Matematika I: Pracovní listy do cvičení

Dagmar Dlouhá, Radka Hamříková, Zuzana Morávková, Michaela Tužilová

Pro FAST upravil Petr Volný

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie

VŠB - Technická univerzita Ostrava

Pracovní listy – Funkce jedné proměnné

165 - Rovnice a nerovnice

Zadání Vyřešte:

a) $x^2 - x - 2 = 0$ b) $x^2 - x - 2 < 0$ c) $2x^2 + 9x - 5 \geq 0$ d) $-x^2 + 3x > 0$

Řešení **Video**

Tahák

Kořeny kvadratické rovnice

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

166 - Rovnice a nerovnice

Zadání Vyřešte:

a) $x^2 = 3$ b) $x^2 > 3$ c) $x(x-2) > 0$ d) $(x+1)(x-2) \leq 0$ e) $x(3-x) \geq 5$ f) $x^2 \leq -4(x+1)$

Řešení **Video**

167 - Rovnice a nerovnice

Zadání Vyřešte:

a) $\dfrac{x+1}{3-x} < 0$ b) $\dfrac{2x-1}{x+3} > 1$ c) $\dfrac{1}{x-4} > 0$ d) $\dfrac{x+1}{-3} < 0$ e) $\dfrac{-2-x}{\frac{1}{2}+x} \leq 0$ f) $-\frac{2}{3} \cdot \dfrac{x-1}{x+7} \geq 0$

Řešení **Video**

168 - Rovnice a nerovnice

Zadání Vyřešte:

a) $\dfrac{5x-8}{5-x} < -2$ b) $\dfrac{(x+1)(5-x)}{x} > 0$ c) $\dfrac{x+1}{2x+3} < \dfrac{3-x}{2x+3}$ d) $\dfrac{3-x}{x+5} \leq \dfrac{1}{x}$

Řešení **Video**

169 - Rovnice a nerovnice

Zadání Vyřešte:

a) $|x| = 5$ b) $|x| + 2 = 0$ c) $|x| - 3 < 0$ d) $|2x| > 3$ e) $3 - |x| = 7$ f) $3 - |x| < 7$

Řešení **Video**

170 - Rovnice a nerovnice

Zadání Vyřešte:

a) $|x-1|=5$ b) $|x-1|>5$ c) $|4-2x|=6$ d) $|4-2x|<6$

Řešení **Video**

171 - Definiční obory

Zadání Určete podmínky a najděte definiční obor funkce.

a) $y = \sqrt{x+2}$

b) $y = \sqrt{3-x}$

c) $y = \sqrt{9-x^2}$

d) $y = \sqrt{x^2-4}$

Řešení **Video** **Teorie: 11 Řešené příklady: 82, 83, 84 , 85, 86**

Tahák

Zlomek
jmenovatel je různý od 0

Sudá odmocnina
výraz pod odmocninou je nezáporný

Logaritmus
argument je kladný

Tangens
argument je různý od $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$

Kotangens
argument je různý od $k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Arkussinus, arkuskosinus
argument leží v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$

172 - Definiční obory

Zadání Určete podmínky a najděte definiční obor funkce.

a) $y = \sqrt{-x} + \sqrt{4+x}$

b) $y = \sqrt{4x - x^2}$

c) $y = \dfrac{1-x}{x^2+2x+15}$

d) $y = \dfrac{x-1}{x^2-2x-15}$

Řešení **Video** **Teorie: 11 Řešené příklady: 82, 83, 84 , 85, 86**

Tahák

Zlomek
jmenovatel je různý od 0

Sudá odmocnina
výraz pod odmocninou je nezáporný

Logaritmus
argument je kladný

Tangens
argument je různý od $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$

Kotangens
argument je různý od $k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Arkussinus, arkuskosinus
argument leží v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$

173 - Definiční obory

Zadání Určete podmínky a najděte definiční obor funkce.

a) $y = \ln \dfrac{2+x}{x} + \sqrt{4-3x-x^2}$

b) $y = \sqrt{(1-2x)\ln x}$

c) $y = \ln\left(2 + \dfrac{2x+6}{3-x}\right)$

d) $y = \dfrac{1}{(4-x)\ln(x-2)}$

Řešení **Video** **Teorie: 11 Řešené příklady: 82, 83, 84 , 85, 86**

Tahák

Zlomek
jmenovatel je různý od 0

Sudá odmocnina
výraz pod odmocninou je nezáporný

Logaritmus
argument je kladný

Tangens
argument je různý od $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$

Kotangens
argument je různý od $k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Arkussinus, arkuskosinus
argument leží v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$

174 - Definiční obory

Zadání Určete podmínky a najděte definiční obor funkce.

a) $y = \tan\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$ b) $y = \dfrac{x}{\sin 2x}$ c) $y = \cot \dfrac{2x+\pi}{5}$ d) $y = \dfrac{1}{1-\cos 2x}$

Řešení **Video** **Teorie: 11 Řešené příklady: 82, 83, 84 , 85, 86**

Tahák

Zlomek
jmenovatel je různý od 0

Sudá odmocnina
výraz pod odmocninou je nezáporný

Logaritmus
argument je kladný

Tangens
argument je různý od $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$

Kotangens
argument je různý od $k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Arkussinus, arkuskosinus
argument leží v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$

175 - Definiční obory

Zadání Určete podmínky a najděte definiční obor funkce.

a) $y = \arcsin\left(\dfrac{2x+6}{3}\right)$ b) $y = \arcsin\left(2 - \dfrac{x}{2x+3}\right)$ c) $y = \arccos\left(\dfrac{2x-1}{3x}\right)$ d) $y = \arccos\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$

Řešení **Video** **Teorie: 11 Řešené příklady: 82, 83, 84 , 85, 86**

Tahák

Zlomek
jmenovatel je různý od 0

Sudá odmocnina
výraz pod odmocninou je nezáporný

Logaritmus
argument je kladný

Tangens
argument je různý od $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$

Kotangens
argument je různý od $k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Arkussinus, arkuskosinus
argument leží v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$

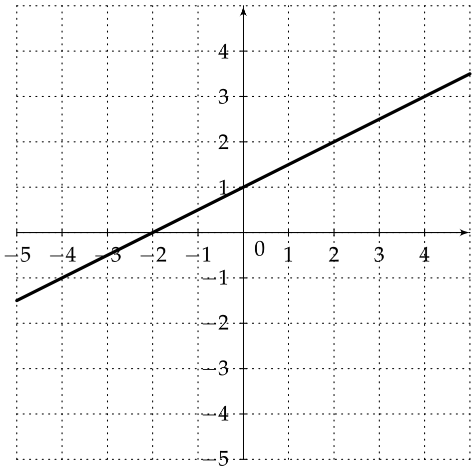
176 - Graf lineární funkce

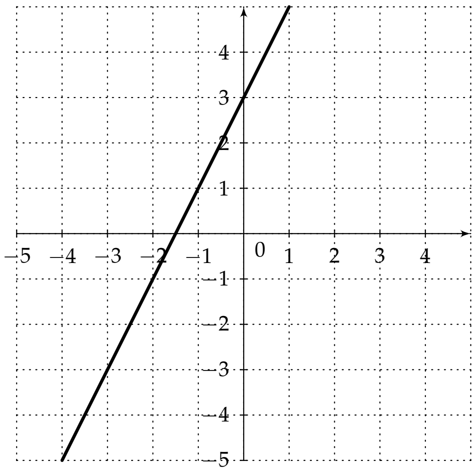
Zadání Přiřaďte k obrázku správný předpis.

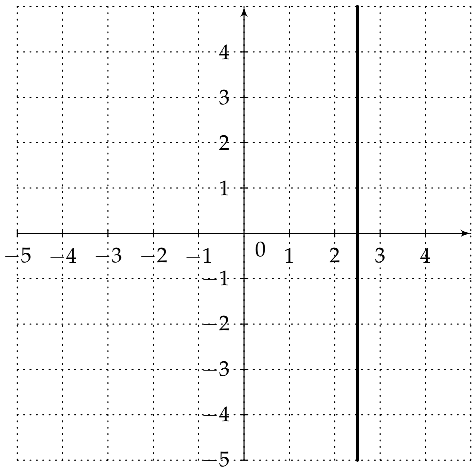
a) $y = 2$ b) $y = 2x + 3$ c) $y = 2x - 3$ d) $y = \frac{1}{2}x + 1$ e) $y = -\frac{1}{2}x + 1$ f) $x = 2.5$

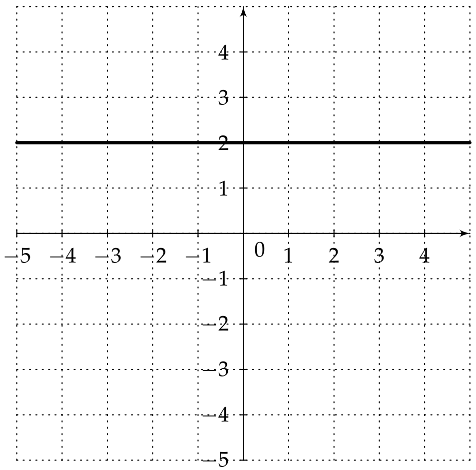
Doplňte definiční obor a obor hodnot. Zjistěte, zda je funkce sudá nebo lichá. Najděte intervaly, na kterých je funkce rostoucí, klesající.
Je funkce ohraničená? Má funkce extrémy? Který z těchto předpisů není lineární funkcí?

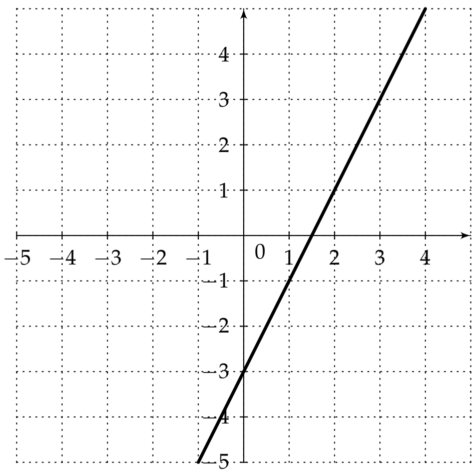
Řešení **Video** **Teorie: 17**

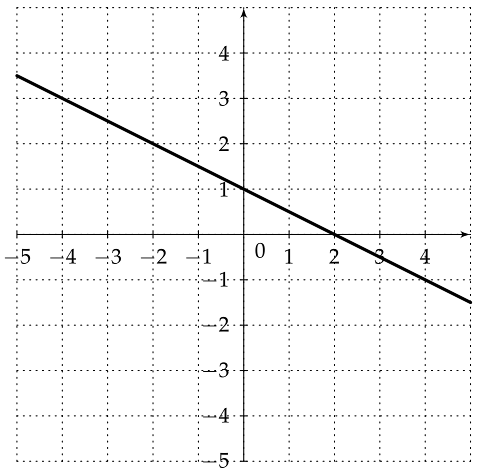
①


②


③


④


⑤


⑥


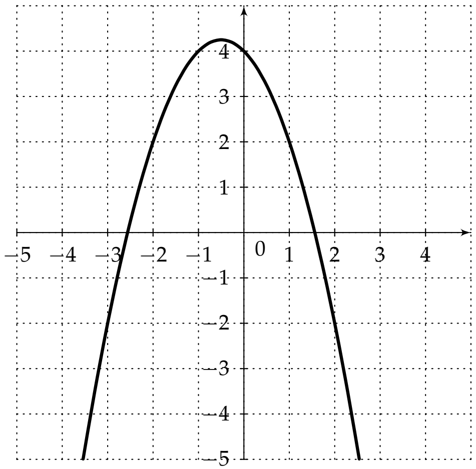
177 - Graf kvadratické funkce

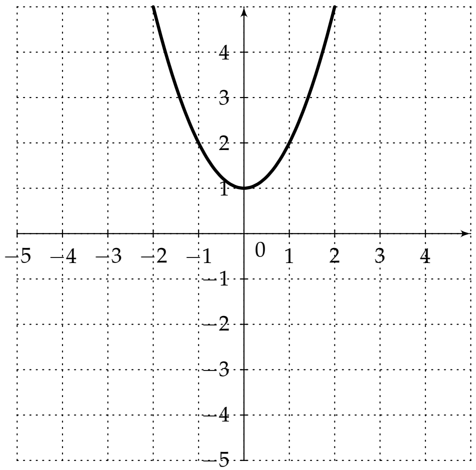
Zadání Přiřaďte k obrázku správný funkční předpis.

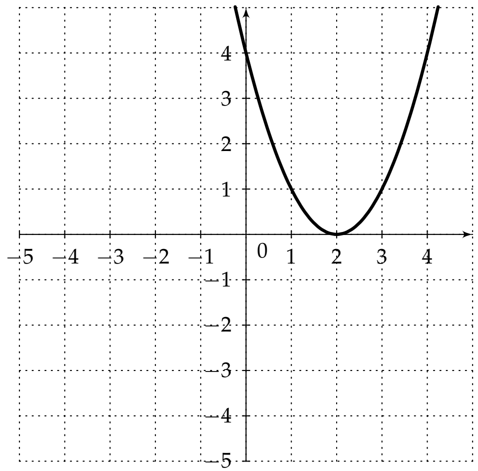
a) $y = x^2 + 1$ b) $y = x^2 - 1$ c) $y = 3 - x^2$ d) $y = (x-2)^2$ e) $y = \frac{1}{2}\left(6 - x - x^2\right)$ f) $y = 4 - x - x^2$

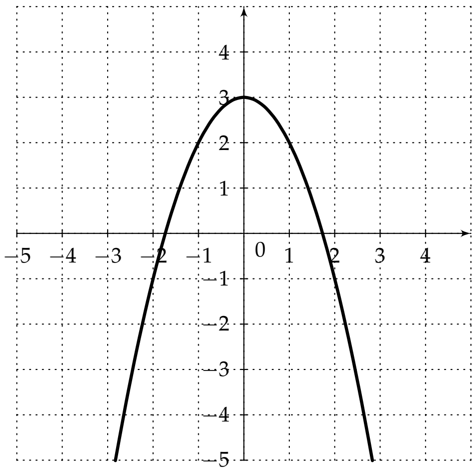
Doplňte definiční obor a obor hodnot. Zjistěte, zda je funkce sudá nebo lichá. Najděte intervaly, na kterých je funkce rostoucí, klesající.
Je funkce ohraničená? Má funkce extrémy?

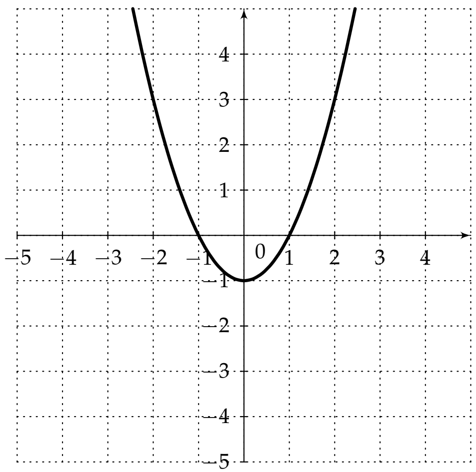
Řešení **Video** **Teorie: 18**

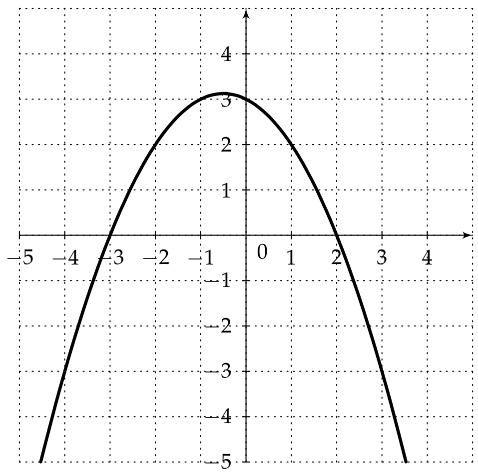
①


②


③


④


⑤


⑥


178 - Graf lineární lomené funkce

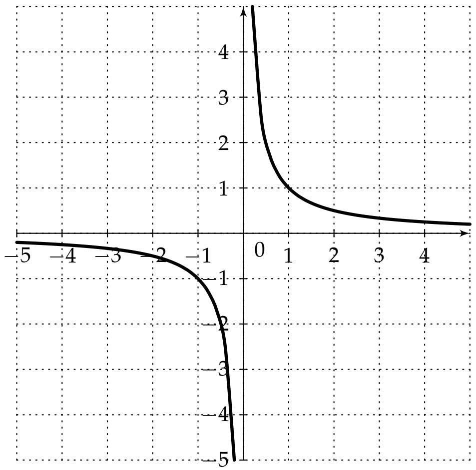
Zadání Přiřaďte k obrázku správný funkční předpis.

a) $y = \dfrac{1}{x}$ b) $y = \dfrac{1}{x+1}$ c) $y = \dfrac{2}{x}$ d) $y = -\dfrac{3}{x-1}$ e) $y = \dfrac{2x+1}{x}$ f) $y = \dfrac{1-2x}{x-2}$

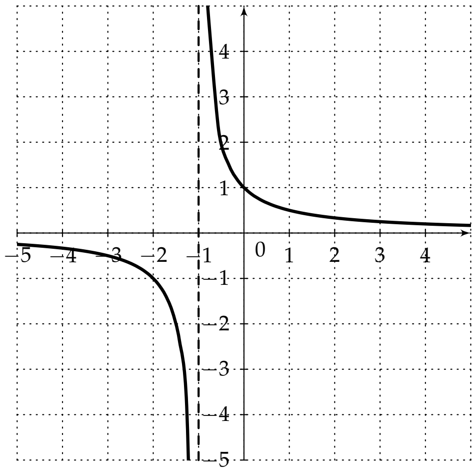
Doplňte definiční obor a obor hodnot. Zjistěte, zda je funkce sudá nebo lichá. Najděte intervaly, na kterých je funkce rostoucí, klesající.
Je funkce ohraničená? Má funkce extrémy?

Řešení **Video** **Teorie: 21**

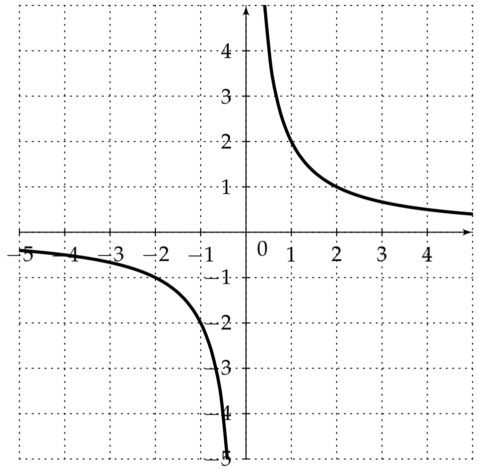
①



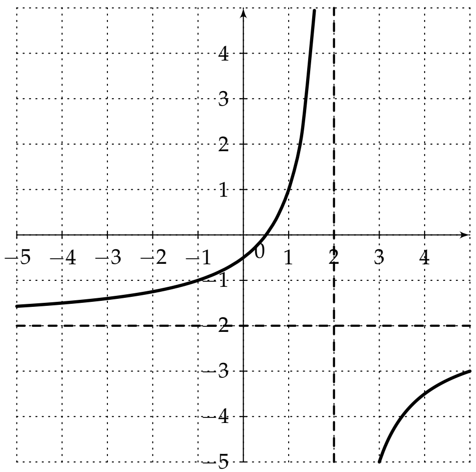
②



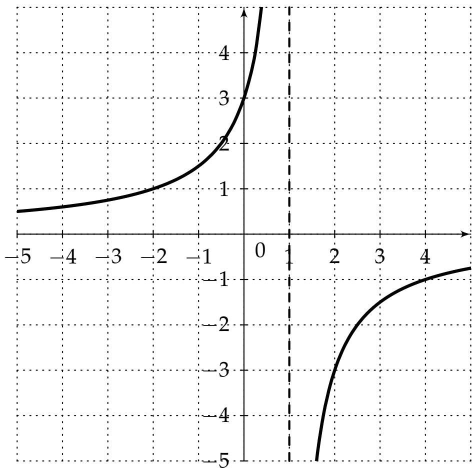
③



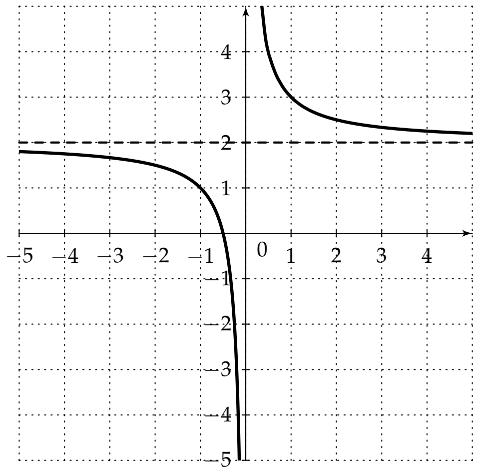
④



⑤



⑥



179 - Graf exponenciální funkce

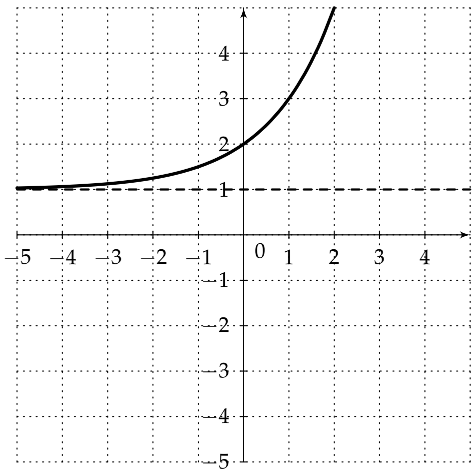
Zadání Přiřaďte k obrázku správný funkční předpis.

a) $y = 2^x$ b) $y = -2^x$ c) $y = 2^x + 1$ d) $y = 2^{(x+1)}$ e) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ f) $y = 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$

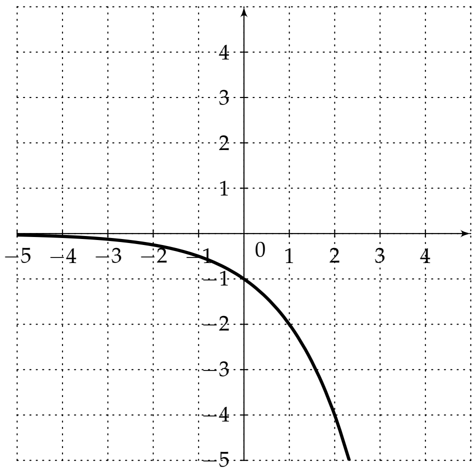
Doplňte definiční obor a obor hodnot. Zjistěte, zda je funkce sudá nebo lichá. Najděte intervaly, na kterých je funkce rostoucí, klesající.
Je funkce ohraničená? Má funkce extrémy?

