Obsah

Kapitola 1

Úvod do variačního počtu

Již od samého dětství se snažíme poznávat svět a přírodu kolem nás. Některá jejich tajemství se nám podaří odhalit velice rychle a snadno, jiná v nás neustále evokují spoustu otázek, na něž mnohdy nedokážeme fundovaně odpovědět, byť se zdají být jasné a jednoduché...

Tak například:

- ◇ Jakou křivku kopírují elektrické dráty volně visící mezi dvěma stožáry?
- ◇ Může se stát, že při stejné spotřebě benzínu dojedeme rychleji z jednoho města do druhého po kopcovité cestě než po cestě rovné?
- ◇ Po jaké dráze se budou pohybovat planety nebo jiná kosmická tělesa například kolem Slunce a proč?
- ◇ Jak to, že jsme si tak jisti, že uzavřená křivka o určité délce, jejíž vnitřek má maximální obsah, je právě kružnice?
- ◇ Po jezeře plujeme v loďce poháněné plachtou a vesly. Potřebujeme se dostat z jednoho břehu na druhý, přičemž vítr fouká přímo v protisměru. Jak musíme plout, abychom se na druhý břeh dostali co nejdříve a přitom se moc nenadřeli?
- ◇ Jaký tvar bude mít pružný hmotný nosník ležící na dvou podpěrách?
- ◇ Proč se nám tyč z části ponořená do vody jeví jako zlomená?
- ◇ Do mýdlové vody ponoříme nějaký drátěný útvar. Jakého tvaru nabude mýdlová blána, která se na něm zachytí?

A podobně bychom mohli pokračovat dále. I když v této práci všechny uvedené otázky nebudou pro jejich složitost zodpovězeny, alespoň náznakem ukážeme, jakými cestami je možno ke správným odpovědím dojít. Na tomto místě je ale třeba zmínit, že v našem hledání řešení nevystačíme pouze s matematikou. Na samém počátku každé úlohy spojené s realitou stojí jistá fyzikální úvaha. Mnohdy se při správném fyzikálním rozboru budeme muset opřít ještě o základní fyzikální principy[1], podle nichž se děje v přírodě

[1] Pro větší přehled nad danou problematikou zde můžeme poznamenat, že rozlišujeme fyzikální principy *diferenciální* (v diferenciálním tvaru) a *integrální* (v integrálním tvaru). Diferenciální principy se vztahují jen na mechanické děje, jejich působnost nelze rozšířit nebo zobecnit na jiné obory fyziky, především však nikoliv na fyzikální pole – jedná se např. o princip virtuální práce, d'Alembertův, Gaussův nebo Hertzův princip. Jejich matematickým prostředkem je diferenciální počet. Principy integrální nazýváme též principy variačními – např. Fermatův, Hamiltonův, Maupertuisův, Maupertuisův–Eulerův, Jacobiho, Hilbertův princip. Úspěšnost těchto principů spočívá hlavně v tom, že zprostředkují odvození příslušných pohybových rovnic a že je lze použít ve většině fyzikálních oborů. Jmenujme mechaniku kontinua, teorii elektromagnetického pole, teorii relativity, kvantovou mechaniku nebo kvantovou elektrodynamiku. My se v dalším s některými úlohami, ve kterých bude možno využít některý z variačních principů, setkáme, neboť, jak již sám název napovídá, jejich matematickým prostředkem je právě variační počet.

odvíjejí. V konkrétní podobě se s některými z nich seznámíme v kapitole 2 a potom při jejich aplikaci v úlohách. Po důsledném rozboru úlohy z fyzikálního hlediska ji již můžeme převést na matematický problém – v našem případě problém matematické analýzy, a to konkrétně *variačního počtu.*

Jak nejjednodušeji a nejnázorněji popsat, co variačním počtem rozumíme? Dalo by se říct, že variační počet je jistou analogií počtu diferenciálního. Jak víme, ústředním pojmem diferenciálního počtu je funkce a předmětem studia její vlastnosti, tj. zejména limita, derivace, extrémy, průběh. Ve variačním počtu je to *funkcionál* a jeho vlastnosti, tedy především určování jeho extrémů.

Jelikož se vše bude v následujících řádcích odvíjet od pojmu funkcionál, bude nutné si vytvořit správnou představu o tom, co jím rozumíme: podobně jako u funkce se jedná o jistou závislost, kde na rozdíl od funkce hodnota závisle proměnné není určena číslem, ale funkcí.
Pro názornost zde uveďme dva příklady funkcionálů:

- Délka rovinné křivky $y = y(x)$ spojující dva dané body $A[x_A, y_A]$ a $B[x_B, y_B]$

  Předokládejme, že $x \in \langle x_A, x_B \rangle$ a funkce $y = y(x)$ má v tomto intervalu spojitou derivaci $y'(x)$. Délku l takovéto křivky lze pak vyjádřit následujícím způsobem:

$$l = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + y'^2(x)}\; dx.$$

- Moment setrvačnosti tuhého tělesa o průřezu S, hustotě ρ, tvaru křivky $y = y(x)$

  Předpokládejme, že $x \in \langle x_1, x_2 \rangle$ a funkce $y = y(x)$ má v tomto intervalu spojitou derivaci $y'(x)$. Pak moment setrvačnosti J_x daného drátu vzhledem k ose x je určen takto:

$$J_x = \rho S \int_{x_1}^{x_2} y^2(x) \sqrt{1 + y'^2(x)}\; dx.$$

A jak to vše souvisí s otázkami zmíněnými na samém začátku kapitoly? Ať už je to v nich explicitně uvedeno, či nikoliv, “společným jmenovatelem všech je nalézt maximum nebo minimum nějaké fyzikální veličiny – například potenciální energie, času, obsahu. Použijeme-li již námi výše zmíněnou matematickou terminologii, znamená to, že fyzikální veličinu lze v souvislosti s úlohami vyjádřit funkcionálem, přičemž my potřebujeme najít právě jeho extrém; přesněji řečeno, pro jakou funkci extrém nastává. Takové úlohy nazýváme *variačními úlohami* a jejich metody řešení, tedy **metody umožňující nalézt maximální nebo minimální hodnotu funkcionálů, zkoumá variační počet.**

Na tomto místě ještě pro dostatečnou ilustraci nastiňme tři nejzákladnější variační úlohy, které měly výrazný historický význam a které dodnes tvoří pilíře variačního počtu.

1. Variační úloha s pevnými koncovými body (Úloha o brachystochroně)

Najděte křivku, po které se musí pohybovat hmotný bod v zemském tíhovém poli ve svislé rovině, aby se z počátečního bodu $A[x_A, y_A]$ do koncového bodu $B[x_B, y_B]$ dostal v co nejkratším čase t, předpokládáme-li nulovou počáteční rychlost a pohyb bez tření. (Takovou křivku nazýváme *brachystochronou.*)

Úloha vede na nalezení extrému následujícího funkcionálu:

$$t = \int_{x_A}^{x_B} \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)}}{\sqrt{2gy(x)}}\; dx,$$

přičemž $y(x_A) = y_A$, $y(x_B) = y_B$.

Je zřejmé, že hledanou čarou není úsečka spojující body A a B, přestože je nejkratší spojnicí těchto dvou bodů, protože při pohybu po přímce by se rychlost hmotného bodu zvětšovala poměrně pomalu; spojíme-li však uvažované body křivkou, která je v porovnání s úsečkou AB zpočátku strmější, prodlouží se sice dráha, bod však proběhne větší část této dráhy větší rychlostí.

Tuto úlohu kompletně vyřešíme později[2]. Jejími prvními řešiteli byli bratři Bernoulliové, Newton, Leibniz a l'Hospital.

2. Variační úloha na vázané (podmíněné) extrémy (Úloha o geodetických čarách)

Ze všech čar spojujících dva body na ploše $\varphi(x,y,z)=0$ najděte tu, která má nejmenší délku l. (Takovým čarám říkáme *geodetické čáry*.)

Má se tedy nalézt minimum funkcionálu

$$l=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2(x)+z'^2(x)}\;dx,$$

přičemž funkce $y=y(x)$, $z=z(x)$ musí vyhovovat podmínce $\varphi(x,y,z)=0$.

Prvním, kdo se touto úlohou zabýval, byl Johann Bernoulli.

3. Izoperimetrická úloha (Úloha o ploše maximálního obsahu při daném obvodu)

Mezi všemi jednoduchými uzavřenými křivkami předepsané délky l najděte tu, jež ohraničuje plochu s maximálním obsahem S.

Předpokládáme, že uzavřená křivka je dána parametricky: $x=x(t), y=y(t)$. Má se určit extrém funkcionálu S, kde

$$S=\int_0^l x(t)y'(t)\;dt,$$

za zvláštní podmínky, že délka předepsané křivky nabývá konstantní hodnoty l, tj. že

$$\int_0^l\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\;dt=l.$$

Tato úloha byla již formulována kolem roku 200 př. n. l. Zénodorem a tehdy byla známa jako "problém královny Didon. Už ve starém Řecku bylo známo, že hledanou křivkou je *kružnice.* Obecně pak úlohy tohoto typu řešil Euler.

[2]viz příklad 4.13.i), str. 19

Kapitola 2

Historický vývoj variačního počtu

V této kapitole se zastavíme nad hlavními historickými mezníky a osobnostmi, které se na rozvoji variačního počtu podílely.

Jak jsme již v úvodu zmínili, variační počet je nezanedbatelnou částí studia matematické analýzy – matematické disciplíny zabývající se funkcemi. Proto se nejprve krátce podívejme na začátky matematické analýzy a také na její následný vývoj, který vznik variačního počtu podmínil. Avšak uvidíme, že jeho vznik byl z nezanedbatelné části dán i vývojem fyziky, proto ve fyzice, a to zejména ve fyzice teoretické, nachází veliké uplatnění.

Období *do konce 16. století* je charakteristické tím, že se matematika nedostala za hranice studia konstantních veličin. Významný zlom nastává až *v 17. století,* kdy matematikové začínají obracet svou pozornost k otázkám proměnných veličin a s nimi souvisejících funkčních závislostí, nekonečných procesů, limit, nekonečně malých veličin, derivací atd. Tuto naléhavou potřebu změny si vyžádala především přírodovědná praxe – kartografie, geodézie, balistika, mořeplavectví, astronomie (Johann Kepler při matematickém popisu pohybů planet) nebo mechanika (Galileo Galilei při studiu volného pádu, pohybu na nakloněné rovině atd.). Podněty ale vycházely i ze samotné matematiky, zejména analytické geometrie, těsně spjaté s klasifikací křivek, hledáním jejich tečen, maxim a minim apod. V souvislosti s druhou polovinou 17. století také nemůžeme nezmínit vliv vzniku infinitezimálního počtu, o nějž se zasloužili Isaac Newton (1643–1727) a Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716). Tímto vyvrcholilo období, které dalo velmi dobré předpoklady pro to, aby se matematika proměnných veličin dostala na pevný základ a dala tak vznik matematické analýzy dnešní podoby, byť k tomu bylo potřeba ještě mnoha desetiletí.

Konec 17. století tedy zahájil neobyčejně plodné období tvůrčí práce matematiků. Diferenciální a integrální počet skýtal velké možnosti svého uplatnění (zejména ve fyzice), o což se výraznou měrou zasloužili *v 18. století* bratři Bernoulliové, Euler, Laplace, Lagrange, Legendre, Clariaut, d'Alembert, Fourier, Monge a řada jiných. Infinitezimální počet byl ale i odrazovým můstkem pro rozvíjení dalších matematických teorií, zejména také variačního počtu.

Za objevitele variačního počtu bývá často díky svým významným příspěvkům pokládán **Johann Bernoulli** (1667–1748). Roku 1696 předložil matematikům problém *brachystochrony*[1]. Kromě samotného Johanna Bernoulliho se jím zabýval také jeho bratr Jacob, dále Leibniz, Newton a l'Hospital. Zjistili, že řešením je *cykloida.* Huyghens již dříve objevil, že cykloida je také *tautochronou*[2], tj. křivkou, po níž hmotný bod pohybující se z jistého bodu v tíhovém poli Země narazí do "svislé překážky v co nejkratším čase. Této vlastnosti využil v roce 1673 také při konstrukci tautochronních kyvadlových hodin. V té době dále Bernoulliové a Leibniz nalezli rovnice geodetických křivek na ploše.

Pravděpodobně největší přínos dal variačnímu počtu významný matematik **Leonhard Euler** (1707–1783). Roku 1744 vyšla jeho práce *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gua-*

[1] viz str. 3 a příklad 4.13.i), str. 19

[2] viz příklad 5.4.ii), str. 32

dentes. Bylo to první zpracování variačního počtu, které se stalo základem pro vznik variačního počtu jako samostatného odvětví matematiky. Plným právem může být tedy Euler považován za jeho zakladatele.

