. Argument musí být kladný.

$\frac{1-x}{1+x} > 0$ Budeme řešit nerovnici. Doplníme tabulku a získáme definiční obor.

$D(f) = (-1, 1)$ Interval je souměrný podle počátku, platí $x \in D(f) \wedge -x \in D(f)$.

Nyní zjistíme, zda je funkce sudá nebo lichá.

$$f(-x) = -x \cos\left((-x)^2 - 1\right) + \ln \frac{1-(-x)}{1+(-x)} = -x \cos\left(x^2 - 1\right) + \ln \frac{1+x}{1-x} =$$

$$= -x \cos\left(x^2 - 1\right) + \ln \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1} = -x \cos\left(x^2 - 1\right) - \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -f(x)$$

$f(-x) = -f(x)$ Funkce je lichá.

Poznámky

88 - Parita funkce - sudá, lichá nebo žádná

Poznámky

Zadání Určete definiční obor funkce a zjistěte, zda je funkce sudá nebo lichá
$y = \sqrt{\frac{x-4}{x+4}}$ a $y = x^4 - \frac{\sin x}{x} + x - 1$.

Řešení **Video** **Teorie: 14 Příklady: 193**

V zadání se objevuje odmocnina. Argument musí být nezáporný. Jmenovatel zlomku mus různý od nuly.

$\frac{x-4}{x+4} \geq 0$ Budeme řešit kvadratickou nerovnici.
Doplníme tabulku a získáme definiční obor.

$D(f) = (-\infty, -4) \cup \langle 4, \infty)$
Interval není souměrný podle počátku, platí $4 \in D(f) \wedge -4 \notin D(f)$.
Funkce není ani sudá ani lichá.

V zadání se objevuje zlomek. Jmenovatel se nesmí rovnat nule.

$x \neq 0$ Definiční obor jsou reálná čísla bez nuly.

$D(f) = \mathbf{R} - \{0\}$ Interval je souměrný podle počátku, platí $x \in D(f) \wedge -x \in D(f)$.

Nyní zjistíme, zda je funkce sudá nebo lichá.

$$f(-x) = (-x)^4 - \frac{\sin(-x)}{-x} - x - 1 = x^4 - \frac{\sin x}{x} - x - 1$$

Srovnáme výsledek se zadanou funkcí.

$x^4 - \frac{\sin x}{x}$ se shoduje se zadáním, mohla by to být sudá funkce.

Dále $-x - 1$ se liší znaménkem před x.

Funkce není ani sudá ani lichá.

89 - Inverzní funkce

Poznámky

Zadání Určete definiční obor, obor hodnot a inverzní funkci funkce $y = 1 - \ln(2 - x)$.

Řešení **Video** **Teorie: 15 Příklady: 195, 196**

V zadání se vyskytuje logaritmus, argument musí být kladný.

$2 - x > 0$	Vyřešíme nerovnici.
$x < 2$	Definiční obor funkce je $D(f) = (-\infty, 2)$.

Definiční obor funkce f je oborem hodnot funkce inverzní f^{-1}, tedy $D(f) = H(f^{-1})$.

Nyní z definičního oboru určíme obor hodnot funkce. Od x se musíme dostat k y.

$-\infty < x < 2$	Nerovnici vynásobíme -1. Nezapomeňte změnit znaménka nerovnice.
$\infty > -x > -2$	Přičteme dvojku a obrátíme pořadí stran nerovnice.
$0 < 2 - x < \infty$	Nerovnici zlogaritmujeme, přirozený logaritmus je rostoucí funkce,
$\ln 0 < \ln(2 - x) < \ln \infty$	znaménka nerovnosti se nezmění. Upravíme meze intervalu.
$-\infty < \ln(2 - x) < \infty$	Nerovnici vynásobíme -1.
$\infty > -\ln(2 - x) > -\infty$	Přičteme k nerovnici 1.
$\infty > 1 - \ln(2 - x) > -\infty$	Dostali jsme tvar pro y.
$\infty > y > -\infty$	Toto je obor hodnot dané funkce. Platí $H(f) = D(f^{-1}) = \mathbf{R}$.

Posledním krokem je funkční předpis inverzní funkce f^{-1}.

$x = 1 - \ln(2 - y)$	V zadání zaměníme x za y. Vyjádříme y.
$x - 1 = -\ln(2 - y)$	Odečetli jsme 1 a vynásobili rovnici -1.
$1 - x = \ln(2 - y)$	Inverzní funkce k přirozenému logaritmu je exponenciální funkce.
$e^{1-x} = 2 - y$	Její základ je e. Nyní převedeme y a exponenciální funkci
$y = 2 - e^{1-x}$	na opačné strany rovnice. Hotovo.
$f^{-1} : y = 2 - e^{1-x}$	Toto je inverzní funkce k funkci zadané.

90 - Limita funkce - nula lomeno nulou, polynom

Zadání Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+4x^2+x-6}{x^2-4}$.

Řešení **Video** **Teorie: 29 - 34 Příklady: 197 - 201**

Výpočet limity začneme dosazením -2 za x do předpisu funkce. Zjistíme tak, o jaký typ limity se jedná.

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3+4x^2+x-6}{x^2-4} = \frac{(-2)^3+4.(-2)^2-2-6}{(-2)^2-4} = \frac{0}{0}$$

Limita je typu $\frac{0}{0}$.

-2 je kořenem polynomu jak v čitateli, tak ve jmenovateli.

Jmenovatele můžeme rozložit $x^2-4=(x-2)(x+2)$. Čitatele vydělíme kořenovým činitelem $x+2$.

$$\left(x^3+4x^2+x-6\right):(x+2) = x^2+2x-3$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3+4x^2+x-6}{x^2-4} = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)\left(x^2+2x-3\right)}{(x-2)(x+2)}$$

Vykrátíme zlomek a znovu dosadíme -2 za x.

$$\lim_{x\to -2} \frac{\left(x^2+2x-3\right)}{(x-2)} = \lim_{x\to -2} \frac{(-2)^2+2.(-2)-3}{(-2-2)} = \frac{3}{4}$$

Dostali jsme zlomek $\frac{3}{4}$, příklad je vyřešený.

Poznámky

91 - Limita funkce - nula lomeno nulou, odmocnina

Zadání Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1-\sqrt{x^2-8}}{x-3}$.

Řešení **Video** **Teorie: 29 - 34 Příklady: 197 - 201**

Výpočet limity začneme dosazením 3 za x do předpisu funkce. Zjistíme tak, o jaký typ limity se jedná.

$$\lim_{x\to 3} \frac{1-\sqrt{x^2-8}}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{1-\sqrt{3^2-8}}{3-3} = \frac{0}{0}$$

Limita je typu $\frac{0}{0}$.

Zlomek usměrníme. Vyjdeme ze vzorce $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

$$\lim_{x\to 3} \frac{1-\sqrt{x^2-8}}{x-3} \bullet \frac{1+\sqrt{x^2-8}}{1+\sqrt{x^2-8}} = \lim_{x\to 3} \frac{1-\left(x^2-8\right)}{(x-3)\left(1+\sqrt{x^2-8}\right)} = \lim_{x\to 3} \frac{9-x^2}{(x-3)\left(1+\sqrt{x^2-8}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(3-x)(3+x)}{(x-3)\left(1+\sqrt{x^2-8}\right)} = \lim_{x\to 3} \frac{-(x-3)(3+x)}{(x-3)\left(1+\sqrt{x^2-8}\right)}$$

Vykrátíme zlomek a znovu dosadíme 3 za x.

$$\lim_{x\to 3} \frac{-(3+x)}{\left(1+\sqrt{x^2-8}\right)} = \lim_{x\to 3} \frac{-(3+3)}{\left(1+\sqrt{3^2-8}\right)} = \frac{-6}{2} = -3$$

Dostali jsme výsledek -3, příklad je vyřešený.

Poznámky

92 - Limita funkce - nula lomeno nulou, sínus a tangens

Zadání Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{2x}$.

Řešení **Video** **Teorie: 29 - 34 Příklady: 197 - 201**

Výpočet limity začneme dosazením 0 za x do předpisu funkce. Zjistíme tak, o jaký typ limity se jedná.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{2x} = \frac{\sin 4.0}{2.0} = \frac{0}{0}$$

Limita je typu $\frac{0}{0}$.

Použijeme vzorec $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Výraz $4x$ nahradíme pomocí substituce proměnnou t.

$4x = t$ Vyjádříme x.

$x = \frac{t}{4}$

$x \to 0$ Kam půjde t?

$t \to 0$ Můžeme dosadit do zadání a vypočítat zadanou limitu.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{2x} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{2.\frac{t}{4}} =$$ Upravíme konstanty ve jmenovateli.

$$= \lim_{t\to 0} 2.\frac{\sin t}{t} =$$ Nyní použijeme vzorec na výpočet limity $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$.

$$= 2.1 = 2$$ Máme výsledek.

Poznámky

93 - Limita funkce - nula lomeno nulou, sínus a tangens

Poznámky

Zadání Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\tan \frac{x}{3}}$.

Řešení **Video** **Teorie: 29 - 34 Příklady: 197 - 201**

Výpočet limity začneme dosazením 0 za x do předpisu funkce. Zjistíme tak, o jaký typ limity se jedná.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\tan \frac{x}{3}} = \frac{\sin 3.0}{\tan \frac{0}{3}} = \frac{0}{0}$$

Limita je typu $\frac{0}{0}$.

Použijeme vzorec $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$.
Bohužel v zadání chybí $\frac{1}{x}$. Musíme proto zadaný zlomek vhodně rozšířit.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\tan \frac{x}{3}} \bullet \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin 3x}{x}}{\frac{\tan \frac{x}{3}}{x}}$$

Zlomek rozdělíme na dvě limity.

Limity vyřešíme vhodnou substitucí - $3x = t$ a $\frac{x}{3} = u$, $t \to 0$, $u \to 0$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{\frac{t}{3}} = \lim_{t\to 0} 3.\frac{\sin t}{t} = 3$$

Čitatel.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan \frac{x}{3}}{x} = \lim_{u\to 0} \frac{\tan u}{3u} = \frac{1}{3}$$

Jmenovatel.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\tan \frac{x}{3}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin 3x}{x}}{\frac{\tan \frac{x}{3}}{x}} = \frac{3}{\frac{1}{3}} = 9$$

Oba výsledky dosadíme do zadání a upravíme.

94 - Limita funkce - nula lomeno nulou, sínus a tangens

Zadání Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 4x + \tan^2 2x}{\tan^2 5x}$.

Řešení **Video** **Teorie: 29 - 34 Příklady: 197 - 201**

Výpočet limity začneme dosazením 0 za x do předpisu funkce. Zjistíme tak, o jaký typ limity se jedná.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 4x + \tan^2 2x}{\tan^2 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 4.0 + \tan^2 2.0}{\tan^2 5.0} = \frac{0}{0}$$

Limita je typu $\frac{0}{0}$.

Použijeme vzorec $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$, který umocníme na druhou.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^2 = 1$$

Bohužel v zadání chybí $\frac{1}{x^2}$. Musíme proto zadaný zlomek vhodně rozšířit.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 4x + \tan^2 2x}{\tan^2 5x} \bullet \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin^2 4x + \tan^2 2x}{x^2}}{\frac{\tan^2 5x}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin^2 4x}{x^2} + \frac{\tan^2 2x}{x^2}}{\frac{\tan^2 5x}{x^2}} = \left[\frac{16+4}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}\right]$$

Zlomek rozdělíme na tři limity. Ty vyřešíme substitucí - $4x = t$, $2x = u$ a $5x = v$, $t \to 0$, $u \to 0$, $v \to 0$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 4x}{x^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin^2 t}{\left(\frac{t}{4}\right)^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin^2 t}{\frac{t^2}{16}} = \lim_{t\to 0} 16.\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 = 16$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 2x}{x^2} = \lim_{u\to 0} \frac{\tan^2 u}{\left(\frac{u}{2}\right)^2} = \lim_{u\to 0} \frac{\tan^2 u}{\frac{u^2}{4}} = \lim_{u\to 0} 4.\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 = 4$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 5x}{x^2} = \lim_{v\to 0} \frac{\tan^2 v}{\left(\frac{v}{5}\right)^2} = \lim_{v\to 0} \frac{\tan^2 v}{\frac{v^2}{25}} = \lim_{v\to 0} 25.\left(\frac{\sin v}{v}\right)^2 = 25$$

Poznámky

95 - Limita funkce - nula lomeno nulou, sínus a odmocnina

Zadání Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sin\frac{x}{2}}$.

Řešení **Video** **Teorie: 29 - 34 Příklady: 197 - 201**

Výpočet limity začneme dosazením 0 za x do předpisu funkce. Zjistíme tak, o jaký typ limity se jedná.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{0+4}-2}{\sin\frac{0}{2}} = \frac{0}{0}$$

Limita je typu $\frac{0}{0}$.

Zlomek nejprve usměrníme. Vyjdeme ze vzorce $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin\frac{x}{2}} \bullet \frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2} = \lim_{x\to 0} \frac{x+4-4}{\left(\sin\frac{x}{2}\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} =$$

Dosadíme 0 za x a zjistíme, že první zlomek je typu $\frac{0}{0}$, druhý zlomek je roven $\frac{1}{4}$.

Použijeme vzorec $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ a postup z předchozích příkladů.