Řešení **Video** **Teorie: 23**

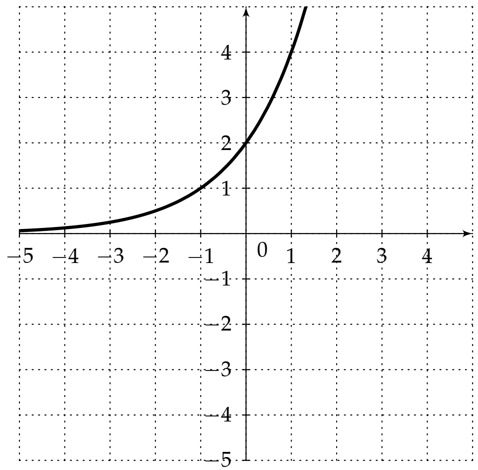
①



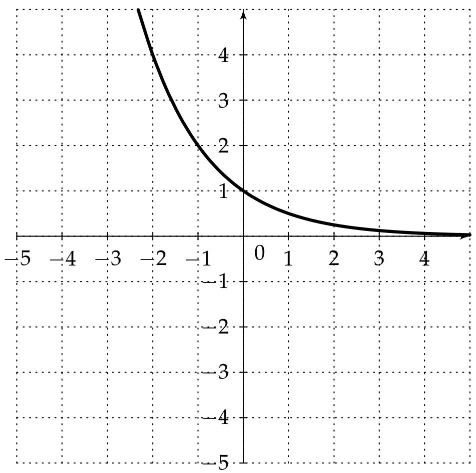
②



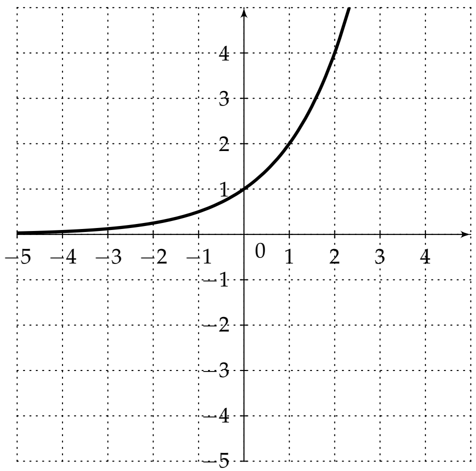
③



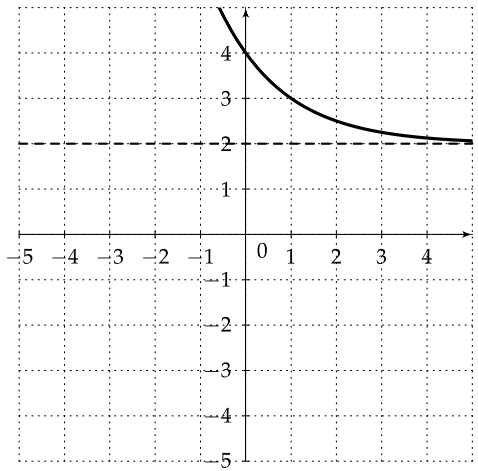
④



⑤



⑥



180 - Graf logaritmické funkce

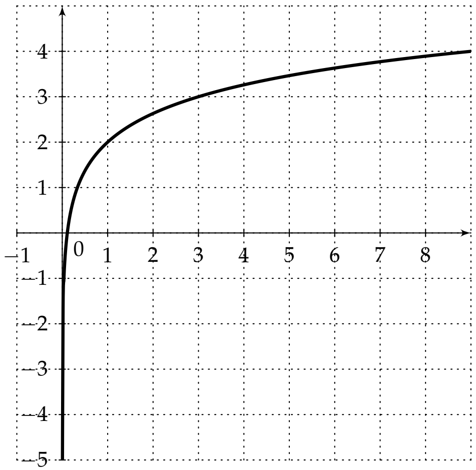
Zadání Přiřaďte k obrázku správný funkční předpis.

a) $y = \log_3 x$ b) $y = \log_{1/3} x$ c) $y = \log_3 (x - 2)$ d) $y = 2 \log_{1/3} x$ e) $y = 2 + \log_3 x$ f) $y = \log_3 (x + 2)$

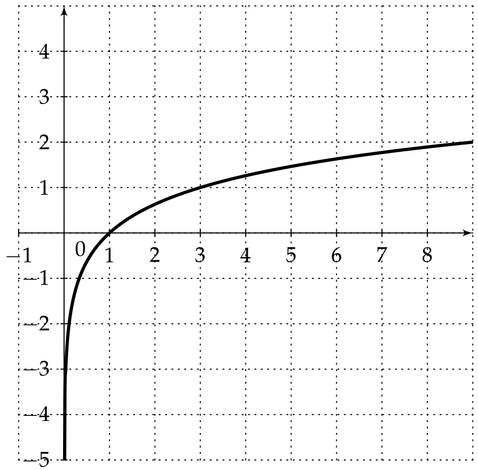
Doplňte definiční obor a obor hodnot. Zjistěte, zda je funkce sudá nebo lichá. Najděte intervaly, na kterých je funkce rostoucí, klesající.
Je funkce ohraničená? Má funkce extrémy?

Řešení **Video** **Teorie: 24**

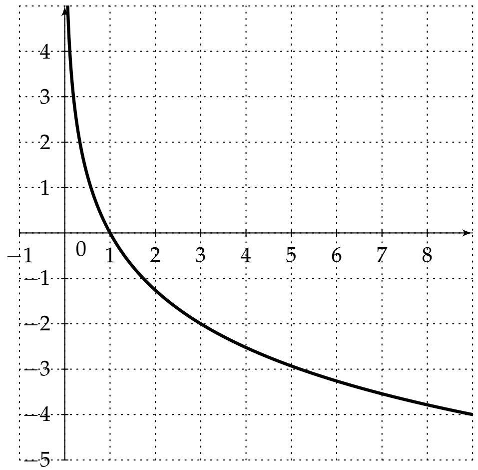
①



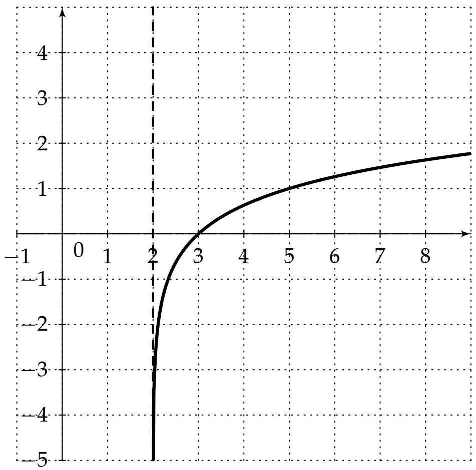
②



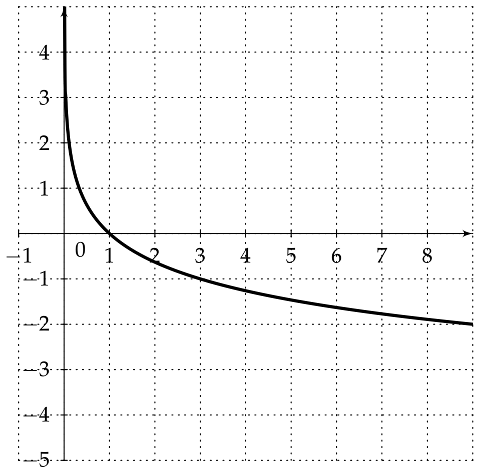
③



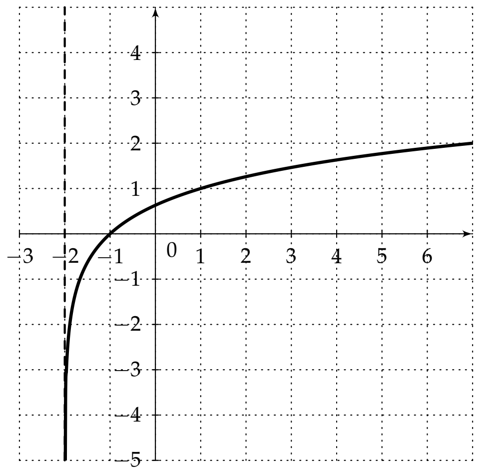
④



⑤



⑥



181 - Graf goniometrické funkce sinus

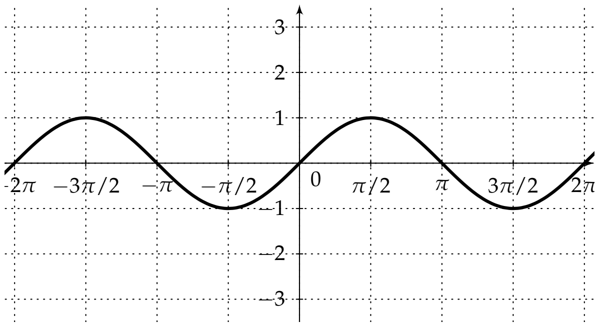
Zadání Přiřaďte k obrázku správný funkční předpis.

a) $y = \sin x$ b) $y = \sin 2x$ c) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ d) $y = 2\sin x$ e) $y = 2 + \sin x$ f) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

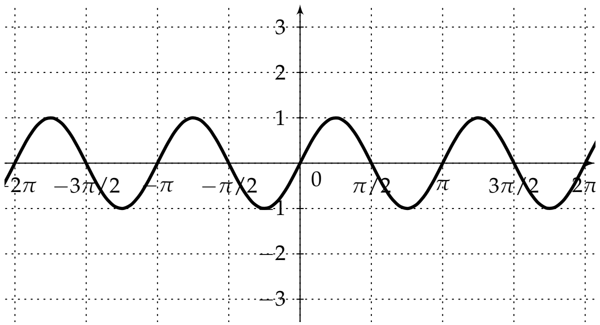
Doplňte definiční obor a obor hodnot. Zjistěte, zda je funkce sudá nebo lichá. Najděte intervaly, na kterých je funkce rostoucí, klesající.
Je funkce ohraničená? Má funkce extrémy?

Řešení **Video** **Teorie: 25**

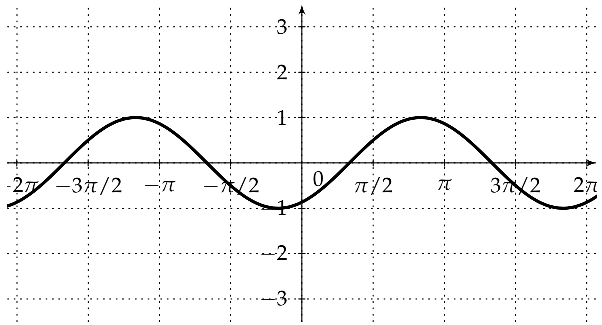
①



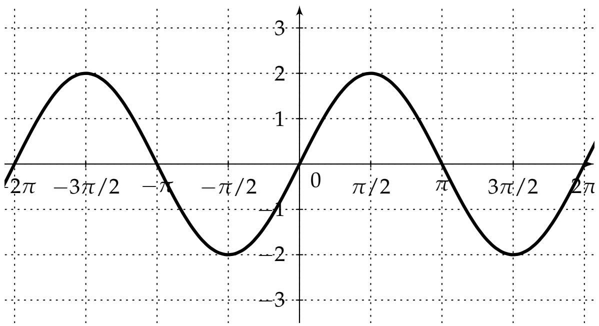
②



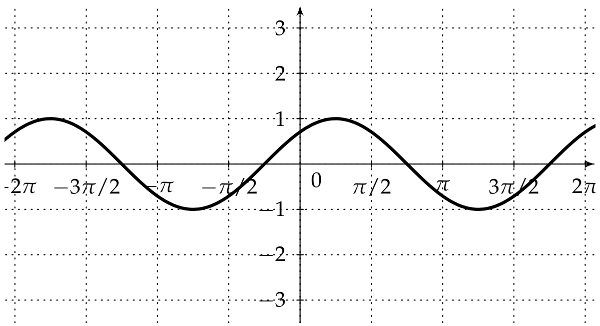
③



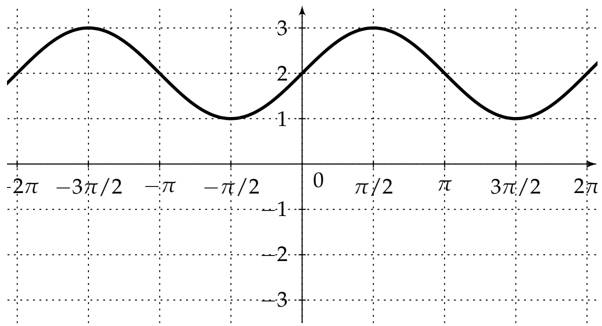
④



⑤



⑥



182 - Graf goniometrické funkce kosinus

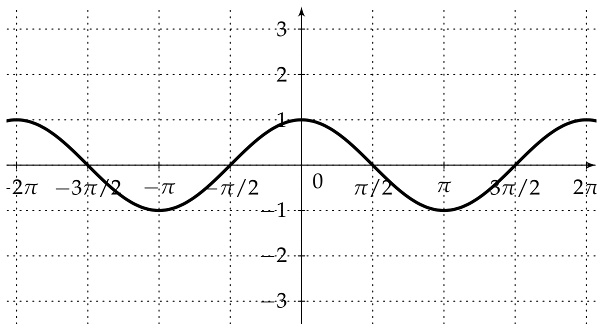
Zadání Přiřaďte k obrázku správný funkční předpis.

a) $y = \cos x$ b) $y = \cos \frac{x}{3}$ c) $y = \frac{1}{3} \cos x$ d) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ e) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ f) $y = 1 - \cos x$

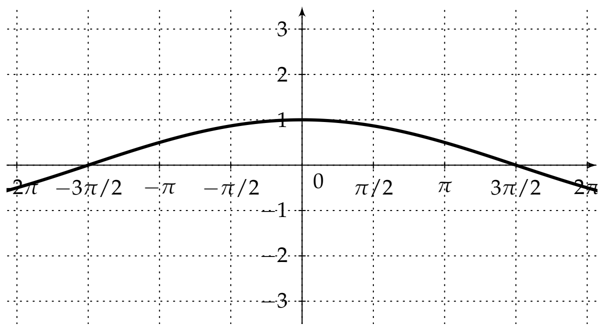
Doplňte definiční obor a obor hodnot. Zjistěte, zda je funkce sudá nebo lichá. Najděte intervaly, na kterých je funkce rostoucí, klesající. Je funkce ohraničená? Má funkce extrémy?

Řešení **Video** **Teorie: 25**

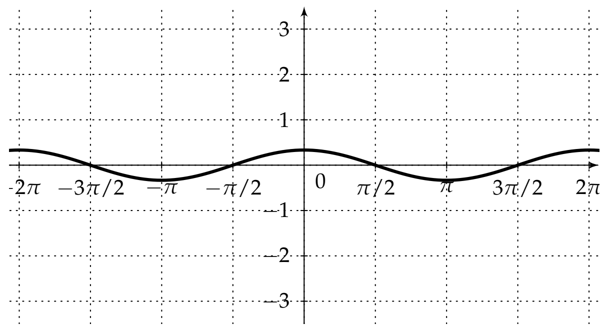
①



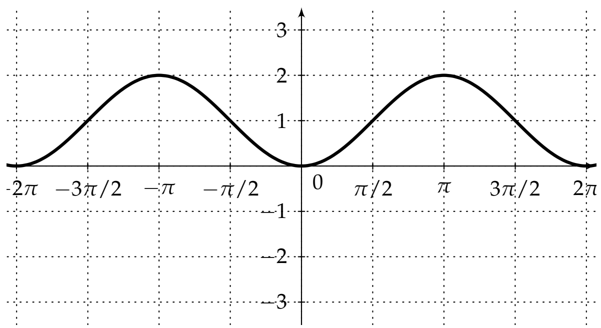
②



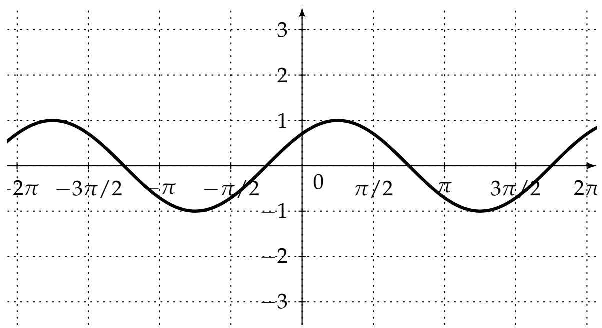
③



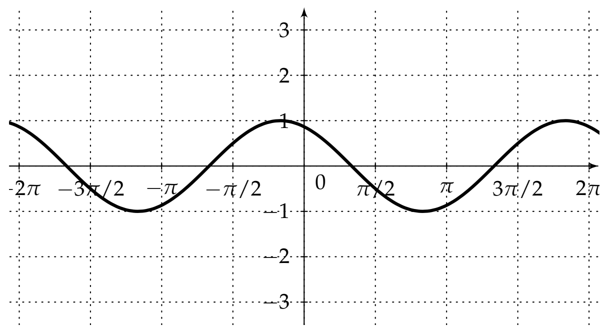
④



⑤



⑥



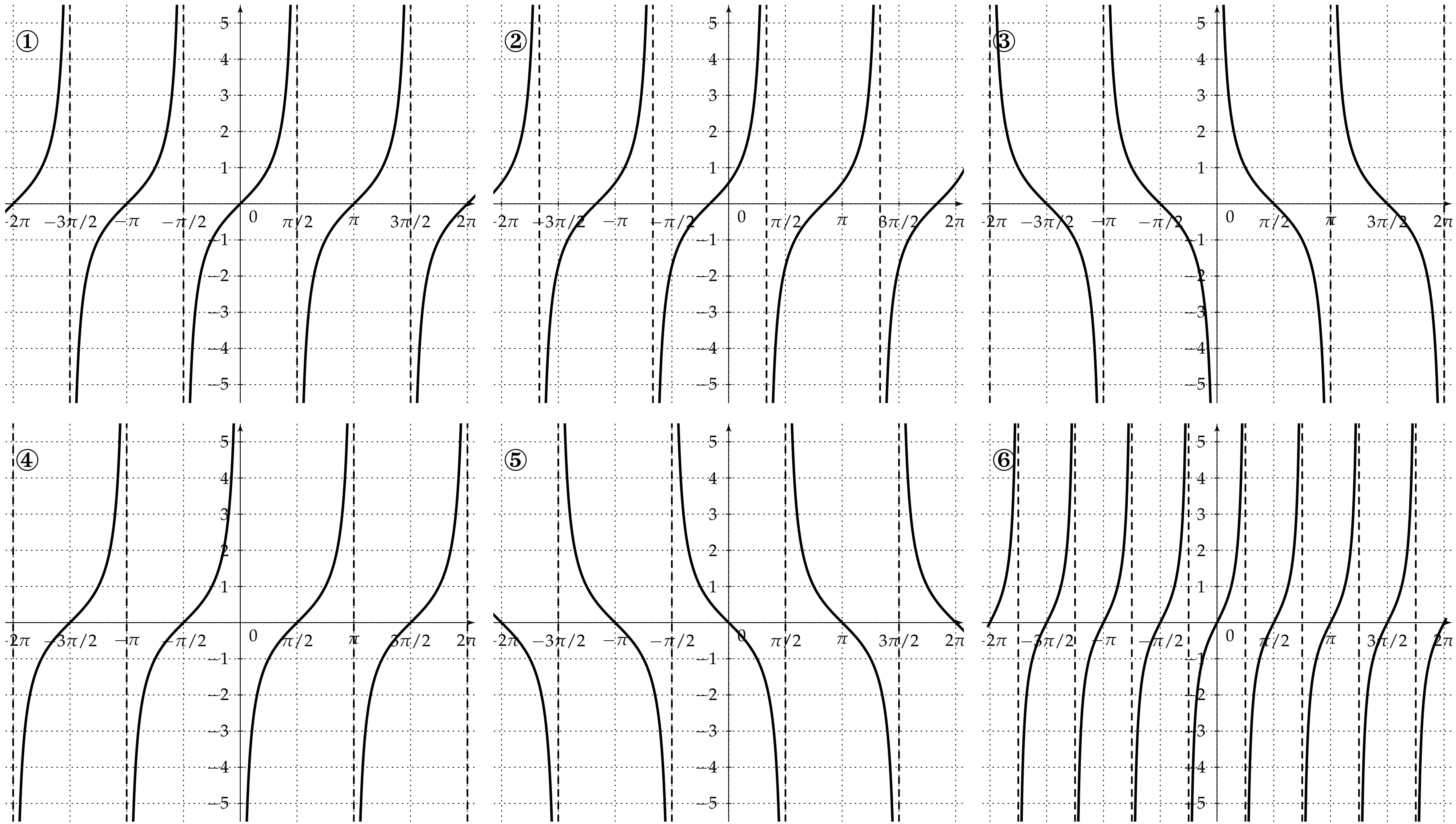
183 - Graf goniometrické funkce tangens a kotangens

Zadání Přiřaďte k obrázku správný funkční předpis.

a) $y = \tan x$ b) $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ c) $y = -\tan x$ d) $y = \cot x$ e) $y = \tan 2x$ f) $y = -\cot x$

Doplňte definiční obor a obor hodnot. Zjistěte, zda je funkce sudá nebo lichá. Najděte intervaly, na kterých je funkce rostoucí, klesající.
Je funkce ohraničená? Má funkce extrémy?