Současně se začátky a postupným vývojem variačního počtu se řešila i řada fyzikálních problémů z mechaniky, které byly pro jeho rozvoj významným hnacím impulsem. Důležitou roli sehrály objevy základních fyzikálních principů, kterými z matematického hlediska můžeme popsat fyzikální děje v přírodě. Už v polovině 17. století byl znám *Fermatův princip* z optiky (princip nejkratší doby), který říká, že světlo se šíří tak, aby svoji dráhu urazilo v co nejkratším čase. Matematicky je možno jej formulovat takto:

$$\delta t = \delta \int\limits_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{v} = 0,$$

kde t je doba šíření světelného paprsku, s uražená dráha, s_1 (s_2) počáteční (koncový) bod výskytu paprsku, $v = \frac{c}{n}$ jeho rychlost, n index lomu prostředí a c rychlost světla ve vakuu. Vědělo se, že podobný princip musí jistě platit i v mechanice (tehdy byly hlavními obory fyziky mechanika a geometrická optika), ale cesta k jeho formulaci trvala od té doby ještě celých 100 let. Důvod zřejmě spočívá v tom, že v geometrické optice, pokud jde o Fermatův princip, bylo možné "přirozenou úvahou zvolit veličinu, která měla nabývat extrémní hodnoty. Byl to čas, přesněji řečeno časový interval, tedy pojem naprosto běžný a relativně snadno měření přístupný. Avšak v mechanice nebylo lehké zvolit veličinu, která má v průběhu pohybu nabývat extrémní hodnoty a také struktura této veličiny, dnes nazývané akcí S, není jednoduchá. Roku 1750 začala na toto téma živá diskuse. Jejím hlavním aktérem se stal francouzský matematik **Pierre Louis Moreau de Maupertius** (1698–1759). Roku 1744 vyslovil hypotézu, že každý děj v přírodě probíhá tak, že určitá veličina, nazývaná akcí, je minimální. Na tomto výroku lze asi hlavně hodnotit jeho šířku, že se totiž neomezuje jen na mechanické děje. Avšak jím podaná matematická formulace nebyla přesná, ke správným výsledkům z tohoto principu plynoucím dospěl Maupertius nekorektními metodami. Z různých stran se mu dostalo výsměchu, dokonce zanedlouho poté, vnitřně zlomený, umírá. Naštěstí se jeho myšlenky zastal sám Euler a převedl princip nejmenší akce do požadovaného tvaru:

$$\delta S = \delta \int\limits_{s_1}^{s_2} mv\ ds = 0,$$

kde m je hmotnost, v rychlost a s dráha uvažované částice. Postavil jej na správný základ a dodnes mu říkáme *Maupertuisův princip.* V této podobě jej později použili ve svých pracech Lagrange a Hamilton.

Důležitou roli v matematice, a ve vědě vůbec, sehráli ve Francii v 18. století encyklopedisté. Mezi nimi zmiňme **Jeana Le Rond d'Alemberta** (1717–1783), jakožto hlavního matematika. Roku 1743 vyšla jeho učebnice dynamiky *Traité de dynamique,* v níž mimo jiné vyslovuje významný mechanický princip, umožňující převést dynamické úlohy na úlohy statické. Dnes je znám pod názvem *d'Alembertův princip.* Zmiňujeme jej na tomto místě především proto, že sehrál významnou roli pro další vývoj poznatků o mechanických principech.

Byl to právě **Joseph Louis Lagrange** (1736–1813), který roku 1760 podal přesné znění principu nejmenší akce pro konzervativní soustavy. S tím jistě souvisely i jeho příspěvky k variačnímu počtu. Lagrange poznamenal, že Eulerovy metody řešení variačních úloh nemají úplně onu jednoduchost, kterou by si bylo přát u předmětu čisté analýzy, a tak výsledkem byl Lagrangeův čistě analytický variační počet *Mécanique analytique,* který nejenže je plný původních objevů, nýbrž obsahuje také dobře uspořádaný a přepracovaný historický materiál, což je typické pro všechny jeho práce. Je to asi nejcennější Lagrangeovo dílo, ve kterém je plně využito možností, které skýtaly nové analytické výsledky pro mechaniku bodu a pevných těles. Lagrange byl díky svému přístupu považován za prvního důsledného analytika.

Koncem 18. století se zdálo, že vývoj matematiky dospěl ke svému vrcholu. Ovšem nová generace, která byla ovlivněna přínosem Francouzské revoluce a rozkvětem přírodních věd, ukázala, že jakékoli obavy ze stagnace matematiky jsou neoprávněné. Významnou měrou se o to zasloužil **Carl Friedrich**

Gauss (1777-1855). Ve 30. letech 19. století se jeho pozornost začíná obracet k fyzice a jeho poznatky, především z teorie pole, vedly k jistým minimálním principům o prostorových integrálech. V nich rozeznáváme pozdější tzv. Dirichletovy principy, které rovněž patří do oblasti variačního počtu.

Dostáváme se k dalšímu velikánovi matematiky a fyziky, a tím je **William Rowan Hamilton** (1805–1865). Proslavil se především formulací variačního principu nejmenší akce v podobě, jakou používáme dnes, tj.

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L \, dt = 0,$$

kde t je doba, $L = T - V$; T značí kinetickou a V potenciální energii soustavy. Tento tzv. *Hamiltonův princip* je ve fyzice významný právě širokostí svého uplatnění – v klasické mechanice, v teorii relativity nebo v kvantové mechanice. Jeho obrovský přínos tkví v tom, že pomocí jediné tzv. charakteristické funkce (hamiltoniánu) získáváme veškeré požadované informace o uvažovaném problému, tj. pohybové rovnice, počáteční, okrajové podmínky apod.

Ještě poznamenejme, že další rozvíjení variačního počtu tímto neustalo. Například **Peter Lejeune Dirichlet** (1805–1859) zavedl do variačního počtu tzv. *Dirichletův princip.* Dále to byly nesmírně pečlivé úvahy **Karla Weierstrasse** (1815–1897), jehož věhlas se opíral především o jeho přesnost, a to jak v teorii funkcí, tak v teorii variačního počtu.

Nakonec zmiňme *8. srpen roku 1900.* Do moderní historie matematiky se zapsal společným zasedáním mezinárodního kongresu matematiků v Paříži, na němž vynikající německý matematik **David Hilbert** (1862–1943) přednesl přednášku “Matematické problémy. Její závažnost tkvěla v tom, že Hilbert byl patrně posledním matematikem, který obsáhl převážnou část matematiky tehdejší doby. Zformuloval 23 podle jeho mínění nejdůležitějších problémů, před kterými stála matematika nastupujícího 20. století. V této souvislosti poznamenejme, že 19., 20. a 23. problém se týkal také právě variačního počtu. Hilbert zde zdůrazňuje nutnost jeho dalšího rozvoje. Mimo jiné zmínil, že přes jeho výrazný pokrok v poslední době, především díky Weierstrassovi, stále ještě nemá v širokých kruzích tu vážnost, která jí přísluší.

Dnes již můžeme říci, že vývoj matematiky ve 20. století jednoznačně Hilbertovy prognózy potrvdil a variační počet se stal jednou z fundamentálních disciplín moderní matematiky.

Kapitola 3

Základní pojmy variačního počtu

Abychom mohli v dalším vyložit způsoby řešení variačních úloh, bude nutné nejprve zavést základní pojmy, na kterých je variační počet vystaven. Jedná se o definice *funkcionálu, variace funkce, variace funkcionálu* a *lokálního extrému funkcionálu.* Uvidíme, že tyto pojmy jsou analogické základním pojmům počtu diferenciálního.

Ústředním pojmem, jak už jsme dříve zmínili, je funkcionál. Proto hned na začátku uvádíme jeho definici:

3.1. Definice. Nechť je dána určitá třída funkcí $y = y(x)$.

Řekneme, že J je *funkcionál* definovaný pro funkce naší třídy, je-li každé funkci $y = y(x)$ této třídy přiřazeno určité číslo $J[y(x)]$. Píšeme $J = J[y(x)]$.

Třída funkcí $y = y(x)$, pro něž je funkcionál definován, se nazývá *oborem funkcionálu.*

3.2. Poznámka. Ve variačních úlohách, které dále budeme řešit, uvažujeme pouze některé specifické třídy funkcí. Proto je zde konkrétně uvedeme a přitom je zasadíme do souvislosti s příslušným metrickým prostorem.

Ten bude tvořen množinou reálných funkcí spojitých na intervalu $\langle a, b\rangle$. Značíme ji $C[a, b]$, příp. C. Hovoříme-li o funkcích spojitých na intervalu $\langle a, b\rangle$ i se svými prvními derivacemi, píšeme $C^1[a, b]$, příp. C^1. Podobně, pokud jsou funkce na $\langle a, b\rangle$ spojité i se svými derivacemi až do n-tého řádu včetně, značíme $C^n[a, b]$, příp. C^n, kde $n \in \mathbf{N}$ a $n \geq 2$.

Pro úplnost zadání metrického prostoru definujeme na uvedených množinách funkcí příslušné metriky: pro $f, g \in C$:

$$\rho_C(f, g) = \max_{x\in\langle a,b\rangle}|f(x) - g(x)|;$$

pro $f, g \in C^1$:

$$\rho_{C^1}(f, g) = \max\{\max_{x\in\langle a,b\rangle}|f(x) - g(x)|, \max_{x\in\langle a,b\rangle}|f'(x) - g'(x)|\}$$

a obecně pro $f, g \in C^n$, kde $n \in \mathbf{N}$ a $n \geq 2$:

$$\rho_{C^n}(f, g) = \max\{\max_{x\in\langle a,b\rangle}|f(x) - g(x)|, \max_{x\in\langle a,b\rangle}|f'(x) - g'(x)|, \ldots, \max_{x\in\langle a,b\rangle}|f^{(n)}(x) - g^{(n)}(x)|\}.$$

Nyní zaveďme úmluvu, že pokud explicitně nebude uvedeno jinak, v dalším budeme výhradně uvažovat funkcionály typu

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))\, dx,$$

kde $y = y(x) \in C^1[a, b]$. (Jak uvidíme, právě tyto funkcionály hrají ve variačních úlohách s geometrickými nebo fyzikálními aplikacemi klíčovou roli.)

Dále, pokud budeme hovořit o parciálních derivacích 1. a 2. řádu funkce $F = F(x, y, y')$ podle druhé nebo třetí proměnné, budeme vždy v případě potřeby předpokládat jejich existenci a spojitost.

Stejně jako je s funkcemi jedné nebo více proměnných úzce spjat diferenciál funkce (jakožto hlavní lineární část přírůstku funkce), můžeme v souvislosti s funkcionály analogicky hovořit o variaci funkcionálu (jakožto o hlavní lineární části přírůstku funkcionálu).

Nejprve si tedy pro větší názornost připomeňme, jak je v diferenciálním počtu definován diferenciál funkce. Pro větší srozumitelnost zde uvádíme zjednodušenou definici:

3.3. Definice. Nechť je dána funkce $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ se spojitými parciálními derivacemi prvního řádu.

Potom

$$f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} h_i + \varepsilon,$$

kde $h_1, h_2, \dots, h_n \in \mathbf{R}$ a ε je veličina nekonečně malá, vyššího řádu než $\sqrt{(h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_n^2)}$.

Výraz

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} h_i,$$

kde $i = 1, 2, \dots, n$, se nazývá *diferenciál funkce f*.

3.4. Poznámka. Diferenciál funkce můžeme ale definovat i jiným způsobem.

Zaveďme funkci $\Phi = \Phi(t)$ takto:

$$\Phi(t) = f(x_1 + th_1, x_2 + th_2, \dots, x_n + th_n),$$

přičemž parametr t je konečné reálné číslo. Potom

$$\Phi'(t) = \frac{d}{dt} f(x_1 + th_1, x_2 + th_2, \dots, x_n + th_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1 + th_1, x_2 + th_2, \dots, x_n + th_n)}{\partial x_i} h_i.$$

Pro $t = 0$ dostáváme:

$$\Phi'(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} h_i,$$

kde $i = 1, 2, \dots, n$.

Vidíme, že odvozený výraz právě představuje námi výše definovaný diferenciál funkce f.

Pro analogické zavedení variace funkcionálu ještě budeme potřebovat přesně vymezit, co rozumíme pojmem variace funkce:

3.5. Definice. Nechť je dán funkcionál $J = J[y(x)]$, přičemž $y = y(x)$ se může měnit uvnitř nějaké třídy funkcí.

Přírůstek $\eta = \eta(x)$ funkce $y = y(x)$ se nazývá *variace funkce* $y = y(x)$ a značí se $\delta y = \delta y(x)$. Tedy

$$\delta y(x) = \eta(x) = \overline{y}(x) - y(x).$$

A nyní již přistupme k samotné definici variace funkcionálu. Zaveďme funkci $\Phi = \Phi(t) = J(y + t\eta) = \int_a^b F(x, y + t\eta, y' + t\eta')dx$, kde $t \in \mathbf{R}$, a nechť funkce F má spojité parciální derivace podle druhé a třetí proměnné.

Potom

$$\Phi'(t) = \frac{d}{dt}\int_a^b F(x, y + t\eta, y' + t\eta')dx = \int_a^b \left[\frac{d}{dt}F(x, y + t\eta, y' + t\eta')\right] dx =^{1}$$

$$= \int_a^b \left[F_y(x, y + t\eta, y' + t\eta')\eta + F_{y'}(x, y + t\eta, y' + t\eta')\eta'\right] dx$$

a pro $t = 0$ dostaneme:

$$\Phi'(0) = \int_a^b \left[F_y(x, y, y')\eta + F_{y'}(x, y, y')\eta'\right] dx. \tag{3.1}$$

3.6. Definice. Výraz (3.1) nazýváme *variací funkcionálu* $J(y) = \int_a^b F(x, y, y')dx$ a značíme jej δJ.

Nakonec definujme lokální extrém funkcionálu; ten bude pro další výklad stěžejním pojmem.

3.7. Definice. Řekneme, že funkce $y = y_0(x) \in C^1[a, b]$ je *lokální minimum (*resp. *maximum) funkcionálu* J, jestliže existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každou variaci $\eta = \eta(x) \in C^1[a, b]$ splňující $\eta(a) = \eta(b) = 0$ a $\rho_{C^1}(\eta, 0) < \varepsilon$ platí

$$J(y_0) \le J(y_0 + \eta) \text{ (resp. } \ge J(y_0 + \eta)).$$

Tímto skončil výčet nejdůležitějších pojmů variačního počtu. Následující kapitolou tak již můžeme začít studium samotných způsobů řešení různých typů variačních úloh.