Substituce - $\frac{x}{2} = t$, $t \to 0$.

$$= \lim_{t\to 0} \frac{2t}{\sin t} \cdot \frac{1}{4} = \lim_{t\to 0} 2\frac{t}{\sin t} \cdot \frac{1}{4} = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Dostali jsme výsledek $\frac{1}{2}$, příklad je vyřešený.

Poznámky

96 - Limita funkce - jedna na nekonečno

Poznámky

Zadání Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{1-2x}$.

Řešení **Video** **Teorie: 29 - 34 Příklady: 197 - 201**

Výpočet limity začneme dosazením ∞ za x do předpisu funkce. Zjistíme tak, o jaký typ limity se jedná.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{1-2x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{-\infty}$$

Nejprve vyřešíme problém v závorce, vydělíme čitatele jmenovatelem a připomeneme si, že tvar $\frac{k}{\infty}\to 0$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right) = 1$$

Limita je typu 1^∞. Pro tento typ limity použijeme vzorec $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{1-2x} =$$

Ve vzorci je $\left(1+\frac{1}{x}\right)$. Pomocí substituce tedy nahradíme $\frac{3}{x}$ výrazem $\frac{1}{z}$.

$\frac{3}{x}=\frac{1}{z}$ Vyjádříme x.

$x = 3z$

$x\to\infty$ Kam půjde z?

$z\to\infty$ Můžeme dosadit do zadání a vypočítat zadanou limitu.

$$\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{1-2.3z} =$$

Upravíme mocninu podle vzorců, které znáte již ze základní školy.

$$\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{1}.\left(1+\frac{1}{z}\right)^{-2.3z} = \lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{1}.\left(\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\right)^{-6} = e^{-6}$$

Příklad je vyřešený.

97 - Limita funkce - jedna na nekonečno

Zadání Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{5}{x}-3}$.

Řešení **Video** **Teorie: 29 - 34 Příklady: 197 - 201**

Výpočet limity začneme dosazením 0 za x do předpisu funkce. Zjistíme tak, o jaký typ limity se jedná.

$$\lim_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{5}{x}-3}=\lim_{x\to 0}(1+4.0)^{\frac{5}{0}-3}$$

Nejprve vyřešíme problém v exponentu, připomeneme si, že tvar $\frac{k}{0}\to\pm\infty$.
Limita je typu 1^{∞}. Pro tento typ limity použijeme vzorec $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

$\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{5}{x}-3}$ Ve vzorci je $(1+x)$. Pomocí substituce tedy nahradíme $4x$ výrazem z.

$4x=z$ Vyjádříme x.
$x=\frac{z}{4}$
$x\to 0$ Kam půjde z?
$z\to 0$ Můžeme dosadit do zadání a vypočítat zadanou limitu.

$\lim\limits_{z\to 0}(1+z)^{\frac{5}{\frac{z}{4}}-3}$ Upravíme mocninu podle vzorců, které znáte již ze základní školy.

$$\lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{20}{z}-3}=\lim_{z\to 0}\left[(1+z)^{\frac{1}{z}}\right]^{20}(1+z)^{-3}=e^{20}$$

Příklad je vyřešený.

Poznámky

98 - Limita funkce - nekonečno lomeno nekonečnem

Zadání Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{4x^3-2x^2+3x-5}{1-8x^3}$.

Řešení **Video** **Teorie: 29 - 34 Příklady: 197 - 201**

Výpočet limity začneme dosazením ∞ za x do předpisu funkce. Zjistíme tak, o jaký typ limity se jedná.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x^3-2x^2+3x-5}{1-8x^3} = \pm\frac{\infty}{\infty}$$

Limita je typu $\frac{\infty}{\infty}$.

Víme, že $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{k}{x} = 0$. Vytkneme v čitateli i ve jmenovateli x v nejvyšší mocnině.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3\left(4-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{5}{x^3}\right)}{x^3\left(\frac{1}{x^3}-8\right)}$$

Ve zlomku vykrátíme x^3.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{4-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{5}{x^3}}{\frac{1}{x^3}-8} = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2}$$

V čitateli zůstane 4, ostatní zlomky jdou k 0.
Ve jmenovateli zůstane -8, zbytek jde k 0.

Příklad je vyřešený.

Poznámky

99 - Limita funkce - nekonečno lomeno nekonečnem

Poznámky

Zadání Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 1}{3x - 4x^2}$.

Řešení **Video** **Teorie: 29 - 34 Příklady: 197 - 201**

Výpočet limity začneme dosazením ∞ za x do předpisu funkce. Zjistíme tak, o jaký typ limity se jedná.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 1}{3x - 4x^2} = \pm\frac{\infty}{\infty}$$

Limita je typu $\frac{\infty}{\infty}$.

Víme, že $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{k}{x} = 0$. Vytkneme v čitateli i ve jmenovateli x v nejvyšší mocnině.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^4\left(2 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}\right)}{x^2\left(\frac{3}{x} - 4\right)}$$

Ve zlomku vykrátíme x^2.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(2 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}\right)}{\left(\frac{3}{x} - 4\right)}$$

V čitateli zůstane x^2 a v závorce 2, ostatní zlomky jdou k 0.
Ve jmenovateli zůstane -4, zbytek jde k 0.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\,(2 - 0 + 0 - 0 - 0)}{(0 - 4)} = \frac{(\pm\infty)^2 .2}{-4} = -\infty$$

Příklad je vyřešený.

100 - Limita funkce - nekonečno lomeno nekonečnem

Poznámky

Zadání Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1-x^2}{2+x^2-4x^3}$.

Řešení **Video** **Teorie: 29 - 34** **Příklady: 197 - 201quad**

Výpočet limity začneme dosazením ∞ za x do předpisu funkce. Zjistíme tak, o jaký typ limity se jedná.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-x^2}{2+x^2-4x^3} = \pm\frac{\infty}{\infty}$$

Limita je typu $\frac{\infty}{\infty}$.

Víme, že $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{k}{x} = 0$. Vytkneme v čitateli i ve jmenovateli x v nejvyšší mocnině.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(\frac{1}{x^2}-1\right)}{x^3\left(\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x}-4\right)}$$

Ve zlomku vykrátíme x^2.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left(\frac{1}{x^2}-1\right)}{x\left(\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x}-4\right)}$$

V čitateli zůstane -1, ostatní zlomky jdou k 0.
Ve jmenovateli zůstane x a v závorce -4, zbytek jde k 0.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{0-1}{x\,(0-4)} = \frac{-1}{\pm\infty.\,(-4)} = 0$$

Příklad je vyřešený.

101 - Jednostranná limita funkce - konstanta lomeno nulou

Poznámky

Zadání Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{1-x}$.

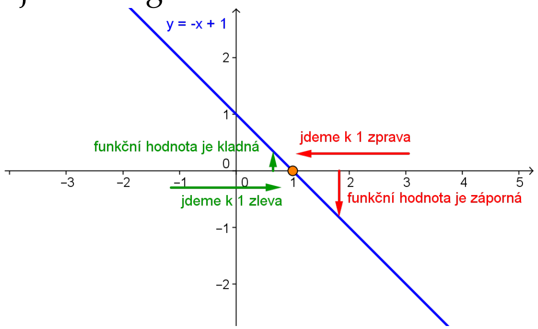
Řešení **Video** **Teorie: 29 - 34 Příklady: 197 - 201**

Výpočet limity začneme dosazením 1 za x do předpisu funkce. Zjistíme tak, o jaký typ limity se jedná.

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{0}$$

Limita je typu $\frac{k}{0}$. Nulou samozřejmě nelze dělit!

Víme, že $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{k}{x} = \pm\infty$. Rozhodujeme o znaménku nekonečna. V čitateli máme 1, ta je kladná. Ve jmenovateli je 0. Přestaneme se na ni dívat jako na nulu, ale jako na číslo, ke kterému se chceme co nejvíce přiblížit, můžeme se blížit zleva a zprava. Funkce $1-x$, která je ve jmenovateli zadané funkce, má kladnou nebo zápornou funkční hodnotu. Zjednodušeně bychom mohli říct, že máme ve jmenovateli kladnou nebo zápornou nulu. Nejlépe to zjistíme z grafu.



$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{-0} = -\infty$$

Z obrázku vidíme, že vpravo od 1 je funkční hodnota záporná, ve jmenovateli je tedy záporná 0. Limita jde k $-\infty$.

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{0} = \infty$$

Z obrázku vidíme, že vlevo od 1 je funkční hodnota kladná, ve jmenovateli je tedy kladná 0. Limita jde k ∞.

Limity zleva a zprava jsou různé, limita v bodě $x = 1$ neexistuje!

102 - Jednostranná limita funkce - konstanta lomeno nulou

Zadání Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x}{(x-2)^2}$.

Řešení **Video** **Teorie: 29 - 34 Příklady: 197 - 201**

Výpočet limity začneme dosazením 2 za x do předpisu funkce. Zjistíme tak, o jaký typ limity se jedná.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x}{(x-2)^2} = \frac{2}{0}$$

Limita je typu $\frac{k}{0}$. Nulou samozřejmě nelze dělit!

Víme, že $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{k}{x} = \pm\infty$. Rozhodujeme o znaménku nekonečna.

V čitateli máme 2, ta je kladná. Ve jmenovateli je 0. Opět potřebujeme zjistit, jestli je tato nula kladná nebo záporná.

Výraz ve jmenovateli má tvar $(x-2)^2$. (Můžete si nakreslit graf této funkce.)

Jak již víte, druhá mocnina libovolného reálného čísla nikdy nebude záporná. Ve jmenovateli tedy bude stále kladná nula, limita tedy půjde k $+\infty$.

Limitu vyřešíme najednou, nemusíme řešit problém zvlášť zleva a zprava.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x}{(x-2)^2} = \frac{2}{+0} = +\infty$$

Poznámky

Řešené příklady – Diferenciální počet funkce jedné proměnné

104 - Derivace funkce podle definice

Zadání Určete podle definice derivaci funkce $y = \dfrac{8}{4+x^2}$ v bodě 2.

Řešení **Video** **Teorie: 37,38, 39** **Příklady: 203, 204, 205, 206**

Určíme si definiční obor funkce.

$$x \in \mathbf{R}$$

Bod 2 je v definičním oboru dané funkce.

$$f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{8}{4+x^2} - \frac{8}{4+2^2}}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{8}{4+x^2} - 1}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{8-4-x^2}{4+x^2}}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{4-x^2}{(x-2)(4+x^2)}$$
$$= -\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(4+x^2)} = -\lim_{x\to 2} \frac{x+2}{4+x^2} = -\frac{2+2}{4+4} = -\frac{1}{2}$$

Poznámky

105 - Derivace elementárních funkcí

Zadání V následujících příkladech počítáme první derivace funkcí podle přehledů vzorců a vět.

Řešení **Video** **Teorie:** 37,38, 39 **Příklady:** 203, 204, 205, 206

- $f(x) = 9$ — Derivujeme konstantní funkci.
  $f'(x) = 0$

- $f(x) = x^5$ — Derivujeme mocninnou funkci.
  $f'(x) = 5x^4$

- $f(x) = 3^x$ — Derivujeme exponenciální funkci.
  $f'(x) = 3^x \cdot \ln(3)$

- $f(x) = \log(x)$ — Derivujeme mocninnou funkci.
  $f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(10)}$

- $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$ — Derivujeme součet goniometrických funkcí.
  $f'(x) = \cos(x) - \sin(x)$

- $f(x) = \sqrt[3]{x^4} - x$ — Derivujeme rozdíl mocninných funkcí. Upravíme je do tvaru vhodného pro derivaci.

  $f(x) = x^{\frac{4}{3}} - x^1$ — Nyní derivujeme.
  $f'(x) = \frac{4}{3} \cdot x^{\frac{4}{3}-1} - 1 \cdot x^0$
  $f'(x) = \frac{4}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}} - 1$
  $f'(x) = \frac{4}{3} \cdot \sqrt[3]{x} - 1$

- $f(x) = 2 \cdot \tan(x)$ — Derivujeme konstantou vynásobenou funkci.
  $f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{\cos^2(x)}$

Poznámky

106 - Derivace součinu funkcí

Zadání V následujících příkladech počítáme první derivace funkcí podle přehledů vzorců a vět.

Řešení **Video** **Teorie: 37,38, 39** **Příklady: 203, 204, 205, 206**

- $f(x) = e^x \cdot \sin(x)$ Derivujeme součin dvou funkcí.

  $f'(x) = [e^x]' \cdot \sin(x) + e^x \cdot [\sin(x)]'$
  $f'(x) = e^x \cdot \sin(x) + e^x \cdot \cos(x)$
  $f'(x) = e^x \cdot (\sin(x) + \cos(x))$

- $f(x) = \left(x^3 - 2\right) \cdot \left(\frac{1}{x^2} + 2\right)$ Derivujeme součin dvou funkcí.

  Upravíme do tvaru vhodného pro derivaci.
  $f(x) = \left(x^3 - 2\right) \cdot \left(x^{-2} + 2\right)$ Nyní derivujeme.

  $f'(x) = \left[x^3 - 2\right]' \cdot \left(x^{-2} + 2\right) + \left(x^3 - 2\right) \cdot \left[x^{-2} + 2\right]'$
  $f'(x) = 3x^2 \cdot \left(x^{-2} + 2\right) + \left(x^3 - 2\right) \cdot \left(-2x^{-3}\right)$
  $f'(x) = 3 + 6x^2 - 2 + 4x^{-3}$
  $f'(x) = 1 + 6x^2 + \frac{4}{x^3}$

- $f(x) = x \cdot \sin(x) \cdot \ln(x)$ Derivujeme součin tří funkcí.
  $f(x) = (x \cdot \sin(x)) \cdot \ln(x)$ Derivujeme součin v součinu.