Řešení **Video** **Teorie: 26**



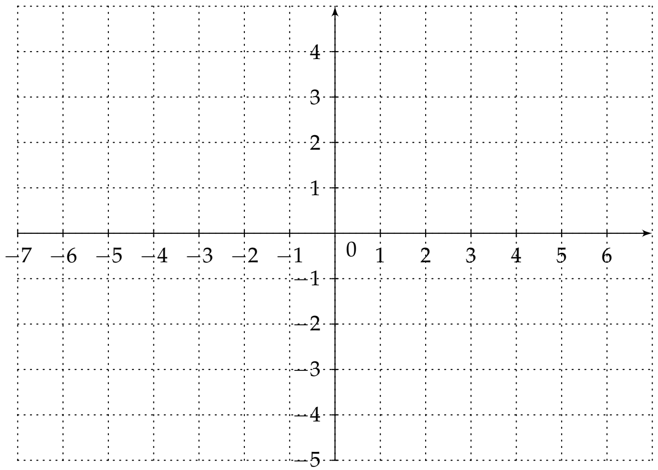
184 - Graf lineární funkce - doplnit

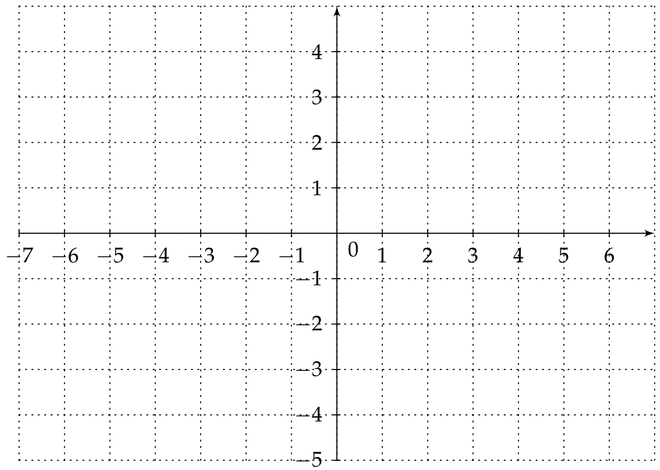
Zadání Do připravených obrázků nakreslete grafy zadaných funkcí.

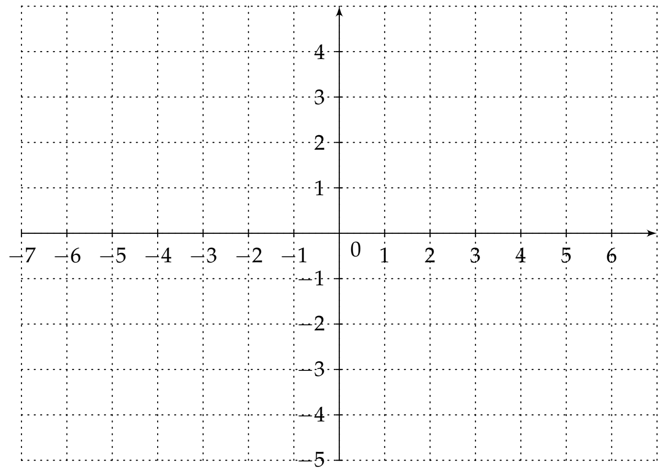
a) $y = 2x - 4$ b) $y = 4 - x$ c) $y = \frac{1}{3}x + 2$ d) $y = \frac{x-1}{2}$ e) $y = \frac{1-3x}{2}$ f) $y = 4$

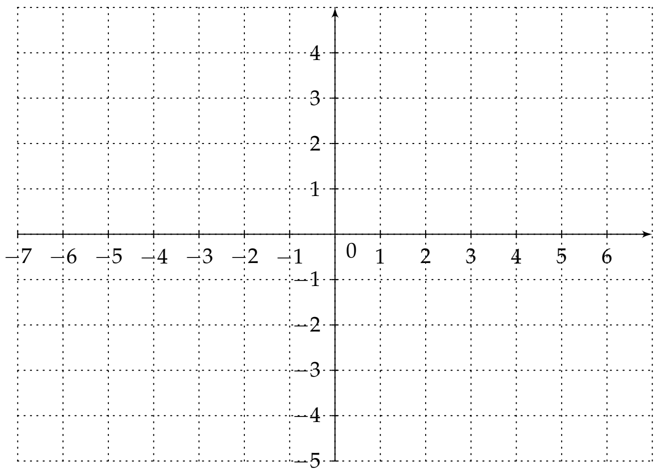
Doplňte definiční obor a obor hodnot. Zjistěte, zda je funkce sudá nebo lichá. Najděte intervaly, na kterých je funkce rostoucí, klesající.
Je funkce ohraničená? Má funkce extrémy?

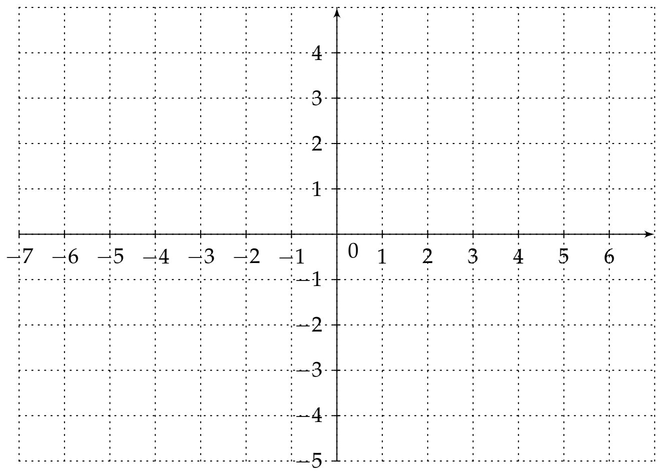
Řešení **Video** **Teorie: 17**

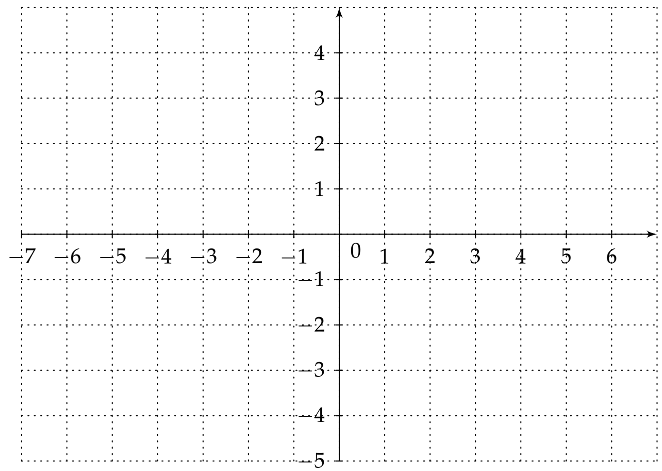












185 - Graf lineární funkce s absolutní hodnotou - doplnit

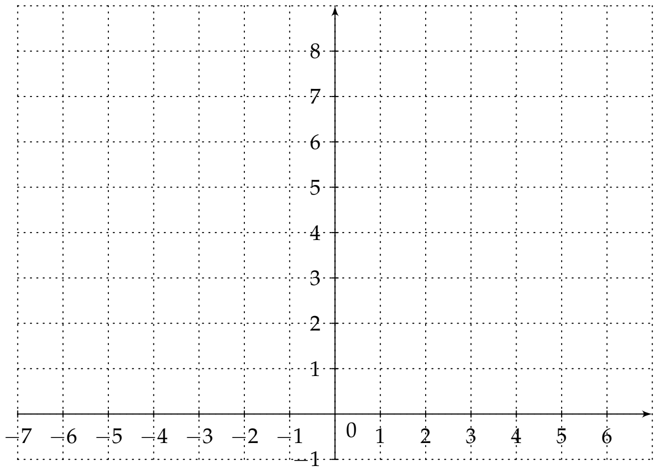
Zadání Do připravených obrázků nakreslete grafy zadaných funkcí.

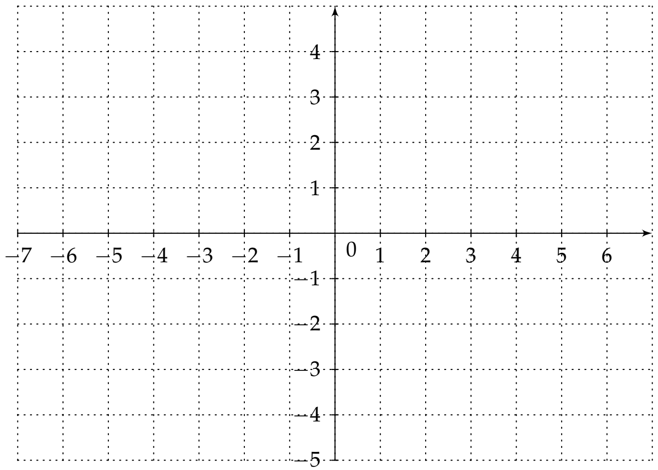
a) $y = |x-2| + |2x-1|$

b) $y = |x+1| - |x| + |2-x| - 3$

Doplňte definiční obor a obor hodnot. Zjistěte, zda je funkce sudá nebo lichá. Najděte intervaly, na kterých je funkce rostoucí, klesající.
Je funkce ohraničená? Má funkce extrémy?

Řešení **Video** **Teorie: 17**





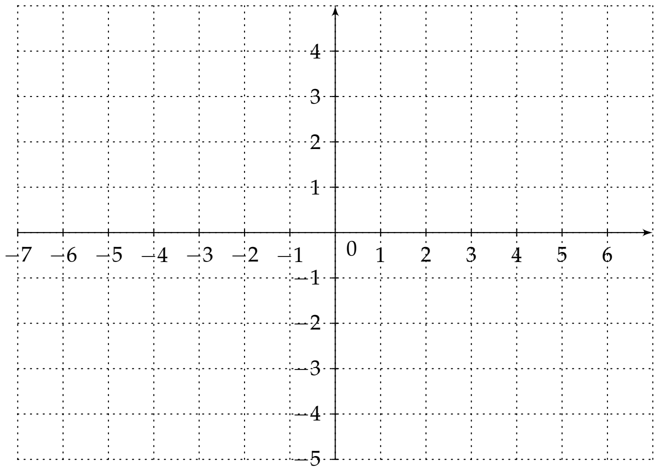
186 - Graf kvadratické funkce - doplnit

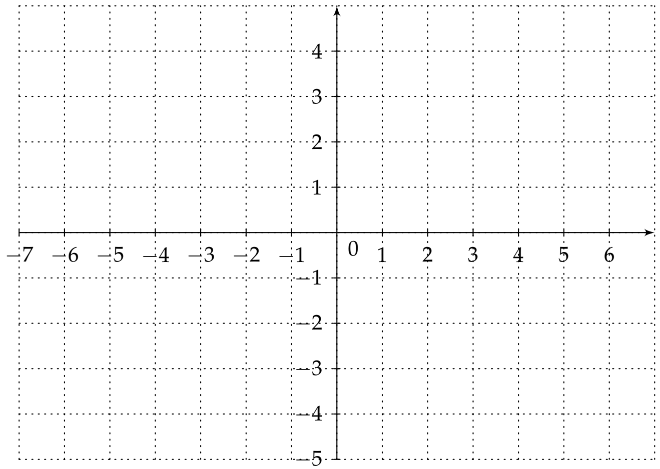
Zadání Do připravených obrázků nakreslete grafy zadaných funkcí.

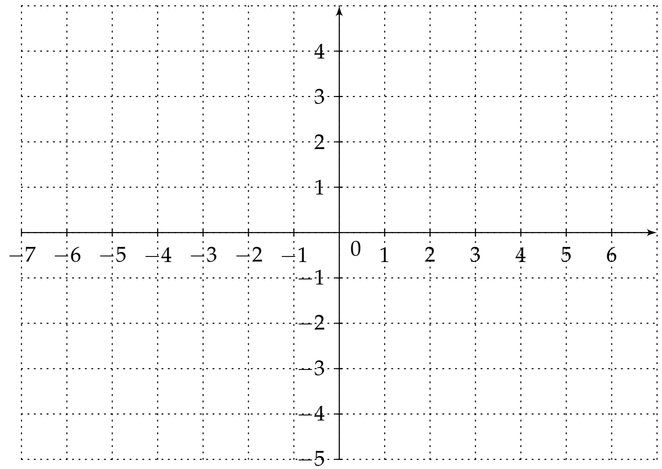
a) $y = x^2 + 4x + 4$ b) $y = x^2 - 2x + 2$ c) $y = -x^2 - 2x + 2$ d) $y = x^2 - 2x$ e) $y = 3 - 3x^2$ f) $y = x^2 - 4x + 3$

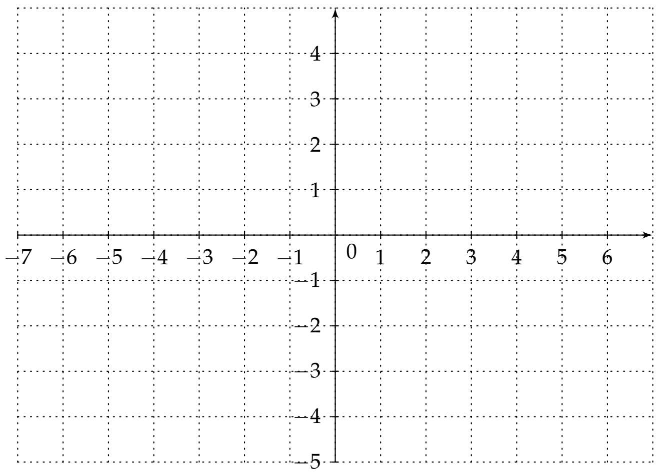
Doplňte definiční obor a obor hodnot. Zjistěte, zda je funkce sudá nebo lichá. Najděte intervaly, na kterých je funkce rostoucí, klesající.
Je funkce ohraničená? Má funkce extrémy?

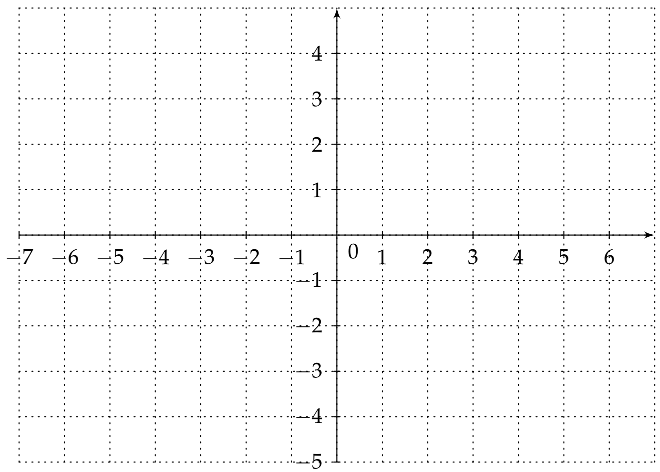
Řešení **Video** **Teorie: 18**

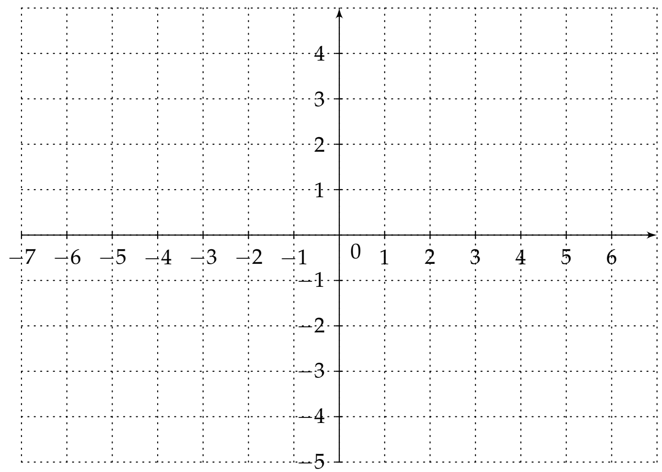












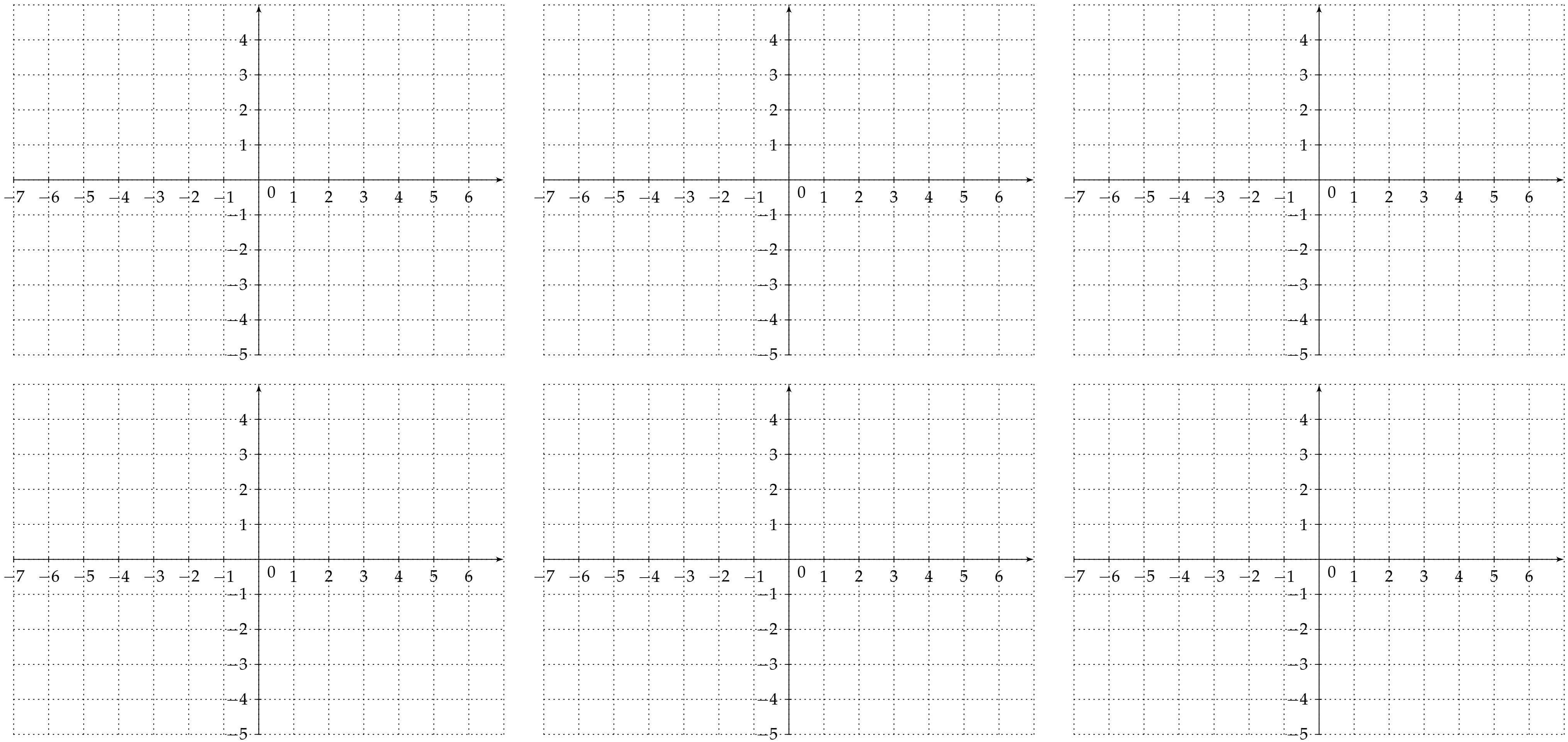
187 - Graf lineární lomené funkce - doplnit

Zadání Do připravených obrázků nakreslete grafy zadaných funkcí.

a) $y = -\dfrac{1}{x}$ b) $y = \dfrac{2}{x-1}$ c) $y = \dfrac{x}{x-1}$ d) $y = \dfrac{2x-1}{x}$ e) $y = 1 - \dfrac{1}{x}$ f) $y = \dfrac{1-x}{2-x}$

Doplňte definiční obor a obor hodnot. Zjistěte, zda je funkce sudá nebo lichá. Najděte intervaly, na kterých je funkce rostoucí, klesající.
Je funkce ohraničená? Má funkce extrémy?

Řešení **Video** **Teorie: 21**



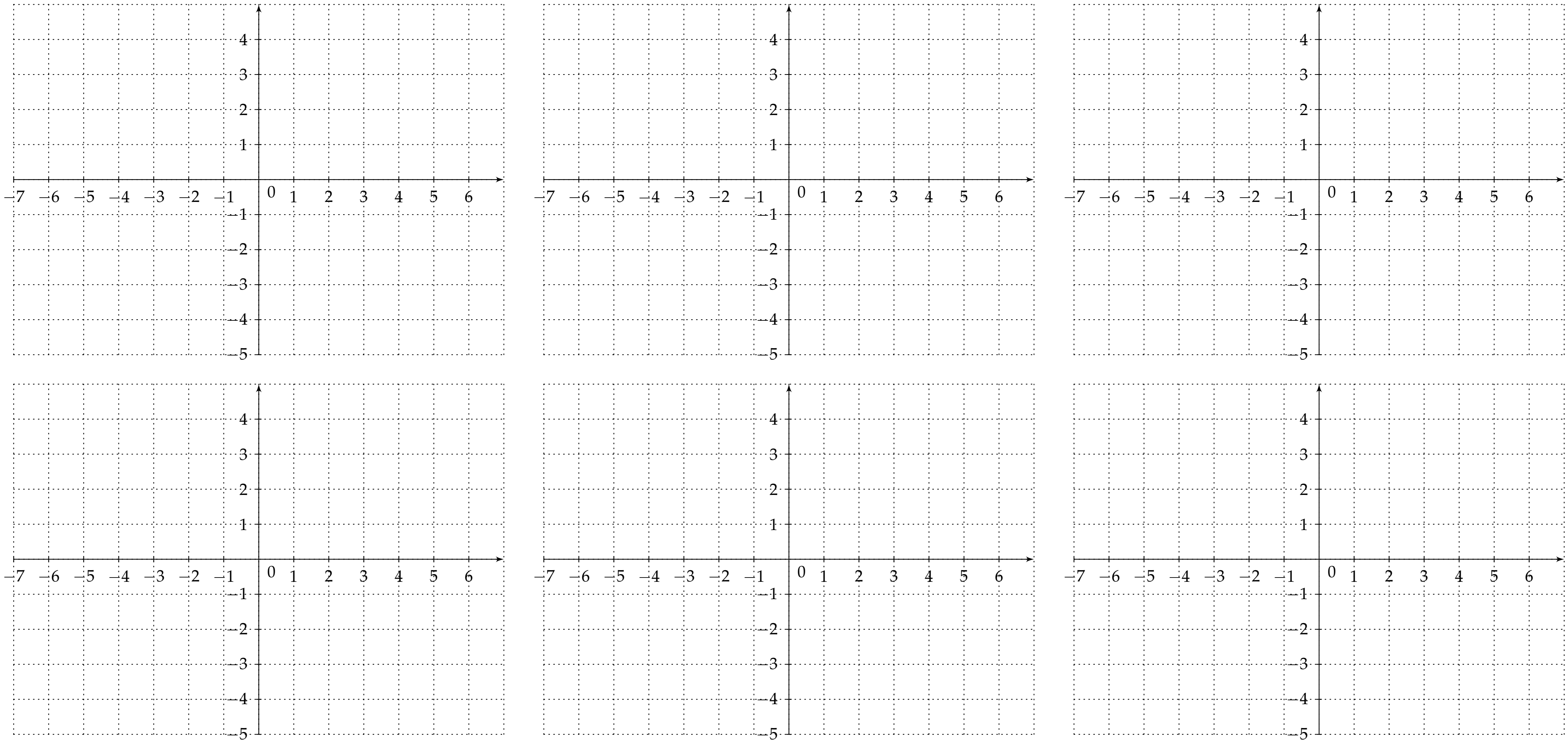
188 - Graf exponenciální funkce - doplnit

Zadání Do připravených obrázků nakreslete grafy zadaných funkcí.

a) $y = 3^x$ b) $y = 1 + 3^x$ c) $y = 3^{x+1}$ d) $y = 1 - 3^x$ e) $y = 3^{-x}$ f) $y = 3 - 3^{-x}$

Doplňte definiční obor a obor hodnot. Zjistěte, zda je funkce sudá nebo lichá. Najděte intervaly, na kterých je funkce rostoucí, klesající.
Je funkce ohraničená? Má funkce extrémy?