[1] viz [1], str. 111

Kapitola 4

Variační úlohy s pevnými konci

Variačními úlohami s pevnými konci[1] rozumíme variační úlohy na množině takových funkcí, které jsou ve svých koncových bodech "pevně uchyceny, tedy pro každou funkci nabývají souřadnice jejich koncových bodů stejné hodnoty.

Variační úlohy s pevnými koncovými body jsou těmi nejzákladnějšími typy variačních úloh, od jejichž řešení se odvíjejí řešení všech typů ostatních. Proto veškerou základní teorii metod řešení variačních úloh uvedeme právě pro variační úlohy s pevnými koncovými body. V dalších příslušných kapitolách se pak postupně dozvíme o odlišnostech metod řešení variačních úloh ostatních typů.

4.1 Metody řešení variačních úloh s pevnými konci

Jak již bylo řečeno v úvodní kapitole, ve variačních úlohách jde o to, najít extrém daného funkcionálu. Uvidíme, že situace je podobná jako při hledání extrému funkce.

Zcela přirozeně se tedy setkáváme se třemi hlavními problémy, které musíme řešit:

A. Najít takové nutné podmínky pro existenci lokálního extrému funkcionálu, jež musí splňovat hledané funkce, aby, víme-li, že řešení existuje, bylo možno na jejich základě hledanou funkci[2] skutečně určit.

B. Najít dostatečně obecná kritéria pro existenci lokálního extrému funkcionálu.

C. Když známe funkci, která splňuje základní nutnou podmínku, stanovit kritéria, podle nichž by bylo možné usoudit, udává-li tato funkce skutečně lokální extrém a případně zda se jedná o lokální maximum nebo lokální minimum. (V úlohách, které se týkají konkrétních aplikací, velmi často plyne existence lokálního extrému přímo z podstaty problému; z toho důvodu má prvořadý význam bod A. a B.)

[1] příp. s pevnými koncovými body

[2] Pojem funkce (jedné proměnné) můžeme ztotožnit s pojmem *křivka (v rovině)* – ale pouze za předpokladu, že křivka disponuje všemi vlastnostmi funkce.

Křivkou v rovině rozumíme obvykle spojitou rovinnou čáru, vytvořenou např. jako trajektorie rovinného pohybu hmotného bodu. Matematicky může být definována: a) jako množina bodů o souřadnicích $[x, y]$ vyhovujících rovnici $F(x, y) = 0$, kde F je funkce dvou reálných proměnných s jistými vlastnostmi, b) buď jako graf spojité funkce f: $y = f(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$, nebo spojité funkce g: $x = g(y)$, $y \in \langle c, d \rangle$, c) parametricky, tj. funkcemi φ, ψ: $\langle \alpha, \beta \rangle \to \mathbf{R}$ tak, že $x = \varphi(t)$ a $y = \psi(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$.

Křivku zadanou parametricky pak nazveme *hladkou,* právě když funkce φ, ψ mají na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ spojité derivace, které nejsou v žádném bodě tohoto intervalu zároveň obě rovny nule. *Po částech hladkou křivkou* rozumíme křivku skládající se z konečného počtu hladkých křivek. (Precizní formulace výše uvedených definic lze nalézt např. v [2], str. 234 a dále.)

A. Nutná podmínka existence lokálního extrému funkcionálu

Je před námi první úkol – najít nutnou podmínku pro existenci lokálního extrému funkcionálu. Nejprve si však v následující větě připomeňme, jak vypadá nutná podmínka pro existenci lokálního extrému funkce:

4.1. Věta. Nechť je funkce $y = f(x)$ diferencovatelná a v bodě $x = x_0$ svého definičního oboru má lokální extrém.

Potom
$$df(x_0) = 0.$$

Důkaz. Podle definice diferenciálu funkce f jedné proměnné je $df(x_0) = f'(x_0)h$, $h \in \mathbf{R}$. Předpokládejme, že $df(x_0) \neq 0$, tj. $f'(x_0) \neq 0$, pokud $h \neq 0$.

Jestliže tedy $f'(x_0) > 0$, pak podle definice derivace funkce f v bodě x_0 je $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} > 0$, což znamená, že funkce f v bodě x_0 roste. Podobně, pokud $f'(x_0) < 0$, pak $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} < 0$, což znamená, že funkce f v bodě x_0 klesá.

Dostáváme tak spor s předpokladem, že funkce f má v bodě x_0 lokální extrém.

Nyní formulujme nutnou podmínku pro existenci lokálního extrému funkcionálu $J(y) = \int_a^b F(x, y, y')dx$. Vidíme, že podobnost s diferenciálním počtem je zřejmá:

4.2. Věta. Nechť je funkce $y = y_0(x) \in C^1[a, b]$ lokální extrém funkcionálu J za podmínek $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$.

Potom
$$\int_a^b [F_y(x, y_0, y_0')\eta + F_{y'}(x, y_0, y_0')\eta']\, dx = 0, \tag{4.1}$$

tj.

$$\delta J(y_0) = 0 \tag{4.2}$$

pro libovolnou funkci $\eta = \eta(x)$ třídy $C^1[a, b]$, pro kterou je $\eta(a) = \eta(b) = 0$.

Funkce, které podmínku (4.2) splňují, nazýváme *extremály.*

Důkaz. Vyjděme z definice variace funkcionálu. Na třídě funkcí $y(x) + t\eta(x)$ se stane funkcionál J funkcí reálného parametru t :

$$J(y + t\eta) = \Phi(t).$$

Tato funkce nabývá lokálního minima, resp. maxima pro $t = 0$, tj. když funkce $y(x) + t\eta(x)$ se právě rovná funkci $y(x) \equiv y_0(x)$ minimalizující, resp. maximalizující J. Z diferenciálního počtu vyplývá, že pro $t = 0$ je $\Phi'(t) = 0$, tedy

$$\Phi'(0) = \int_a^b (F_y\eta + F_{y'}\eta')dx\big|_{y=y_0} = 0.$$

4.3. Poznámka. Pro zjednodušení zápisu budeme symbolem $C_0^1[a, b]$, příp. C_0^1, rozumět množinu všech funkcí $y = y(x)$, definovaných na $\langle a, b\rangle$, spojitých i se svými prvními derivacemi, přičemž bude platit, že $y(a) = y(b) = 0$.

B. Euler–Lagrangeova rovnice

Věta 4.2. nám tedy udává nutnou podmínku pro existenci lokálního extrému funkcionálu J. Nicméně pro konkrétní výpočty není dost dobře použitelná. Proto se dostáváme k druhému úkolu, najít pro existenci lokálního extrému funkcionálu nějaké vhodné kritérium, kterého bychom mohli v konkrétních úlohách snadno využít.

Toto kriterium nyní zformulujme v následující větě:

4.4. Věta. Euler–Lagrangeova. Nechť funkce $y = y_0(x) \in C^1[a, b]$ je lokální extrém funkcionálu J. Potom

$$F_y(x, y_0, y_0') - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y_0, y_0') = 0. \tag{4.3}$$

Rovnice (4.3) se nazývá *Euler–Lagrangeova rovnice*[3].

Než přistoupíme k důkazu této věty, vyslovme následující tvrzení, které potom v důkazu využijeme:

4.5. Lemma. Základní lemma variačního počtu. Nechť $M = M(x)$ je spojitá funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť pro libovolnou funkci $\eta = \eta(x) \in C_0^1[a, b]$ je $\int\limits_a^b M(x)\eta(x)dx = 0$.

Pak

$$M(x) = 0$$

pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$.

Důkaz. Nechť je v některém bodě $c \in \langle a, b\rangle$ $M(c) \neq 0$, například $M(c) > 0$. Vzhledem ke spojitosti funkce M pro dostatečně velké n je možno utvořit interval $\langle x_0, x_0 + \frac{\pi}{n}\rangle$, ležící uvnitř intervalu $\langle a, b\rangle$ a obsahující bod c, v němž je $M(x)$ větší než určité reálné kladné číslo m. Definujme nyní funkci $\eta = \eta_0(x)$ takto:

$$\eta_0(x) = \begin{cases} \sin^2[n(x - x_0)], & x \in \langle x_0, x_0 + \frac{\pi}{n}\rangle \\ 0, & x \notin \langle x_0, x_0 + \frac{\pi}{n}\rangle. \end{cases}$$

Funkce η_0 je spojitá, má spojitou derivaci a je kromě toho $\eta_0(b) = \eta_0(a) = 0$. Muselo by tedy být

$$\int\limits_a^b M(x)\eta_0(x)dx = 0.$$

Je však

$$\int\limits_a^b M(x)\eta_0(x)dx = \int\limits_{x_0}^{x_0+\frac{\pi}{n}} M(x)\sin^2[n(x - x_0)]dx >$$

$$> m \int\limits_{x_0}^{x_0+\frac{\pi}{n}} \sin^2[n(x - x_0)]dx = \frac{\pi m}{2n} > 0.$$

Tudíž předpoklad $M(x) \neq 0$ pro nějaké $x \in \langle a, b\rangle$ vede ke sporu.

Důkaz věty 4.4. Za jejích předpokladů užitím integrační metody per partes počítáme

$$\int\limits_a^b F_{y'}\delta y' dx = [F_{y'}\delta y]_a^b - \int\limits_a^b \delta y \frac{d}{dx} F_{y'} dx.$$

[3] v dalším budeme také užívat označení *E–L rovnice*

Neboť $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$, je tedy

$$\int_a^b F_{y'} \delta y' dx = -\int_a^b \delta y \frac{d}{dx} F_{y'} dx. \tag{4.4}$$

Vzhledem k (4.1) a (4.4):

$$\delta J(y) = \int_a^b (F_y \delta y + F_{y'} \delta y') dx = \int_a^b \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y \; dx.$$

Podle výše uvedeného lemmatu musí tedy pro funkci $y = y_0(x)$ platit:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0.$$

4.6. Poznámka. (E–L rovnice pro speciální typy funkcionálů.) Až doposud jsme veškeré úvahy prováděli pro fukcionály typu $J(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx$, tedy pro případ, kdy výraz F závisí explicitně na x, y i y'. Pro takový funkcionál jsme také formulovali nutnou podmínku pro existenci jeho lokálního extrému. Ta však může nabýt jednoduššího a pro následné výpočty poněkud přijatelnějšího tvaru, pokud funkcionál explicitně na všech třech zmíněných proměnných nebude záviset. Proto si zde uvedeme alespoň tři speciální typy funkcionálů a následně zformulujeme zjednodušené nutné podmínky pro jejich extrémy.

1. Funkce F nezávisí na y', tedy $F = F(x, y)$

   Dosazením do (4.3) okamžitě dostáváme

   $$F_y(x, y) = 0.$$

2. Funkce F nezávisí na y, tedy $F = F(x, y')$

   Opětovným dosazením do (4.3) obdržíme

   $$\frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

   a odtud plyne

   $$F_{y'}(x, y') = const,\ const \in \mathbf{R}. \tag{4.5}$$

3. Funkce F nezávisí na x, tedy $F = F(y, y')$

   V tomto případě nám pouhé dosazení do E–L rovnice nepostačí. Abychom nalezli řešení daného problému, nejprve proveďme záměnu proměnných; a to tak, že y budeme považovat za nezávisle proměnnou a $x = x(y)$ za funkci proměnné y, kterou máme určit. Naše úloha nás tedy vede k hledání extremály pro integrál

   $$J = \int_c^d F\left(y, \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \right) \frac{dx}{dy} dy,\ \ c = y(a) \text{ a } d = y(b),$$

   který, položíme-li

   $$x' = \frac{dx}{dy}$$

a

$$\Phi(y,x') = x'F\left(y,\frac{1}{x'}\right), \tag{4.6}$$

lze přepsat takto:

$$J = \int\limits_c^d \Phi(y,x')dy.$$

Předpokládáme, že $y' = \frac{dy}{dx} \neq 0$ na $\langle a,b\rangle$. Pokud má y' na $\langle a,b\rangle$ konečný počet nulových bodů, rozdělíme tento interval na podintervaly, kde $y' \neq 0$, a na každém z těchto intervalů provedeme níže uvedený výpočet.

Zřejmě neznámá funkce $x = x(y)$ není v integrované funkci Φ explicitně obsažena, a proto podle (4.5) musí hledaná křivka vyhovovat rovnici

$$\Phi_{x'}(y,x') = const. \tag{4.7}$$

Nyní s využitím platnosti rovnice (4.6) a dosazením do (4.7) dostáváme

$$\Phi_{x'} = x'F_{\frac{1}{x'}}\left(-\frac{1}{x'^2}\right) + F = const,$$

což s přihlédnutím k rovnosti $y' = \frac{1}{x'}$ dává výslednou podmínku:

$$F(y,y') - y'F_{y'}(y,y') = const. \tag{4.8}$$

Ještě zde explicitně uveďme, že E–L rovnice vede na obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu. Jejím obecným řešením je tedy funkce $y = y_0(x,c_1,c_2)$, přičemž obě reálné konstanty c_1 a c_2 lze určit ze dvou zadaných okrajových podmínek.

C. Druhá variace funkcionálu

Dostáváme se k závěrečné části řešení variačních úloh. Již víme, jaké podmínky musí být nutně splněny, abychom získali funkci $y = y_0(x)$, pro kterou daný funkcionál nabývá svého lokálního extrému. Nicméně zůstává nezodpovězena otázka, zda extrém skutečně nastává, a o jaký extrém se jedná – zda o minimum, či maximum.

U funkce jedné nebo více proměnných se při vyšetřování druhu extrému obracíme k druhému diferenciálu, konkrétně k jeho znaménku. Pomocí něj získáváme nutné, a rovněž i postačující podmínky umožňující určit existenci extrému a rozlišit případ minima od případu maxima. Zmíněnou problematiku zde momentálně nebudeme explicitně formulovat, pouze poznamenejme, že zcela analogicky se postupuje i u funkcionálů.