  $f'(x) = [x \cdot \sin(x)]' \cdot \ln(x) + x \cdot \sin(x) \cdot [\ln(x)]'$
  $f'(x) = (1 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x)) \cdot \ln(x) + x \cdot \sin(x) \cdot \frac{1}{x}$
  $f'(x) = \sin(x) \cdot \ln(x) + x \cdot \cos(x) \ln(x) + \sin(x)$

Poznámky

107 - Derivace podílu funkcí

Poznámky

Zadání V následujících příkladech počítáme první derivace funkcí podle přehledů vzorců a vět.

Řešení

Video **Teorie: 37,38, 39** **Příklady: 203, 204, 205, 206**

- $f(x) = \dfrac{2-x}{3x+4}$

Derivujeme podíl funkci.

$$f'(x) = \frac{[2-x]' \cdot (3x+4) - (2-x) \cdot [3x+4]'}{(3x+4)^2}$$
$$f'(x) = \frac{-1 \cdot (3x+4) - (2-x) \cdot\ 3}{(3x+4)^2}$$
$$f'(x) = \frac{-3x-4-6+3x}{(3x+4)^2}$$
$$f'(x) = -\frac{10}{(3x+4)^2}$$

- $f(x) = \dfrac{x \cdot \cos(x)}{\sin(x)+1}$

Derivujeme podíl funkcí, kde čitatel je ve tvaru součinu.

$$f'(x) = \frac{[x \cdot \cos(x)]' \cdot (\sin(x)+1) - x \cdot \cos(x) \cdot [\sin(x)+1]'}{(\sin(x)+1)^2}$$
$$f'(x) = \frac{(1 \cdot \cos(x) - x \cdot \sin(x)) \cdot (\sin(x)+1) - x \cdot \cos(x) \cdot \cos(x)}{(\sin(x)+1)^2}$$
$$f'(x) = \frac{\sin(x) \cdot \cos(x) + \cos(x) - x \cdot \sin^2(x) - x \cdot \sin(x) - x \cdot \cos^2(x)}{(\sin(x)+1)^2}$$
$$f'(x) = \frac{\sin(x) \cdot \cos(x) + \cos(x) - x \cdot \sin(x) - x}{(\sin(x)+1)^2}$$

108 - Derivace složené funkce

Poznámky

Zadání V následujících příkladech počítáme první derivace funkcí podle přehledů vzorců a vět.

Řešení **Video** **Teorie: 40** **Příklady: 205, 206**

- $f(x) = \ln\left(2x + 5x^2\right)$

  Derivujeme složenou funkci, vnější je funkce logaritmická, vnitřní je polynom 2. stupně.

  $$f'(x) = \frac{1}{2x + 5x^2} \cdot (2 + 10x)$$

- $f(x) = e^{\frac{1}{x^3}}$

  Derivujeme složenou funkci, vnější je funkce exponenciální, vnitřní je funkce mocninná. Upravíme do tvaru vhodného pro derivaci.

  $f(x) = e^{x^{-3}}$ Nyní derivujeme.

  $$f'(x) = e^{x^{-3}} \cdot \left(-3x^{-4}\right)$$
  $$f'(x) = -\frac{3}{x^4} \cdot e^{\frac{1}{x^3}}$$

- $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

  Derivujeme složenou funkci, vnější je funkce mocninná, vnitřní je polynom 2. stupně. Upravíme do tvaru vhodného pro derivaci.

  $f(x) = \left(1 - x^2\right)^{\frac{1}{2}}$ Nyní derivujeme.

  $$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)$$
  $$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

109 - Derivace složené funkce

Zadání V následujících příkladech počítáme první derivace funkcí podle přehledů vzorců a vět.

Řešení **Video** **Teorie: 40** **Příklady: 205, 206**

- $f(x) = \sin^4\left(3x^2 + x + 5\right)$

  Derivujeme složenou funkci, začneme derivací vnější mocninné funkce.

  $f'(x) = 4\sin^3\left(3x^2 + x + 5\right) \cdot \left[\sin\left(3x^2 + x + 5\right)\right]'$

  Opět derivujeme složenou funkci, vnější složkou je funkce sinus.

  $f'(x) = 4\sin^3\left(3x^2 + x + 5\right) \cdot \cos\left(3x^2 + x + 5\right) \cdot \left[3x^2 + x + 5\right]'$

  Zbývá určit derivaci polynomu.

  $f'(x) = 4\sin^3\left(3x^2 + x + 5\right) \cdot \cos\left(3x^2 + x + 5\right) \cdot (6x + 1)$

- $f(x) = \ln\sin\sqrt{e^{2x} + 1}$

  Derivujeme složenou funkci, začneme derivací vnější mocninné funkce.

  $f'(x) = \dfrac{1}{\sin\sqrt{e^{2x} + 1}} \cdot \left[\sin\sqrt{e^{2x} + 1}\right]'$

  Opět derivujeme složenou funkci, vnější složkou je funkce sinus.

  $f'(x) = \dfrac{1}{\sin\sqrt{e^{2x} + 1}} \cdot \cos\sqrt{e^{2x} + 1} \cdot \left[\sqrt{e^{2x} + 1}\right]'$

  Opět derivujeme složenou funkci, vnější složkou je funkce mocninná.

  $f'(x) = \dfrac{1}{\sin\sqrt{e^{2x} + 1}} \cdot \cos\sqrt{e^{2x} + 1} \cdot \dfrac{1}{2}\left(e^{2x} + 1\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left[e^{2x} + 1\right]'$

  Zbývá určit derivaci exponenciální funkce.

  $f'(x) = \dfrac{1}{\sin\sqrt{e^{2x} + 1}} \cdot \cos\sqrt{e^{2x} + 1} \cdot \dfrac{1}{2}\left(e^{2x} + 1\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{2x} \cdot 2$

  $f'(x) = \coth\sqrt{e^{2x} + 1} \cdot \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x} + 1}}$

Poznámky

110 - První derivace explicitně zadané funkce

Zadání V následujících příkladech počítáme první derivace funkcí podle přehledů vzorců a vět.

Řešení **Video** **Teorie: 37,38, 39,40, ??** **Příklady: 207**

- $f(x) = e^{x^2 \cdot \ln(x)}$

Derivujeme složenou funkci, která má exponent ve tvaru součinu.

$$f'(x) = e^{x^2 \cdot \ln(x)} \cdot \left[x^2 \cdot \ln(x)\right]'$$
$$f'(x) = e^{x^2 \cdot \ln(x)} \cdot \left(2x \cdot \ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x}\right)$$
$$f'(x) = e^{x^2 \cdot \ln(x)} \cdot (2x \cdot \ln(x) + x)$$

- $f(x) = 2\left(\sqrt{e^x - 1} - \arctan \sqrt{e^x - 1}\right)$

Derivujeme rozdíl dvou složených funkcí, který je vynásobený konstantou. Upravíme do tvaru vhodného pro derivaci.

$$f(x) = 2\left((e^x - 1)^{\frac{1}{2}} - \arctan (e^x - 1)^{\frac{1}{2}}\right)$$

Nyní derivujeme.

$$f'(x) = 2\left(\frac{1}{2}(e^x - 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^x - \frac{1}{1 + \left((e^x - 1)^{\frac{1}{2}}\right)^2} \cdot \frac{1}{2}(e^x - 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^x\right)$$
$$f'(x) = 2\left(\frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} - \frac{1}{1 + e^x - 1} \cdot \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}}\right)$$
$$f'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^x - 1}} - \frac{1}{e^x} \cdot \frac{e^x}{\sqrt{e^x - 1}}$$
$$f'(x) = \frac{e^x - 1}{\sqrt{e^x - 1}}$$
$$f'(x) = \sqrt{e^x - 1}$$

Poznámky

111 - Druhá derivace explicitně zadané funkce

Poznámky

Zadání V následujících příkladech počítáme první derivace funkcí podle přehledů vzorců a vět.

Řešení **Video** **Teorie: 37,38, 39,40, ??** **Příklady: 207**

- $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$

Určíme první derivaci funkce.

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-x^2} + x \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x)$$
$$f'(x) = e^{-x^2} \cdot \left(1 - 2x^2\right)$$

Druhou derivaci získáme derivací první derivace.

$$f''(x) = e^{-x^2} \cdot (-2x) \cdot \left(1 - 2x^2\right) + e^{-x^2} \cdot (-4x)$$
$$f''(x) = e^{-x^2} \cdot \left(-2x + 4x^3 - 4x\right)$$
$$f''(x) = e^{-x^2} \cdot \left(4x^3 - 6x\right)$$

- $f(x) = 1 - \ln\left(x^2 - 9\right)$

Určíme první derivaci funkce.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2 - 9} \cdot 2x$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{x^2 - 9}$$

Druhou derivaci získáme derivací první derivace.

$$f''(x) = \frac{-2 \cdot \left(x^2 - 9\right) - (-2x) \cdot 2x}{\left(x^2 - 9\right)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2x^2 + 18 + 4x^2}{\left(x^2 - 9\right)^2}$$

$$f''(x) = \frac{18 + 2x^2}{\left(x^2 - 9\right)^2}$$

112 - Třetí derivace explicitně zadané funkce

Poznámky

Zadání V následujících příkladech počítáme první derivace funkcí podle přehledů vzorců a vět.

Řešení **Video** **Teorie: 37,38, 39,40, ??** **Příklady: 207**

- $f(x) = x - 2\arctan x$

Určíme první derivaci funkce.

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{1+x^2}$$
$$f'(x) = \frac{1+x^2-2}{1+x^2}$$
$$f'(x) = \frac{x^2-1}{1+x^2}$$

Druhou derivaci získáme derivací první derivace.

$$f''(x) = \frac{2x\cdot\left(1+x^2\right) - \left(x^2-1\right)\cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$
$$f''(x) = \frac{2x^3+2x-2x^3+2x}{(1+x^2)^2}$$
$$f''(x) = \frac{4x}{(1+x^2)^2}$$

Třetí derivaci získáme derivací druhé derivace.

$$f'''(x) = \frac{4\cdot\left(1+x^2\right)^2 - 4x\cdot 2\cdot\left(1+x^2\right)\cdot 2x}{(1+x^2)^4}$$
$$f'''(x) = \frac{\left(1+x^2\right)\cdot\left(4\cdot\left(1+x^2\right) - 16x^2\right)}{(1+x^2)^4}$$
$$f'''(x) = \frac{4+4x^2-16x^2}{(1+x^2)^3}$$
$$f'''(x) = \frac{4-12x^2}{(1+x^2)^3}$$

113 - Logaritmické derivování

Zadání Logaritmickým derivováním vypočítáme derivaci funkce, která je ve tvaru $y = f(x)^{g(x)}$.

Řešení **Video** **Teorie: 41** **Příklady: 208**

- $y = f(x)^{g(x)}$ — Derivujeme funkci umocněnou na funkci. Logaritmujeme rovnici.

  $\ln y = \ln f(x)^{g(x)}$ — Upravíme do tvaru vhodného pro derivaci.

  $\ln y = g(x) \cdot \ln f(x)$ — Nyní derivujeme složenou funkci na levé straně rovnice a součin na straně pravé.

  $\frac{1}{y} \cdot y' = g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$ — Z rovnice si vyjádříme derivaci funkce.

  $y' = y \cdot \left[g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)\right]$ — Za y dosadíme původní funkci.

  $y' = f(x)^{g(x)} \cdot \left[g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)\right]$

- $y = (1-x)^x$ — Derivujeme funkci umocněnou na funkci. Logaritmujeme rovnici.

  $\ln(y) = \ln(1-x)^x$ — Upravíme do tvaru vhodného pro derivaci.

  $\ln(y) = x \cdot \ln(1-x)$ — Nyní derivujeme složenou funkci na levé straně rovnice a součin na straně pravé.

  $\frac{1}{y} \cdot y' = [x]' \cdot \ln(1-x) + x \cdot [1-x]'$

  $\frac{1}{y} \cdot y' = 1 \cdot \ln(1-x) + x \cdot (-1)$ — Z rovnice si vyjádříme derivaci funkce.

  $y' = y \cdot (\ln(1-x) + x)$ — Za y dosadíme původní funkci.

  $y' = (1-x)^x \cdot (\ln(1-x) + x)$

Poznámky

114 - Vypočítejte limitu funkce l'Hospitalovým pravidlem

Poznámky

Zadání Vypočítejte limitu funkce $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-3x^2+4x-4}{6x^2-2x-20}$.

Vypočítejte limitu funkce $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\log x}$.

Řešení **Video** **Teorie: 42** **Příklady: 209 - 213**

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-3x^2+4x-4}{6x^2-2x-20}$$

Limita je typu $\frac{0}{0}$.

$$\left(x^3-3x^2+4x-4\right)' = 3x^2-6x+4$$

Derivace čitatele.

$$\left(6x^2-2x-20\right)' = 12x-2$$

Derivace jmenovatele.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-3x^2+4x-4}{6x^2-2x-20} = \lim_{x\to 2} \frac{3x^2-6x+4}{12x-2} = \frac{12-12+4}{24-2} = \frac{2}{11}$$

Limita je vyřešena.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\log x}$$

Limita je typu $\frac{\infty}{\infty}$.

$$(\ln x)' = \tfrac{1}{x}$$

Derivace čitatele.

$$(\log x)' = \tfrac{1}{x\ln 10}$$

Derivace jmenovatele.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\log x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x\ln 10}} = \ln 10$$

Limita je vyřešena.