Řešení **Video** **Teorie: 23**



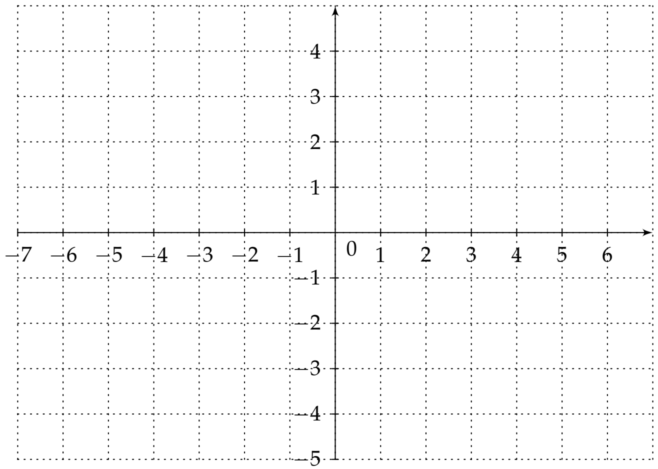
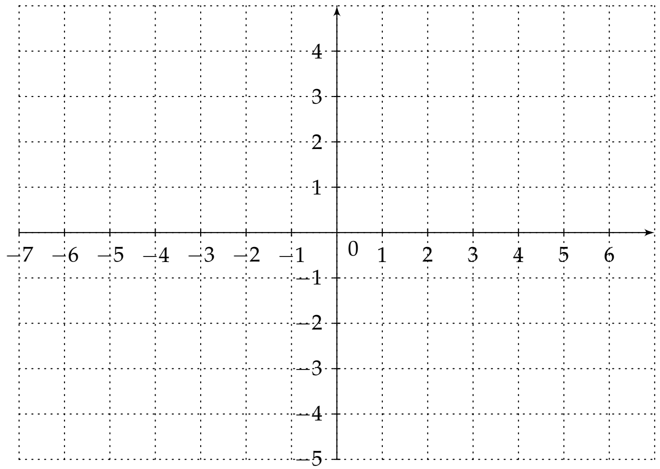
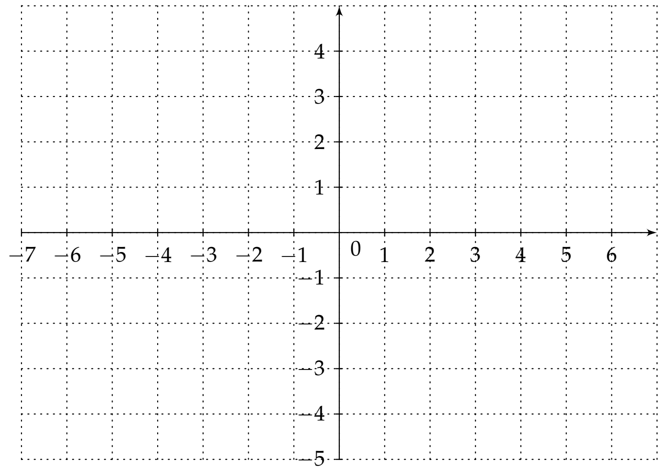
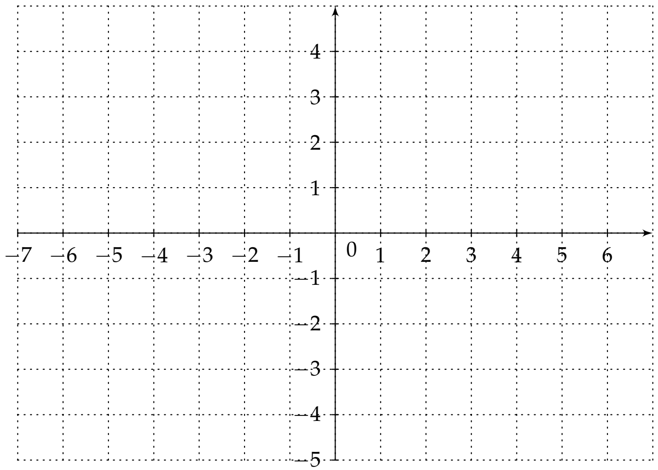
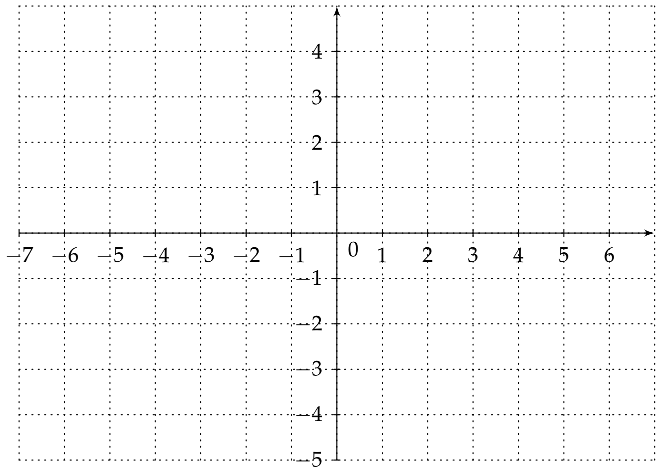
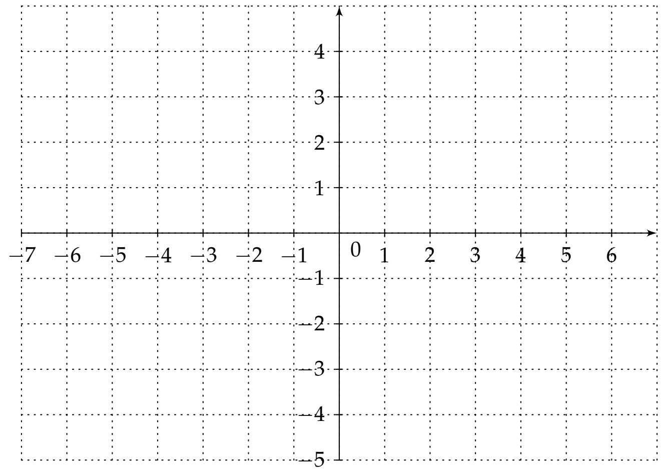
189 - Graf logaritmické funkce - doplnit

Zadání Do připravených obrázků nakreslete grafy zadaných funkcí.

a) $y = \ln x$ b) $y = \ln(2x)$ c) $y = \ln(2+x)$ d) $y = 2 + \ln x$ e) $y = 2\ln x$ f) $y = 2 - \ln x$

Doplňte definiční obor a obor hodnot. Zjistěte, zda je funkce sudá nebo lichá. Najděte intervaly, na kterých je funkce rostoucí, klesající.
Je funkce ohraničená? Má funkce extrémy?

Řešení **Video** **Teorie: 24**

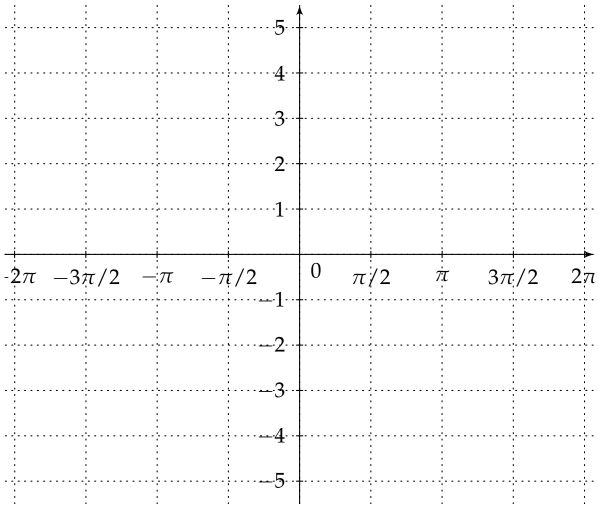
190 - Graf goniometrické funkce sinus - doplnit

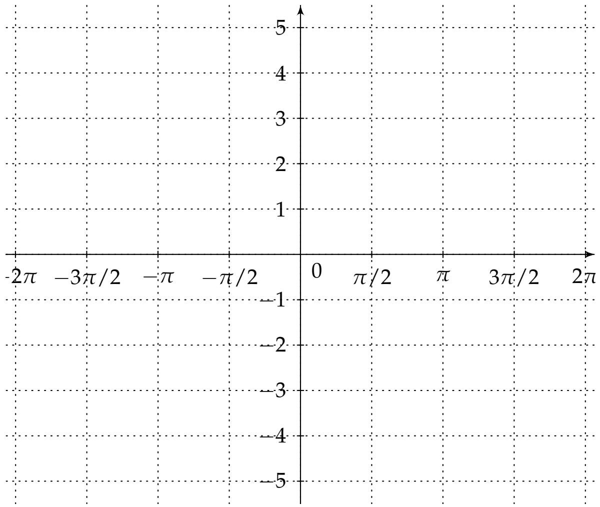
Zadání Do připravených obrázků nakreslete grafy zadaných funkcí.

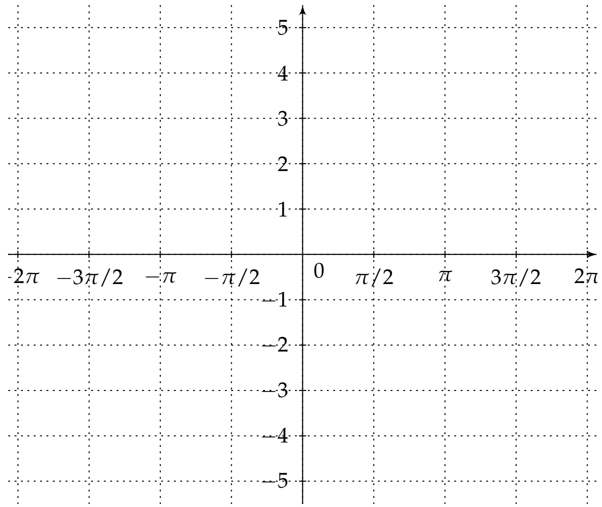
a) $y = \sin x$ b) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ c) $y = \sin(4x)$ d) $y = \sin x + 4$ e) $y = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ f) $y = 4\sin x$

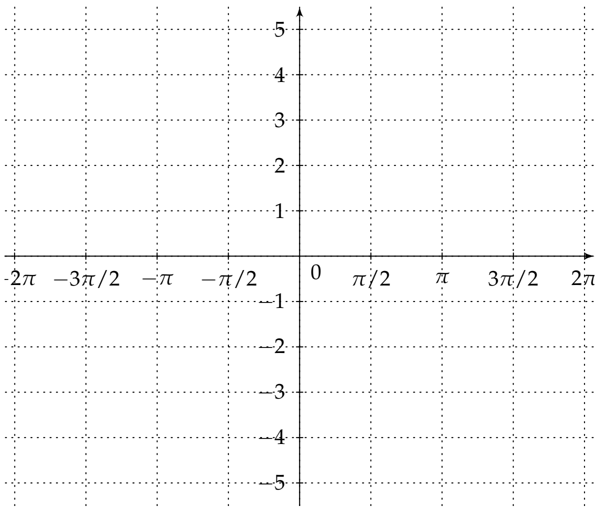
Doplňte definiční obor a obor hodnot. Zjistěte, zda je funkce sudá nebo lichá. Najděte intervaly, na kterých je funkce rostoucí, klesající.
Je funkce ohraničená? Má funkce extrémy?

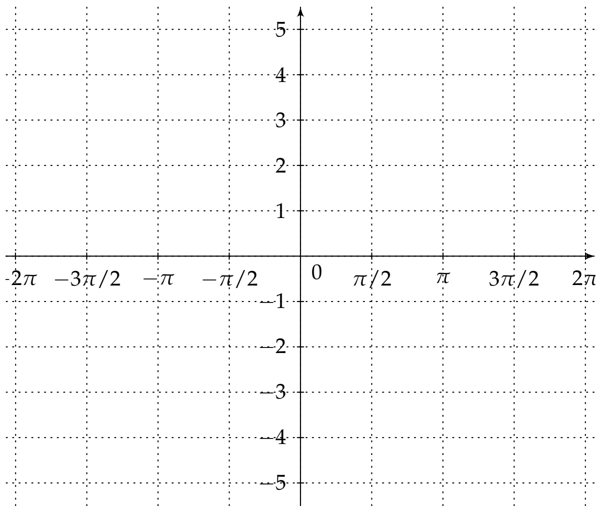
Řešení **Video** **Teorie: 25**

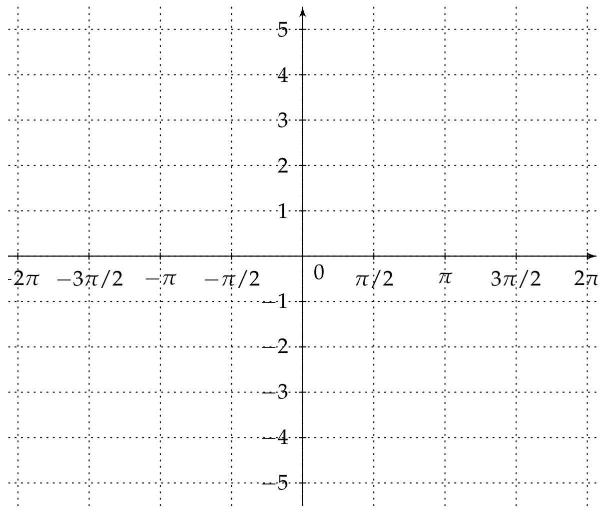












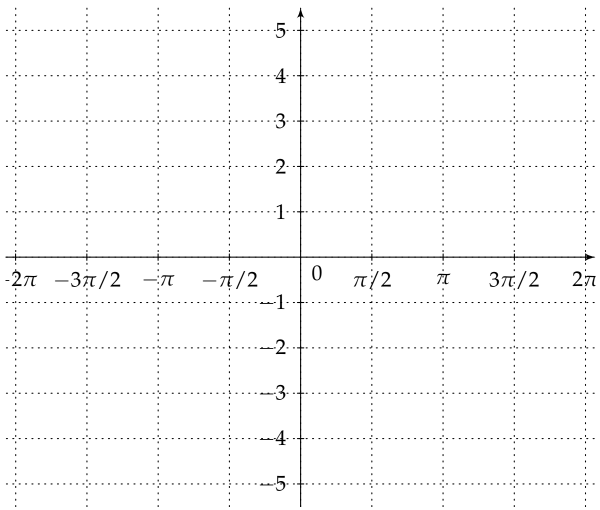
191 - Graf goniometrické funkce kosinus - doplnit

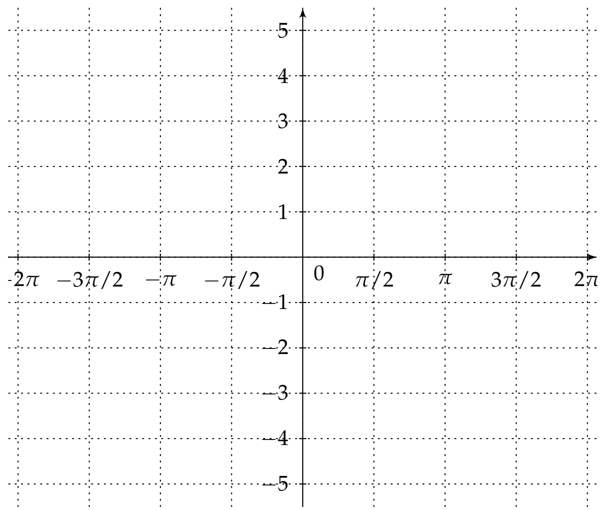
Zadání Do připravených obrázků nakreslete grafy zadaných funkcí.

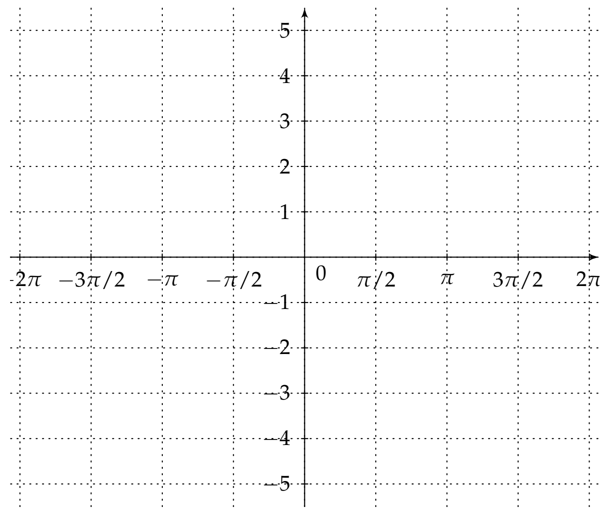
a) $y = \cos x$ b) $y = \cos \frac{x}{2}$ c) $y = \frac{1}{2} \cos x$ d) $y = 2 - \cos x$ e) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ f) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

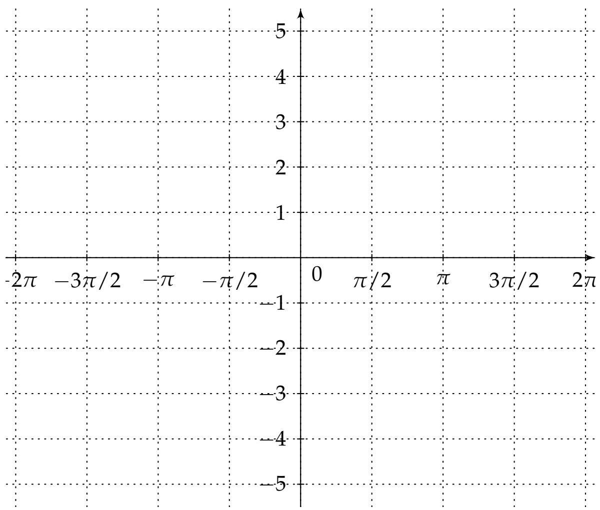
Doplňte definiční obor a obor hodnot. Zjistěte, zda je funkce sudá nebo lichá. Najděte intervaly, na kterých je funkce rostoucí, klesající.
Je funkce ohraničená? Má funkce extrémy?

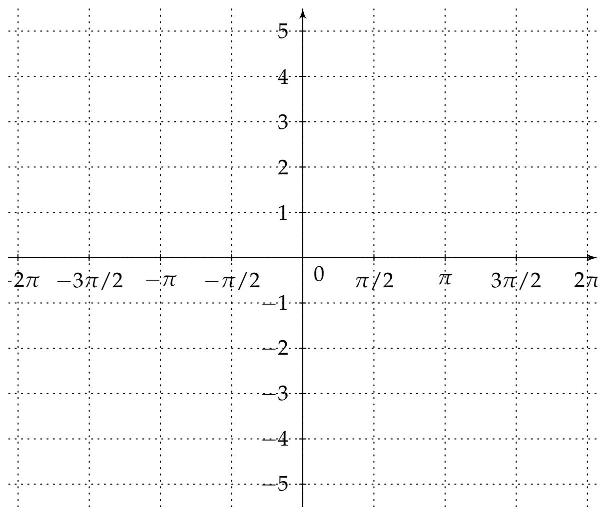
Řešení **Video** **Teorie: 25**

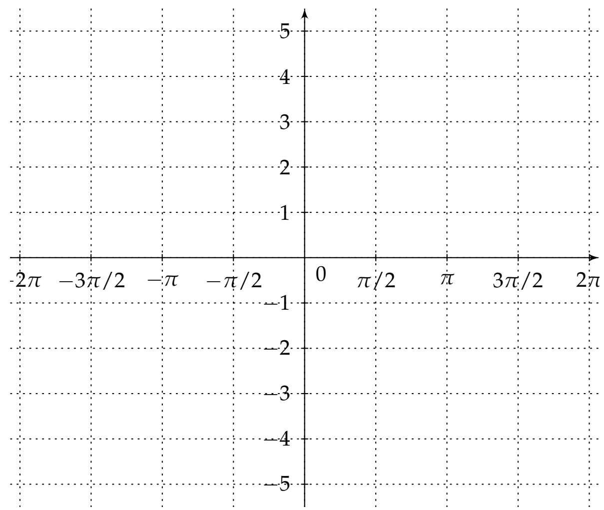












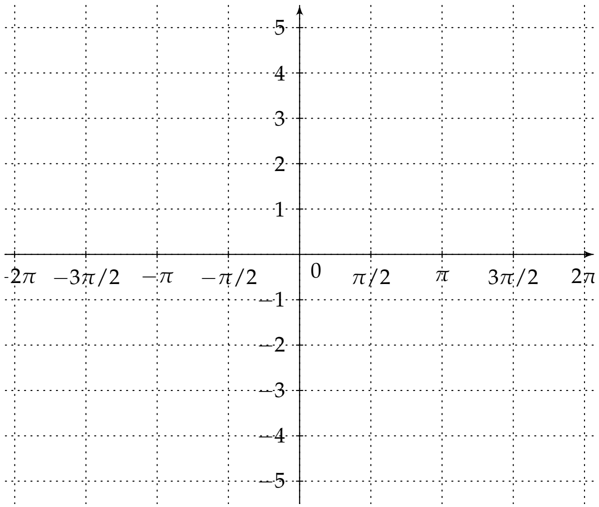
192 - Graf goniometrické funkce tangens a kotangens - doplnit

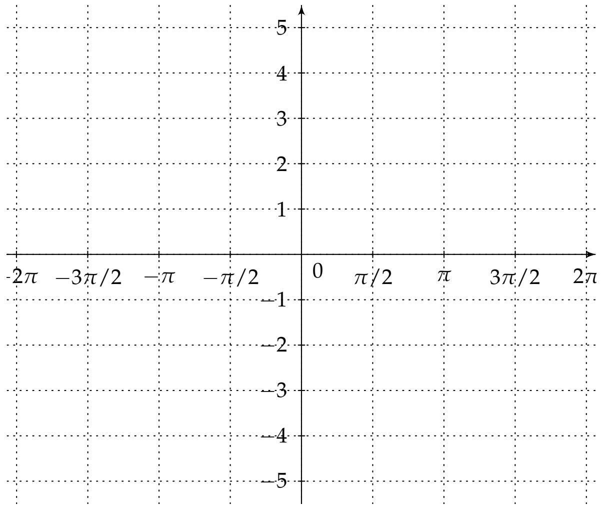
Zadání Do připravených obrázků nakreslete grafy zadaných funkcí.