V minulé kapitole jsme zavedli variaci funkcionálu jako

derivaci funkce $\Phi = \Phi(t) = J(y+t\eta) = \int\limits_a^b F(x,y+t\eta,y'+t\eta')dx$ podle t v bodě $t = 0$.

Podobně zavedeme druhou variaci funkcionálu – tedy jako

druhou derivaci funkce $\Phi = \Phi(t) = J(y+t\eta) = \int\limits_a^b F(x,y+t\eta,y'+t\eta')dx$ podle t v bodě $t = 0$.

Budeme předpokládat, že funkce F má spojité parciální derivace 2. řádu podle druhé a třetí proměnné. Potom

$$\Phi''(t)|_{t=0} = [\Phi'(t)]'|_{t=0} =$$

$$= \frac{d}{dt}\int_a^b [F_y(x, y+t\eta, y'+t\eta')\eta + F_{y'}(x, y+t\eta, y'+t\eta')\eta']\, dx|_{t=0} =$$

$$= \int_a^b \left[F_{yy}(x, y+t\eta, y'+t\eta')\eta^2 + 2F_{yy'}(x, y+t\eta, y'+t\eta')\eta\eta' + F_{y'y'}(x, y+t\eta, y'+t\eta')\eta'^2\right] dx\Big|_{t=0}.$$

Konečně tedy

$$\Phi''(0) = \int_a^b \left[F_{yy}(x, y, y')\eta^2 + 2F_{yy'}(x, y, y')\eta\eta' + F_{y'y'}(x, y, y')\eta'^2\right] dx. \tag{4.9}$$

4.7. Definice. Výraz (4.9) nazýváme *druhou variací funkcionálu* $J(y) = \int_a^b F(x, y, y')dx$ a značíme jej $\delta^2 J$.

V následující větě zformulujeme nutné podmínky pro existenci lokálního minima (resp. maxima) funkcionálu $J(y) = \int_a^b F(x, y, y')dx$.

4.8. Věta. Je-li funkce $y = y_0(x) \in C^1[a, b]$ lokální minimum (resp. maximum) funkcionálu J, potom

$$\delta^2 J(y_0) \geq 0 \text{ (resp. } \leq 0) \tag{4.10}$$

pro každé $\eta = \eta(x) \in C_0^1[a, b]$.

Důkaz. Důkaz této věty (podobně jako důkaz věty 4.10.) provedeme pro případ, že funkce $y = y_0(x)$ je lokální minimum funkcionálu J; zcela analogicky se postupuje i za předpokladu, že je lokální maximum. Předpokládejme opak, tedy že pro nějakou funkci $\eta = \eta(x) \in C_0^1[a, b]$

$$\delta^2 J(y_0) < 0.$$

Pak z Taylorova rozvoje funkce $\Phi = \Phi(t) = J(y_0 + t\eta)$ dostáváme pro libovolné $\eta \in C_0^1[a, b]$

$$J(y_0 + t\eta) = \Phi(t) = \Phi(0) + \Phi'(t) + \frac{1}{2!}\Phi''(0)t^2 + \frac{1}{3!}\Phi'''(\xi)t^3, \tag{4.11}$$

kde hodnota ξ leží mezi nulou a t. Protože $\Phi(0) = J(y_0)$ a $\Phi'(0) = \delta J(y_0) = 0$, platí

$$J(y_0 + t\eta) - J(y_0) = \frac{t^2}{2}\left[\delta^2 J(y_0) + \frac{t}{3}\Phi''(\xi)\right]. \tag{4.12}$$

Jestliže nyní $t \to 0$, výraz v hranatých závorkách je pro $|t|$ dostatečně malé záporný, tedy

$$J(y_0 + t\eta) - J(y_0) < 0,$$

což je ve sporu s předpokladem, že $y = y_0(x)$ je lokální minimum.

Výše uvedenou podmínku (4.10) lze poněkud zjednodušit, a to následujícím způsobem:

4.9. Věta. Je-li funkce $y = y_0(x) \in C^1[a,b]$ lokální minimum (resp. maximum) funkcionálu J, potom

$$F_{y'y'}(x, y_0, y_0') \geq 0 \text{ (resp. } \leq 0).$$

Důkaz. Viz [6], str. 68–70.

Dostáváme se k formulaci dostatečných podmínek pro existenci lokálního minima (resp. maxima) funkcionálu $J(y) = \int\limits_a^b F(x, y, y')$. Ty nabývají velkého významu především pro konkrétní řešení úloh.

4.10. Věta. Nechť funkce $y = y_0(x) \in C^1[a,b]$ je extremálou funkcionálu J.
Jestliže $\delta^2 J(y_0) > 0$ (resp. < 0) pro každé $\eta \in C_0^1[a,b]$, potom

je funkce $y = y_0(x)$ lokální minimum (resp. maximum) funkcionálu J.

Důkaz. Nechť $y = y_0(x)$ je extremála funkcionálu J a nechť $\delta^2 J(y_0) > 0$ pro každé $\eta \in C_0^1[a,b]$. Potom podobně jako v důkazu věty 4.8. sestrojíme Taylorův rozvoj funkce $\Phi = \Phi(t) = J(y_0 + t\eta)$. Dostaneme tak vztah (4.11), přičemž hodnota ξ leží mezi nulou a t. Zřejmě $J(y_0) = \Phi(0)$ a podle předpokladů $\delta J(y_0) = 0 = \Phi'(0)$. Proto potom platí vztah (4.12). Jestliže $t \to 0$, pro $|t|$ dostatečně malé výraz na pravé straně rovnice (4.12) je vzhledem ke kladnému znaménku $\delta^2 J(y_0)$ také kladný, a tak dostaneme

$$J(y_0 + t\eta) - J(y_0) > 0$$

pro libovolné $\eta \in C_0^1[a,b]$, což znamená, že funkce $y = y_0(x)$ je lokální minimum funkcionálu J.

(Vskutku musíme předpokládat nenulovost $\delta^2 J(y_0)$. Pokud by totiž $\delta^2 J(y_0) = 0$, pak by ve vztahu (4.12) zřejmě znaménko levé strany rovnosti záviselo na znaménku hodnoty t, a nemohli bychom tedy rozhodnout, zda se jedná o lokální minimum, nebo maximum.)

Jelikož právě tato věta je pro praktické výpočty použitelná poměrně těžko, uveďme si zde další dvě věty, které nám udají dostatečné podmínky pro to, aby pro každou funkci $\eta \in C_0^1[a,b]$ nerovnost $\delta^2 J(y_0) > 0$ (resp. < 0) skutečně nastala.

4.11. Věta. Nechť funkce $y = y_0(x) \in C^1[a,b]$ je extremálou funkcionálu J.
Jestliže $F_{y'y'}(x, y_0, y_0') > 0$ (resp. < 0) pro libovolné $x \in \langle a, b\rangle$ a existuje řešení rovnice

$$\left[F_{yy}(x, y_0, y_0') - \frac{d}{dx} F_{yy'}(x, y_0, y_0')\right] \eta(x) - \frac{d}{dx}\left[F_{y'y'}(x, y_0, y_0')\eta'(x)\right] = 0$$

takové, že $\eta = \eta(x) \neq 0$ na $\langle a, b\rangle$, potom

$$\int\limits_a^b \left(F_{yy}\eta^2 + 2F_{yy'}\eta\eta' + F_{y'y'}\eta'^2\right) dx\Big|_{y=y_0} > 0 \text{ (resp. } < 0),$$

tj.

$$\delta^2 J(y_0) > 0 \text{ (resp. } < 0)$$

pro každé $\eta \in C_0^1[a,b]$.

Důkaz. Důkaz provedeme pro případ, že $F_{y'y'}(x, y_0, y_0') > 0$. Pokud $F_{y'y'}(x, y_0, y_0') < 0$, důkaz je zcela analogický. Nejprve proveďme následující označení:

$$F_{yy}(x, y_0, y_0') = p(x),$$

$$F_{yy'}(x, y_0, y_0') = q(x),$$

$$F_{y'y'}(x, y_0, y_0') = r(x).$$

Potom zřejmě $\delta^2 J(y_0) = \int\limits_a^b \left[p(x)\eta^2(x) + 2q(x)\eta(x)\eta'(x) + r(x)\eta'^2(x)\right] dx$.

Důkaz provedeme za zjednodušujícího předpokladu, že $q(x) \equiv 0$. Pokud tento předpoklad není splněn, důkaz je technicky obtížnější, ale jeho idea je stejná jako v případě $q(x) \equiv 0$.

Označme

$$f = p(x)\eta^2(x) + r(x)\eta'^2(x).$$

Jedná-li se nám o extrém tohoto funkcionálu, $\eta = \eta(x)$ musí vyhovovat E–L rovnici ve tvaru

$$f_\eta - \frac{d}{dx} f_{\eta'} = 0,$$

tedy musí platit

$$p(x)\eta(x) - \left[r(x)\eta'(x)\right]' = 0. \tag{4.13}$$

Předpokládejme, že jejím řešením je funkce $z = z(x)$, přičemž $z \neq 0$ na intervalu $\langle a, b \rangle$. Nyní označme

$$w(x) = \frac{r(x)z'(x)}{z(x)} \tag{4.14}$$

a vyjádřeme rovnici (4.13) pomocí neznámé w namísto z. Počítejme:

$$w' = \left(\frac{rz'}{z}\right)' = \frac{(rz')'}{z} - \frac{rz'^2}{z^2}$$

a odtud

$$(rz')' = z\left(\frac{rz'}{z}\right)' + z\frac{rz'^2}{z^2}. \tag{4.15}$$

Dosazením (4.15) do (4.13) a vydělením z (je možno, neboť podle předpokladu $z \neq 0$) dostaneme

$$p - \left(\frac{rz'}{z}\right)' - r\left(\frac{z'}{z}\right)^2 = 0$$

a vzhledem k (4.14) konečně

$$w' - p + \frac{w^2}{r} = 0.$$

S využitím předešlé rovnosti počítejme:

$$\left(w\eta^2\right)' = w'\eta^2 + 2w\eta\eta' = \left(p - \frac{w^2}{r}\right)\eta^2 + 2w\eta\eta' + r\eta'^2 - r\eta'^2,$$

tedy

$$\left(w\eta^2\right)' = p\eta^2 + r\eta'^2 - \frac{1}{r}(r\eta' - w\eta)^2.$$

Úpravou a integrací poslední rovnosti dostáváme:

$$\int\limits_a^b \left(p\eta^2 + r\eta'^2\right) dx = \left[w\eta^2\right]_a^b + \int\limits_a^b \frac{1}{r}\left(r\eta' - w\eta\right)^2 dx.$$

Neboť první sčítanec pravé strany této rovnice je zřejmě roven nule a předpokládáme-li, že $r > 0$, potom daný výraz je pro libovolné $\eta \in C_0^1[a, b]$ kladný, což jsme měli dokázat.

4.12. Věta. Jacobiho podmínka. Nechť funkce $y = y_0(x) \in C^1[a,b]$ je extremálou funkcionálu J.
Jestliže $F_{y'y'}(x, y_0, y_0') > 0$ (resp. < 0) pro libovolné $x \in \langle a, b\rangle$ a je-li řešení rovnice

$$\left[F_{yy}(x, y_0, y_0') - \frac{d}{dx}F_{yy'}(x, y_0, y_0')\right]\eta(x) - \frac{d}{dx}\left[F_{y'y'}(x, y_0, y_0')\eta'(x)\right] = 0 \tag{4.16}$$

dané počátečními podmínkami $\eta(a) = 0$ a $\eta'(a) = 1$ na $(a, b\rangle$ nenulové, potom

$$\int_a^b \left(F_{yy}\eta^2 + 2F_{yy'}\eta\eta' + F_{y'y'}\eta'^2\right) dx\Big|_{y=y_0} > 0 \text{ (resp. } < 0),$$

tj.

$$\delta^2 J(y_0) > 0 \text{ (resp. } < 0)$$

pro každé $\eta \in C_0^1[a,b]$.

Důkaz. Předpokládáme, že řešení η rovnice (4.16) dané počátečními podmínkami $\eta(a) = 0, \eta'(a) = 1$ je nenulové na intervalu $(a, b\rangle$. Z teorie diferenciálních rovnic (ze spojité závislosti řešení na počátečních podmínkách) plyne, že řešení ζ rovnice (4.16) dané počátečními podmínkami $\zeta(a) = \varepsilon$, $\zeta'(a) = 1$ v případě $F_{y'y'} > 0$ a $\zeta'(a) = -1$ v případě $F_{y'y'} < 0$, kde $\varepsilon > 0$ je dostatečně malé, je nenulové na $\langle a, b\rangle$. Tvrzení potom plyne z předcházející věty.

Je dobré podotknout, že u většiny variačních úloh fyzikálního, příp. geometrického charakteru není nutné výše uvedeným postupem zjišťovat, o jaký typ extrému funkcionálu se jedná, neboť to vyplývá přímo z fyzikálního rozboru příslušné variační úlohy.

4.2 Příklady variačních úloh s pevnými konci

Na tomto místě již můžeme přistoupit ke konkrétnímu řešení variačních úloh. Naznačíme zde řešení některých nejvýznamnějších a také nejjednodušších variačních úloh s pevnými konci, přičemž se přesvědčíme o tom, že některé z nich skutečně reflektují reálné fyzikální situace.

4.13. Příklady.

i) Úloha o brachystochroně

Jakou dráhu musíme vymezit malé kuličce (tj. zanedbatelného průměru) o hmotnosti m, aby se z počátečního bodu $A[0,0]$ dostala působením zemského tíhového zrychlení do koncového bodu $B[x_1, y_1]$, kde $x_1 > 0$ a $y_1 > 0$, v co nejkratším čase? (Body A, B jsou umístěny ve "svislé rovině. Osu x příslušné soustavy souřadnic volíme horizontálně, osu y na ni kolmou, orientovanou shora dolů. Navíc předpokládáme pohyb bez tření s nulovou počáteční rychlostí.)