115 - Vypočítejte limitu funkce l'Hospitalovým pravidlem

Zadání Vypočítejte limitu funkce $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$.

Řešení **Video** **Teorie: 42** **Příklady: 209 - 213**

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$$

Limita je typu $\infty-\infty$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x-(x-1)}{(x-1)\ln x}$$

Zlomky převedeme na společného jmenovatele.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}$$

Limita je typu $\frac{0}{0}$.

$$(\ln x-x+1)'=\frac{1}{x}-1$$

Derivace čitatele.

$$((x-1)\ln x)'=\ln x+\frac{x-1}{x}$$

Derivace jmenovatele.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{\ln x+\frac{x-1}{x}}$$

Limita je typu $\frac{0}{0}$.

$$\left(\frac{1}{x}-1\right)'=-\frac{1}{x^2}$$

Derivace čitatele.

$$\left(\ln x+\frac{x-1}{x}\right)'=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$$

Derivace jmenovatele.

$$\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{x+1}{x^2}}=\lim_{x\to 1}-\frac{1}{x+1}=-\frac{1}{2}$$

Limita je vyřešena.

Poznámky

116 - První derivace parametricky zadané funkce

Zadání V následujících příkladech počítáme první derivaci funkcí zadaných parametricky.

Řešení **Video** **Teorie: 43** **Příklady: 214, 215**

- $x = r \cdot \cos t$
  $y = r \cdot \sin t, \quad t \in \langle 0, \pi \rangle, \quad r > 0$

Grafem funkce je horní polovina kružnice $x^2 + y^2 = r^2$.

Parametrické rovnice derivujeme podle t.

$$\dot{\varphi}(t) = r \cdot (-\sin t)$$
$$\dot{\psi}(t) = r \cdot \cos t$$

$$y' = \frac{\dot{\psi}(t)}{\dot{\varphi}(t)} = \frac{r \cdot \cos t}{r \cdot (-\sin t)} = -\coth t, \quad \text{kde } x = r \cdot \cos t$$

- $x = t^3 + 3t + 1$
  $y = 3t^5 + 5t^3 + 1,$

Parametrické rovnice derivujeme podle t.

$$\dot{\varphi}(t) = 3t^2 + 3$$
$$\dot{\psi}(t) = 15t^4 + 15t^2$$

$$y' = \frac{\dot{\psi}(t)}{\dot{\varphi}(t)} = \frac{15t^4 + 15t^2}{3t^2 + 3} = \frac{15t^2\left(t^2+1\right)}{3\left(t^2+1\right)} = 5t^2, \quad \text{kde } x = t^3 + 3t + 1$$

Poznámky

$x = \varphi(t)$
$y = \psi(t)$

$$y' = \frac{\dot{\psi}(t)}{\dot{\varphi}(t)}$$

117 - Druhá derivace parametricky zadané funkce

Zadání V následujícícm příkladu počítáme první a druhou derivaci funkce zadané parametricky.

Řešení **Video** **Teorie: 43** **Příklady: 214, 215**

- $x = 3 \cdot \cos t$
  $y = 3 \cdot \sin t, \quad t \in \langle 0, \pi \rangle$

Parametrické rovnice derivujeme podle t.

$$\dot{\varphi}(t) = 3 \cdot (-\sin t)$$
$$\dot{\psi}(t) = 3 \cdot \cos t$$

$$\ddot{\varphi}(t) = 3 \cdot (-\cos t)$$
$$\ddot{\psi}(t) = 3 \cdot (-\sin t)$$

$$y' = \frac{3 \cdot \cos t}{3 \cdot (-\sin t)}$$

$$y' = -\coth t, \quad \text{kde } x = 3 \cdot \cos t$$

$$y'' = \frac{3 \cdot (-\sin t) \cdot 3 \cdot (-\sin t) - 3 \cdot \cos t \cdot 3 \cdot (-\cos t)}{(3 \cdot (-\sin t))^3}$$

$$y'' = \frac{9 \sin^2 t + 9 \cos^2 t}{-27 \sin^3 t}$$

$$y'' = -\frac{9 \left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)}{27 \sin^3 t}$$

$$y'' = -\frac{1}{3 \sin^3 t}, \quad \text{kde } x = 3 \cdot \cos t$$

Poznámky

$$x = \varphi(t)$$
$$y = \psi(t)$$

$$y' = \frac{\dot{\psi}(t)}{\dot{\varphi}(t)}$$

$$y'' = \frac{\ddot{\psi}(t) \cdot \dot{\varphi}(t) - \dot{\psi}(t) \cdot \ddot{\varphi}(t)}{(\dot{\varphi}(t))^3}$$

118 - Derivace funkce podle definice

Zadání Určete podle definice derivaci funkce $f(x) = \dfrac{8}{4+x^2}$ v bodě 2.

Řešení **Video** **Teorie:** 37,38, 39,40 **Příklady:** 203, 204, 205, 206

Určíme si definiční obor funkce.

$$x \in \mathbf{R}$$

Bod 2 je v definičním oboru dané funkce.

- $f(x) = \dfrac{8}{4+x^2}$ Derivujeme podíl.

$$f'(x) = \frac{0 \cdot \left(4+x^2\right) - 8 \cdot 2x}{\left(4+x^2\right)^2}$$
$$f'(x) = -\frac{16x}{\left(4+x^2\right)^2}$$
$$f'(x) = -\frac{16 \cdot 2}{\left(4+2^2\right)^2}$$
$$f'(x) = -\frac{1}{2}$$

- $f(x) = 8 \cdot \left(4+x^2\right)^{-1}$ Derivujeme složenou funkci.

$$f'(x) = 8 \cdot (-1) \cdot \left(4+x^2\right)^{-2} \cdot (2x)$$
$$f'(x) = -\frac{16x}{\left(4+x^2\right)^2}$$
$$f'(x) = -\frac{16 \cdot 2}{\left(4+2^2\right)^2}$$
$$f'(x) = -\frac{1}{2}$$

Poznámky

119 - Tečna a normála grafu funkce

Poznámky

Zadání Napište rovnice tečny a normály grafu funkce v daném bodě: $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x + 4, T[-1, ?S]$.

Řešení **Video** **Teorie: 45** **Příklady: 216,217,218, 219**

Připomeneme si rovnici tečny a normály grafu funkce.

$t : y - y_T = f'(x_T)(x - x_T),$

$$n : y - y_T = -\frac{1}{f'(x_T)}(x - x_T),$$

kde x_T, y_T jsou souřadnice bodu dotyku a $f'(x_T)$ je derivace funkce v bodě T.
Připomeňme si ještě, že $f'(x_T)$ je směrnice tečny.

$f(-1) = 2.(-1)^3 - (-1)^2 + 3.(-1) + 4 = -2$ Nejprve vypočítáme souřadnice bodu dotyku.
$T[-1, -2]$

$f'(x) = 6x^2 - 2x + 3$ Dále potřebujeme derivaci zadané funkce.

$f'(-1) = 6.(-1)^2 - 2.(-1) + 3 = 6 + 2 + 3 = 11$ Dosadíme bod dotyku do první derivace.

Nyní máme vše potřebovné k napsání obou rovnic.

$t : y - (-2) = 11(x - (-1))$
$t : y + 2 = 11(x + 1)$
$t : y = 11x + 9$ Rovnice tečny.

$$n : y - (-2) = -\frac{1}{11}(x - (-1))$$

$$n : y + 2 = -\frac{1}{11}(x + 1)$$

$$n : y = -\frac{x}{11} - \frac{23}{11}$$ Rovnice normály.

120 - Tečna rovnoběžná s přímkou

Poznámky

Zadání Napište rovnice tečny grafu funkce $f(x)$, která je rovnoběžná s přímkou p.
$f(x) = \dfrac{x}{x-1}$, $p: x + 4y - 4 = 0$.

Řešení **Video** **Teorie: 45** **Příklady: 216,217,218, 219**

Připomeneme si rovnici tečny grafu funkce.
$t: y - y_T = f'(x_T)(x - x_T)$,
kde x_T, y_T jsou souřadnice bodu dotyku a $f'(x_T)$ je derivace funkce v bodě dotyku T.
Připomeňme si ještě, že $f'(x_T)$ je směrnice tečny.
K nalezení tečny potřebujeme její směrnici a bod, ve kterém se dotýká dané funkce.
Víme, že hledaná tečna je rovnoběžná s přímkou p. Pro rovnoběžné přímky platí, že mají stejnou směrnici. Tím jsme vyřešili první část problému.

$p: y = -\frac{1}{4}x + 1$	Přímku jsme převedli na směrnicový tvar. Její směrnice, a tedy i směrnice tečny, je $-\frac{1}{4}$.
$f'(x_T) = -\frac{1}{4}$	Derivace funkce v bodě je rovna směrnici tečny v tomtéž bodě. Zadanou funkci zderivujeme.
$-\frac{1}{(x-1)^2} = -\frac{1}{4}$	Vyřešíme rovnici, její kořen je x-ová souřadnice bodu dotyku.
$(x-1)^2 = 4$	Kvadratická rovnice.
$x^2 - 2x - 3 = 0$	Pomocí diskriminantu dostaneme 2 různé reálné kořeny.
$x_1 = 3, x_2 = -1$	Máme tedy dva body dotyku a tím pádem dvě tečny.
$y_1 = \frac{3}{2}, y_2 = \frac{1}{2}$	
$T_1 = \left[3, \frac{3}{2}\right], T_2 = \left[-1, \frac{1}{2}\right]$	Body dotyku.
$t_1: y - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{1}{4}(x-3)$	První tečna.
$t_1: y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{9}{4}$	
$t_2: y - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{4}(x+1)$	Druhá tečna.
$t_2: y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{4}$	

121 - Taylorův polynom

Zadání Pro funkci $f(x) = \sin 2x$ sestavte Taylorův polynom 4. stupně v okolí bodu $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

Řešení **Video** **Teorie: 46** **Příklady: 223**

Připomeneme si tvar Taylorova polynomu.

$$T_4(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x - x_0)^4.$$

Začneme výpočtem 4 derivací, do nich pak dosadíme bod x_0.

$f(x) = \sin 2x$ $\qquad f(x_0) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin 2.\frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{2} = 1$

$f'(x) = 2\cos 2x$ $\qquad f'(x_0) = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos 2.\frac{\pi}{4} = 2\cos \frac{\pi}{2} = 0$

$f''(x) = -4\sin 2x$ $\qquad f''(x_0) = f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4\sin 2.\frac{\pi}{4} = -4\sin \frac{\pi}{2} = -4$

$f'''(x) = -8\cos 2x$ $\qquad f'''(x_0) = f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -8\cos 2.\frac{\pi}{4} = -8\cos \frac{\pi}{2} = 0$

$f^{(4)}(x) = 16\sin 2x$ $\qquad f^{(4)}(x_0) = f^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 16\sin 2.\frac{\pi}{4} = 16\sin \frac{\pi}{2} = 16$

Získané hodnoty dosadíme do vzorce pro Taylorův polynom 4. stupně.

$$T_4(x) = 1 + \frac{0}{1!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{-4}{2!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{0}{3!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{16}{4!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4 = 1 - 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{2}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4.$$

Poznámky

122 - Maclaurinův polynom

Zadání Pro funkci $f(x) = e^{-x^2}$ sestavte Maclaurinův polynom 4. stupně. Pozn. $x_0 = 0$.

Řešení **Video** **Teorie: 46** **Příklady: 223**

Připomeneme si tvar Maclaurinova polynomu.

$$M_4(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4.$$

Začneme výpočtem 4 derivací, do nich pak dosadíme bod 0.

$$f(x) = e^{-x^2} \qquad f(0) = e^{-0^2} = 1$$

$$f'(x) = e^{-x^2}.(-2x) \qquad f'(0) = e^{-0^2}.(-2.0) = 0$$

$$f''(x) = e^{-x^2}.(-2x)^2 - 2e^{-x^2} \qquad f''(0) = e^{-0^2}.(-2.0)^2 - 2e^{-0^2} = -2$$

$$f'''(x) = e^{-x^2}.(-2x)^3 + 8x.e^{-x^2} + 4x.e^{-x^2}$$

$$f'''(0) = e^{-0^2}.(-2.0)^3 + 8.0.e^{-0^2} + 4.0.e^{-0^2} = 0$$

$$f^{(4)}(x) = e^{-x^2}.(-2x)^4 - 24x^2e^{-x^2} - 12x^2e^{-x^2} + 12.e^{-x^2}$$

$$f^{(4)}(0) = e^{-0^2}.(-2.0)^4 - 24.0^2e^{-0^2} - 12.0^2e^{-0^2} + 12.e^{-0^2} = 12$$

Získané hodnoty dosadíme do vzorce pro Maclaurinův polynom 4. stupně.

$$M_4(x) = 1 + \frac{0}{1!}x + \frac{-2}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{12}{4!}x^4 = 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4.$$

Poznámky

123 - Monotonnost a extrémy funkce

Poznámky

Zadání Najděte intervaly monotonnosti a extrémy funkce $f(x) = \frac{1}{12}.\left(-3x^4 + 4x^3 + 12x^2 - 12\right)$.