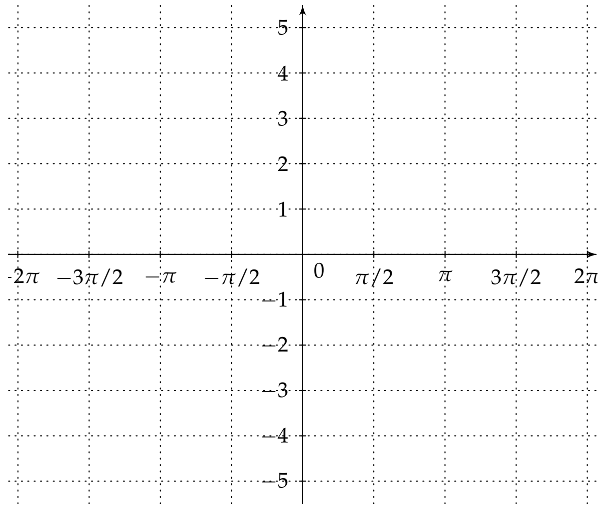
a) $y = \tan x$ b) $y = \cot x$ c) $y = \tan \frac{x}{2}$ d) $y = \cot \frac{x}{2}$ e) $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ f) $y = \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

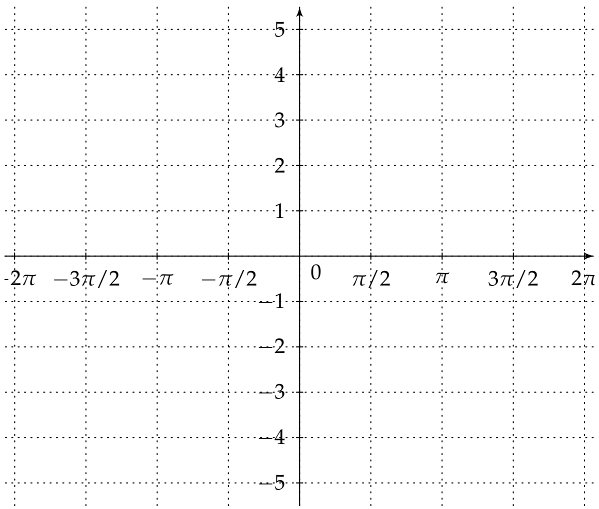
Doplňte definiční obor a obor hodnot. Zjistěte, zda je funkce sudá nebo lichá. Najděte intervaly, na kterých je funkce rostoucí, klesající.
Je funkce ohraničená? Má funkce extrémy?

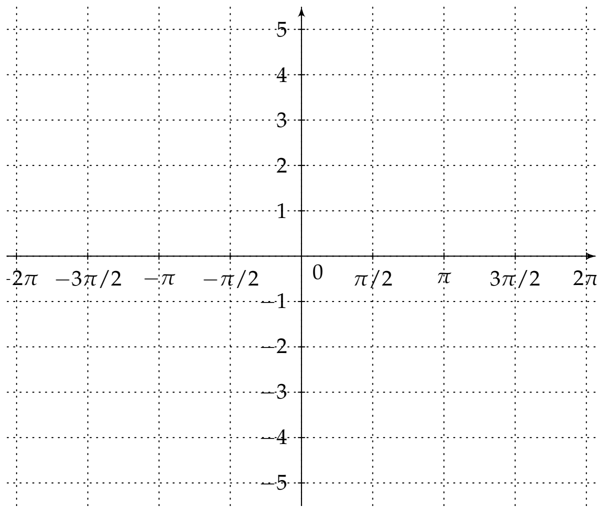
Řešení **Video** **Teorie: 26**

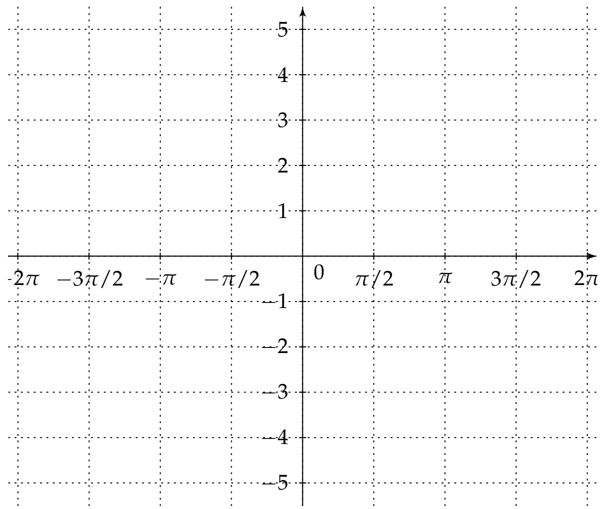












193 - Vlastnosti funkce: sudá a lichá

Zadání Určete, zda je funkce sudá nebo lichá.

a) $y = 3x^2 - \sqrt{1 - x^2}$

b) $y = 2^{x - x^3}$

c) $y = \ln\left(\dfrac{2 - x}{2 + x}\right)$

d) $y = \dfrac{3x}{2 + x^4}$

e) $y = \dfrac{1}{x^2} \cos x$

f) $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

Řešení **Video** **Teorie: 14** **Řešené příklady: 87, 88**

Tahák

Určíme definiční obor funkce a ověříme, zdali je souměrný podle počátku reálné osy, tj. jestli platí:

$$\forall x \in D_f$$

je také

$$-x \in D_f.$$

Sudá funkce:

$$f(-x) = f(x)$$

Lichá funkce:

$$f(-x) = -f(x)$$

194 - Složená funkce

Zadání Složte funkce v pořadí $g \circ f$ a $f \circ g$:

a) $f : y = x^2, g : y = \log x$

b) $f : y = x + 2, g : y = \cos x$

c) $f : y = \dfrac{1}{x}, g : y = 2x^3 + x + 2$

d) $f : y = \sin x + 1, g : y = \sqrt{x}$

Řešení **Video** **Teorie: 15**

195 - Inverzní funkce

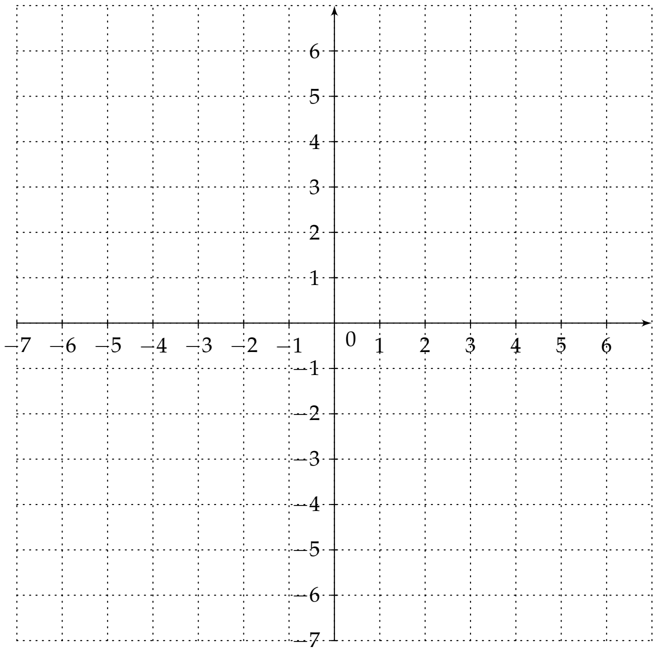
Zadání Určete inverzní funkci, její definiční obor a obor hodnot. Zakreslete graf funkce a funkce inverzní.

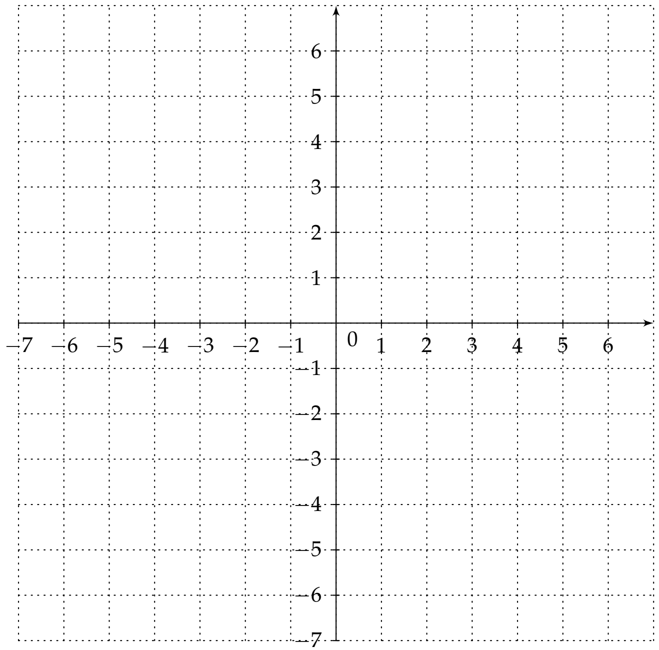
a) $f:\ y = 2\sqrt{x} + 1$

b) $f:\ y = \frac{3}{4}x - 2$

Řešení

Video **Teorie: 15** **Řešené příklady: 89**





Tahák

Funkce inverzní existuje pro funkce prosté.

Pro definiční obor a obor hodnot platí:
$D_{f^{-1}} = H_f \quad H_{f^{-1}} = D_f$

Dále platí:

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x$$

$$f^{-1}\left(f(x)\right) = x$$

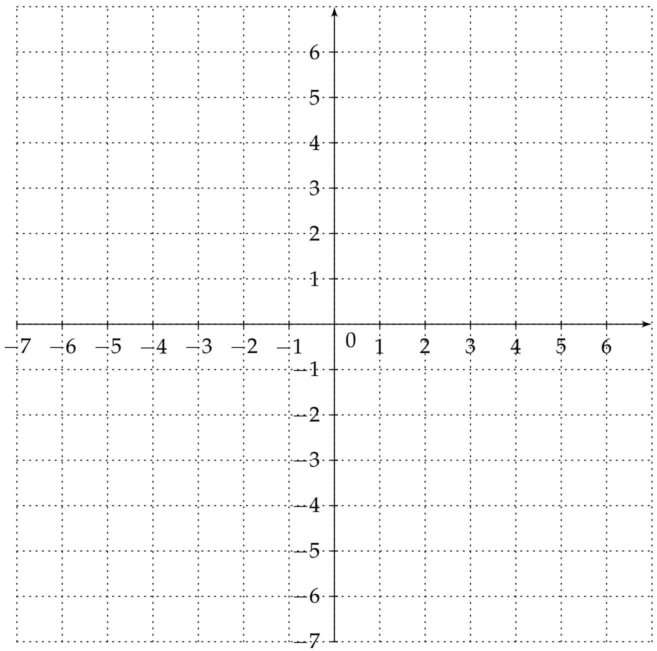
196 - Inverzní funkce

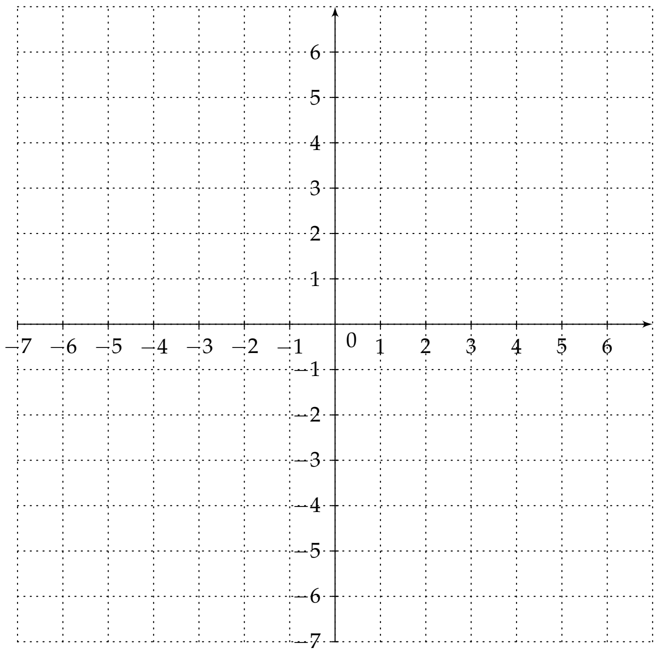
Zadání Určete inverzní funkci, její definiční obor a obor hodnot. Zakreslete graf funkce a funkce inverzní.

a) $f:\ y = \dfrac{5x-1}{x+2}$

b) $f:\ y = -\sqrt{x+5}$

Řešení **Video** **Teorie: 15** **Řešené příklady: 89**





Tahák

Funkce inverzní existuje pro funkce prosté.

Pro definiční obor a obor hodnot platí:
$D_{f^{-1}} = H_f \quad H_{f^{-1}} = D_f$

Dále platí:

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x$$

$$f^{-1}\left(f(x)\right) = x$$

197 - Limity

Zadání Vypočítejte limitu

a) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+2)$ b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{3x-2}$ c) $\lim\limits_{x\to 3} x^2\cdot 2^x$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+2}{\cos x}$

Řešení **Video** **Teorie: 29 - 34** **Řešené příklady: 90 - 102**

Tahák

Nejdříve dosaďte limitní bod do funkčního předpisu.

Jedná se o neurčitou limitu?

Pokud ano, určíme její limitní typ.

Funkce je v limitním bodě x_0 spojitá, pokud

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

198 - Limity - racionální funkce

Zadání Vypočítejte limitu

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^3-1}$

c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-3x^2}{x^2-x-6}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-6x+5}{x^2-3x+4}$

e) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3-x}{1+3x-2x^3}$

f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2}$

Řešení **Video** **Teorie: 29 - 34** **Řešené příklady: 90 - 102**

Tahák

Nejdříve dosaďte limitní bod do funkčního předpisu.

Jedná se o neurčitou limitu?

Pokud ano, určíme její limitní typ.

Funkce je v limitním bodě x_0 spojitá, pokud

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

199 - Limity

Zadání Vypočítejte limitu

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{2x^2 - x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{2x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x - \tan x}{x + \sin x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{x}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} (x \cot 3x)$

Řešení **Video** **Teorie: 29 - 34** **Řešené příklady: 90 - 102**

Tahák

Nejdříve dosaďte limitní bod do funkčního předpisu.

Jedná se o neurčitou limitu?

Pokud ano, určíme její limitní typ.

Funkce je v limitním bodě x_0 spojitá, pokud

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Platí:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

resp.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin kx}{kx} = 1,$$

200 - Limity

Zadání Vypočítejte limitu

a) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x+4}-3}{x^2-3x-10}$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 3x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+8}-2}{\sin x}$

Řešení **Video** **Teorie: 29 - 34** **Řešené příklady: 90 - 102**

Tahák

Nejdříve dosaďte limitní bod do funkčního předpisu.

Jedná se o neurčitou limitu?

Pokud ano, určíme její limitní typ.

Funkce je v limitním bodě x_0 spojitá, pokud

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Zlomek rozšíříme jedničkou ve vhodném tvaru, využijeme buď

$$(a-b)(a+b) = a^2-b^2$$

nebo

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3.$$

201 - Limity

Zadání Vypočítejte limitu

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x}{x-2}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2-9}{x}$ c) $\lim\limits_{x \to \pm 5} \dfrac{x+1}{x^2-25}$ d) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x+2}{(x+1)^2}$

Řešení **Video** **Teorie: 29 - 34** **Řešené příklady: 90 - 102**

Tahák

Nejdříve dosaďte limitní bod do funkčního předpisu.

Jedná se o neurčitou limitu?

Pokud ano, určíme její limitní typ.

Funkce je v limitním bodě x_0 spojitá, pokud

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Řešíme pomocí jednostranných limit.

Pracovní listy – Diferenciální počet funkce jedné proměnné

203 - Derivace

Zadání Vypočítejte první derivaci funkce:

a) $y = x^4 + \ln x$

b) $y = 3x^4 - 5x^2 + 1$

c) $y = \mathrm{e}^x \sin x$

d) $y = (x^2 - 3x)(x^2 + 2x)$

e) $y = x^2 \log_3 x$

f) $y = (x^2 + 1) \sin x \ln x$

Řešení **Video** **Teorie: 37, 38, 39** **Řešené příklady: 104, 105, 106, 107**

Tahák

1. $(c)' = 0$
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$
3. $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$
4. $(a^x)' = a^x \ln a$
5. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
6. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
10. $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
14. $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

$u = u(x) \quad v = v(x)$

15. $[c \cdot u]' = c \cdot u'$
16. $[u \pm v]' = u' \pm v'$
17. $[u \cdot v]' = u' \cdot v + u \cdot v'$
18. $\left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
19. $[u(v)]' = u'(v) \cdot v'$

204 - Derivace

Zadání Vypočítejte první derivaci funkce:

a) $y = \dfrac{x^2 - 5x - 1}{x^3}$

b) $y = \dfrac{\arccos x}{x}$

c) $y = \dfrac{x - 1}{\log_2 x}$

d) $y = \dfrac{1 - 10^x}{1 + 10^x}$

e) $y = \dfrac{1}{\cos x}$

f) $y = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\tan x}$

Řešení **Video** **Teorie: 37, 38, 39** **Řešené příklady: 104, 105, 106, 107**

Tahák

1. $(c)' = 0$
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$
3. $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$
4. $(a^x)' = a^x \ln a$
5. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
6. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
10. $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
11. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
12. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
13. $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$
14. $(\operatorname{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$

$u = u(x) \quad v = v(x)$

15. $[c \cdot u]' = c \cdot u'$
16. $[u \pm v]' = u' \pm v'$
17. $[u \cdot v]' = u' \cdot v + u \cdot v'$
18. $\left[\dfrac{u}{v}\right]' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
19. $[u(v)]' = u'(v) \cdot v'$

205 - Derivace

Zadání Vypočítejte první derivaci funkce:

a) $y = \cos 5x$

b) $y = \sin(x^5 + 2x^2 + 3)$

c) $y = (2 + x^3)^{70}$

d) $y = \ln(x^2 + 8)$

e) $y = \mathrm{e}^{3x^2+x}$

f) $y = \arctan \dfrac{4}{x}$

Řešení **Video** **Teorie: 40** **Řešené příklady: 108, 109**

Tahák

1. $(c)' = 0$
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$
3. $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$
4. $(a^x)' = a^x \ln a$
5. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
6. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
10. $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
11. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
14. $(\operatorname{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

$u = u(x) \quad v = v(x)$

15. $[c \cdot u]' = c \cdot u'$
16. $[u \pm v]' = u' \pm v'$
17. $[u \cdot v]' = u' \cdot v + u \cdot v'$
18. $\left[\dfrac{u}{v}\right]' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
19. $[u(v)]' = u'(v) \cdot v'$

206 - Derivace

Zadání Vypočítejte první derivaci funkce:

a) $y = \sqrt{1+x^2}$

b) $y = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

c) $y = \frac{1}{4}\tan^4 x$

d) $y = \ln(x \sin x)$

e) $y = \ln \sin \sqrt[3]{\operatorname{arctan} e^{3x}}$

f) $y = \sqrt{1+\tan(x+\frac{1}{x})}$

Řešení **Video** **Teorie: 40** **Řešené příklady: 108, 109**

Tahák

1. $(c)' = 0$
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$
3. $(e^x)' = e^x$
4. $(a^x)' = a^x \ln a$
5. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
6. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
10. $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
11. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\operatorname{arctan} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
14. $(\operatorname{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

$u = u(x) \quad v = v(x)$

15. $[c \cdot u]' = c \cdot u'$
16. $[u \pm v]' = u' \pm v'$
17. $[u \cdot v]' = u' \cdot v + u \cdot v'$
18. $\left[\dfrac{u}{v}\right]' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
19. $[u(v)]' = u'(v) \cdot v'$

207 - Druhá derivace

Zadání Vypočítejte druhou derivaci explicitní funkce a výsledek upravte:

a) $y = \dfrac{1+x}{1-x}$

b) $y = x\left(\sin\left(\ln x\right) + \cos\left(\ln x\right)\right)$

Řešení **Video** **Teorie: 41** **Řešené příklady: 110, 111, 112**

Tahák

1. $(c)' = 0$
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$
3. $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$
4. $(a^x)' = a^x \ln a$
5. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
6. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
10. $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
11. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
14. $(\operatorname{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

$u = u(x) \quad v = v(x)$

15. $[c \cdot u]' = c \cdot u'$
16. $[u \pm v]' = u' \pm v'$
17. $[u \cdot v]' = u' \cdot v + u \cdot v'$
18. $\left[\dfrac{u}{v}\right]' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
19. $[u(v)]' = u'(v) \cdot v'$

208 - Derivace - logaritmické derivování

Zadání Logaritmickým derivováním vypočítejte derivaci funkce:

a) $y = x^{x^2}$ b) $y = x^{\ln x}$ c) $y = (\sin x)^{\cos x}$

Řešení **Video** **Teorie: 41** **Řešené příklady: 113**

Tahák

Logaritmické derivování

$$y = f(x)^{g(x)}$$
$$\ln y = \ln f(x)^{g(x)}$$
$$\ln y = g(x) \cdot \ln f(x)$$
$$\frac{1}{y} \cdot y' = g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$$
$$y' = y \cdot \left[g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \right]$$
$$y' = f(x)^{g(x)} \cdot \left[g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \right]$$

Druhý způsob, který lze použít, je následující identita:

$$f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^{\ln f(x)^{g(x)}} = \mathrm{e}^{g(x) \ln f(x)}$$

209 - l'Hospitalovo pravidlo

Zadání Spočítejte limity l'Hospitalovým pravidlem:

a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+2x^2-x-2}{2x^4-x^2-1}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{2x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{3x}-2x-1}{\sin^2 2x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{x^3}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos x}{x}$

Řešení **Video** **Teorie: 42** **Řešené příklady: 114, 115**

Tahák

Limita typu „$\frac{0}{0}$"

l'Hospitalovo pravidlo

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

lze realizovat přímo.