Řešení:

Zřejmě tato úloha nejprve vede k vyjádření doby t, proto ji pomocí neznámé funkce $y = y(x)$, představující hledanou dráhu kuličky, určíme.

Z definice rychlosti v jakéhokoli pohybu hmotného bodu plyne:

$$dt = \frac{ds}{v}, \tag{4.17}$$

kde ds představuje délku dráhy uraženou hmotným bodem během doby dt.

Dále je známo[4], že pro element délky křivky $y = y(x)$ platí:

$$ds = \sqrt{1 + y'^2(x)}dx. \tag{4.18}$$

Zákon zachování energie pro izolovaný systém nám pomůže jednoduchým způsobem určit, čemu je rovna rychlost v pohybujícího se hmotného bodu v tíhovém poli Země. Uvážíme-li, že součet kinetické a potenciální energie se v průběhu pohybu nemění, potom

$$0 = \frac{1}{2}mv^2 - mgy,$$

odkud

$$v = \sqrt{2gy}. \tag{4.19}$$

Doba t pohybu kuličky je pak s přihlédnutím k (4.17), (4.18) a (4.19)

$$t = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx.$$

Tímto jsme dobu t určili a snadno nahlédneme, že je tvaru

$$t = \int_0^{x_1} F(y, y')dx,$$

tedy integrál určující t závisí explicitně pouze na proměnných y a y'.

Proto nutná podmínka pro existenci extrému našeho funkcionálu nabude vzhledem k (4.8) tvaru:

$$\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}} - \frac{y'^2}{\sqrt{2gy(1 + y'^2)}} = const.$$

Vynásobíme-li ji výrazem $\sqrt{2gy(1 + y'^2)}$, potom

$$1 + y'^2 - y'^2 = const\sqrt{2gy(1 + y'^2)}$$

a okamžitým zjednodušením dostáváme

$$\sqrt{y(1 + y'^2)} = k,\ k \in \mathbf{R}.$$

Výše odvozenou rovnici snadno vyřešíme zavedením substituce

$$y' = \operatorname{tg}\varphi, \tag{4.20}$$

pomocí níž dostáváme rovnost

$$\sqrt{y(1 + \operatorname{tg}^2\varphi)} = k,$$

kterou umocníme a upravíme:

$$y = \frac{k^2}{1 + \operatorname{tg}^2\varphi} = k^2\cos^2\varphi.$$

S přihédnutím k vlastnostem goniometrických funkcí:

$$y = \frac{1}{2}K(1 + \cos 2\varphi),\ K \in \mathbf{R}. \tag{4.21}$$

[4] viz [2], str. 329

Získali jsme tak y-ovou souřadnici parametrického vyjádření hledané křivky v závislosti na parametru φ.

Nyní počítejme příslušnou x-ovou souřadnici. Ze vztahu (4.21)

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}2K\sin 2\varphi\,\frac{d\varphi}{dx} = -K\sin 2\varphi\,\frac{d\varphi}{dx}. \tag{4.22}$$

Porovnáním vztahů (4.20) a (4.22) dostaneme

$$\operatorname{tg}\varphi = -K\sin 2\varphi\,\frac{d\varphi}{dx}$$

a odtud

$$dx = -2K\cos^2\varphi\; d\varphi. \tag{4.23}$$

Zintegrováním rovnice (4.23) a následnou jednoduchou úpravou dostáváme:

$$x = -\frac{1}{2}K(2\varphi + \sin 2\varphi) + konst,\; konst \in \mathbf{R}. \tag{4.24}$$

Rovnice (4.24) a (4.21) ještě zjednodušme zavedením nových parametrů Θ a r. Položíme-li $2\varphi = \pi - \Theta$ a $\frac{K}{2} = r$, dostáváme tak parametrické rovnice tvaru

$$x = r(\Theta - \sin\Theta) + c \tag{4.25}$$

$$y = r(1 - \cos\Theta), \tag{4.26}$$

kde r a c jsou libovolné reálné konstanty.

Získali jsme tak obecnou rovinci křivky zvané *cykloida*. Tato křivka vznikne znázorněním dráhy bodu na obvodu kotálející se kružnice o poloměru r po reálné ose x.

Nyní ještě zbývá konkrétně určit hodnoty kostant r a c. Za předpokladu, že cykloida prochází bodem $A[0,0]$, z rovnice (4.25) dostáváme $c = 0$.

Hodnotu r následně určíme z podmínky, že cykloida prochází bodem $B[x_1, y_1]$. Dosazením souřadnic bodu B do rovnic (4.25) a (4.26) a jejich podělením docházíme k rovnici

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{\Theta - \sin\Theta}{1 - \cos\Theta},$$

z níž je principiálně možné vypočítat parametr Θ a pomocí něj potom r.

A nakonec si položme otázku, zda jsme tak skutečně našli křivku – extremálu, která představuje právě minimální dobu pohybu naší kuličky. Ano, vskutku, neboť velice jednoduše bychom mohli kuličce vymezit dráhu, po které zřejmě do koncového bodu dospěje za dobu delší.

Odtud je vidět, že fyzikální pohled na daný problém nám hledání druhu lokálního extrému značně usnadní. Tohoto faktu využijeme i v následujících úlohách.

ii) Úloha o minimální ploše

Jakou křivku o koncových bodech $A[x_0, y_0]$ a $B[x_1, y_1]$ musíme nechat rotovat kolem souřadnicové osy x, aby vzniklá rotační plocha měla minimální povrch?

Řešení:

Povrch plochy S vzniklé rotací křivky $y = y(x)$ kolem osy x, jejíž minimum hledáme, lze vyjádřit následujícím způsobem[5]:

[5] viz [2], str. 335

$$S = 2\pi \int\limits_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}dx.$$

Vidíme, že tento funkcionál je explicitně závislý jen na y a y', proto vzhledem k (4.8) a s uvážením, že $F = 2\pi y\sqrt{1+y'^2}$, dostáváme rovnici

$$y\sqrt{1+y'^2} - y'^2 y\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = c_1,\, c_1 \in \mathbf{R},$$

kterou dále vynásobíme výrazem $\sqrt{1+y'^2}$ a upravíme na tvar

$$y = c_1\sqrt{1+y'^2}. \tag{4.27}$$

Tuto diferenciální rovnici řešíme pomocí substituce

$$y' = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2} = \sinh\varphi. \tag{4.28}$$

Po dosazení (4.28) do (4.27) dostáváme

$$y = c_1\sqrt{1+\sinh^2\varphi},$$

odkud[6]

$$y = c_1 \cosh\varphi. \tag{4.29}$$

Dále vyjádřeme x v závislosti na parametru φ. Z (4.29) plyne

$$y' = \frac{dy}{dx} = c_1 \sinh\varphi\ \frac{d\varphi}{dx}$$

a porovnáním této rovnice se vztahem (4.28) dostáváme

$$c_1\frac{d\varphi}{dx} = 1,$$

tedy

$$dx = c_1\ d\varphi. \tag{4.30}$$

Zintegrováním (4.30) je pak

$$x = c_1\varphi + c_2,\, c_2 \in \mathbf{R}.$$

Odtud dosazením poslední rovnice do (4.29) získáváme explicitní vyjádření funkce $y = y(x)$, představující obecnou rovnici hledané křivky:

$$y = c_1 \cosh\frac{x - c_2}{c_1}. \tag{4.31}$$

Konstanty c_1, c_2, a tím i konkrétní tvar rovnice (4.31) určíme z podmínky, že křivka $y = y(x)$ prochází body A a B. Získané křivce říkáme *řetězovka* a minimální plochy vzniklé její rotací nazýváme *katenoidy.*

[6] s uvážením, že $\cosh\varphi = \frac{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}{2}$

iii) Úloha o šíření světla v prostředí s konstantním indexem lomu n

Zjistěte, po jaké trajektorii se bude pohybovat světelný paprsek z počátečního bodu $A[x_0, y_0]$ do koncového bodu $B[x_1, y_1]$ v homogenním prostředí o konstantním indexu lomu n.

Řešení:

Jak ze základního kurzu fyziky víme, světelný paprsek se šíří po takové dráze, aby z výchozího bodu dorazil do bodu koncového v co nejkratším čase. Této zákonitosti říkáme *Fermatův princip.*

Při řešení naší úlohy tedy budeme hledat trajektorii paprsku $y = y(x)$ za podmínky, že nastane extrém pro dobu šíření t. Pro ni zřejmě platí:

$$dt = \frac{ds}{v}, \tag{4.32}$$

kde ds představuje délku dráhy, kterou paprsek urazil za dobu dt a v rychlost šíření světelného paprsku. Rychlost šíření v světelného paprsku v prostředí o indexu lomu n vyjádříme vztahem:

$$v = \frac{c}{n}, \tag{4.33}$$

kde c značí rychlost šíření světla ve vakuu.

Potom zřejmě s přihlédnutím k (4.32), (4.33) a (4.18)

$$t = \int_{x_0}^{x_1} \frac{n}{c}\sqrt{1+y'^2}dx.$$

Nutnou podmínkou pro existenci lokálního extrému funkcionálu je platnost E–L rovnice tvaru (4.3). S přihlédnutím, že $F = \frac{n}{c}\sqrt{1+y'^2}$, dostáváme

$$-\frac{d}{dx}\left[\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right] = 0,$$

tedy

$$\frac{y''\sqrt{1+y'^2} - y'\frac{y'y''}{\sqrt{1+y'^2}}}{1+y'^2} = 0.$$

Vzhledem k tomu, že jmenovatel levé strany výše uvedené rovnice je nenulový, zřejmě daná rovnost nastane tehdy, pokud bude roven nule čitatel. Jeho upravením dostáváme

$$y'' = 0$$

a odtud

$$y = c_1 x + c_2,\ c_1,\ c_2 \in \mathbf{R}. \tag{4.34}$$

Je tedy zřejmé, že světlo se v prostředí o konstantním indexu lomu šíří *přímočaře* (po přímce), což odpovídá naší zkušenosti.

Konstanty c_1 a c_2 jsou pak evidentně určeny souřadnicemi koncového a počátečního bodu.

iv) Úloha o šíření světla v prostředí s nekonstantním indexem lomu

Zjistěte, po jaké trajektorii se bude pohybovat světelný paprsek z počátečního bodu $A[x_0, y_0]$ do koncového bodu $B[x_1, y_1]$ v prostředí, kde $v = \alpha y$; v je rychlost šíření, $\alpha \in \mathbf{R}$.

Řešení:

Situace je analogická jako v minulém příkladě, hledáme tedy minimum funkcionálu tvaru

$$t = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\alpha y} dx.$$

K jeho nalezení nám opět poslouží E–L rovnice speciálního tvaru (4.8). S přihlédnutím, že $F = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\alpha y}$, dostáváme

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} - \frac{y'^2}{y\sqrt{1+y'^2}} = c,\ c \in \mathbf{R}.$$

Vynásobením výrazem $y\sqrt{1+y'^2}$ snadno dojdeme k rovnici

$$y\sqrt{1+y'^2} = r,\ r \in \mathbf{R}. \tag{4.35}$$

Podobně jako v příkladě 4.13.i)[7], ji budeme řešit pomocí substituce

$$y' = \operatorname{tg}\varphi, \tag{4.36}$$

jejímž dosazením do (4.35) dojdeme k závěru, že

$$y = r\cos\varphi. \tag{4.37}$$

Nyní počítejme, čemu je rovna souřadnice x, a to podobným způsobem jako v příkladech 4.13.ii)[8] a 4.13.iii)[9]. Z (4.37) plyne, že

$$y' = -r\sin\varphi\ \frac{d\varphi}{dx},$$

porovnáním s (4.36) a upravením vzniklé rovnosti dostáváme diferenciální rovnici

$$dx = -r\cos\varphi\ d\varphi.$$

Jejím řešením dostáváme:

$$x = -r\sin\varphi + m,\ m \in \mathbf{R}. \tag{4.38}$$

Vypočítané parametrické vyjádření hledané křivky dané vztahy (4.38) a (4.37) lze jejich umocněním a následným součtem převést na její implicitní tvar

$$(x-m)^2 + y^2 = r^2, \tag{4.39}$$

který zřejmě představuje rovnici kružnice se středem v bodě $[m, 0]$ a poloměrem o velikosti $|r|$.

Konstanty m a r získáme obvyklým způsobem, tedy využitím faktu, že body A a B musí ležet na naší kružnici. Dosazením souřadnic těchto bodů do zmíněné rovnice kružnice dostaneme dvě rovnice, z nichž poměrně snadno lze konstanty m a r analyticky vyjádřit.

[7]viz str. 19
[8]viz str. 21
[9]viz str. 23

4.14. Cvičení.

1. Nalezněte obecnou rovnici extremály funkcionálu J :

i) $J = \int\limits_{x_0}^{x_1} y'(1 + x^2 y')dx;$

ii) $J = \int\limits_{x_0}^{x_1} (y^2 + 2xyy')dx;$

iii) $J = \int\limits_{x_0}^{x_1} \sqrt{y(1 + y'^2)}dx;$

iv) $J = \int\limits_{x_0}^{x_1} (y'^2 + 2yy' - 16y^2)dx;$

v) $J = \int\limits_{x_0}^{x_1} (y^2 + y'^2 - 2y\sin x)dx.$

2. Nalezněte rovnici extremály funkcionálu J, která prochází body A a B :

i) $J = \int\limits_{x_0}^{x_1} (xy' + y'^2)dx$, $A[0,0]$, $B[2,1]$;

ii) $J = \int\limits_{x_0}^{x_1} (y'^2 + 12xy)dx$, $A[0,0]$, $B[1,1]$;

iii) $J = \int\limits_{-1}^{1} y^2(1 - y'^2)dx$, $A[-1,0]$, $B[1,1]$.