Řešení **Video** **Teorie: 48** **Příklady: 224, 225**

Úlohu vyřešíme na platném definičním oboru, ten zde tvoří množina všech reálných čísel, $D(f) = \mathbf{R}$.

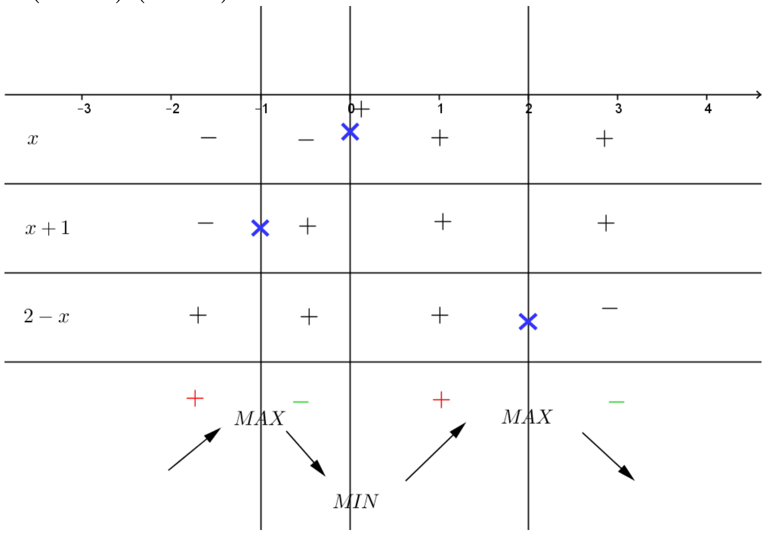
$f'(x) = \frac{1}{12}.\left(-12x^3 + 12x^2 + 24x\right) = -x^3 + x^2 + 2x$

Vypočítáme první derivaci.

$-x^3 + x^2 + 2x > 0$ — Funkce roste, kde je první derivace kladná.

$-x^3 + x^2 + 2x < 0$ — Funkce klesá, kde je první derivace záporná.

$x(x+1)(2-x) = 0$ — $x = 0, x = -1, x = 2$ jsou stacionární body, může v nich být extrém.



$(-\infty, -1\rangle, \langle 0, 2\rangle$	Funkce roste.
$\langle -1, 0\rangle, \langle 2, \infty)$	Funkce klesá.
$\left[-1, -\frac{7}{12}\right], \left[2, \frac{5}{3}\right]$	Lokální maximum.
$[0, -1]$	Lokální minimum.

124 - Monotonnost a extrémy funkce

Zadání Najděte intervaly monotonnosti a extrémy funkce $f(x) = \ln \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

Řešení **Video** **Teorie: 48** **Příklady: 224, 225**

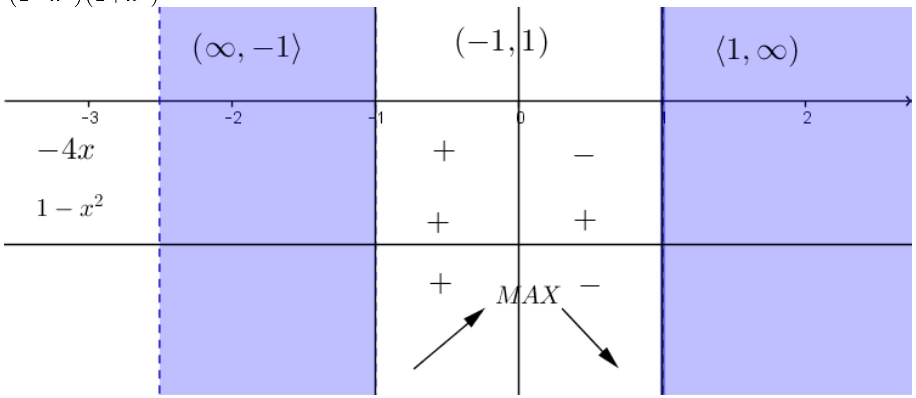
Úlohu vyřešíme na platném definičním oboru, ten zde je v zadání logaritmus, argument musí být kladný, $D(f) = (-1, 1)$.

$f'(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2} . \frac{-2x(1+x^2)-(1-x^2).2x}{(1+x^2)^2} = \frac{-4x}{(1-x^2)(1+x^2)}$ Vypočítáme první derivaci.

$\frac{-4x}{(1-x^2)(1+x^2)} > 0$ Funkce roste, tam kde je první derivace kladná.

$\frac{-4x}{(1-x^2)(1+x^2)} < 0$ Funkce klesá, tam kde je první derivace záporná.

$\frac{-4x}{(1-x^2)(1+x^2)} = 0$ $x = 0$ je stacionární bod, může v něm být extrém.



$(-1, 0\rangle$ Funkce roste.
$\langle 0, 1\rangle$ Funkce klesá.
$[0, 0]$ Lokální maximum.

Poznámky

125 - Extrémy funkce pomocí 2. derivace

Poznámky

Zadání Najděte extrémy funkce $f(x) = 3x^4 + 16x^3 + 30x^2 + 24x + 5$ s využitím 2. derivace.

Řešení **Video** **Teorie: 48** **Příklady: 224, 225**

Úlohu vyřešíme na platném definičním oboru, ten zde je v zadání logaritmus, argument musí být kladný, $D(f) = \mathbf{R}$.

$f'(x) = 12x^3 + 48x^2 + 60x + 24$

Vypočítáme první derivaci.

$12x^3 + 48x^2 + 6x + 24 = 12(x+1)^2(x+2) = 0$

$x = -1, x = -2$ jsou stacionární body, může v nich být extrém.

$f''(x) = 36x^2 + 96x + 60$

Vypočítáme druhou derivaci a dosadíme do ní stacionární body.

$f''(-1) = 36.(-1)^2 + 96.(-1) + 60 = 0$

V bodě není extrém.

$f''(-2) = 36.(-2)^2 + 96.(-2) + 60 = 12 > 0$

V bodě je lokální minumum.

$[-2, -3]$

Lokální minimum.

126 - Globální extrémy funkce na daném intervalu

Poznámky

Zadání Najděte globální extrémy funkce $f(x) = x + \sin 2x$ na intervalu $I = \langle \frac{\pi}{3}, 2\pi \rangle$.

Řešení **Video** **Teorie:** 48 **Řešené příklady:** 224, 225

$f'(x) = 1 + 2\cos 2x$	Vypočítáme první derivaci.
$1 + 2\cos 2x = 0$	První derivaci položíme rovnu nule.
$\cos 2x = -\frac{1}{2}$	Kosínus je záporné ve druhém a ve čtvrtém kvadrantu.
$x_1 = \frac{\pi}{3} + k\pi, x_2 = \frac{2\pi}{3} + k\pi$	Vybereme ty body, které patří zadanému intervalu $I = \langle \frac{\pi}{3}, 2\pi \rangle$.
$x_1 = \frac{\pi}{3} + k\pi$	Dosadíme za $k = 0, k = 1$.
$x_{11} = \frac{\pi}{3}, x_{12} = \frac{4\pi}{3}$	
$x_2 = \frac{2\pi}{3} + k\pi$	Dosadíme za $k = 0, k = 1$.
$x_{21} = \frac{2\pi}{3}, x_{22} = \frac{5\pi}{3}$	

Ve všech bodech a v krajních bodech zadaného intervalu vypočítáme funkční hodnotu.

$x_{11} = \frac{\pi}{3}, y_{11} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 1,913$	
$x_{12} = \frac{4\pi}{3}, y_{12} = \frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 5,05$	
$x_{21} = \frac{2\pi}{3}, y_{21} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 1,228$	Globální minimum $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.
$x_{22} = \frac{5\pi}{3}, y_{22} = \frac{5\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 4,37$	
$x = 2\pi, y = 2\pi = 6,28$	Globální maximum $[2\pi, 2\pi]$.

127 - Konvexnost, konkávnost a inflexní body funkce

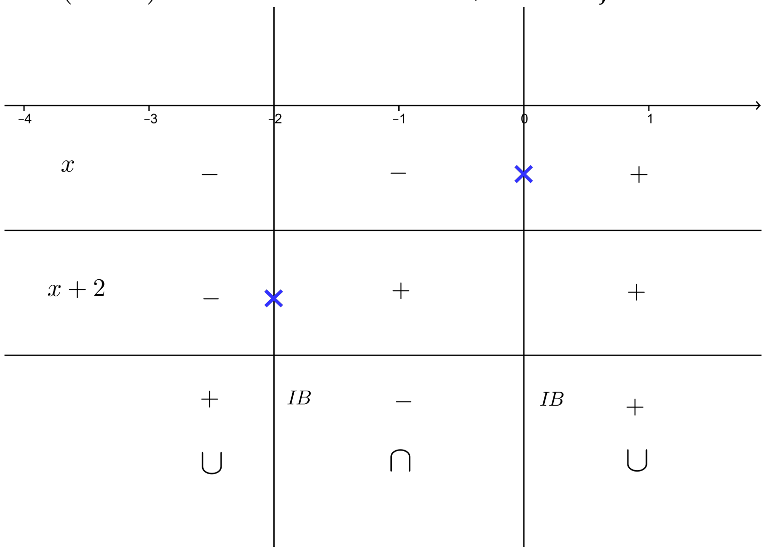
Poznámky

Zadání Najděte intervaly, kde je funkce $f(x) = x^4 + 4x^3 - x + 3$ konvexní, konkávní a zjistěte, zda má inflexní body.

Řešení **Video** **Teorie: 49** **Příklady: 226**

Úlohu vyřešíme na platném definičním oboru, ten zde tvoří množina všech reálných čísel, $D(f) = \mathbf{R}$.

$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 - 1$	Vypočítáme první derivaci.
$f''(x) = 12x^2 + 24x$	Vypočítáme druhou derivaci.
$12x^2 + 24x > 0$	Funkce je konvexní, tam kde je druhá derivace kladná.
$12x^2 + 24x < 0$	Funkce je konkávní, tam kde je druhá derivace záporná.
$12x(x+2) = 0$	$x = 0, x = -2$ jsou možné inflexní body.



$(-\infty, -2\rangle, \langle 0, \infty)$	Funkce je konvexní.
$\langle -2, 0\rangle$	Funkce je konkávní.
$[-2, -11], [0, 3]$	Inflexní body.

128 - Asymptoty grafu funkce

Zadání Najděte všechny asymptoty grafu funkce $f(x) = \frac{x}{x^2-3x+2}$.

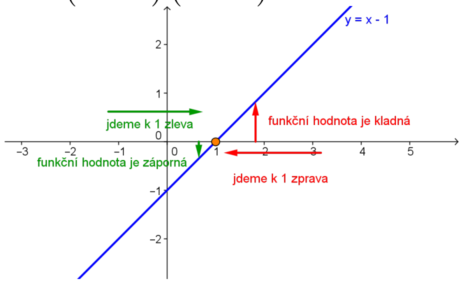
Řešení **Video** **Teorie: 50** **Příklady: 227,228**

Úlohu vyřešíme na platném definičním oboru, v zadání je zlomek, jmenovatel musí být nenulový, $D(f) = \mathbf{R} - \{1,2\}$.

V bodech nespojitosti budeme hledat asymptoty bez směrnice, jedná se o asymptoty rovnoběžné se souřadnicovou osou y o rovnici $x = x_0$. Budeme zjišťovat, jestli se funkce k asymptotě blíží v $+\infty$ nebo $-\infty$.

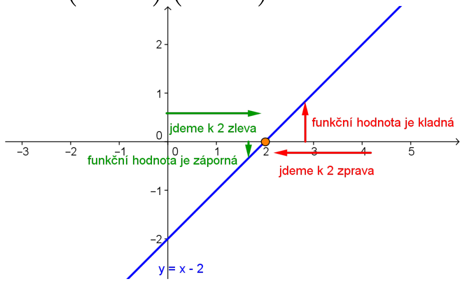
V našem případě jde o přímky $x = 1, x = 2$. Připomeňte si výpočet jednostranné limity, budeme tento postup používat.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x}{(x-2)(x-1)} = \frac{2}{-1.0}$$



$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{(x-2)(x-1)} = \frac{1}{-1.(+0)} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{(x-2)(x-1)} = \frac{1}{-1.(-0)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x}{(x-2)(x-1)} = \frac{2}{0}$$



$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x}{(x-2)(x-1)} = \frac{2}{+0.1} = +\infty$$
$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x}{(x-2)(x-1)} = \frac{2}{-0.1} = -\infty$$

Nyní budeme hledat asymptoty se směrnicí $y = kx + q$.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x.(x^2-3x+2)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{(x^2-3x+2)} = \frac{1}{\infty} = 0$$
$$q = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{(x^2-3x+2)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{(2x-3)} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Hledaná asymptota má rovnici $y = 0$, jedná se o souřadnicovou osu x.

Poznámky

129 - Asymptoty grafu funkce

Zadání Najděte všechny asymptoty grafu funkce $f(x) = x \arctan x$.

Řešení **Video** **Teorie: 50** **Příklady: 227,228**

Úlohu vyřešíme na platném definičním oboru, $D(f) = \mathbf{R}$.

Body nespojitosti zde nejsou, budeme proto hledat pouze asypmtoty se směrnicí $y = kx + q$.