210 - l'Hospitalovo pravidlo

Zadání Spočítejte limity l'Hospitalovým pravidlem:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^3}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3 - x^2 + x - 3}{5x^3 + 4x^2 + 2}$ c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\cot x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln \sin x}{\ln x}$

Řešení **Video** **Teorie: 42** **Řešené příklady: 114, 115**

Tahák

Limita typu „$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$“

l´Hospitalovo pravidlo

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

lze realizovat přímo.

211 - l'Hospitalovo pravidlo

Zadání Spočítejte limity l'Hospitalovým pravidlem:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \ln x$

b) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}$

c) $\lim\limits_{x\to 1^-} \log x \ln(1-x)$

d) $\lim\limits_{x\to \pi} (\pi - x) \tan \dfrac{x}{2}$

Řešení **Video** **Teorie: 42** **Řešené příklady: 114, 115**

Tahák

Limita typu „$0 \cdot \infty$“

l´Hospitalovo pravidlo

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

nelze realizovat přímo.

Limitu je třeba upravit na typ příznivý pro l´Hospitalovo pravidlo, tj. na typ „$\frac{0}{0}$“nebo „$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$“,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

212 - l'Hospitalovo pravidlo

Zadání Spočítejte limity l'Hospitalovým pravidlem:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{2x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\sin x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

Řešení **Video** **Teorie: 42** **Řešené příklady: 114, 115**

Tahák

Limita typu „$\infty-\infty$“

l´Hospitalovo pravidlo

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

nelze realizovat přímo.

Limitu je třeba upravit na typ příznivý pro l´Hospitalovo pravidlo, tj. na typ „$\frac{0}{0}$“nebo „$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$“, použitím známých algebraických manipulací: vytýkání, převod na společný jmenovatel, násobení jedničkou ve vhodném tvaru, apod.

213 - l'Hospitalovo pravidlo

Zadání Spočítejte limity l'Hospitalovým pravidlem:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ b) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$ c) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$

Řešení **Video** **Teorie: 42** **Řešené příklady: 114, 115**

Tahák

Limita typu „$0^0, \infty^0, 0^\infty, 1^\infty$“

l´Hospitalovo pravidlo

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

nelze realizovat přímo.

Limitu je třeba upravit na typ příznivý pro l´Hospitalovo pravidlo, tj. na typ „$\frac{0}{0}$“nebo „$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$“, použitím následující identity:

$$f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}.$$

214 - Derivace parametricky zadané funkce

Zadání Vypočítejte první derivaci parametricky zadané funkce:

a) $x = \tan t\,, \quad y = \dfrac{\sin 2t}{2}\,, \quad t \in \langle 0, \frac{\pi}{2})$

b) $x = 5\,(t - \cos t)\,, \quad y = 5\,(1 + \sin t)\,, \quad t \in \langle 0, \pi \rangle$

Řešení **Video** **Teorie: 43** **Řešené příklady: 116, 117**

Tahák

$$x = \varphi\,(t)$$
$$y = \psi\,(t)$$
$$y' = \frac{\dot{\psi}(t)}{\dot{\varphi}(t)} \quad \dot{\varphi}(t) \neq 0$$

215 - Derivace parametricky zadané funkce

Zadání Vypočítejte druhou derivaci parametricky zadané funkce:

a) $x = \dfrac{1-t}{1+t} \quad y = \dfrac{2t}{1+t} \quad t \in \langle 0, 1 \rangle$

b) $x = a \cos t\,, \quad y = b \sin t\,, \quad a, b \in \mathbb{R}\,,\ t \in (0, \pi)$

Řešení **Video** **Teorie: 43** **Řešené příklady: 116, 117**

Tahák

$$x = \varphi\,(t)$$
$$y = \psi\,(t)$$
$$y' = \frac{\dot\psi(t)}{\dot\varphi(t)} \quad \dot\varphi(t) \neq 0$$
$$y'' = \frac{\ddot\psi(t)\cdot\varphi(\dot{t}) - \dot\psi(t)\cdot\ddot\varphi(t)}{(\dot\varphi(t))^3} \quad \dot\varphi(t) \neq 0$$

216 - Tečna ke grafu funkce

Zadání Určete obecnou rovnici tečny t a normály n v dotykovém bodě T ke grafu funkce f dané předpisem:

a) $y = \dfrac{8}{4+x^2} \quad T = [2, ?]$

b) $y = \ln x, \quad T = [\mathrm{e}, ?]$

Řešení **Video** **Teorie: 45** **Řešené příklady: 119, 120**

Tahák

směrnicový tvar rovnice tečny

$$t : y - y_0 = k_t\,(x - x_0)$$

bod dotyku

$$T = [x_0, y_0]$$

směrnice tečny

$$k_t = f'\,(x_0)$$

směrnicový tvar rovnice normály

$$t : y - y_0 = k_n\,(x - x_0)$$

bod dotyku

$$T = [x_0, y_0]$$

směrnice normály

$$k_n = -\frac{1}{f'\,(x_0)}$$

obecná rovnice přímky

$$ax + by + c = 0$$

217 - Tečna ke grafu funkce

Zadání Určete rovnice tečen ke grafu funkce f, které jsou rovnoběžné s přímkou p:

a) $y = x^2 + 4x - 5, \quad p : x + 4y = 0$

b) $y = x^3 - 12x, \quad p : y = 2$

Řešení **Video** **Teorie: 45** **Řešené příklady: 119, 120**

Tahák

směrnicový tvar rovnice tečny

$$t : y - y_0 = k_t \left(x - x_0\right)$$

bod dotyku

$$T = [x_0, y_0]$$

směrnice tečny

$$k_t = f'\left(x_0\right)$$

218 - Tečna ke grafu funkce

Zadání Určete rovnice tečen ke grafu funkce f, které jsou rovnoběžné s osou x:

a) $y = x^4 - 12x$

b) $y = x^2 + 4x - 5$

Řešení **Video** **Teorie: 45** **Řešené příklady: 119, 120**

Tahák

směrnicový tvar rovnice tečny

$$t : y - y_0 = k_t\,(x - x_0)$$

bod dotyku

$$T = [x_0, y_0]$$

směrnice tečny

$$k_t = f'\,(x_0)$$

219 - Tečna ke grafu parametricky zadané funkce

Zadání Určete rovnici tečny t a normály n cykloidy v dotykovém bodě T, v němž $t = \frac{\pi}{2}$.
Parametrické rovnice cykloidy jsou:

$$x = a\left(t - \sin t\right)$$
$$y = a\left(1 - \cos t\right); \quad a > 0,\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle$$

Řešení **Video** **Teorie: 45** **Řešené příklady: 119, 120**

Tahák

směrnicový tvar rovnice tečny

$$t : y - y_0 = k_t\left(x - x_0\right)$$

bod dotyku

$$T = [x_0, y_0]$$

směrnice tečny

$$k_t = f'\left(x_0\right)$$

směrnicový tvar rovnice normály

$$t : y - y_0 = k_n\left(x - x_0\right)$$

bod dotyku

$$T = [x_0, y_0]$$

směrnice normály

$$k_n = -\frac{1}{f'\left(x_0\right)}$$

obecná rovnice přímky

$$ax + by + c = 0$$

220 - Diferenciál

Zadání Vypočítejte diferenciál funkce $y = f(x)$ v obecném bodě x vzhledem k obecnému přírůstku dx:

a) $y = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ b) $y = \dfrac{x^3+1}{x^3-1}$ c) $y = \tan^2 x$ d) $y = \operatorname{arctan} \mathrm{e}^{2x}$

Řešení **Video** **Teorie: 44**

Tahák

Diferenciál funkce $y = f(x)$

$dy = f'(x)dx$

Diferenciál funkce f v bodě x_0

$dy(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

Diferenciál funkce f v bodě x_0 při známém přírůstku dx

$dy(x_0)(dx) = f'(x_0) \cdot dx \in \mathbb{R}$

Diferenciál druhého řádu funkce $y = f(x)$

$d^2y = f''(x)dx^2$

Diferenciál n-tého řádu funkce $y = f(x)$

$d^ny = f^{(n)}(x)dx^n$

Přibližný výpočet funkčních hodnot

$f(x) \approx f(x_0) + df(x_0)(dx)$

221 - Diferenciál

Zadání Vypočítejte přibližně s využitím diferenciálu funkčí hodnotu funkce $y = \sqrt{x}$ v bodě $x_0 = 4{,}4$.

Řešení **Video** **Teorie: 44**

Tahák

Diferenciál funkce $y = f(x)$

$$dy = f'(x)dx$$

Diferenciál funkce f v bodě x_0

$$dy(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Diferenciál funkce f v bodě x_0 při známém přírůstku dx

$$dy(x_0)(dx) = f'(x_0) \cdot dx \in \mathbb{R}$$

Diferenciál druhého řádu funkce $y = f(x)$

$$d^2y = f''(x)dx^2$$

Diferenciál n-tého řádu funkce $y = f(x)$

$$d^ny = f^{(n)}(x)dx^n$$

Přibližný výpočet funkčních hodnot

$$f(x) \approx f(x_0) + df(x_0)(dx)$$

222 - Diferenciál

Zadání Vypočítejte diferenciál druhého řádu funkce $y = f(x)$ v obecném bodě x vzhledem k obecnému přírůstku dx:

a) $y = \sqrt[3]{x^2}$ b) $y = (x+1)^3(x-1)^2$ c) $y = \sin^2 x$

Řešení **Video** **Teorie: 44**

Tahák

Diferenciál funkce $y = f(x)$

$$dy = f'(x)dx$$

Diferenciál funkce f v bodě x_0

$$dy(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Diferenciál funkce f v bodě x_0 při známém přírůstku dx

$$dy(x_0)(dx) = f'(x_0) \cdot dx \in \mathbb{R}$$

Diferenciál druhého řádu funkce $y = f(x)$

$$d^2y = f''(x)dx^2$$

Diferenciál n-tého řádu funkce $y = f(x)$

$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n$$

Přibližný výpočet funkčních hodnot

$$f(x) \approx f(x_0) + df(x_0)(dx)$$

223 - Taylorův polynom

Zadání Napište Taylorův polynom n-tého stupně $T_n(x)$ na okolí bodu x_0 pro funkci:

a) $f: y = \dfrac{1}{\sqrt{x}},\ x_0 = 1,\ n = 3$

b) $f: y = \ln x,\ x_0 = 1,\ n = 3$

Řešení **Video** **Teorie: 46** **Řešené příklady: 121, 122**

Tahák

Taylorův polynom n-tého stupně funkce $y = f(x)$ v bodě x_0

$$T_n(x_0) = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{1!} + \cdots + \frac{d^n f(x_0)}{n!}$$

Taylorův polynom třetího stupně funkce $y = f(x)$ v bodě x_0

$$T_3(x_0) = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{1!} + \frac{d^2 f(x_0)}{2!} + \frac{d^3 f(x_0)}{3!}$$

resp.

$$T_3(x_0) = f(x_0) + \frac{1}{1!}f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)(x - x_0)^3$$

224 - Monotónnost a lokální extrémy funkce

Zadání Nalezněte intervaly monotónnosti a lokální extrémy.

a) $f(x) = x^3 + 3x^2$

b) $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$

Řešení **Video** **Teorie:** 48 **Řešené příklady:** 123, 124, 125, 126

Tahák

1. Definiční obor.

2. První derivace a její definiční obor.

3. Stacionární body, intervaly plus mínus.

4. Znaménko první derivace. Funkce je rostoucí, jestliže $f'(x) > 0$. Funkce je klesající, jestliže $f'(x) < 0$.

5. Lokální extrémy.

6. Pozor na definiční obor. V bodech nespojitosti neexistují extrémy!

225 - Monotónnost a lokální extrémy funkce

Zadání Nalezněte intervaly monotónnosti a lokální extrémy.

a) $f(x) = x - 2\ln(x+1)$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + 2x + \ln x$

Řešení **Video** **Teorie:** 48 **Řešené příklady:** 123, 124, 125, 126

Tahák

1. Definiční obor.

2. První derivace a její definiční obor.

3. Stacionární body, intervaly plus mínus.

4. Znaménko první derivace. Funkce je rostoucí, jestliže $f'(x) > 0$. Funkce je klesající, jestliže $f'(x) < 0$.

5. Lokální extrémy.

6. Pozor na definiční obor. V bodech nespojitosti neexistují extrémy!

226 - Konvexnost, konkávnost, inflexní body

Zadání Najděte intervaly, kde je funkce konvexní a kde konkávní, najděte její inflexní body.

a) $f(x) = x^4 - 6x^3 + 24x^2 - 12$

b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$

Řešení **Video** **Teorie: 49** **Řešené příklady: 127**

Tahák

1. Definiční obor.

2. První derivace a její definiční obor.

3. Druhá derivace a její definiční obor.

4. Nulové body druhé derivace, intervaly plus mínus.

5. Znaménko druhé derivace. Funkce je konvexní, jestliže $f''(x) > 0$. Funkce je konkávní, jestliže $f''(x) < 0$.

6. Inflexní body.

227 - Asymptoty

Zadání Určete všechny asymptoty grafu funkce:

a) $y = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{3x + 3}$

b) $y = \dfrac{2x - 1}{x^2}$

Řešení **Video** **Teorie: 50** **Řešené příklady: 128, 129**

Tahák

1. Definiční obor.

2. Určíme v krajních bodech intervalů spojitosti jednostranné limity.

3. Asymptota bez směrnice existuje v daném bodě pouze v případě, že některá z jednostranných limit vyjde nevlastní.

4. Asymptota se směrnicí $y = kx + q$

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$$
$$q = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx)$$

nebo

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$$
$$q = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - kx)$$

228 - Asymptoty

Zadání Určete všechny asymptoty grafu funkce:

a) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{2x - 1}$

b) $y = \dfrac{2x^3}{x^2 - 1}$

Řešení **Video** **Teorie: 50** **Řešené příklady: 128, 129**

Tahák

1. Definiční obor.

2. Určíme v krajních bodech intervalů spojitosti jednostranné limity.

3. Asymptota bez směrnice existuje v daném bodě pouze v případě, že některá z jednostranných limit vyjde nevlastní.

4. Asymptota se směrnicí $y = kx + q$

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$$
$$q = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx)$$

nebo

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$$
$$q = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - kx)$$

229 - Průběh funkce

Zadání Určete průběh funkce $y = \dfrac{x^2}{x+1}$.

Řešení **Video** **Teorie: 51** **Řešené příklady: 123 - 129**

Tahák

1. definiční obor funkce, nulové body, intervaly plus mínus

2. sudost, lichost, periodicita

3. spojist, asymptoty bez směrnice

4. první derivace, její definiční obor, nulové (stacionární) body, intervaly plus mínus

5. monotónnost

6. lokální extrémy

7. druhá derivace, její definiční obor, nulové body, intervaly plus mínus

8. konvexnost, konkávnost, inflexe

9. asymptoty se směrnicí

10. graf, obor hodnot

230 - Průběh funkce

Zadání Určete průběh funkce $y = \ln \cos x$.

Řešení **Video** **Teorie: 51** **Řešené příklady: 123 - 129**

Tahák

1. definiční obor funkce, nulové body, intervaly plus mínus

2. sudost, lichost, periodicita

3. spojist, asymptoty bez směrnice

4. první derivace, její definiční obor, nulové (stacionární) body, intervaly plus mínus

5. monotónnost

6. lokální extrémy

7. druhá derivace, její definiční obor, nulové body, intervaly plus mínus

8. konvexnost, konkávnost, inflexe

9. asymptoty se směrnicí

10. graf, obor hodnot

231 - Průběh funkce

Zadání Určete průběh funkce $y = x^2 \ln x$.

Řešení **Video** **Teorie: 51** **Řešené příklady: 123 - 129**

Tahák

1. definiční obor funkce, nulové body, intervaly plus mínus

2. sudost, lichost, periodicita

3. spojist, asymptoty bez směrnice

4. první derivace, její definiční obor, nulové (stacionární) body, intervaly plus mínus

5. monotónnost

6. lokální extrémy

7. druhá derivace, její definiční obor, nulové body, intervaly plus mínus

8. konvexnost, konkávnost, inflexe

9. asymptoty se směrnicí

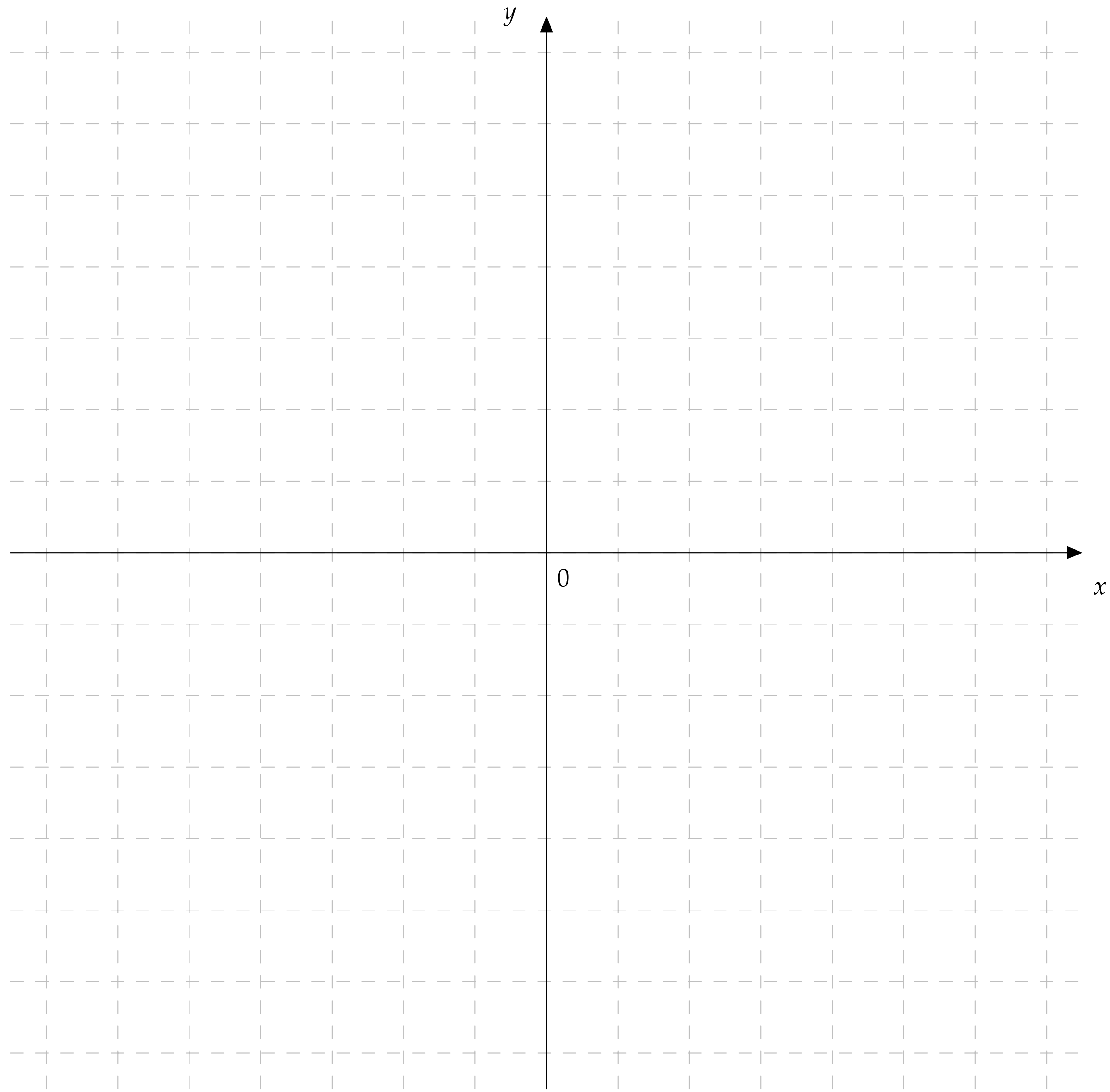
10. graf, obor hodnot

232 - Průběh funkce

Zadání Zakreslete graf funkce f, víte-li, že:

1. $D_f = \mathbb{R}$
   $H_f = \mathbb{R}$
2. funkce nemá body nespojitosti
   limity v krajních bodech jsou
   $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
   $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$
3. funkce není sudá, není lichá, není periodická
4. průsečík s osou x je: $[-3, 0]$
   průsečík s osou y je: $[0, 1]$
   funkce je kladná na intervalu $(-3, \infty)$
   záporná na $(-\infty, -3)$
5. funkce má lokální maximum v bodě $[-1, 5]$
   a lokální minimum v bodě $[1, \frac{1}{2}]$
   je rostoucí na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$
   a klesající na $(-1, 1)$
6. funkce má inflexní body $[-\frac{1}{2}, 2]$
   funkce je konvexní na intervalu $(-\frac{1}{2}, \infty)$
   a konkávní na $(-\infty, -\frac{1}{2})$
7. funkce nemá asymptoty