3. Částice, jejíž tíhu neuvažujeme, se pohybuje z bodu $A[x_0, y_0]$ do bodu $B[x_1, y_1]$ po takové křivce, že pro její rychlost v platí $v = kx$, kde k je reálná konstanta. Určete tvar trajektorie pro případ, že částice dorazí do bodu B v co nejkratším možném čase.

4. Přesně matematicky dokažte, že v příkladě 4.13.iii)[10] nalezená extremála funkcionálu $t = \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{n}{c}\sqrt{1 + y'^2}dx$ je skutečně jeho lokálním minimem.

5. Přesvědčtěte se o tom, že tzv. Lagrangeovy rovnice 2. druhu pro konzervativní soustavu[11] jsou přímým důsledkem platnosti Hamiltonova principu[12].

6. Z Hamiltonova principu odvoďte pohybové rovnice hmotného bodu m o polohovém vektoru $\vec{r} = (x, y)$, který je podroben působení síly $\vec{F} = (F_x, F_y)$ a má potenciální energii $V = V(x, y)$.

Výsledky:

1.i) $y = \frac{c_1}{x} + c_2$.

1.ii) Výsledek nezávisí na integrační cestě, extremálou je každá hladká křivka.

1.iii) $y - c_1 = \frac{1}{4}\frac{(x-c_2)^2}{c_1}$.

1.iv) $y = c_1 \sin(4x - c_2)$.

1.v) $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2}\sin x$.

2.i) $y = -\frac{x^2}{4} + x$.

2.ii) $y = x^3$.

2.iii) $\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{16}$.

[10]viz str. 23

[11]viz [3], str. 244 (*konzervativní soustavou* rozumíme soustavu podrobenou působení konzervativních sil, tj. sil, jejichž práce je po libovolné uzavřené křivce nulová)

[12]viz str. 7

3. $x^2 + (y - c_2)^2 = c_1^2$.

4. Využijte tvrzení věty 4.11., tj. ověřte platnost jejích předpokladů.

6. Vezměte v úvahu, že $T = \frac{1}{2}m\left[x'^2(t) + y'^2(t)\right]$ a $F_x = -\frac{\partial V(x,y)}{\partial x}$, příp. $F_y = -\frac{\partial V(x,y)}{\partial y}$.

Kapitola 5

Variační úlohy s volnými konci

Dostáváme se k dalšímu typu variačních úloh, a to k variačním úlohám s volnými konci[1].

V minulé kapitole o metodách řešení variačních úloh s konci pevnými jsme při vyšetřování lokálního extrému funkcionálu $J(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$ předpokládali, že křivky, které hledaným lokálním extrémem mohou být, mají pevné koncové body A a B, tedy $A[x_0, y_0]$ a $B[x_1, y_1]$.

V této kapitole budeme předpokládat, že jeden nebo oba koncové body hledaných křivek mohou být pohyblivé. V takovém případě se třída přípustných křivek rozšíří, neboť kromě všech křivek mající společné koncové body s vyšetřovanou křivkou můžeme uvažovat i takové křivky, které mají koncové body od koncových bodů vyšetřované křivky různé.

5.1 Metody řešení variačních úloh s volnými konci

Při hledání postupu řešení variačních úloh s volnými konci budeme postupovat zcela podobně jako u úloh s konci pevnými. Uvidíme, že odlišnosti nastávají jen tehdy, pokud máme z obecného tvaru nalezené křivky dojít k jejímu tvaru konkrétnímu. Vzhledem k tomuto faktu následující výklad dané problematiky bude na rozdíl od kapitoly 4 poněkud stručnější.

Je tedy zřejmé, že nastává-li na nějaké křivce $y = y_0(x)$ lokální extrém ve variační úloze s volnými koncovými body, nastává lokální extrém na uvažované křivce tím spíše vzhledem k užší třídě křivek majících s křivkou $y = y_0(x)$ koncové body společné. Z toho je patrné, že i ve variační úloze s volnými konci musí být splněna základní nutná podmínka pro lokální extrém v úloze s konci pevnými:

$$\delta J(y_0) = 0,$$

tj. funkce $y = y_0(x)$ musí být řešením Euler–Lagrangeovy rovnice

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0.$$

Odtud je zřejmé, že za předpokladu dostatečné hladkosti funkce F křivka $y = y_0(x)$ realizující lokální extrém v úloze s volnými konci je *extremála.*

Jak víme z minulé kapitoly, obecné řešení E–L rovnice obsahuje dvě libovolné konstanty. Abychom je mohli určit, potřebujeme znát jisté dvě okrajové podmínky. V úloze s pevnými konci to byly podmínky

$$y(x_0) = y_0 \text{ a } y(x_1) = y_1.$$

[1] příp. s volnými koncovými body

Ovšem v úloze s volnými konci jedna nebo obě tyto podmínky chybí, proto podmínky pro určení neznámých konstant musíme získat ze základní nutné podmínky pro extrém, tj. z podmínky, že $\delta J(y_0) = 0$. Formulujme je tedy v následující větě.

5.1. Věta. Nechť funkce $y = y_0(x) \in C^1[x_0, x_1]$ je lokální extrém funkcionálu $J(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx$ a nechť funkce F má spojité parciální derivace podle druhé a třetí proměnné. Předpokládejme, že jeden z koncových bodů, např. bod $[x_0, y_0]$, je pevný a že druhý koncový bod $[x_1, y_1]$ se může pohybovat a přejít do bodu $[x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1]$.

Potom platí

$$[F(x_1, y_0, y_0') - y_0'(x_1)F_{y'}(x_1, y_0, y_0')]\,\delta x_1 + F_{y'}(x_1, y_0, y_0')\delta y_1 = 0^2 \tag{5.1}$$

pro libovolné δy, pro něž $\delta y(x_0) = 0$.

Důkaz. V obecném případě jsou extremály křivkami tvaru $y = y_0(x, c_1, c_2)$, kde c_1 a c_2 jsou reálné konstanty. Za předpokladů naší věty extremály procházejí bodem $[x_0, y_0]$, tedy tvoří svazek extremál $y = y_0(x, c_1)$. Pokud se křivky tohoto svazku v okolí uvažované extremály neprotínají, je možno funkcionál $J = J[y(x, c_1)]$ považovat za jednoznačnou funkci x_1 a y_1.

Počítejme tedy variaci funkcionálu $J = J[y(x, c_1)]$ na extremálách svazku $y = y_0(x, c_1)$ při přemístění koncového bodu z polohy $[x_1, y_1]$ do polohy $[x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1]$. Poněvadž funkcionál J přešel na těchto křivkách ve funkci x_1 a y_1, bude jeho variace totožná s diferenciálem této funkce.

Počítejme:

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1+\delta x_1} F(x, y + \delta y, y' + \delta y')dx - \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx,$$

tj.

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x, y + \delta y, y' + \delta y')dx + \int_{x_0}^{x_1} [F(x, y + \delta y, y' + \delta y') - F(x, y, y')]\,dx. \tag{5.2}$$

První člen pravé strany rovnice (5.2) upravíme pomocí věty o střední hodnotě integrálního počtu[3]:

$$\int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x, y + \delta y, y' + \delta y')dx = F(x_1 + t\delta x_1, y + \delta y, y' + \delta y')\delta x_1,$$

kde $0 < t < 1$.
Důsledkem spojitosti funkce F je, že

$$F(x_1 + t\delta x_1, y + \delta y, y' + \delta y')\delta x_1 = F(x_1, y, y') + \varepsilon_1,$$

kde $\varepsilon_1 \to 0$ pro $\delta x_1 \to 0$ a $\delta y_1 \to 0$.
Z předešlých dvou rovnic konečně vyplývá

$$\int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x, y + \delta y, y' + \delta y')dx = F(x_1, y, y')\delta x_1 + \varepsilon_1 \delta x_1. \tag{5.3}$$

[2] V dalším využijeme také jednodušší způsob zápisu: $(F - y'F_{y'})\big|_{x=x_1} \delta x_1 + F_{y'}\big|_{x=x_1} \delta y_1 = 0$ pro $y = y_0(x)$.

[3] viz [2], str. 302

Pro úpravu druhého členu pravé strany rovnice (5.2) využijeme Taylorův rozvoj:

$$\int_{x_0}^{x_1} [F(x, y + \delta y, y' + \delta y') - F(x, y, y')]\, dx =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} [F_y(x, y, y')\delta y + F_{y'}(x, y, y')\delta y']\, dx + R_1, \tag{5.4}$$

kde R_1 je veličina nekonečně malá, vyššího řádu než δy a $\delta y'$.
Integrací metodou per partes dostáváme

$$\int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y')dx = [F_{y'} \delta y]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y\ dx.$$

Protože hodnoty funkcionálu uvažujeme jen na extremálách, pak

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0,$$

a protože koncový bod $[x_0, y_0]$ je pevný, zřejmě

$$\delta y(x_0) = 0.$$

Můžeme tedy psát

$$\int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y')\, dx = [F_{y'} \delta y]|_{x = x_1}\,. \tag{5.5}$$

Z obrázku je vidět, že $BD = \delta y(x_1)$, $FC = \delta y_1$, $EC \doteq y'(x_1)\delta x_1$, $BD = FC - EC$, a tedy

$$\delta y(x_1) \doteq \delta y_1 - y'(x_1)\delta x_1, \tag{5.6}$$

přičemž přibližná rovnost platí až na veličiny nekonečně malé, druhého a vyšších řádů.

S využitím (5.3) dostáváme

$$\int_{x_1}^{x_1 + \delta x_1} F(x, y + \delta y, y' + \delta y')dx \doteq F(x_1, y, y')\delta x_1 \tag{5.7}$$

a následně pomocí (5.4)–(5.6)

$$\int_{x_0}^{x_1} [F(x, y + \delta y, y' + \delta y') - F(x, y, y')]dx \doteq F_{y'}(x_1, y, y')[\delta y_1 - y'(x_1)\delta x_1], \tag{5.8}$$

kde přibližná rovnost opět platí s přesností až na veličiny nekonečně malé, druhého a vyšších řádů.

Ze vztahů (5.2), (5.7) a (5.8) potom dostaneme

$$\delta J = F(x_1, y, y')\delta x_1 + F_{y'}(x_1, y, y')[\delta y_1 - y'(x_1)\delta x_1]$$

a následným zjednodušením

$$\delta J = [F(x_1, y, y') - y'(x_1)F_{y'}(x_1, y, y')]\, \delta x_1 + F_{y'}(x_1, y, y')\delta y_1.$$

Konečně tedy základní nutná podmínka pro lokální extrém $\delta J(y_0) = 0$ pro libovolné δy, přičemž $\delta y(x_0) = 0$, nabude tvaru

$$[F(x_1, y_0, y_0') - y_0'(x_1) F_{y'}(x_1, y_0, y_0')]\, \delta x_1 + F_{y'}(x_1, y_0, y_0') \delta y_1 = 0,$$

což jsme měli dokázat.

5.2. Důsledek. Jsou-li ve vztahu (5.1) variace δx_1 a δy_1 vzájemně nezávislé, musí zároveň pro funkci $y = y_0(x)$ platit

$$(F - y' F_{y'})|_{x=x_1} = 0$$

a

$$F_{y'}|_{x=x_1} = 0.$$

Nechť variace δx_1 a δy_1 vzájemně závislé jsou a nechť se koncový bod $[x_1, y_1]$ může pohybovat po křivce $y = \varphi(x)$. Pak tedy

$$y_1 = \varphi(x_1).$$

V tom případě je $\delta y_1 \doteq \varphi'(x_1) \delta x_1$ a podmínka (5.1) tak nabývá tvaru

$$[F + (\varphi' - y') F_{y'}]|_{x=x_1}\, \delta x_1 = 0,$$

čili se zřetelem k tomu, že δx_1 se mění libovolně, je

$$[F + (\varphi' - y') F_{y'}]|_{x=x_1} = 0. \tag{5.9}$$

Připomeňme, že věta 5.1. byla formulována za předpokladu, že koncový bod $[x_0, y_0]$ byl pevný a pohyblivý byl koncový bod $[x_1, y_1]$.

Pokud ovšem bude pevný koncový bod $[x_1, y_1]$ a koncový bod $[x_0, y_0]$ bude pohyblivý, např. po křivce $y = \psi(x)$, pak analogicky podmínce (5.9) dostáváme

$$[F + (\psi' - y') F_{y'}]|_{x=x_0} = 0. \tag{5.10}$$

V případě, že oba koncové body $[x_0, y_0]$ a $[x_1, y_1]$ budou volné a budou pohyblivé po příslušných křivkách $y = \psi(x)$ a $y = \varphi(x)$, potom musí platit podmínky (5.10) a (5.9) zároveň. Dodejme, že zmíněné podmínky nazýváme *podmínky transverzality.*

5.3. Poznámka. (Speciální tvary podmínek transverzality.)

1. Podmínky transverzality pro funkcionály typu $J(y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} A(x, y) \sqrt{1 + y'^2} dx$ (předpokládáme, že koncový bod $[x_0, y_0]$ je pevný a koncový bod $[x_1, y_1]$ se může pohybovat po křivce $y = \varphi(x)$)

   Podmínka transverzality (5.9) má v tomto případě tvar

$$A(x, y) \sqrt{1 + y'^2} + \frac{A(x, y) y'}{\sqrt{1 + y'^2}} (\varphi' - y') \Bigg|_{x=x_1} = 0,$$

   po převedení na společný jmenovatel

$$\frac{A(x, y)(1 + \varphi' + y')}{\sqrt{1 + y'^2}} \Bigg|_{x=x_1} = 0.$$

Za předpokladu, že v bodě $x = x_1$ je $A(x,y) \neq 0$, dostáváme $1 + \varphi' y' = 0$ pro $x = x_1$, tj.

$$y'(x_1) = -\frac{1}{\varphi'(x_1)}. \tag{5.11}$$

Získali jsme tak *podmínku ortogonality*[4].