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x \arctan x}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \arctan x = \pm\frac{\pi}{2}$$

$$q_1 = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to +\infty} \left(x \arctan x - \frac{\pi}{2} x \right) = \infty - \infty = \lim_{x \to +\infty} x \left(\arctan x - \frac{\pi}{2} \right) = \infty.0 =$$
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\arctan x - \frac{\pi}{2}\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^2}{1+x^2} = -1$$

Hledaná asymptota má rovnici $y = \frac{\pi}{2} x - 1$.

$$q_2 = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to -\infty} \left(x \arctan x + \frac{\pi}{2} x \right) = \infty - \infty = \lim_{x \to -\infty} x \left(\arctan x + \frac{\pi}{2} \right) = -\infty.0 =$$
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\left(\arctan x - \frac{\pi}{2}\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x^2}{1+x^2} = -1$$

Hledaná asymptota má rovnici $y = \frac{\pi}{2} x - 1$.

Poznámky

Řešené příklady – Lineární algebra

131 - Sčítání a odčítání matic

Zadání Vypočtěte $2 \cdot A - 3 \cdot B + 2 \cdot D - C$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 & 7 \\ 5 & 11 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 7 & 8 \\ 13 & -1 & 9 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení **Video** **Teorie: 53, 54, 55** **Příklady: 237 - 241**

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 & 7 \\ 5 & 11 & 4 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 3 & 7 & 8 \\ 13 & -1 & 9 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & -4 \\ 0 & 6 & -2 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 & 9 & 0 & -21 \\ -15 & -33 & -12 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 6 \\ 6 & 10 & 14 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 3 & 7 & 8 \\ 13 & -1 & 9 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -11 & 12 & -1 & -27 \\ -22 & -16 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

Poznámky

Násobíme-li matici číslem, násobíme tímto číslem každý její prvek.

Sčítat a odčítat můžeme pouze matice téhož typu.

Výsledná matice je stejného typu jako matice zadané.

132 - Násobení matic

Zadání Vynásobte matice A a B.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 6 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Řešení **Video** **Teorie: ??** **Příklady: ?? - 239**

Matice A je typu $(4,3)$. Matice B je typu $(3,3)$.

Lze násobit?

$A \cdot B$

$(4,\underline{3})\ (\underline{3},3)$

Počet sloupců matice A se shoduje s počtem řádků matice B.

Výsledná matice bude typu (4,3).

$B \cdot A$

$(3,\underline{3})\ (\underline{4},3)$

Počet sloupců matice B se neshoduje s počtem řádků matice A.

Nelze tedy násobit.

			3	0	1
A	$\cdot$	B	2	-1	1
			6	5	-2
1	1	2	17	9	-2
2	0	1	12	5	0
-1	3	4	27	17	-6
0	5	1	16	0	3

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 17 & 9 & -2 \\ 12 & 5 & 0 \\ 27 & 17 & -6 \\ 16 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Poznámky

Matice lze násobit pouze tehdy, shoduje-li se počet sloupců první matice s počtem řádků druhé matice. Výsledná matice pak bude typu (počet řádků 1. matice, počet sloupců 2. matice).

133 - Hodnost matice

Zadání Vypočtěte hodnost matice A, kde
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ -4 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ -6 & 3 & 0 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 4 \\ -2 & 3 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Řešení **Video** **Teorie: 56** **Příklady: 242 - 245**

Nejprve z matice vyloučíme řádek, který se opakuje nebo je násobkem jiného řádku.
3. řádek je dvojnásobkem 1. řádku,
4. řádek je trojnásobkem 1. řádku.
Vyloučíme tedy 3. a 4. řádek. Dostáváme tak následující ekvivalentní matici:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 4 \\ -2 & 3 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{lllll} \neg & \neg & \neg & /.(-1) \\ \mid + & \mid & \mid & \\ \leftarrow' & \mid + & \mid & \\ \leftarrow - -' & & \mid & \\ \leftarrow - - - -' & & & \end{array} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \neg \\ \leftarrow' \ \textit{vymena} \\ \\ \leftarrow \ \textit{vynechame} \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{lll} & & \\ \neg \ /.(-2) & \neg \ /.(-3) \\ \leftarrow' & \mid \\ \leftarrow - - - - & -' \end{array} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & -4 & -9 \\ 0 & 0 & -5 & -4 & -9 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \ \textit{vynechame} \end{array}$$

Výsledná matice $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & -4 & -9 \end{pmatrix}$ má 3 LNZ řádky, její hodnost je tedy 3.

Jelikož tato matice vznikla ze základní matice použitím elementárních úprav, hodnosti obou matic jsou stejné. Tedy $h(A) = 3$.

Poznámky

Pomocí elementárních úprav postupně nulujeme jednotlivé sloupce pod hlavní diagonálou. Tedy snažíme se dostat do matice co nejvíce nul. Začínáme vždy od prvního sloupce, dále pokračujeme druhým, třetím atd.

134 - Determinant matice

Zadání Vypočtěte determinant matice A 1. řádu, kde $A = (-7)$.

Řešení **Video** **Teorie: 57, 58, 59** **Příklady: 246 - 251**

Determinant jednoprvkové matice je roven danému prvku této matice. Tedy

$$\det A = |-7| = \underline{-7}.$$

Poznámky

POZOR!

Označení $|-7|$ neznamená absolutní hodnotu, nýbrž označení determinantu!

135 - Determinant matice

Zadání Vypočtěte determinant matic B, C 2. řádu, kde

a) $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}$ b) $C = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$

Řešení **Video** **Teorie: 57, 58, 59** **Příklady: 246 - 251**

ad a) $$\det B = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -7 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-7) - 8 \cdot (-3) = -28 + 24 = \underline{-4}.$$

ad b) $$\det C = \begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x) = \cos^2 x + \sin^2 x = \underline{1}.$$

Poznámky

Determinant 2. řádu vypočteme tak, že od součinu prvků hlavní diagonály odečteme součin prvků vedlejší diagonály.

136 - Determinant matice

Zadání Vypočtěte determinant matice D 3. řádu Sarrusovým pravidlem, kde

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Řešení **Video** **Teorie: 57, 58, 59** **Příklady: 246 - 251**

$$\det D = \begin{array}{|ccc|l} 1 & 0 & -1 & - \\ -1 & 2 & 1 & - \\ 3 & 1 & 2 & -\,+ \\ \hline 1 & 0 & -1 & + \\ -1 & 2 & 1 & + \end{array}$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 \cdot 1 -$$

$$- \, [3 \cdot 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \cdot 2] =$$

$$= 4 + 1 + 0 - [-6 + 1 - 0] = 5 + 5 = \underline{10}$$

Poznámky

Sarrusovo pravidlo:

Sepíšeme první 2 řádky.
Prvky ležící na úhlopříčkách vynásobíme, přičemž těm, které směřují zleva doprava (hlavní diagonála) přiřadíme znaménko + a těm, které směřují zprava doleva (vedlejší diagonála) přiřadíme znaménko -.

137 - Determinant matice

Zadání Vypočtěte determinant matice D 3. řádu Laplaceovým rozvojem, přičemž

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Řešení **Video** **Teorie: 57, 58, 59** **Příklady: 246 - 251**

Provedeme Laplaceův rozvoj podle 1. řádku (viz poznámka).

$$\det D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \underline{10}$$

Poznámky

Pro Laplaceův rozvoj vybíráme řádek nebo sloupec matice, ve kterém je obsaženo nejvíce nul.

138 - Determinant matice

Zadání Vypočtěte determinant matice D 3. řádu Laplaceovým rozvojem, přičemž

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Řešení **Video** **Teorie: 57, 58, 59** **Příklady: 246 - 251**

Provedeme Laplaceův rozvoj podle 1. řádku (viz poznámka).

$$\det D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (2 \cdot 2 - 1 \cdot 1) + 0 + (-1) \cdot (-1 \cdot 1 - 3 \cdot 2) = 3 + 7 = \underline{10}$$

Poznámky

Pro Laplaceův rozvoj vybíráme řádek nebo sloupec matice, ve kterém je obsaženo nejvíce nul.

139 - Determinant matice

Zadání Vypočtěte determinant matice D 3. řádu užitím vlastností determinantu, kde

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Řešení **Video** **Teorie: 57, 58, 59** **Příklady: 246 - 251**

$$\det D = \begin{array}{|ccc|} 1 & 0 & -1^{-} \\ -1 & 2 & 1^{-} \\ 3 & 1 & 2^{-}_{+} \\ \end{array}$$
$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1_{+} \\ -1 & 2 & 1_{+} \end{array}$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 \cdot 1 -$$

$$- \, [3 \cdot 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \cdot 2] =$$

$$= 4 + 1 + 0 - [-6 + 1 - 0] = 5 + 5 = \underline{10}$$

Poznámky

Sarrusovo pravidlo:

Sepíšeme první 2 řádky.

Prvky ležící na úhlopříčkách vynásobíme, přičemž těm, které směřují zleva doprava (hlavní diagonála) přiřadíme znaménko + a těm, které směřují zprava doleva (vedlejší diagonála) přiřadíme znaménko -.

140 - Determinant matice

Zadání Vypočtěte determinant matice E 5. řádu, kde $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Řešení **Video** **Teorie: 57, 58, 59** **Příklady: 246 - 251**

Matici determinantu převedeme na matici trojúhelníkovou.

$$\det E = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} /.(-1) \\ \\ \leftarrow' \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} /.(-3) \\ \\ \\ \leftarrow' \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+4} \cdot 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix}}_{\det E_1}.$$

Nyní jsme dostali subdeterminant 3. řádu, který spočítáme Sarrusovým pravidlem.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2 + 2 - 18 - (6 - 6 - 2) = -16$$

Poznámky

Determinant matice se nemění, přičteme-li k řádku matice lineární kombinaci zbývajících řádků matice.

Násobíme-li řádek matice determinantu reálným číslem $c \neq 0$, pak musíme determinant vynásobit číslem $\frac{1}{c}$.

Determinant trojúhelníkové matice se rovná součinu prvků na hlavní diagonále.

141 - Determinant matice

Poznámky

Řešení **Video** **Teorie: 57, 58, 59** **Příklady: 246 - 251**

Subdeterminant $\det E_2$ 3. řádu spočítáme Sarrusovým pravidlem.

$$\det E_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} - \\ - \\ - \\ + \\ + \\ + \end{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix} = -2+2-18-(6-6-2) = -16$$

Nyní stačí dosadit spočítanou hodnotu subdeterminantu $\det E_2$ do výpočtu determinantu $\det E$, tedy

$\det E = (-1)^{1+4} \cdot 1 \cdot (-16) = \underline{16}$

142 - Inverzní matice

Zadání Pomocí adjungované matice vypočtěte inverzní matici k matici D, kde
$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Řešení **Video** **Teorie: 60** **Příklady: 252, 253, 254, 255**

Matice D musí být regulární, tzn. $\det D \neq 0$. Nejprve spočítáme $\det D$:

$$\det D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -23.$$

Nyní matici D transponujeme (vyměníme řádky za sloupce):

$$D^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vypočteme adjungovanou matici $adjD$:

$$adjD = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 & 1 \\ 7 & 4 & -10 \\ 12 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Inverzní matice D^{-1} má tedy následující tvar

$$\begin{pmatrix} -3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Poznámky

$$D^{-1} = \frac{1}{\det D} \cdot adjD.$$

143 - Inverzní matice

Zadání Užitím Gaussovy metody určete inverzní matici k matici A, kde $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Řešení **Video** **Teorie: 60** **Příklady: 252, 253, 254, 255**

$$A/E = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} /.(-1) \\ /.(-2) \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ /.4 \quad /.2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ /.(-1) \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} /:2 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) = E/A^{-1}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Poznámky

Matici A převedeme pomocí ekvivalentních úprav na jednotkovou matici E. Pokud stejné upravy použijeme i na jednotkovou matici E, dostaneme tak nakonec matici A^{-1}, tedy inverzní matici k matici A.

144 - Soustavy lineárních rovnic

Poznámky

Zadání Řešte soustavu lineárních rovnic:
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 8 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & 8 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & - & 6x_3 & - & 2x_4 & = & 8 \end{array}.$$

Řešení **Video** **Teorie: 61, 62** **Příklady: 256 - 262**

Soustavu budeme řešit Gaussovou eliminační metodou. Je vidět, že je výhodné hned vyměnit pořadí rovnic. Na první řádek můžeme zaměnit buď druhou nebo třetí rovnici, další pořadí je pak libovolné. Dostáváme tedy následující matici soustavy, kterou budeme dále upravovat

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & 8 \\ 3 & 3 & -6 & -2 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{l} /.2 \quad /.3 \\ + \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 8 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 8 \\ 0 & 9 & 0 & -5 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ /.(-4) \quad /.(-3) \\ /.3 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -23 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & -15 & -16 & -16 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ /.(-15) \\ /.23 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -23 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -124 & -248 \end{array}\right)$$

Původní matici sousty jsme převedli na trojúhelníkový tvar a nyní aplikujeme Frobeniovu větu.
Platí, že
$$h(A) = h(A/B) = 4,$$
tj. hodnosti matice soustavy a matice rozšířené se shodují, tedy soustava má řešení. Navíc máme 4 neznámé a platí
$$h(A) = h(A/B) = n = 4$$
odsud plyne, že existuje právě jedno řešení uvažované soustavy. To spočítáme např. použitím zpětného chodu.

