

Vybrané partie z matematické analýzy

Varianta: **VZOROVÁ**

Čas: 100 minut

Hodnocení: každý příklad bude oceněn nejvýše 10 body

1. Vypočtete rovnici tečné roviny sestrojené ke grafu funkce f v bodě c , je-li

$$f(x, y) = xy + \sqrt{x^2 - 3y^2}, \quad c = (2, 1, 3).$$

$$[z = 3x - y - 2]$$

2. Najděte Taylorův polynom 2. řádu funkce f v bodě c , je-li

$$f(x, y) = \frac{y^3}{x^2} + xy, \quad c = (1, 2).$$

$$[T_2(x, y) = 10 - 14(x - 1) + 13(y - 2) + 24(x - 1)^2 - 23(x - 1)(y - 2) + 6(y - 2)^2]$$

3. Najděte všechny lokální extrémy funkce f definované předpisem

$$f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}.$$

[Funkce má jediný lokální extrém – a to ostré lokální minimum v bodě $(5, 2)$.]

4. Vypočtete integrál

$$\iint_M \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} dx dy, \quad \text{kde } M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq y\}.$$

$$[\frac{\pi}{2} \ln 2]$$

5. Vypočtete integrál

$$\iiint_M xy dx dy dz, \quad \text{kde}$$

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1, 0 \leq z \leq x^2 + y^2 + 1\}.$$

$$[\frac{7}{120}]$$

6. Najděte řešení Cauchyovy úlohy

$$y'' - y = 2e^x; \quad y(0) = -1, y'(0) = 4.$$

[Obecné řešení: $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + x e^x - \frac{1}{2} e^x$. Cauchyova úloha: $y = e^x - 2e^{-x} + x e^x$.]

7. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá/nepravdivá:¹

(a) Na intervalu $(-\infty, 0)$ platí $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arccotg} \frac{1}{x}$.

(b) Splňuje-li funkce f rovnost $f'(x) + f(x) = x^2 + 3x + 5$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, pak pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $f(x) = x^2 + x + 4$.

(c) Funkce $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ nabývá na množině $\langle 0, 1 \rangle \times \langle 1, 2 \rangle$ své nejmenší hodnoty.

(d) Je-li funkce $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá v \mathbb{R}^2 , má f alespoň jeden lokální extrém.

(e) Dvojný Riemannův integrál $\iint_{\langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle} \frac{1}{x^3 + y^2} dx dy$ existuje.

[(a), (c) – pravdivé, (b), (d), (e) – nepravdivé]

¹Za každou správnou odpověď obdržíte 2 body a za špatnou se 2 body odečtou. Nemusíte však odpovídat na všechny otázky. Maximálně můžete získat 10 bodů a minimálně 0 bodů.