2. Podmínky transverzality pro funkcionály typu $J(y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx$ (předpokládáme, že koncový bod $[x_0, y_0]$ je pevný a koncový bod $[x_1, y_1]$ se může pohybovat po přímce rovnoběžné s osou y, tj. po přímce $x = x_1$)

   Je zřejmé, že $\delta x_1 = 0$ a δy_1 může nabývat libovolné hodnoty. Potom z (5.1) jasně vyplývá, že podmínka transverzality přechází ve tvar

$$F_{y'}|_{x=x_1} = 0. \tag{5.12}$$

3. Podmínky transverzality pro funkcionály typu $J(y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx$ (předpokládáme, že koncový bod $[x_0, y_0]$ je pevný a koncový bod $[x_1, y_1]$ se může pohybovat po přímce rovnoběžné s osou x, tj. po přímce $y = y_1$)

   Analogickými úvahami jako v bodě 2. z (5.1) plyne, že

$$[F - y' F_{y'}]|_{x=x_1} = 0.$$

Nakonec ještě zbývá zodpovědět otázku, za jakých podmínek nalezené křivky skutečně lokální extrém představují a zda se jedná o minimum, nebo o maximum. Situace je ovšem zcela analogická jako v případě variačních úloh s konci pevnými.

5.2 Příklady variačních úloh s volnými konci

5.4. Příklady.

i) Určete nejmenší vzdálenost l bodu $A[x_0, y_0]$ od spojité křivky $y = \varphi(x)$.

Řešení:

Jde tedy o určení extremály funkcionálu

$$l = \int\limits_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

která prochází pevným bodem $A[x_0, y_0]$ a hledaným bodem $B[x_1, y_1]$, jenž leží na křivce $y = \varphi(x)$.

Z E–L rovnice vyplývá, že extremály nabývají tvaru

$$y = kx + q,$$

kde k i q jsou reálné konstanty.

[4] viz [2], str. 160

Zbývá pouze neznámé konstanty určit. Z podmínky, že tato přímka musí procházet bodem A, dostáváme

$$y_0 = kx_0 + q. \tag{5.13}$$

Druhou rovnici nutnou pro výpočet obou neznámých nám podává podmínka transverzality tvaru (5.11):

$$k = -\frac{1}{\varphi'(x_1)}. \tag{5.14}$$

Jelikož bod $B[x_1, y_1]$ leží na průsečíku dané křivky s extremálou, platí pro něj

$$y_1 = kx_1 + q$$

a

$$y_1 = \varphi(x_1). \tag{5.15}$$

Užitím (5.13) a (5.14) snadno dospějeme k rovnici

$$\varphi(x_1) + \frac{1}{\varphi'(x_1)}(x_1 - x_0) - y_0 = 0,$$

z níž lze principiálně vypočítat x_1, a jeho prostřednictvím ze vztahů (5.15) a (5.14) hledané k a dosazením do (5.13) pak i q.

Tímto je naše úloha vyřešena, neboť vzdálenost bodů A a B lze potom určit velmi snadno.

Z geometrického významu úlohy je zřejmé, že nalezená extremála je opravdu hledaným minimem. Podobně tomu bude i v dalších úlohách.

Z výše uvedeného příkladu je tedy vidět, že nejkratší spojnice bodu a křivky musí být k dané křivce kolmá. Podobně, pokud se jedná o nejkratší spojnici dvou křivek, musí být nutně kolmá ke každé z nich. Tento výsledek pro nás jistě není nikterak překvapivý. Stojíme-li na jedné straně ulice a máme v úmyslu přejít na stranu druhou, a to ne úplně nejkratším způsobem, okamžitě si to rozmyslíme ve chvíli, kdy náš život náhle začne ohrožovat jedoucí auto. To bez většího přemýšlení míříme k druhé straně ulice co nejrychlejším, tj. nejkratším způsobem, tedy zásadně kolmo k okraji ulice.

ii) <u>Úloha o tautochroně</u>
Jakou dráhu musíme vymezit ve “svislé rovině tíhového pole Země zanedbatelně malé hmotné kuličce vybíhající s nulovou počáteční rychlostí z bodu $A[0,0]$, aby dosáhla překážky o rovnici $x = x_1$ v co nejkratším čase? (Předpokládáme pohyb bez tření.)

Řešení:
Řešení dané úlohy musí být nutně zahrnuto mezi extremálami, jež obvyklým postupem získáme z E–L rovnice. Z úlohy o brachystochroně[5] plyne, že řešením jsou extremály tvaru

$$x = r(\Theta - \sin\Theta) + c, \tag{5.16}$$

$$y = r(1 - \cos\Theta), \tag{5.17}$$

kde r, c jsou libovolné reálné konstanty. Naším úkolem nyní bude tyto konstanty určit.

Podobně jako v úloze o brachystochroně předpokládejme, že bodu $A[0,0]$ odpovídá $\Theta = 0$. Odtud s přihlédnutím k (5.16) zjistíme, že

$$c = 0.$$

Nyní ještě zbývá určit r. K tomu je již nutno použít podmínky transverzality, která vzhledem k poznámce 5.3.2. nabude tvaru

$$F_{y'}|_{x=x_1} = 0.$$

[5]viz příklad 4.13.i), str. 19

Z úlohy o brachystochroně již víme, že
$$F = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}},$$
tedy musí platit
$$F_{y'}|_{x=x_1} = \left.\frac{y'}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+y'^2}}\right|_{x=x_1} = 0,$$
což je splněno v případě, když
$$y'(x_1) = 0.$$

To znamená, že hledaná cykloida musí protínat přímku $x = x_1$ pod pravým úhlem, tedy bod $[x_1, y_1]$ bude vrchol cykloidy. Tomu odpovídá $\Theta = \pi$. Potom s přihlédnutím k (5.16) dostáváme
$$r = \frac{x_1}{\pi}.$$

Abychom tedy vyhověli požadavkům naší úlohy, kuličce musíme vymezit dráhu tvaru cykloidy o parametrických rovnicích
$$x = \frac{x_1}{\pi}(\Theta - \sin\Theta),$$
$$y = \frac{x_1}{\pi}(1 - \cos\Theta).$$

iii) Zjistěte, po jaké křivce se v prostředí, kde rychlost šíření světla v je přímo úměrné y-ové souřadnici (tj. $v = \alpha y$, $\alpha \in \mathbf{R}$), bude šířit světelný paprsek, který vychází z bodu $A[0,0]$ a končí na rovné překážce o rovnici $y = x - a$, kde a je libovolný reálný parametr.

Řešení:

Situace je podobná jako v příkladě 4.13.iv)[6]. Víme tedy, že řešením E–L rovnice jsou extremály tvaru
$$(x-m)^2 + y^2 = r^2,\ m,\ r \in \mathbf{R}.$$

Z faktu, že paprsek vychází z počátku souřadné soustavy, okamžitě dostáváme, že
$$m = r \equiv c.$$

Odpověď na to, jaké hodnoty konstanta c nabývá, nám dá podmínka transverzality – v našem případě vzhledem ke tvaru zadaného funkcionálu a poznámky 5.3.1. podmínka ortogonality. Z toho vyplývá, že část přímky $\varphi(x) = x - a$ v okolí bodu $x = x_1$ bude průměrem hledané kružnice a její střed bude ležet v průsečíku přímky φ s osou x, tedy v bodě $[a, 0]$.

Proto hledanými lokálními extrémy našeho funkcionálu jsou oblouky kružnice
$$(x-a)^2 + y^2 = a^2.$$

5.5. Cvičení.

1. Určete nejkratší vzdálenost d bodu $A[3,0]$ od paraboly $x^2 = 4y$.

2. Nalezněte křivku, na níž může nastat extrém funkcionálu $J = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}dx$, jejíž jeden koncový bod je umístěn v počátku soustavy souřadnic a druhý koncový bod $[x_1, y_1]$ se může pohybovat po kružnici $(x-9)^2 + y^2 = 9$.

Výsledky:

1. $d = \sqrt{2}$.

2. Oblouky kružnice $(x-4)^2 + y^2 = 16$.

[6] viz str. 24

Kapitola 6

Izoperimertické úlohy

Posledním typem variačních úloh, které zmíníme, budou úlohy izoperimetrické. Patří do oblasti variačních úloh na podmíněný[1] extrém – to jsou takové úlohy, v nichž máme najít extrém daného funkcionálu J, přičemž funkce, na nichž závisí hodnota funkcionálu J, jsou kromě okrajových podmínek vázány ještě nějakou další podmínkou. Tato podmínka může být různého tvaru; my se zde zmíníme pouze o jednom specifickém tvaru, neboť ten je pro konkrétní úlohy klíčový.

Ještě dodejme, že veškeré úlohy na podmíněný extrém mohou být (podle druhu okrajových podmínek) obou typů rozebíraných v kapitolách 4 a 5, tedy s pevnými nebo volnými koncovými body.

Dříve v historii byl pojem izoperimetrické úlohy chápán jako problém najít uzavřenou křivku dané délky tak, aby ohraničovala plochu maximálního obsahu. V současné době je pojem izoperimetrické úlohy poněkud rozšířen; mezi izoperimetrické úlohy zahrnujeme všechny variační úlohy, ve kterých jde o nalezení lokálního extrému funkcionálu

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$$

s okrajovými podmínkami $y(x_0) = y_0$, příp. $y = \psi(x)$ v okolí bodu $[x_0, y_0]$ a $y(x_1) = y_1$, příp. $y = \varphi(x)$ v okolí bodu $[x_1, y_1]$ a vedlejší[2] podmínkou ve funkcionálním tvaru

$$K(y) = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y')dx = k,\ k \in \mathbf{R},$$

kterou nazýváme podmínkou *izoperimetrickou.*

Nyní zde uvedeme způsob řešení těchto úloh, přičemž se při výkladu zaměříme pouze na úlohy s okrajovými podmínkami pevných koncových bodů.

6.1 Metody řešení izoperimetrických úloh

Podobně, jako tomu bylo v obou předešlých typech variačních úloh, vycházíme ze základní nutné podmínky pro existenci lokálního extrému $y = y_0(x)$ daného funkcionálu J. Zřejmě musí být pro hledanou funkci nutně splněna, proto platí, že

$$\delta J(y_0) = 0.$$

Nastává otázka, zda z ní můžeme vyvodit nějaké vhodné kritérium pro konkrétní řešení izoperimetrických úloh. Odpověď dostáváme v následující větě:

[1] příp. vázaný
[2] příp. vazební

6.1. Věta. Nechť je křivka $y = y_0(x) \in C^1[x_0, x_1]$ extremálou funkcionálu $J(y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$ za podmínek $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$ a izoperimetrické podmínky $K(y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} G(x, y, y')dx = k$, kde k je reálná konstanta, a nechť křivka $y = y_0(x)$ není extremálou funkcionálu K.

Potom existuje taková reálná konstanta λ, že křivka $y = y_0(x)$ je extremálou funkcionálu J^*, kde

$$J^* = J + \lambda K,$$

tedy platí

$$F_y^*(x, y_0, y_0') - \frac{d}{dx} F_{y'}^*(x, y_0, y_0') = 0, \tag{6.1}$$

kde $F^* = F + \lambda G$.

Důkaz. Nejprve vyjádřeme, čemu je rovno δJ. Užitím metody per partes

$$\delta J(y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y')\, dx = [F_{y'} \delta y]_{x_0}^{x_1} + \int\limits_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y \ dx.$$

Vzhledem k tomu, že $\delta y(x_0) = \delta y(x_1) = 0$, dostáváme

$$\delta J(y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y \ dx. \tag{6.2}$$

Zcela analogickým způsobem vyjádříme δK :

$$\delta K(y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} \left(G_y - \frac{d}{dx} G_{y'} \right) \delta y \ dx = \delta k = 0. \tag{6.3}$$

(Je nutné zdůraznit, že ve výrazech (6.2) a (6.3) δy není kvůli vazební podmínce nezávislé.)

Nyní vynásobme δK konstantním faktorem λ a daný výraz přičtěmě k δJ. Po jednoduchých úpravách dostáváme

$$\delta J^* = \delta J + \lambda \delta K = \int\limits_{x_0}^{x_1} \left[(F + \lambda G)_y - \frac{d}{dx}(F + \lambda G)_{y'} \right] \delta y \ dx. \tag{6.4}$$

Následně zvolme λ tak, aby výraz v hranaté závorce pro funkci $y = y_0(x)$ vymizel, tj. klademe

$$(F + \lambda G)_y - \frac{d}{dx}(F + \lambda G)_{y'} = 0. \tag{6.5}$$

Po zavedení označení

$$F^* = F + \lambda G$$

přejde (6.5) v rovnici

$$F_y^* - \frac{d}{dx} F_{y'}^* \bigg|_{y=y_0} = 0,$$

v níž rozeznáváme rovnici (6.1), tedy Euler–Lagrangeovu rovnici pro funkci F^*. Z (6.4) a s uvážením, že $\lambda \delta K = 0$, okamžitě plyne, že podmínka (6.1) je ekvivalentní s podmínkou $\delta J(y_0) = 0$ pro uvažovaný případ. Tím je tedy věta zcela dokázána.

Můžeme shrnout, že náš variační problém s vazební podmínkou jsme převedli na obyčejný nevazební problém, přičemž funkci F jsme nahradili funkcí $F^* = F + \lambda G$. Člen λ nazýváme *Lagrangeův multiplikátor* a v tomto případě je konstantou.