Řešení **Video** **Teorie: 51**

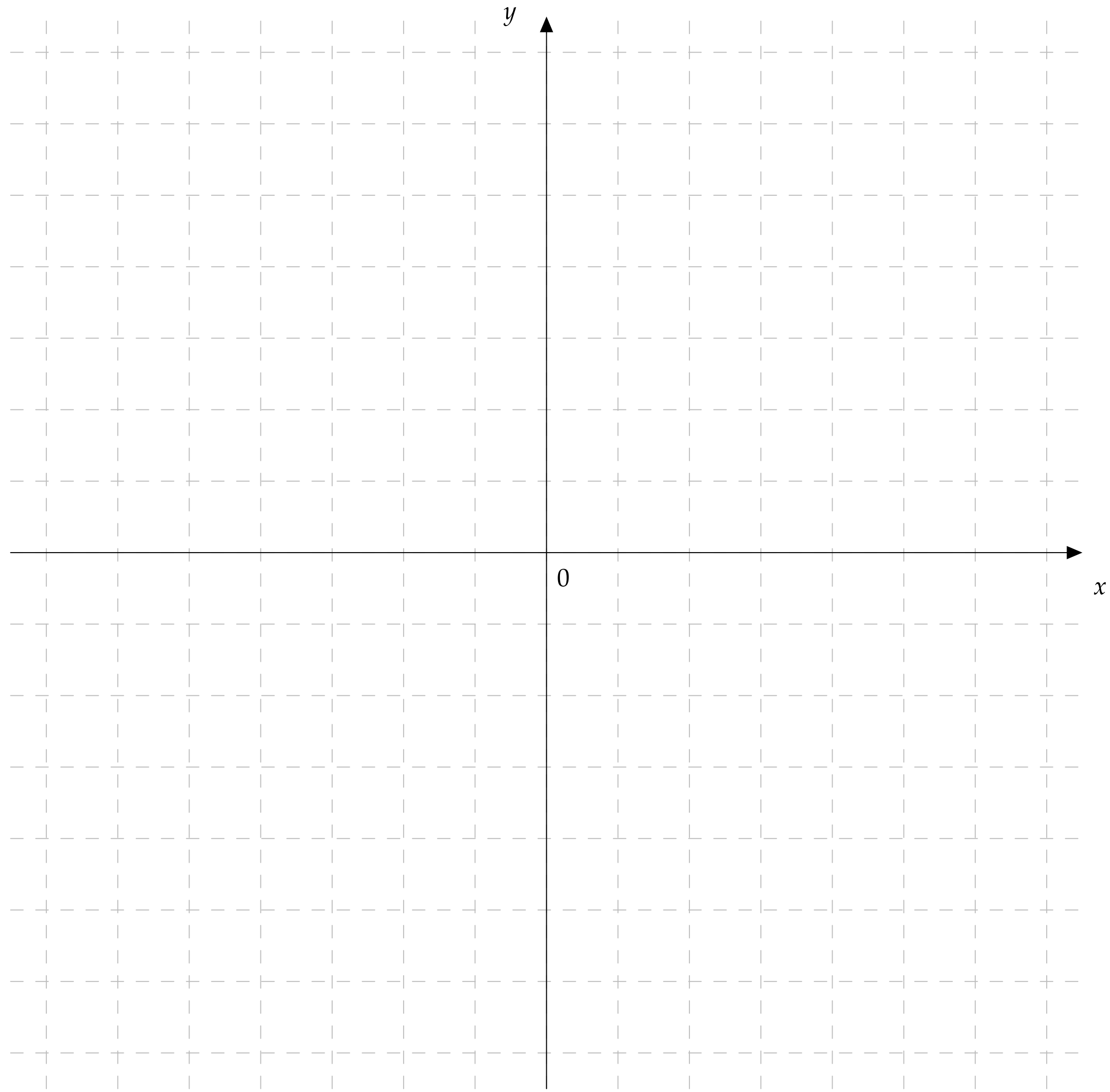


233 - Průběh funkce

Zadání Zakreslete graf funkce f, víte-li, že:

1. $D_f = \mathbb{R}$
   $H_f = \langle 0, 3)$
2. funkce nemá body nespojitosti
   limity v krajních bodech jsou
   $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$
   $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 3$
3. funkce je sudá, není lichá, není periodická
4. průsečík s osou x je: $[0, 0]$
   průsečík s osou y je: $[0, 0]$
   funkce je kladná na $\mathbb{R}$
5. funkce má lokální minimum v bodě $[0, 0]$
   je rostoucí na interval $(0, \infty)$
   a klesajicí na $(-\infty, 0)$
6. funkce má inflexní body $[-2, 1]$ a $[2, 1]$
   funkce je konvexní na intervalu $(-2, 2)$
   a konkávní na $(-\infty, -2)$ a $(2, \infty)$
7. funkce má v ∞ a v $-\infty$ asymptotu $y = 3$

Řešení **Video** **Teorie: 51**

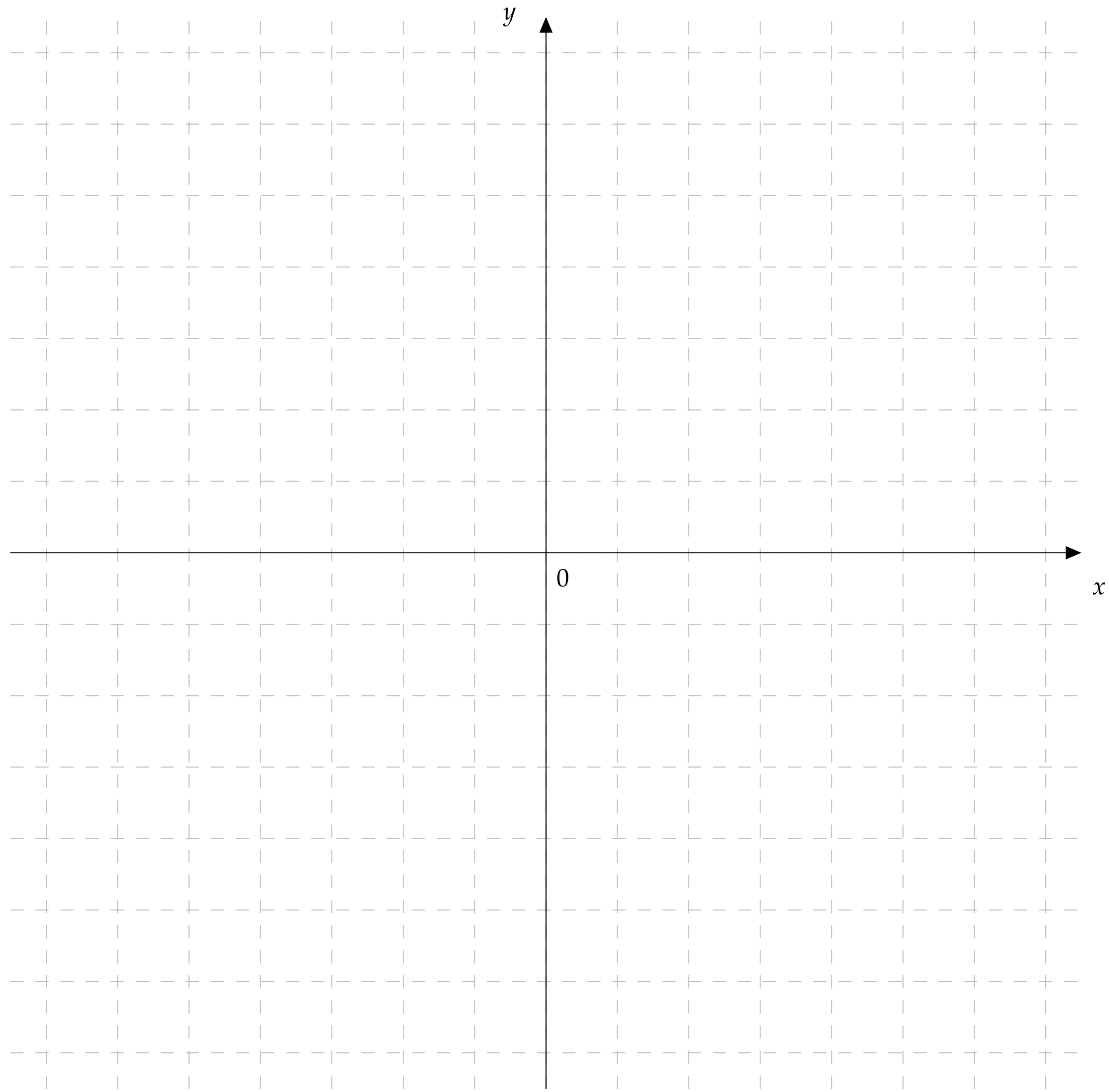


234 - Průběh funkce

Zadání Zakreslete graf funkce f, víte-li, že:

1. $D_f = (1, \infty)$
   $H_f = \mathbb{R}$
2. funkce nemá body nespojitosti
   limity v krajních bodech jsou
   $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$
   $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$
3. funkce není sudá, není lichá, není periodická
4. průsečík s osou x je: $[4, 0]$
   průsečík s osou y není
   funkce je kladná na intervalu $(4, \infty)$
   záporná na $(1, 4)$
5. funkce nemá lokální extrémy
   je rostoucí na celém D_f
6. funkce má inflexní bod $[3, -2]$
   funkce je konvexní na intervalu $(3, \infty)$
   a konkávní na $(1, 3)$
7. funkce má asymptotu $x = 1$

Řešení **Video** **Teorie: 51**

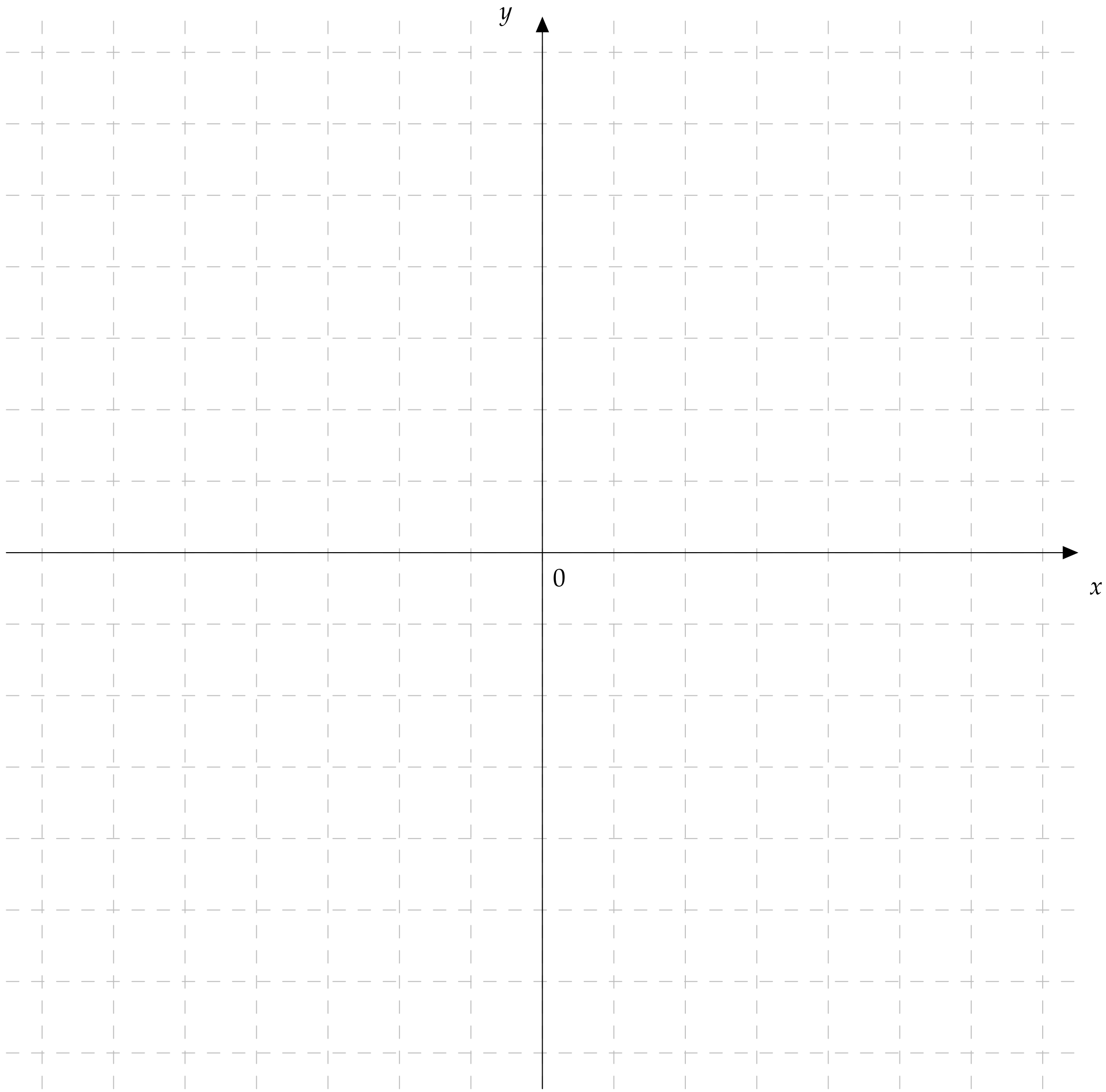


235 - Průběh funkce

Zadání Zakreslete graf funkce f, víte-li, že:

1. $D_f = \mathbb{R}$
   $H_f = \langle -5, \infty)$
2. funkce nemá body nespojitosti
   limity v krajních bodech jsou
   $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$
   $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$
3. funkce není sudá, není lichá, není periodická
4. průsečíky s osou x jsou: $[-4, 0]$, a $[2, 0]$
   průsečík s osou y je: $[0, -3]$
   funkce je kladná na $(-\infty, -4)$ a $(2, \infty)$
   záporná na $(-4, 2)$
5. funkce má lokální minimum v bodě $[-1, -5]$
   je rostoucí na interval $(-1, \infty)$
   a klesajicí na $(-\infty, -1)$
6. funkce má inflexní bod $[4, 5]$
   funkce je konvexní na intervalu $(-\infty, 4)$
   a konkávní na $(4, \infty)$
7. funkce má v ∞ asymptotu $y = x + 3$

Řešení **Video** **Teorie: 51**



Pracovní listy – Lineární algebra

237 - Matice

Zadání Vypočtěte matici D danou vztahem: $D = 2 \cdot A - B + C$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -3 & 7 & 6 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \\ -4 & 3 & 0 \\ 7 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Řešení **Video** **Teorie: 53, 54, 55** **Řešené příklady: 131**

Tahák

Nejdříve násobíme každý prvek matice A číslem 2, poté od výsledné matice odečteme matici B, odečítáme vzájemně si odpovídající prvky, nakonec přičteme matici C.

238 - Matice

Zadání Diskutujte existenci součinu a poté vypočtěte $A \cdot B$, $B \cdot A$:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Řešení **Video** **Teorie: 53, 54, 55** **Řešené příklady: 132**

Tahák

Součin matic:

$A = (a_{ik})$ matice typu $m \times p$

$B = (b_{kj})$ matice typu $p \times n$.

Pak $C = A \cdot B = (c_{ij})$ matice typu $m \times n$, kde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

239 - Matice

Zadání Diskutujte existenci součinu matic a vynásobte matice:

a) $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Řešení **Video** **Teorie: 53, 54, 55** **Řešené příklady: 132**

Tahák

Součin matic:

$A = (a_{ik})$ matice typu $m \times p$

$B = (b_{kj})$ matice typu $p \times n$.

Pak $C = A \cdot B = (c_{ij})$ matice typu $m \times n$, kde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

240 - Matice

Zadání Diskutujte existenci součinu matic a vynásobte matice:

a) $\begin{pmatrix} -5 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 5 & 6 & -8 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Řešení **Video** **Teorie: 53, 54, 55** **Řešené příklady: 132**

Tahák

Součin matic:

$A = (a_{ik})$ matice typu $m \times p$

$B = (b_{kj})$ matice typu $p \times n$.

Pak $C = A \cdot B = (c_{ij})$ matice typu $m \times n$, kde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

241 - Matice

Zadání

Transponujte matice: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 12 \\ 4 & -1 & 2 & 15 \\ 0 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 13 \\ 3 & 0 & 7 & 0 \\ 8 & 1 & -2 & -5 \\ 6 & -5 & 4 & 1 \\ 9 & 10 & 12 & 0 \end{pmatrix}$.

Řešení **Video** **Teorie: 53, 54, 55**

Tahák

Transpozice:

výměna řádků a sloupců matice.

$$A = (a_{ij}) \Rightarrow A^{\mathrm{T}} = (a_{ji})$$

242 - Hodnost matice

Zadání Určete hodnost matice:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení **Video** **Teorie: 56** **Řešené příklady: 133**

Tahák

Matici převedeme na schodovitý tvar. Poté spočítáme nenulové řádky matice ve schodovitém tvaru.

243 - Hodnost matice

Zadání Určete hodnost matice: $$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & 4 \\ 2 & -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení **Video** **Teorie: 56** **Řešené příklady: 133**

Tahák

Matici převedeme na schodovitý tvar. Poté spočítáme nenulové řádky matice ve schodovitém tvaru.

244 - Hodnost matice

Zadání

Určete hodnost matice: $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Řešení **Video** **Teorie: 56** **Řešené příklady: 133**

Tahák

Matici převedeme na schodovitý tvar. Poté spočítáme nenulové řádky matice ve schodovitém tvaru.

245 - Hodnost matice

Zadání

Určete hodnost matice: $D = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}.$

Řešení **Video** **Teorie: 56** **Řešené příklady: 133**

Tahák

Matici převedeme na schodovitý tvar. Poté spočítáme nenulové řádky matice ve schodovitém tvaru.

246 - Determinanty

Zadání Vypočtěte následující determinanty 2. řádu:

a) $\begin{vmatrix} 3 & -8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -5 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}$

Řešení **Video** **Teorie: 57, 58, 59** **Řešené příklady: 134 - 141**

Tahák

Determinanty 2. řádu

- křížové pravidlo:

Součin prvků na hlavní diagonále mínus součin prvků na vedlejší diagonále.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$\ominus$

247 - Determinanty

Zadání Vypočtěte následující determinanty 3. řádu:

a) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 14 & 6 & 2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

Řešení **Video** **Teorie: 57, 58, 59** **Řešené příklady: 134 - 141**

Tahák

Determinanty 3. řádu

- Sarrusovo pravidlo:

Opíšeme první 2 řádky.
Prvky ležící na úhlopříčkách vynásobíme, přičemž těm, které směřují zleva doprava (hlavní diagonála) přiřadíme znaménko + a těm, které směřují zprava doleva (vedlejší diagonála) přiřadíme znaménko -.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \ominus$$
$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} - (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} + a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21})$$

248 - Determinanty

Zadání

Vypočtěte determinant $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -8 & 3 \\ 0 & -2 & 8 & -1 \\ 4 & -7 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ rozvojem podle čtvrtého sloupce.

Řešení **Video** **Teorie: 57, 58, 59** **Řešené příklady: 134 - 141**

Tahák

Vhodný řádek (sloupec) je ten, který obsahuje co nejvíce nul.

Laplaceův rozvoj pro matici A řádu n:

a) rozvoj determinantu podle i-tého řádku

$|A| = a_{i1} \cdot \hat{a}_{i1} + a_{i2} \cdot \hat{a}_{i2} + \cdots + a_{in} \cdot \hat{a}_{in}$,

respektive

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot |A_{ij}|,$$

b) rozvoj determinantu podle j-tého sloupce

$|A| = a_{1j} \cdot \hat{a}_{1j} + a_{2j} \cdot \hat{a}_{2j} + \cdots + a_{nj} \cdot \hat{a}_{nj}$.

respektive

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot |A_{ij}|,$$

kde matice A_{ij} vznikne z matice A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.

249 - Determinanty

Zadání

Vypočtěte determinant $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ převodem na trojúhelníkový tvar.

Řešení **Video** **Teorie: 57, 58, 59** **Řešené příklady: 134 - 141**

Tahák

Vlastnosti determinantů:

- $|A| = |A^{\mathrm{T}}|$
- $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$
- Má-li matice A dva řádky (sloupce) stejné, pak $|A| = 0$.
- Vznikne-li matice B z A:
  a) vzájemnou výměnou dvou řádků (sloupců), pak: $|B| = -|A|$,
  b) vynásobením jednoho řádku (sloupce) číslem $k \in \mathbb{R}$, pak $|B| = k \cdot |A|$,
  c) přičtením k-násobku, $k \in \mathbb{R}$, jednoho řádku (sloupce) k jinému, pak: $|B| = |A|$.
- Jsou-li řádky (sloupce) matice A lineárně závislé, pak $|A| = 0$.
- Determinant trojúhelníkové matice je roven součinu prvků hlavní diagonály.

250 - Determinanty

Zadání

Vypočtěte následující determinant: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$

Řešení **Video** **Teorie: 57, 58, 59** **Řešené příklady: 134 - 141**

Tahák

Vlastnosti determinantů:

- $|A| = |A^{\mathrm{T}}|$
- $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$
- Má-li matice A dva řádky (sloupce) stejné, pak $|A| = 0$.
- Vznikne-li matice B z A:
  a) vzájemnou výměnou dvou řádků (sloupců), pak: $|B| = -|A|$,
  b) vynásobením jednoho řádku (sloupce) číslem $k \in \mathbb{R}$, pak $|B| = k \cdot |A|$,
  c) přičtením k-násobku, $k \in \mathbb{R}$, jednoho řádku (sloupce) k jinému, pak: $|B| = |A|$.
- Jsou-li řádky (sloupce) matice A lineárně závislé, pak $|A| = 0$.
- Determinant trojúhelníkové matice je roven součinu prvků hlavní diagonály.

251 - Determinanty

Zadání

Pro která x je determinant $\begin{vmatrix} x & 0 & -x \\ 0 & x & 0 \\ 1 & x & 1 \end{vmatrix}$ roven 0?

Řešení **Video** **Teorie: 57, 58, 59** **Řešené příklady: 134 - 141**

Tahák

Pro sestavení rovnice s neznámou x použijte Sarrusovo pravidlo.

252 - Inverzní matice

Zadání Vypočtěte k dané matici A matici inverzní (A^{-1}) eliminační metodou a proveďte zkoušku:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Řešení

Video **Teorie: 60** **Řešené příklady: 142, 143**

Tahák

Každou regulární matici A převedeme jen řádkově ekvivalentními úpravami na jednotkovou matici E. Stejné úpravy aplikujeme na jednotkovou matici E, která tímto přejde na inverzní matici A^{-1}, symbolicky

$$(A|E) \sim \cdots \sim (E|A^{-1}).$$

253 - Inverzní matice

Zadání Vypočtěte k dané matici A matici inverzní (A^{-1}) eliminační metodou a proveďte zkoušku:

a) $\begin{pmatrix} -1 & 7 & -5 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 8 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Řešení

Video **Teorie: 60** **Řešené příklady: 142, 143**

Tahák

Každou regulární matici A převedeme jen řádkově ekvivalentními úpravami na jednotkovou matici E. Stejné úpravy aplikujeme na jednotkovou matici E, která tímto přejde na inverzní matici A^{-1}, symbolicky

$$(A|E) \sim \cdots \sim (E|A^{-1}).$$

254 - Inverzní matice

Zadání Vypočtěte k dané matici A matici inverzní (A^{-1}) eliminační metodou a proveďte zkoušku:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Řešení **Video** **Teorie: 60** **Řešené příklady: 142, 143**

Tahák

Každou regulární matici A převedeme jen řádkově ekvivalentními úpravami na jednotkovou matici E. Stejné úpravy aplikujeme na jednotkovou matici E, která tímto přejde na inverzní matici A^{-1}, symbolicky

$$(A|E) \sim \cdots \sim (E|A^{-1}).$$

255 - Inverzní matice

Zadání Vypočtěte k dané matici A matici inverzní (A^{-1}) užitím determinantu a proveďte zkoušku:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Řešení

Video **Teorie: 60** **Řešené příklady: 142, 143**

Tahák

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (A^{\mathrm{alg}})^{\mathrm{T}},$$

256 - Soustavy lineárních rovnic

Zadání

Řešte soustavu lineárních rovnic a proveďte zkoušku:

a) $$\begin{aligned} 3x + y &= 1 \\ x - y &= 7 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 5x_1 - 6x_2 &= -3 \\ x_1 + 2x_2 &= -7 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 2x_1 - 6x_2 &= 4 \\ 3x_1 - 9x_2 &= 1 \end{aligned}$$

Řešení **Video** **Teorie:** 61, 62 **Řešené příklady:** 144, 146, 147, 149, 151, 152

Tahák

Frobeniova věta:
Soustava m lineárních rovnic o n neznámých

$$A \cdot x = B$$

má alespoň jedno řešení právě když

$$h(A) = h(A|B),$$

tj. když hodnost matice soustavy se rovná hodnosti matice rozšířené. Pokud

$$h(A) \neq h(A|B),$$

pak soustava nemá řešení. Má-li soustava řešení, tj

$$h(A) = h(A|B) = h,$$

pak pro

$$h = n$$

má soustava právě jedno řešení, jinak, tj. pro

$$h < n,$$

má soustava ∞-mnoho řešení závislých na $n - h$ parametrech.