145 - Soustavy lineárních rovnic

Poznámky

Zpětným chodem dostváme

- z posledního řádku:

$$\begin{aligned} -124x_4 &= -248 \ / : (-124) \\ x_4 &= \underline{2} \end{aligned}$$

- ze třetího řádku:

$$\begin{aligned} -23x_3 - 4x_4 &= -8 \qquad \text{dosadit za } x_4 \\ -23x_3 - 8 &= -8 \\ -23x_3 &= 0 \\ x_3 &= \underline{0} \end{aligned}$$

- ze druhého řádku:

$$\begin{aligned} 3x_2 + 5x_3 + x_4 &= 8 \qquad \text{dosadit za } x_3,\ x_4 \\ 3x_2 + 0 + 2 &= 8 \\ 3x_2 &= 6 \ / : 3 \\ x_2 &= \underline{2} \end{aligned}$$

- z prvního řádku:

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \qquad \text{dosadit za } x_2,\ x_3,\ x_4 \\ -x_1 + 4 + 0 - 2 &= 0 \\ -x_1 &= -2 \\ x_1 &= \underline{2} \end{aligned}$$

Řešením soustavy je sloupcový vektor $\underline{\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (2, 2, 0, 2)^T}$.

146 - Soustavy lineárních rovnic

Poznámky

Zadání Řešte soustavu lineárních rovnic:
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 4 \\ -2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 3 \\ 4x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & = & 9 \end{array}.$$

Řešení **Video** **Teorie: 61, 62** **Příklady: 256 - 262**

Soustavu budeme řešit Gaussovou eliminační metodou. Dostáváme tedy následující matici soustavy, kterou budeme dále upravovat

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 3 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & -1 & -1 & 3 \\ 4 & -3 & 4 & 2 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{l} \neg \qquad \neg \; /.(-2) \\ \leftarrow' \; + \quad | \\ \leftarrow \; - \; -' \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \neg \\ \leftarrow' \; + \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right)$$

Původní matici soustavy jsme převedli na stupňovitý tvar a nyní aplikujeme Frobeniovu větu.
Platí, že
$$h(A) = 2, \qquad h(A/B) = 3,$$
tj. hodnosti matice soustavy a matice rozšířené se neshodují, tedy soustava nemá řešení!
V posledním řádku matice máme na levé stravě 0, na pravé 8. Tedy rovnost $0 = 8$, což je samozřejmě nesmysl.

147 - Soustavy lineárních rovnic

Poznámky

Zadání Řešte soustavu lineárních rovnic:
$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ -3x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ -x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 6 \end{array}.$$

Řešení **Video** **Teorie: 61, 62** **Příklady: 256 - 262**

Soustavu budeme řešit Gaussovou eliminační metodou. Je vhodné přehodit rovnice tak, že začneme poslední z nich. Dostáváme tedy následující matici soustavy, kterou budeme dále upravovat

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \neg \quad /.2 \quad \neg \quad /.(-3) \\ \leftarrow' \qquad\qquad | \\ \leftarrow \; -- \;\; -' \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 9 & 16 \\ 0 & -1 & -9 & -16 \end{array}\right) \leftarrow vynechat \sim \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 9 & 16 \end{array}\right)$$

Původní matici soustavy jsme převedli na stupňovitý tvar a nyní použijeme Frobeniovu větu.
Platí, že
$$h(A) = 2, \qquad h(A/B) = 2,$$
tj. hodnosti matice soustavy a matice rozšířené se shodují, tedy soustava má řešení.
Počet neznámých $n = 3$, což znamená
$$2 = h(A) = h(A/B) \neq n = 3$$
odtud plyne, že existuje nekonečně mnoho řešení uvažované soustavy závislých na $n - h(A) = 3 - 2 = 1$ parametru. Opět použijeme zpětného chodu.

148 - Soustavy lineárních rovnic

Poznámky

Zpětným chodem dostáváme

- z posledního řádku:

$$\begin{aligned} x_2 + 9x_3 &= 16 \qquad \text{zvolme parametr } t = x_3 \\ x_2 &= \underline{16 - 9t} \end{aligned}$$

- z prvního řádku:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 4x_3 &= 6 \qquad \text{dosadit za } x_2,\ x_3 \\ -x_1 + 16 - 9t + 4t &= 6 \\ -x_1 &= 6 - 16 + 9t - 4t \qquad /.(-1) \\ x_1 &= \underline{10 - 5t} \end{aligned}$$

Řešením soustavy je sloupcový vektor $\underline{\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T = (10 - 5t, 16 - 9t, t)^T}$.

149 - Soustavy lineárních rovnic

Poznámky

Zadání Řešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 7x_4 & + & 14x_5 & = & 28 \\
 & & x_2 & - & 3x_3 & + & 14x_4 & - & 35x_5 & = & 14 \\
2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & 14x_4 & + & 21x_5 & = & 0 \\
3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & - & 7x_4 & & & = & 42 \\
-x_1 & - & 3x_2 & & & - & 7x_4 & + & 21x_5 & = & -42
\end{array}.$$

Řešení **Video** **Teorie: 61, 62** **Příklady: 256 - 262**

Soustavu budeme řešit Gaussovou eliminační metodou.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r}
1 & 2 & 3 & -7 & 14 & 28 \\
0 & 1 & -3 & 14 & -35 & 14 \\
2 & 1 & 1 & -14 & 21 & 0 \\
3 & 4 & 1 & -7 & 0 & 42 \\
-1 & -3 & 0 & -7 & 21 & -42
\end{array}\right)
\begin{array}{l} /.(-2) \quad /.(-3) \\ + \\ \\ \\ \\ \end{array}
\sim
\left(\begin{array}{rrrrr|r}
1 & 2 & 3 & -7 & 14 & 28 \\
0 & 1 & -3 & 14 & -35 & 14 \\
0 & -3 & -5 & 0 & -7 & -56 \\
0 & -2 & -8 & 14 & -42 & -42 \\
0 & -1 & 3 & -14 & 35 & -14
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{L}NZ \\ \\ vynechat \end{array}$$

$$\sim
\left(\begin{array}{rrrrr|r}
1 & 2 & 3 & -7 & 14 & 28 \\
0 & 1 & -3 & 14 & -35 & 14 \\
0 & -3 & -5 & 0 & -7 & -56 \\
0 & -2 & -8 & 14 & -42 & -42
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ /.3 \quad /.2 \\ \\ \\ \end{array}
\sim
\left(\begin{array}{rrrrr|r}
1 & 2 & 3 & -7 & 14 & 28 \\
0 & 1 & -3 & 14 & -35 & 14 \\
0 & 0 & -14 & 42 & -112 & -14 \\
0 & 0 & -14 & 42 & -112 & -14
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ \\ /:14 \quad \mathrm{L}NZ \\ vynechat \end{array}$$

$$\sim
\left(\begin{array}{rrrrr|r}
1 & 2 & 3 & -7 & 14 & 28 \\
0 & 1 & -3 & 14 & -35 & 14 \\
0 & 0 & -1 & 3 & -8 & -1
\end{array}\right)$$

Původní matici soustavy jsme převedli na stupňovitý tvar a nyní použijeme Frobeniovu větu. Platí, že

150 - Soustavy lineárních rovnic

Poznámky

Zpětným chodem dostváme

- z posledního řádku:

$$\begin{aligned} -x_3+3x_4-8x_5 &= -1 \qquad \text{zvolme parametry } u=x_4,\ v=x_5 \\ -x_3+3u-8v &= -1 \\ x_3 &= \underline{1+3u-8v} \end{aligned}$$

- z druhého řádku:

$$\begin{aligned} x_2-3x_3+14x_4-35x_5 &= 14 \qquad \text{dosadit za } x_3,\ x_4,\ x_5 \\ x_2-3(1+3u-8v)+14u-35v &= 14 \\ x_2 &= \underline{17-5u+11v} \end{aligned}$$

- z prvního řádku:

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3-7x_4+14x_5 &= 28 \qquad \text{dosadit za } x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \\ x_1+2(17-5u+11v)+3(1+3u-8v)-7u+14v &= 28 \\ x_1 &= \underline{-9+8u-12v} \end{aligned}$$

Řešením soustavy je sloupcový vektor:

$\underline{\vec{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)^T=(-9+8u-12v,17-5u+11v,1+3u-8v,u,v)^T}.$

151 - Soustavy lineárních rovnic

Zadání Řešte homogenní soustavu lineárních rovnic:
$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & - & 4x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}.$$

Řešení **Video** **Teorie: 61, 62** **Příklady: 256 - 262**

Soustavu budeme řešit Gaussovou eliminační metodou. Pravou stranu nepíšeme.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{llllll} \neg & /.(-2) & \neg & /.(-3) & \neg & /.(-2) \\ \leftarrow' & & | & & | & \\ \leftarrow & --- & -' & & | & \\ \leftarrow & --- & - & --- & -' & \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{llll} \neg & /.(-1) & \neg & \\ \leftarrow' & & +| & \\ \leftarrow & --- & -' & \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{ll} \neg & /.\frac{5}{2} \\ \leftarrow' & \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Užijeme Frobeniovu větu. Platí, že $h(A) = n = 4$, tj. hodnost matice soustavy se shoduje s počtem neznámých, tedy existuje právě jedno řešení uvažované soustavy, a to řešení triviální, tj. sloupcový vektor

$$\underline{\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (0, 0, 0, 0)^T}.$$

Poznámky

Homogenní soustava lin. rovnic má vždy řešení a to buď triviální, nebo jich má nekonečně mnoho závislých na $n - h(A)$ parametrech.

152 - Soustavy lineárních rovnic

Zadání Řešte homogenní soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & - & 4x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & - & 10x_4 & = & 0 \end{array}.$$

Řešení **Video** **Teorie: 61, 62** **Příklady: 256 - 262**

Soustavu budeme řešit Gaussovou eliminační metodou. Pravou stranu nepíšeme.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & 5 & -10 \end{pmatrix} \begin{array}{l} /.2 \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & 3 & -8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ /.(-1) \quad /.(-3) \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{L}NZ \\ vynechat \end{array} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Užijeme Frobeniovu větu. Platí, že $h(A) = 3$, $n = 4$, tj. hodnost matice soustavy se neshoduje s počtem neznámých, tedy existuje nekonečně mnoho řešení uvažované soustavy závislých na $n - h(A) = 4 - 3 = 1$ parametru.

Poznámky

Homogenní soustava lin. rovnic má vždy řešení a to buď triviální, nebo jich má nekonečně mnoho závislých na $n - h(A)$ parametrech.

153 - Soustavy lineárních rovnic

Zpětným chodem dostváme

- z posledního řádku:

$$\begin{aligned} -2x_4 &= 0 \\ x_4 &= \underline{0} \end{aligned}$$

- z druhého řádku:

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 - 2x_4 &= \qquad\qquad \text{zvolme parametr } x_3 = t \\ x_2 &= \underline{-t} \end{aligned}$$

- z prvního řádku:

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \qquad\qquad \text{dosadit za } x_2,\ x_3,\ x_4 \\ -x_1 + 2(-t) - t + 0 &= 0 \\ x_1 &= \underline{-3t} \end{aligned}$$

Řešením je sloupcový vektor:

$$\underline{\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (-3t, -t, t, 0)^T}.$$

Poznámky

Homogenní soustava lin. rovnic má vždy řešení a to buď triviální, nebo jich má nekonečně mnoho závislých na $n - h(A)$ parametrech.

154 - Soustavy lineárních rovnic

Zadání Řešte soustavu lineárních rovnic Cramerovým pravidlem:
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 4 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & = & 14 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 19 \end{array}.$$

Řešení **Video** **Teorie: 63** **Příklady: 263**

Spočítáme příslušné determinanty:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 2 & -5 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 179 \qquad \det A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 5 & 14 & -5 \\ 3 & 19 & 2 \end{vmatrix} = 358$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 4 \\ 14 & 2 & -5 \\ 19 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 537 \qquad \det A_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 2 & 14 \\ 3 & 4 & 19 \end{vmatrix} = 179$$

Spočítáme příslušné složky řešení:

$$x_1 = \frac{det A_1}{det A} = \frac{537}{179} = 3$$

$$x_2 = \frac{det A_2}{det A} = \frac{358}{179} = 2$$

$$x_3 = \frac{det A_3}{det A} = \frac{179}{179} = 1$$

Řešením je sloupcový vektor:

$$\underline{\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T = (3, 2, 1)^T}.$$

Poznámky

Cramerovo pravidlo:

1. jen pro soustavy s regulární maticí soustavy A, tj.
$$det A \neq 0$$
2. vypočtou se determinanty A, A_i (nahradí se příslušný $i-$tý sloupec pravou stranou)
3. spočítájí se složky řešení
$$x_i = \frac{det A_i}{det A}$$

155 - Maticová rovnice

Zadání Řešte maticovou rovnici $A \cdot X = B$ s neznámou X, kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení **Video** **Teorie: 64** **Příklady: 264**

Z rovnice $A \cdot X = B$ vyjádříme X tak, že rovnici vynásobíme ZLEVA maticí A^{-1}.

$$\begin{aligned} A \cdot X &= B && / \cdot A^{-1} \text{ zleva} \\ A^{-1} \cdot A \cdot X &= A^{-1} \cdot B && \text{odtud dostáváme (viz poznámka):} \\ X &= A^{-1} \cdot B && \text{vynásobíme příslušné matice.} \end{aligned}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 3 = -1,$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -(-3) & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

		2	3	7
A^{-1}	$\cdot B$	2	-1	0
2	1	6	5	14
-3	-2	-10	-7	-21

$$X = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 14 \\ -10 & -7 & -21 \end{pmatrix}$$

Poznámky

A^{-1} inverzní matice k A.