Obecným řešením rovnice (6.1) je zřejmě extremála tvaru $y = y_0(x, c_1, c_2, \lambda)$. Abychom ji mohli jednoznačně určit, potřebujeme tři příslušné rovnice. Získáme je ze dvou okrajových podmínek a podmínky izoperimetrické, čímž je řešení naší úlohy u konce.

Pro možnost úplného vyřešení izoperimetrických úloh ještě zbývá odpovědět na otázku, o jaký druh vyšetřeného extrému se jedná. Problematiku zde nebudeme explicitně formulovat, úvahy jsou analogické jako v případě variačních úloh s pevnými konci.

6.2. Poznámka. (O zákonu reciprocity.) Z věty 6.1. plyne, že násobení integrované funkce konstantou soustavu extremál pro daný funkcionál J^* nezmění. Proto můžeme funkci F^* zapsat ve tvaru

$$F^* = \lambda_1 F + \lambda_2 G,$$

kde λ_1 a λ_2 jsou reálné konstanty. Takové vyjádření funkce F^* nám ukazuje, že funkce F a G ve výrazu F^* vystupují symetricky. Vyloučíme-li případ $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = 0$, pak soustava extremál bude jedna a táž, budeme-li hledat extrém funkcionálu J za podmínky, že funkcionál K má konstantní hodnotu, nebo budeme-li hledat extrém funkcionálu K za podmínky, že konstantní hodnotu zachovává funkcionál J.

Tato vlastnost se nazývá *zákon reciprocity.* Ilustrujme jej na následujícím příkladě: zřejmě úloha najít plochu maximálního obsahu ohraničenou uzavřenou křivkou dané délky a úloha najít uzavřenou křivku minimální délky, která ohraničuje plochu daného obsahu, jsou úlohy vzájemně reciproké a mají společné extremály.

6.2 Příklady izoperimetrických úloh

6.3. Příklady.

i) Určete křivku $y = y(x)$ dané délky l s koncovými body $A[x_0, y_0]$ a $B[x_1, y_1]$ tak, aby obsah plochy vymezené křivkami $y = y(x)$, $x = x_0$, $x = x_1$ a osou x byl maximální.

Řešení:

Hledáme tedy extrém funkcionálu vyjadřující obsah výše vymezené plochy, který je dán vztahem[3]

$$S = \int_{x_0}^{x_1} y\, dx,$$

za izoperimetrické podmínky

$$K = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx = l,$$

přičemž

$$y(x_0) = y_0 \text{ a } y(x_1) = x_1.$$

Z předcházejícího výkladu je zřejmé, že daný problém převedeme na úlohu na nepodmíněný extrém funkcionálu $S^* = S + \lambda K$. E–L rovnici tedy řešme vzhledem k funkci F^*, kde

$$F^* = F + \lambda G = y + \lambda\sqrt{1 + y'^2}.$$

Protože F^* explicitně neobsahuje x, E–L rovnice nabude vzhledem k (4.8) tvaru

$$y + \lambda\sqrt{1 + y'^2} - \frac{\lambda y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} = c_2,\ c_2 \in \mathbf{R}.$$

[3] viz [2], str. 319

Odtud vynásobením rovnice výrazem $\sqrt{1+y'^2}$ a jednoduchou úpravou

$$y - c_2 = \frac{-\lambda}{\sqrt{1+y'^2}}. \tag{6.6}$$

Zavedením substituce

$$y' = \operatorname{tg}\varphi$$

rovnice (6.6) přejde ve tvar

$$y - c_2 = -\lambda\cos\varphi, \tag{6.7}$$

který vyjadřuje parametrické vyjádření y-ové souřadnice hledané křivky.

Neboť

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\varphi \text{ a } dy = \lambda\sin\varphi\; d\varphi,$$

dostáváme

$$dx = \lambda\cos\varphi\; d\varphi$$

a odtud

$$x = \lambda\sin\varphi + c_1,\; c_1 \in \mathbf{R}. \tag{6.8}$$

Odstraněním paramteru φ z rovnic (6.8) a (6.7) vychází

$$(x-c_1)^2 + (y-c_2)^2 = \lambda^2, \tag{6.9}$$

což je soustava kružnic se středy v bodech $[c_1, c_2]$ a poloměry o velikosti $|\lambda|$.

Abychom z nich vybrali hledanou kružnici vyhovující všem podmínkám naší úlohy, musíme ještě určit neznámé konstanty c_1, c_2 a λ.

Pro zjednodušení předpokládejme, že body A a B leží na ose x, tj. $y_0 = y_1 = 0$. Neboť body A a B leží na naší kružnici, zřejmě musí vyhovovat její rovnici, tj. rovnici (6.9), tedy

$$\begin{aligned}(x_0-c_1)^2 + c_2^2 &= \lambda^2,\\ (x_1-c_1)^2 + c_2^2 &= \lambda^2.\end{aligned} \tag{6.10}$$

Odečtením těchto rovnic, vydělením nenulovým výrazem $(x_0 - x_1)$ a menšími úpravami dostáváme rovnici

$$x_0 + x_1 - 2c_1 = 0.$$

Odtud

$$c_1 = \frac{x_0+x_1}{2} \tag{6.11}$$

a ještě s využitím rovnice (6.10)

$$c_2 = \lambda^2 - \left(\frac{x_1-x_0}{2}\right)^2. \tag{6.12}$$

Zbývá určit koeficient λ. Vyjděme z izoperimetrické podmínky

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}dx = l. \tag{6.13}$$

Člen y' získáme diferencováním rovnice (6.9) naší kružnice:

$$y' = -\frac{x-c_1}{y-c_2}.$$

Jeho dosazením do (6.13), s přihlédnutím k (6.9) a jednoduchými úpravami izoperimetrická podmínka nabývá tvaru

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - (x - c_1)^2}} dx = l,$$

jejíž integrací

$$l = \lambda \left[\arcsin\left(\frac{x_1 - c_1}{\lambda} \right) \right]_{x_0}^{x_1},$$

tj.

$$l = 2\lambda \arcsin\left(\frac{x_1 - x_0}{2\lambda} \right). \tag{6.14}$$

Z poslední rovnice je principiálně možno konstantu λ vypočítat, i když za pomocí numerických, případně grafických metod.

Zřejmě rovnicemi (6.11), (6.12) a (6.14) je řešení úlohy jednoznačně určeno.

Ještě poznamenejme, že druh extrému, podobně jako v dalších úlohách, plyne přímo z geometrické interpretace problému.

Správnost výsledku výše uvedené úlohy je možno ilustrovat jednoduchým pokusem. Uvažme menší drátěný obdélníkový rámeček. Na jeho jedné hraně je ve dvou bodech pevně uvázán velmi tenký provázek, o délce větší než je vzdálenost jeho koncových bodů. Pokud necháme na našem rámečku uchytit mýdlovou blánu a propíchneme ji v libovolném místě plochy omezené provázkem a zmíněnou hranou, uvidíme, že provázek okamžitě nabude tvaru oblouku kružnice s poloměrem závislým na jeho délce. Podle principu minimální potenciální (povrchové) energie mýdlové blány musí nabýt mýdlová plocha minimální hodnoty povrchu, a to znamená, že plocha bez mýdlové blány má povrch maximální.

ii) Určete křivku AB délky l, která společně s danou křivkou $y = f(x)$ s koncovými body $A[x_0, y_0]$ a $B[x_1, y_1]$ ohraničuje plochu maximálního obsahu.

Řešení:

Máme tedy určit extrém funkcionálu

$$S = \int_{x_0}^{x_1} [y - f(x)]\, dx$$

za podmínky

$$K = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx = l,$$

přičemž

$$y(x_0) = y_0 \text{ a } y(x_1) = y_1.$$

Pomocný funkcionál $S^* = S + \lambda K$ nabude tvaru

$$S^* = \int_{x_0}^{x_1} \left[y - f(x) + \lambda\sqrt{1 + y'^2} \right] dx.$$

Snadno zjistíme, že E–L rovnice bude zcela stejná jako v předcházejícím případě, proto hledaná křivka AB bude obloukem kružnice, jejíž střed a poloměr vypočítáme podobně jako v minulém příkladě.

iii) Najděte tvar dokonale ohebného neroztažitelného homogenního lana délky l, průřezu S a hustotě ρ, zavěšeného v bodech $A[x_0, y_0]$ a $B[x_1, y_1]$ ve "svislé rovině tíhového pole Země.

Řešení:

Z mechaniky víme, že stabilní poloha tuhého tělesa v tíhovém poli je dána jeho minimální potenciální energií, nastane proto v případě, když jeho těžiště zaujme nejnižší polohu. Jde tedy o to, najít minimální hodnotu y-ové souřadnice y_T težiště lana délky l, která je daná vztahem[4]

$$y_T = \frac{S\rho}{l} \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}dx;$$

hledáme tedy minimum funkcionálu

$$Y = \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}dx,$$

kdy

$$y(x_0) = y_0 \text{ a } y(x_1) = y_1$$

a za izoperimetrické podmínky

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}dx = l.$$

Následné řešení bude zcela analogické jako u předešlých příkladů, tedy pomocný funkcionál bude mít tvar

$$Y^* = \int_{x_0}^{x_1} (y+\lambda)\sqrt{1+y'^2}dx.$$

Dosazením do E–L rovnice (4.8) dostaneme

$$(y+\lambda)\sqrt{1+y'^2} - \frac{(y+\lambda)y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = c_1,\ c_1 \in \mathbf{R}.$$

Vynásobením nenulovým výrazem $\sqrt{1+y'^2}$ a menšími úpravami dostáváme rovnici

$$y + \lambda = c_1\sqrt{1+y'^2}, \tag{6.15}$$

pro jejíž elegantní vyřešení zvolme substituci

$$y' = \sinh\varphi. \tag{6.16}$$

Jejím dosazením do (6.15) nám tato rovnice přejde ve tvar

$$y + \lambda = c_1\sqrt{1+\sinh^2\varphi} = c_1\cosh\varphi \tag{6.17}$$

a jejím diferencováním:

$$dy = -c_1 \sinh\varphi\ d\varphi.$$

Spolu s rovnicí (6.16) dostáváme

$$dx = -c_1\ d\varphi,$$

tedy

$$x = -c_1\varphi + c_2,\ c_2 \in \mathbf{R}.$$

[4] viz [3], str. 434

Vyjádříme-li z poslední rovnice φ a dosadíme-li je do (6.17), dospíváme tak k rovnici hledané křivky:

$$y = c_1 \cosh \frac{c_2 - x}{c_1} - \lambda.$$

Neznámé konstanty c_1, c_2, a λ lze vypočítat použitím okrajových podmínek a podmínky izoperimetrické.

6.4. Cvičení.

1. Určete extremály funkcionálu $J = \int\limits_0^1 y'^2 dx$ za okrajových podmínek $y(0) = 0, y(1) = 1$ a izoperimetrické podmínky $\int\limits_0^1 y \; dx = 1$.

2. Napište diferenciální rovnici extremál funkcionálu $J = \int\limits_0^{x_1} \left[p(x)y'^2 + q(x)y^2\right] dx$ za okrajových podmínek $y(0) = 0$, $y(x_1) = 0$ a izoperimetrické podmínky $\int\limits_0^{x_1} r(x)y^2 dx = 1$.

Výsledky:

1. $y = -4x^2 + 5x$.
2. $p(x)y'' + p'(x)y' - [q(x) + \lambda r(x)]\, y = 0$ při zadaných okrajových podmínkách.

Závěr

Cílem této práce bylo seznámit srozumitelnou formou čtenáře se základy variačního počtu. Vzhledem k tomuto faktu a rozsahu práce jsme se omezili pouze na studium funkcionálů závisejících obecně na funkci jedné proměnné a její derivaci prvního řádu a s tím souvisejících variačních úloh tří typů. Tímto jsme sice pokryli základní problematiku variačního počtu, ale na druhé straně zůstala zahalena řada dalších možných poznatků. Proto příklady variačních úloh uváděné v této práci nevykazují přílišnou složitost; byly vybrány tak, aby je bylo možné v rámci uvedené teorie poměrně snadno spočítat. Avšak přesto jsme měli možnost se přesvědčit o tom, že i na první pohled relativně jednoduché úlohy nás mohou na samém konci hledání konkrétního řešení překvapit principielní nemožností nalezení analytického vyjádření tohoto řešení, tedy nutností přiklonit se k použití např. numerických metod.

Na tomto místě jistě nebude zbytečné si znovu uvědomit, že variační počet není pouze "pěknou a dobře propracovanou matematickou teorií, ale teorií sahající i za své hranice, myšleno především do oblasti fyziky – tedy oblasti každodenní reality. Pokud takovou vlastnost jakákoli matematická teorie má, můžeme si snad dovolit tvrdit, že se stává ještě "krásnější. Doufejme, že předchozí strany této práce mohou zmíněnou významnou užitečnost variačního počtu alespoň částečně ilustrovat a potvrdit.

Literatura

[1] Brabec, J., Hrůza, B. *Matematická analýza II.* Praha: Státní nakladatelství technické literatury, Bratislava: Alfa, 1986.

[2] Brabec, J., Martan, F., Rozenský, Z. *Matematická analýza I.* Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1989.

[3] Brdička, M., Hladík, A. *Teoretická mechanika.* Praha: Academia, 1987.

[4] El'sgol'c, L. E. *Variační počet.* Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1965.

[5] Fuchs, E. a kol. *Světonázorové problémy matematiky IV.* Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1987.

[6] Lavrent'jev, M. A., Ljusternik, L. A. *Kurs variačního počtu.* Praha: Přírodovědecké nakladatelství, 1952.

[7] Obetková, V., Mamrillová, A., Košinárová, A. *Teoretická mechanika.* Bratislava: Alfa, 1990.

[8] Struik, D. J. *Dějiny matematiky.* Praha: Orbis, 1963.