257 - Soustavy lineárních rovnic

Zadání

Řešte soustavu lineárních rovnic a proveďte zkoušku:
$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 2. \\ 2x_1 + 6x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Řešení **Video** **Teorie: 61, 62** **Řešené příklady: 144, 146, 147, 149, 151, 152**

Tahák

Frobeniova věta:
Soustava m lineárních rovnic o n neznámých

$$A \cdot x = B$$

má alespoň jedno řešení právě když

$$h(A) = h(A|B),$$

tj. když hodnost matice soustavy se rovná hodnosti matice rozšířené. Pokud

$$h(A) \neq h(A|B),$$

pak soustava nemá řešení. Má-li soustava řešení, tj

$$h(A) = h(A|B) = h,$$

pak pro

$$h = n$$

má soustava právě jedno řešení, jinak, tj. pro

$$h < n,$$

má soustava ∞-mnoho řešení závislých na $n - h$ parametrech.

258 - Soustavy lineárních rovnic

Zadání

Řešte soustavu lineárních rovnic a proveďte zkoušku:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}.$$

Řešení **Video** **Teorie: 61, 62** **Řešené příklady: 144, 146, 147, 149, 151, 152**

Tahák

Frobeniova věta:
Soustava m lineárních rovnic o n neznámých

$$A \cdot x = B$$

má alespoň jedno řešení právě když

$$h(A) = h(A|B),$$

tj. když hodnost matice soustavy se rovná hodnosti matice rozšířené. Pokud

$$h(A) \neq h(A|B),$$

pak soustava nemá řešení. Má-li soustava řešení, tj

$$h(A) = h(A|B) = h,$$

pak pro

$$h = n$$

má soustava právě jedno řešení, jinak, tj. pro

$$h < n,$$

má soustava ∞-mnoho řešení závislých na $n - h$ parametrech.

259 - Soustavy lineárních rovnic

Zadání

Řešte soustavu lineárních rovnic a proveďte zkoušku:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_4 &= 3 \end{aligned}.$$

Řešení **Video** **Teorie: 61, 62** **Řešené příklady: 144, 146, 147, 149, 151, 152**

Tahák

Frobeniova věta:
Soustava m lineárních rovnic o n neznámých

$$A \cdot x = B$$

má alespoň jedno řešení právě když

$$h(A) = h(A|B),$$

tj. když hodnost matice soustavy se rovná hodnosti matice rozšířené. Pokud

$$h(A) \neq h(A|B),$$

pak soustava nemá řešení. Má-li soustava řešení, tj

$$h(A) = h(A|B) = h,$$

pak pro

$$h = n$$

má soustava právě jedno řešení, jinak, tj. pro

$$h < n,$$

má soustava ∞-mnoho řešení závislých na $n - h$ parametrech.

260 - Soustavy lineárních rovnic

Zadání

Řešte soustavu lineárních rovnic a proveďte zkoušku:
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 &= -3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 5 \\ 3x_1 - 3x_3 + x_4 &= 7 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &= 2 \end{aligned}.$$

Řešení **Video** **Teorie: 61, 62** **Řešené příklady: 144, 146, 147, 149, 151, 152**

Tahák

Frobeniova věta:
Soustava m lineárních rovnic o n neznámých

$$A \cdot x = B$$

má alespoň jedno řešení právě když

$$h(A) = h(A|B),$$

tj. když hodnost matice soustavy se rovná hodnosti matice rozšířené. Pokud

$$h(A) \neq h(A|B),$$

pak soustava nemá řešení. Má-li soustava řešení, tj

$$h(A) = h(A|B) = h,$$

pak pro

$$h = n$$

má soustava právě jedno řešení, jinak, tj. pro

$$h < n,$$

má soustava ∞-mnoho řešení závislých na $n-h$ parametrech.

261 - Soustavy homogenních lineárních rovnic

Zadání

Řešte soustavu homogenních lineárních rovnic a proveďte zkoušku:
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0. \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Řešení **Video** **Teorie: 61, 62** **Řešené příklady: 144, 146, 147, 149, 151, 152**

Tahák

Soustava homogenních lineárních rovnic má vždy řešení - viz. Frobeniova věta, jejíž podmínky jsou zde vždy splněny.

Lze řešit Gaussovou eliminační metodou, nebo zde přímo za pomoci determinantu soustavy (proč?).

262 - Soustavy homogenních lineárních rovnic

Zadání

Řešte soustavu homogenních lineárních rovnic a proveďte zkoušku:

$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 - x_5 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_3 - x_4 - 2x_5 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 - 3x_5 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}.$$

Řešení **Video** **Teorie: 61, 62** **Řešené příklady: 144, 146, 147, 149, 151, 152**

Tahák

Soustava homogenních lineárních rovnic má vždy řešení - viz. Frobeniova věta, jejíž podmínky jsou zde vždy splněny.

Lze řešit Gaussovou eliminační metodou.

263 - Soustavy lineárních rovnic - Cramerovo pravidlo

Zadání

Řešte soustavu lineárních rovnic pomocí Cramerova pravidla a proveďte zkoušku:

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 - 2x_3 &= 9 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 &= -12. \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= -3 \end{aligned}$$

Řešení **Video** **Teorie: 63** **Řešené příklady: 154**

Tahák

Cramerovo pravidlo:

1. jen pro soustavy s regulární maticí soustavy A, tj.

$$|A| \neq 0,$$

2. určí se determinanty A, A_i (nahradí se příslušný sloupec pravou stranou),

3. určí se složky řešení

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}.$$

264 - Maticová rovnice

Zadání Řešte rovnici pro neznámou matici X a proveďte zkoušku:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 4 & -7 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 12 \\ 0 & 10 & 7 \\ 37 & 23 & 73 \end{pmatrix}$$

Řešení **Video** **Teorie: 64** **Řešené příklady: 155**

Tahák

Maticová rovnice ve tvaru

$$A \cdot X = B$$

Násobením zleva inverzní maticí A^{-1} dostaneme řešení soustavy

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

265 - Soustavy lineárních rovnic

Zadání

Řešte soustavu lineárních rovnic pomocí inverzní matice a proveďte zkoušku:
$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 - 2x_3 &= 9 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 &= -12. \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= -3 \end{aligned}$$

Řešení

Video **Teorie: 65** **Řešené příklady: 156**

Tahák

Soustavu můžeme napsat v maticovém tvaru

$$A \cdot x = B$$

Násobením zleva inverzní maticí A^{-1} dostaneme řešení soustavy

$$x = A^{-1} \cdot B$$

266 - Soustavy lineárních rovnic

Zadání

Řešte soustavu lineárních rovnic pomocí inverzní matice a proveďte zkoušku:
$$\begin{aligned} 5x_1 - x_2 - 3x_3 &= 9 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 &= -7 \end{aligned}.$$

Řešení **Video** **Teorie: 65** **Řešené příklady: 156**

Tahák

Soustavu můžeme napsat v maticovém tvaru

$$A \cdot x = B$$

Násobením zleva inverzní maticí A^{-1} dostaneme řešení soustavy

$$x = A^{-1} \cdot B$$

Pracovní listy – Analytická geometrie

268 - Skalární součin vektorů

Zadání Vypočtěte skalární součin a odchylku vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$. Jsou tyto vektory na sebe kolmé?

a) $\boldsymbol{u} = (-1, -1, 4),\ \boldsymbol{v} = (-1, 2, -2),$

b) $\boldsymbol{u} = (2, 3, -1),\ \boldsymbol{v} = (13, -6, 8).$

Řešení **Video** **Teorie: 69**

Tahák

Skalární součin:

$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3,$

Odchylka vektorů:

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$$

Velikost vektoru:

$$|\boldsymbol{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

POZOR: Co je výsledkem skalárního součinu?

Kolmost vektorů:

$$\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v} \Leftrightarrow \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

269 - Vektorový součin

Zadání

Vypočtěte vektorový součin vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$. Určete obsah rovnoběžníku určeného vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$.

a) $\boldsymbol{u} = (1, 2, -1),\ \boldsymbol{v} = (3, -1, -2)$,

b) $\boldsymbol{u} = (-2, 2, -1),\ \boldsymbol{v} = (3, -6, 5)$.

Řešení **Video** **Teorie: 70**

Tahák

Vektorový součin:

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix},$$

kde $\boldsymbol{i} = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{j} = (0, 1, 0)$, $\boldsymbol{k} = (0, 0, 1)$ jsou jednotkové vektory ve směru os kartézské soustavy souřadnic.
Nebo

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right).$$

POZOR: Co je výsledkem vektorového součinu?

Obsah rovnoběžníku:

$$S = |\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|.$$

270 - Smíšený součin

Zadání

Vypočtěte smíšený součin trojice vektorů $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ (tedy $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$). Určete objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$.

a) $\boldsymbol{a} = (2, -1, 3),\ \boldsymbol{b} = (1, -3, 2),\ \boldsymbol{c} = (3, 2, -4)$,

b) $\boldsymbol{a} = (3, 0, -2),\ \boldsymbol{b} = (0, -3, 5),\ \boldsymbol{c} = (1, -1, 4)$.

Řešení **Video** **Teorie: 71**

Tahák

Smíšený součin:

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

POZOR: Co je výsledkem smíšeného součinu?

Objem rovnoběžnostěnu:

$$V = |[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]|.$$

271 - Rovnice přímky

Zadání

a) Zjistěte zda body $A = [1, -3, 2]$, $B = [-2, -4, 5]$, $C = [2, 0, 2]$ leží na přímce $p: \begin{array}{rcrcr} x & = & -1 & + & 3t \\ y & = & 2 & - & 2t \\ z & = & 1 & + & t \end{array}$

b) Určete rovnici přímky p určené bodem $M = [1, -1, -3]$ a směrem $\boldsymbol{a} = (5, -4, 2)$.

c) Určete rovnici přímky q procházející bodem $R = [1, -1, -3]$ a rovnoběžné s přímkou $p: \begin{array}{rcrcr} x & = & -1 & + & 3t \\ y & = & 3 & - & 2t \\ z & = & 2 & + & 5t \end{array}$.

Řešení **Video** **Teorie: 72**

Tahák

Bod leží na přímce, jestliže jeho složky vyhovují rovnici přímky.

Směrový vektor přímky p je také směrovým vektorem rovnoběžné přímky q.

272 - Vzájemná poloha dvou přímek

Zadání Určete vzájemnou polohu dvou přímek, $p = \{A, \boldsymbol{u}\}$, $q = \{B, \boldsymbol{v}\}$. V případě různoběžné polohy nalezněte průsečík.

a) $A = [1, 2, 3], \quad \boldsymbol{u} = (1, -3, 2)$
$B = [0, 5, 1], \quad \boldsymbol{v} = (-2, 6, -4)$

b) $A = [1, -3, 4], \quad \boldsymbol{u} = (2, 2, -1)$
$B = [3, 0, -1], \quad \boldsymbol{v} = (0, 1, 3)$

Řešení **Video** **Teorie: 73**

Tahák

Sestavíme klasifikační matici

$$p = \{A, \boldsymbol{u}\}, \ q = \{B, \boldsymbol{v}\},$$

$$\left(\begin{array}{c} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \\ \hline AB \end{array}\right)$$

Matici převedeme na schodovitý tvar.

Pak vzájemná poloha je:

a) různoběžná - nemají společný směr, mají společný bod (průsečík),

b) rovnoběžná - mají společný směr, nemají společný bod,

c) mimoběžná - nemají společný směr ani bod,

d) totožná - mají společné všechny body.

273 - Vzájemná poloha dvou přímek

Zadání Určete vzájemnou polohu dvou přímek, $p = \{A, \boldsymbol{u}\}$, $q = \{B, \boldsymbol{v}\}$. V případě různoběžné polohy nalezněte průsečík.

a) $A = [1, 3, -1]$, $\boldsymbol{u} = (2, -4, 3)$
$B = [0, -3, 1]$, $\boldsymbol{v} = (-1, 2, -\frac{3}{2})$

b) $A = [0, 1, -1]$, $\boldsymbol{u} = (1, 0, 1)$
$B = [2, 3, 2]$, $\boldsymbol{v} = (1, 2, 2)$

Řešení **Video** **Teorie: 73**

Tahák

Sestavíme klasifikační matici

$$p = \{A, \boldsymbol{u}\},\ q = \{B, \boldsymbol{v}\},$$

$$\left(\begin{array}{c} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \\ \hline AB \end{array}\right)$$

Matici převedeme na schodovitý tvar.

Pak vzájemná poloha je:

a) různoběžná - nemají společný směr, mají společný bod (průsečík),

b) rovnoběžná - mají společný směr, nemají společný bod,

c) mimoběžná - nemají společný směr ani bod,

d) totožná - mají společné všechny body.

274 - Rovnice roviny

Zadání

a) Zjistěte zda body $A = [-1, 2, 5]$, $B = [3, -1, 0]$, $C = [-5, -4, 2]$ leží v rovině $\alpha : 2x - 5y + 6z - 11 = 0$.

b) Sestavte symbolickou, parametrickou a obecnou rovnici roviny $\rho = \{B = [2, 3, 1], \boldsymbol{v} = (1, 2, -1), \boldsymbol{w} = (3, 1, -2)\}$.

Řešení

Video **Teorie: 74, 75** **Řešené příklady: 158, 159**

Tahák

a) Dosaďte jednotlivé body do rovnice a zjistětě, zda ji splňují.

b) Sestavíme jednotlivé typy rovnic. Jak se přechází od parametrického vyjádření roviny k obecnému?

275 - Rovnice roviny

Zadání

a) Určete rovnici roviny procházející bodem $M = [1, -2, 3]$ a kolmé na vektor $\boldsymbol{a} = (1, 1, -2)$.

b) Určete rovnici roviny procházející bodem $Q = [1, -2, 3]$ a kolmé k ose x.

c) Určete rovnici roviny procházející bodem $M = [1, -2, 3]$ a rovnoběžně s rovinou $\alpha : 2x - y + 3z = 0$.

Řešení **Video** **Teorie: 74, 75** **Řešené příklady: 158, 159**

Tahák

Zjistěte normálový vektor dané roviny a pak dosazením bodu M (resp. Q) do obecné rovnice roviny, tj. $ax + by + cz + d = 0$ dopočítejte absolutní člen d.

276 - Vzájemná poloha přímky a roviny

Zadání Určete vzájemnou polohu přímky $p = \{A, \boldsymbol{u}\}$ a roviny $\rho = \{B, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$. V případě různoběžné polohy nalezněte průsečík.

a) $A = [1, 4, -3]$, $\boldsymbol{u} = (-1, 3, -4)$
$B = [3, 3, 0]$, $\boldsymbol{v} = (1, 2, -1)$, $\boldsymbol{w} = (3, 1, 2)$

b) $A = [1, 1, -2]$, $\boldsymbol{u} = (-1, 3, 0)$
$B = [2, 3, 1]$, $\boldsymbol{v} = (1, 2, -1)$, $\boldsymbol{w} = (3, 1, -2)$

Řešení **Video** **Teorie: 76**

Tahák

Sestavíme klasifikační matici

$$p = \{A, \boldsymbol{u}\},\ \rho = \{B, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\},$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{w} \\ \hline AB \end{pmatrix}$$

Matici převedeme na schodovitý tvar.

Pak vzájemná poloha je:

a) různoběžná - nemají společný směr, mají společný bod (průsečík),

b) rovnoběžná - mají společný směr, nemají společný bod,

c) přímka leží v rovině - mají společný směr a bod.

277 - Vzájemná poloha přímky a roviny

Zadání Určete vzájemnou polohu přímky $p = \{A, \boldsymbol{u}\}$ a roviny $\rho = \{B, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$. V případě různoběžné polohy nalezněte průsečík.

a) $A = [0, -2, 4]$, $\boldsymbol{u} = (1, -1, 2)$
$B = [-1, -1, -3]$, $\boldsymbol{v} = (1, 3, 3)$, $\boldsymbol{w} = (-2, -2, 0)$

b) $A = [-2, 1, 0]$, $\boldsymbol{u} = (-2, 1, -2)$
$B = [1, 2, 2]$, $\boldsymbol{v} = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{w} = (1, 3, -2)$

Řešení **Video** **Teorie: 76**

Tahák

Sestavíme klasifikační matici

$$p = \{A, \boldsymbol{u}\},\ \rho = \{B, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\},$$

$$\left(\begin{array}{c} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{w} \\ \hline AB \end{array}\right)$$

Matici převedeme na schodovitý tvar.

Pak vzájemná poloha je:

a) různoběžná - nemají společný směr, mají společný bod (průsečík),

b) rovnoběžná - mají společný směr, nemají společný bod,

c) přímka leží v rovině - mají společný směr a bod.

278 - Vzájemná poloha dvou rovin

Zadání Určete vzájemnou polohu roviny $\alpha = \{B, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ a roviny $\beta = \{B', \boldsymbol{v}', \boldsymbol{w}'\}$. V případě různoběžné polohy nalezněte průsečnici.

a) $B = [3, 3, -4]$, $\boldsymbol{v} = (1, 2, -1)$, $\boldsymbol{w} = (0, 1, 3)$
$B' = [0, 0, 0]$, $\boldsymbol{v}' = (-2, -1, 3)$, $\boldsymbol{w}' = (3, 4, -1)$

b) $B = [3, 0, 1]$, $\boldsymbol{v} = (1, 2, 2)$, $\boldsymbol{w} = (3, 1, -1)$
$B' = [-2, -5, -2]$, $\boldsymbol{v}' = (4, 3, 1)$, $\boldsymbol{w}' = (-1, 3, 5)$

Řešení **Video** **Teorie: 77**

Tahák

Sestavíme klasifikační matici

$\alpha = \{B, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$, $\beta = \{B', \boldsymbol{v}', \boldsymbol{w}'\}$,

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{v}' \\ \boldsymbol{w}' \\ \hline BB' \end{pmatrix}$$

Matici převedeme na schodovitý tvar.

Pak vzájemná poloha je:

a) různoběžná - nemají společný směr, mají společný bod (průsečík),

b) rovnoběžná - mají společný směr, nemají společný bod,

c) přímka leží v rovině - mají společný směr a bod.

279 - Vzdálenost útvarů v $\mathcal{E}^3$

Zadání

a) Určete vzdálenost bodu $M = [2,4,3]$ od přímky p dané body $P = [2,3,1]$, $Q = [-2,1,0]$.

b) Určete vzdálenost bodu $M = [-2,1,3]$ od roviny $\rho : 2x + y - 2z + 5 = 0$.

Řešení **Video** **Teorie: 78** **Řešené příklady: 160, 161**

Tahák

Vzdálenost bodu od přímky:

$$d(M,p) = \frac{|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{AM}|}{|\boldsymbol{u}|},$$

kde $\boldsymbol{u}$ je směrový vektor přímky a A je bod na této přímce. $\boldsymbol{AM} = M - A$.

Vzdálenost bodu od roviny:

$$d(M,\rho) = \frac{|am_1 + bm_2 + cm_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

280 - Vzdálenost útvarů v $\mathcal{E}^3$

Zadání

a) Určete vzdálenost dvou rovnoběžek $p: \begin{array}{rcrcr} x &=& 3t &-& 7 \\ y &=& 4t &-& 4 \\ z &=& -2t &-& 3 \end{array} \qquad q: \begin{array}{rcrcr} x &=& 6s &+& 21 \\ y &=& 8s &-& 5 \\ z &=& -4s &+& 2 \end{array}.$

b) Určete vzdálenost rovnoběžných rovin $\alpha: -3x + 7y - 2z + 4 = 0, \qquad \beta: 3x - 7y + 2z + 10 = 0.$

Řešení **Video** **Teorie: 78** **Řešené příklady: 160, 161**

Tahák

Vzdálenost rovnoběžek:
Zvolíme bod na jedné z rovnoběžek a úlohu převedeme na hledání vzdálenosti bodu od přímky.

Vzdálenost rovnoběžných rovin:
$\alpha: ax + by + cz + d_1 = 0,$
$\beta: ax + by + cz + d_2 = 0$:

$$d(\alpha, \beta) = \frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

281 - Odchylky útvarů v $\mathcal{E}^3$

Zadání

a) Určete odchylku dvou přímek $p: \begin{array}{rcrcr} x &=& t &+& 2 \\ y &=& t &+& 3 \\ z &=& \sqrt{2}t &+& 5 \end{array}, \quad q: \begin{array}{rcrcr} x &=& -r &+& 3 \\ y &=& -r &+& 2 \\ z &=& \sqrt{2}r && \end{array}.$

b) Určete odchylku přímky $p: \begin{array}{rcrcr} x &=& 3t &-& 2 \\ y &=& -2t &+& 1 \\ z &=& t &-& 5 \end{array}$ od roviny $\rho: 2x - 4y - 3z + 6 = 0.$

c) Určete odchylku rovin $\alpha: x - y + \sqrt{2}z + 2 = 0, \quad \beta: x + y + \sqrt{2}z - 3 = 0.$

Řešení **Video** **Teorie:** 78

Tahák

Odchylka φ dvou přímek p, q:

$$\cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{v}|},$$

kde $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ jsou směrové vektory přímek p, q.

Odchylka φ přímky p od roviny ρ:

$$\sin\varphi = \frac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{n}|},$$

kde $\boldsymbol{u}$ je směrový vektor přímky p, $\boldsymbol{n}$ je normálový vektor roviny ρ.

Odchylka φ dvou rovin α, β:

$$\cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{n}_\alpha\cdot\boldsymbol{n}_\beta|}{|\boldsymbol{n}_\alpha|\cdot|\boldsymbol{n}_\beta|},$$

kde $\boldsymbol{n}_\alpha, \boldsymbol{n}_\beta$ jsou normálové vektory rovin α, β.