$A^{-1} \cdot A = E$,

E jednotková matice.

156 - Soustavy lineárních rovnic

Zadání Řešte soustavu lineárních rovnic pomocí inverzní matice:
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 4 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & = & 14 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 19 \end{array}.$$

Řešení **Video** **Teorie: 65** **Příklady: 265, 266**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 2 & -5 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{179} \cdot \begin{pmatrix} 24 & 22 & 7 \\ -25 & -8 & 30 \\ 14 & -17 & 19 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc|c} & & & & 4 \\ & A & \cdot & B & 14 \\ & & & & 19 \\ \hline & 24 & 22 & 7 & 3 \\ \frac{1}{179}\cdot & -25 & -8 & 30 & 2 \\ & 14 & -17 & 19 & 1 \end{array}$$

Řešením je sloupcový vektor:

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (3, 2, 1)^T.$$

Poznámky

Soustavu můžeme napsat v maticovém tvaru
$$A.X = B$$

A - matice soustavy
B - pravá strana

Násobením zleva inverzní maticí A^{-1} dostaneme řešení soustavy:

$$\begin{array}{rcll} A \cdot X & = & B & /.A^{-1} \text{ zleva} \\ A^{-1} \cdot A \cdot X & = & A^{-1} \cdot B & \\ E \cdot X & = & A^{-1} \cdot B & \\ X & = & A^{-1} \cdot B & \end{array}$$

Řešené příklady – Analytická geometrie

158 - Analytická geometrie - rovina

Zadání Napište parametrické rovnice a obecnou rovnici roviny, která prochází průsečíkem přímky a s rovinou ρ a je rovnoběžná s přímkami p, q.

$$a: \begin{array}{rcrcr} x & = & 2 & + & 3t \\ y & = & 4 & - & 4t \\ z & = & 1 & + & t \end{array} \qquad \rho: 2x - 3y + z - 12 = 0 \qquad p: \begin{array}{rcrcr} x & = & 2 & - & 4r \\ y & = & 3 & + & 7r \\ z & = & 6 & - & r \end{array} \qquad q: \begin{array}{rcrcr} x & = & 10 & - & 6s \\ y & = & & & 3s \\ z & = & 1 & & \end{array}$$

Řešení **Video** **Teorie: 74, 75** **Příklady: 274,275**

Pro parametrické rovnice potřebujeme bod a dva různé vektory.

Bod - získáme jako průsečík přímky a roviny. Parametrické rovnice dosadíme do obecné rovnice roviny a vypočítáme parametr průsečíku.

Vektory - použijeme směrové vektory přímek p, q, protože jsou, stejně jako přímky, s hledanou rovinou rovnoběžné.

$$a: \begin{array}{rcrcr} x & = & 2 & + & 3t \\ y & = & 4 & - & 4t \\ z & = & 1 & + & t \end{array} \qquad \rho: 2x - 3y + z - 12 = 0$$

$2(2+3t) - 3(4-4t) + 1 + t - 12 = 0$ Řešíme lineární rovnici.

$t = 1$ Dostali jsme jedno řešení. Parametr dosadíme do rovnic přímky.

$A[5, 0, 2]$ Přímka a rovina jsou různoběžné, mají společný průsečík.

$$p: \begin{array}{rcrcr} x & = & 2 & - & 4r \\ y & = & 3 & + & 7r \\ z & = & 6 & - & r \end{array}$$

Směrový vektor $\vec{s_p} = (-4, 7, -1)$.

$$q: \begin{array}{rcrcr} x & = & 10 & - & 6s \\ y & = & & & 3s \\ z & = & 1 & & \end{array}$$

Směrový vektor $\vec{s_q} = (-6, 3, 0)$.

Nyní můžeme napsat parametrické rovnice hledané roviny $\alpha: \begin{array}{rcrcrcr} x & = & 5 & - & 4u & - & 6v \\ y & = & & + & 7u & + & 3v \\ z & = & 2 & - & u & & \end{array}$.

Poznámky

Vzájemná poloha přímky a roviny:

a) různoběžné - jeden společný bod (průsečík),

b) rovnoběžné - žádný společný bod,

c) přímka leží v rovině - ∞-mnoho společných bodů.

159 - Analytická geometrie - rovina

Zadání Napište parametrické rovnice a obecnou rovnici roviny, která prochází průsečíkem přímky a s rovinou ρ a je rovnoběžná s přímkami p, q.

$$a: \begin{array}{rcrcr} x &=& 2 &+& 3t \\ y &=& 4 &-& 4t \\ z &=& 1 &+& t \end{array} \qquad \rho: 2x-3y+z-12=0 \qquad p: \begin{array}{rcrcr} x &=& 2 &-& 4r \\ y &=& 3 &+& 7r \\ z &=& 6 &-& r \end{array} \qquad q: \begin{array}{rcrcr} x &=& 10 &-& 6s \\ y &=& && 3s \\ z &=& 1 && \end{array}$$

Řešení **Video** **Teorie: 74, 75** **Příklady: 274,275**

Pro obecnou rovnici $ax+by+cz+d=0$ potřebujeme bod a normálový vektor.
Bod - již máme jako průsečík přímky a roviny.
Normálový vektor - je kolmý k rovině, tedy je kolmý k vektorům $\vec{s_p}, \vec{s_q}$, získáme ho jako vektorový součin $\vec{n} = \vec{s_p} \times \vec{s_q}$.

$$p: \begin{array}{rcrcr} x &=& 2 &-& 4r \\ y &=& 3 &+& 7r \\ z &=& 6 &-& r \end{array}$$

Směrový vektor $\vec{s_p} = (-4, 7, -1)$.

$$q: \begin{array}{rcrcr} x &=& 10 &-& 6s \\ y &=& && 3s \\ z &=& 1 && \end{array}$$

Směrový vektor $\vec{s_q} = (-6, 3, 0)$.

$$\vec{n} = \vec{s_p} \times \vec{s_q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 7 & -1 \\ -6 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (3, 6, 30)$$

$\alpha: 3x+6y+30z+d=0$ Do obecné rovnice dosadíme souřadnice normálového vektoru.
$\alpha: 3.5+6.0+30.2+d=0$ Dosadíme souřadnice bodu A a vypočítáme d.
$d=-75$
$\alpha: 3x+6y+30z-75=0$ Rovnici ještě vydělíme 3.
$\alpha: x+2y+10z-25=0$ Dostali jsme hledanou rovnici.

Poznámky

Vektorový součin dvou vektorů:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix},$$

kde $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$ jsou jednotkové vektory ve směru os kartézské soustavy souřadnic.
Nebo

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 \\ v_1 \end{vmatrix} \right.$$

160 - Analytická geometrie - vzdálenost

Zadání Vypočítejte vzdálenost bodu A od přímky r. Bod je průsečík dvou přímek a, b a přímka je dána bodem K a směrovým vektorem $\vec{s}$.

$$a: \begin{array}{rcrcr} x & = & 2 & + & 3t \\ y & = & 4 & - & t \\ z & = & 1 & + & t \end{array} \qquad b: \begin{array}{rcrcr} x & = & 1 & - & 4s \\ y & = & 7 & + & 4s \\ z & = & 2 & & \end{array} \qquad K[1,3,1] \qquad \vec{s} = (2,-2,1)$$

Řešení **Video** **Teorie: 78** **Příklady: 279, 280**

Nejdříve najdeme bod A. Budeme řešit soustavu 6 rovnic o 5 neznámých. Tu převedeme na 3 rovnice o 2 neznámých.

$$a: \begin{array}{rcrcr} x & = & 2 & + & 3t \\ y & = & 4 & - & t \\ z & = & 1 & + & t \end{array} \qquad b: \begin{array}{rcrcr} x & = & 1 & - & 4s \\ y & = & 7 & + & 4s \\ z & = & 2 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2 & + & 3t & = & 1 & - & 4s \\ 4 & - & t & = & 7 & + & 4s \\ 1 & + & t & = & 2 & & \end{array}$$

Z poslední rovnice vypočítáme t.

$t = 1$

Dosadíme do prvních dvou rovnic a vypočítáme s.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2 & + & 3 & = & 1 & - & 4s \\ 4 & - & 1 & = & 7 & + & 4s \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrr} 4 & = & - & 4s \\ -4 & = & + & 4s \end{array}$$

Z první rovnice je $s = -1$, z druhé rovnice také.

Soustava má jediné řešení, přímky jsou různoběžné, mají průsečík.
Parametr $t = 1$ dosadíme do rovnic přímky a
nebo parametr $s = -1$ do přímky b.

$A[5,3,2]$

Poznámky

Určete společné body přímek, tj. sestavte si a řešte příslušnou soustavu lineárních rovnic.
Pak:
a) různoběžky - jeden společný bod (průsečík),
b) rovnoběžky - žádný společný bod, ale leží v jedné rovině,
c) mimoběžky - žádný společný bod a neleží v jedné rovině,
d) totožné přímky - ∞-mnoho společných bodů.

161 - Analytická geometrie - vzdálenost

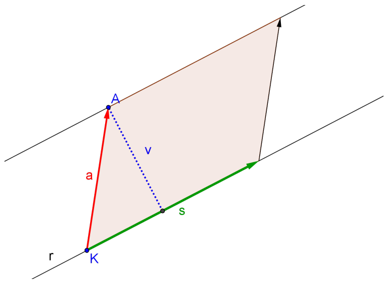
Poznámky

Zadání Vypočítejte vzdálenost bodu A od přímky r. Bod je průsečík dvou přímek a, b a přímka r je dána bodem K a směrovým vektorem $\vec{s}$.

$$a: \begin{array}{rcrcr} x &=& 2 &+& 3t \\ y &=& 4 &-& t \\ z &=& 1 &+& t \end{array} \qquad b: \begin{array}{rcrcr} x &=& 1 &-& 4s \\ y &=& 7 &+& 4s \\ z &=& 2 && \end{array} \qquad K[1,3,1] \qquad \vec{s} = (2,-2,1)$$

Řešení **Video** **Teorie: 78** **Příklady: 279, 280**

Nyní se můžeme pustit do výpočtu vzdálenosti bodu A od přímky r.



Vzdálenost v vypočítáme podle vzorce $v = \frac{|\vec{s} \times \vec{a}|}{|\vec{s}|}$.

Z obrázku vidíme, že $\vec{s}$ je směrový vektor přímky, $\vec{a} = A - K$. Připomeňte si odvození vzorce z přednášek.

$K[1,3,1]$, $A[5,3,2]$, $\vec{s} = (2,-2,1)$

$\vec{a} = A - K = (4,0,1)$ Vypočítáme souřadnice vektoru $\vec{a}$.

$$\vec{s} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-2,2,8)$$ V čitateli potřebujeme vektorový součin.

$\left|\vec{s} \times \vec{a}\right| = \sqrt{4+4+64} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ Velikost vektorového součinu.

$\left|\vec{s}\right| = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$

$$v = \frac{|\vec{s} \times \vec{a}|}{|\vec{s}|} = \frac{6\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2}$$

162 - Analytická geometrie - odchylka

Zadání Ověřte, zda jsou přímky p, q kolmé. Přímka p je průsečnicí rovin α, β a přímka q je dána bodem Q a směrovým vektorem $\vec{s_q}$.

$\alpha : 2x - y + 3z - 4 = 0$ $\quad \beta : 4x + y - 2z + 1 = 0$ $\quad Q\,[7, 6, -1]$ $\quad \vec{s_q} = (6, 0, 1)$

Řešení **Video** **Teorie: 73** **Příklady: 281**

Dvě přímky jsou kolmé, mají-li kolmé směrové vektory. Potřebujeme tedy souřadnice obou směrových vektorů. Směrový vektor přímky p vypočítáme jako vektorový součin normálových vektorů rovin α, β.
Připomeňme si ještě, že vektory jsou kolmé, je-li jejich skalární součin roven 0.

$\vec{n_\alpha} = (2, -1, 3)$, $\vec{n_\beta} = (4, 1, -2)$

$$\vec{s_p} = \vec{n_\alpha} \times \vec{n_\beta} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1, 16, 6)$$

Toto je hledaný směrový vektor $\vec{s_p}$.

$\vec{s_q} = (6, 0, 1)$

Kolmost ověříme skalárním součinem.

$\vec{s_p} \cdot \vec{s_q} = -1 \cdot 6 + 16 \cdot 0 + 6 \cdot 1 = 0$ Vektory a tedy i zadané přímky jsou kolmé.

Poznámky

Určete společné body přímek, tj. sestavte si a řešte příslušnou soustavu lineárních rovnic.
Pak:
a) různoběžky - jeden společný bod (průsečík),
b) rovnoběžky - žádný společný bod, ale leží v jedné rovině,
c) mimoběžky - žádný společný bod a neleží v jedné rovině,
d) totožné přímky - ∞-mnoho společných bodů.
Vektorový součin dvou vektorů:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix},$$

kde $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$ jsou jednotkové vektory ve směru os kartézské soustavy souřadnic.
Nebo

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right).$$

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$