# SOUSTAVY LDR $(3\times 3)$ (homogenní případ) 1

Nový nadpis 10.12.2010

**Př. 1:**

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= 5y_1 + 4y_2 \\ y_2' &= 2y_1 + 3y_2 + 4y_3 \\ y_3' &= -2y_1 - 2y_2 + y_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ matice soustavy $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ char. matice $A-\lambda E = \begin{bmatrix} 5-\lambda & 4 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 4 \\ -2 & -2 & 1-\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ char. polynom

$$\det(A-\lambda E) = (5-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda) + 4\cdot 4\cdot(-2) + 2\cdot(-2)\cdot 0 - (-2)\cdot(3-\lambda)\cdot 0 - 2\cdot 4\cdot(1-\lambda) - (5-\lambda)\cdot(-2)\cdot 4$$

$$= (5-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda) \underbrace{-32 - 8 + 8\lambda + 40 - 8\lambda}_{0} =$$

$$= (5-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ vlastní čísla jsou $\boxed{\begin{aligned}\lambda_1 &= 5\\ \lambda_2 &= 3\\ \lambda_3 &= 1\end{aligned}}$

**Vlastní vektory:**

$\lambda_1 = 5$ : $\begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \\ -2 & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{matrix} /:4 \\ /:2 \\ /:2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \sim$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} + \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ | \cdot 2 \\ + \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Volme $x_3 = 1 \Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x_1 = -2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ vl. vektor $u = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 3$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} | : 2 \\ | : 2 \\ | : 2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} | \cdot (-1) \quad | \cdot 1 \\ + \\ + \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ | : 2 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Volme $x_3 = 1 \Rightarrow x_2 = 1$
$\Rightarrow x_1 = -2$

$\Rightarrow$ vl. vektor $u = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_3 = 1$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} | : 4 \\ | : 2 \\ | : 2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} | \cdot (-1) \quad | \cdot 1 \\ + \\ + \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

($x_3$ nelze volit – nešlo by to dopočítat)
Zvolme $x_2 = 1 \Rightarrow x_3 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x_1 = -1 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ vl. vektor $u = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

1. řešení soustavy LDR: $y = e^{5x} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\left( e^{\lambda x} \cdot u \right)$

2. řešení: $y = e^{3x} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. řešení: $y = e^{x} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Obecné řešení:

$$\boxed{y = c_1 \cdot e^{5x} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \cdot e^{3x} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \cdot e^{x} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})}$$

Př. 2:
$$\left.\begin{aligned} y_1' &= -2y_1 - 3y_2 - 7y_3 \\ y_2' &= y_1 + 2y_2 + 3y_3 \\ y_3' &= 2y_1 + 2y_2 + 5y_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow (A - \lambda E) = \begin{bmatrix} -2-\lambda & -3 & -7 \\ 1 & 2-\lambda & 3 \\ 2 & 2 & 5-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A - \lambda E) = \ldots\ldots = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 7\lambda + 3.$$

Snadno se vidí, že $\lambda_1 = 1$ je kořenem char. polynomu.

**Zbývající kořeny zjistíme dělením:**

$$(-\lambda^3+5\lambda^2-7\lambda+3):\overset{(\lambda-\lambda_1)}{(\lambda-1)} = \underbrace{(-\lambda^2+4\lambda-3)}_{\text{stačí řešit}}$$

$$\begin{array}{l}
-(-\lambda^3+\lambda^2) \\
\hline
\quad 4\lambda^2-7\lambda+3 \\
\quad -(4\lambda^2-4\lambda) \\
\hline
\qquad -3\lambda+3 \\
\qquad -(-3\lambda+3) \\
\hline
\qquad\quad 0
\end{array}$$

stačí řešit

$$-\lambda^2+4\lambda-3=0$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\lambda_2=1}, \quad \underline{\lambda_3=3}$$

Celkem tedy
$$\boxed{\begin{array}{l} \lambda_1=1 \\ \lambda_2=1 \\ \lambda_3=3 \end{array}}$$
$\lambda_1, \lambda_2$ } dvojnásobné vl. číslo

**Vlastní vektory:**

$\lambda_3=3$ :
$$\begin{bmatrix} -5 & -3 & -7 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ |:2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -5 & -3 & -7 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} |\cdot 5 \,|\cdot(-1) \\ \\ + \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -8 & 8 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ |:8 \\ |:2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Volme $x_3=1 \Rightarrow x_2=1 \Rightarrow x_1=-2$

$\Rightarrow$ vlastní vektor $u=\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ 1. řešení soustavy LDR :
$$\boxed{y=e^{3x}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$\lambda_{1,2} = 1$: $\begin{bmatrix} -3 & -3 & -7 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 1:2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & -7 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} /\cdot 3 \quad /\cdot(-1) \\ + \\ + \end{matrix}$ 5

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ 1:2 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ + \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Volme $x_2 = 1 \Rightarrow x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$

$\Rightarrow$ vl. vektor $u = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ 2. řešení:

$$y = e^x \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. řešení chybí – hledáme ho ve tvaru

$e^{\lambda x} \cdot (ux + v)$, kde $(A - \lambda E) \cdot v = u$, tj.

$$y = e^x \cdot \left( \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} v \end{bmatrix} \right)$$

Výpočet $v$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & -3 & -7 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ 1:2 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ -3 & -3 & -7 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ 1:2 \\ \\ \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

Volme klidně $x_2 = 0$ (teď můžeme) $\Rightarrow$

$\Rightarrow x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = -2 \Rightarrow v = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ 3. řešení: $y = e^x \cdot \left( \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = e^x \cdot \begin{bmatrix} -x-2 \\ x \\ 1 \end{bmatrix}$

Obecné řešení:

$$\boxed{y = C_1 \cdot e^{3x} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 \cdot e^x \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_3 \cdot e^x \cdot \begin{bmatrix} -x-2 \\ x \\ 1 \end{bmatrix} \quad (C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R})}$$

Př. 3:

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= -3y_1 - 4y_2 - 8y_3 \\ y_2' &= 2y_1 + 3y_2 + 4y_3 \\ y_3' &= 2y_1 + 2y_2 + 5y_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} -3 & -4 & -8 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow (A - \lambda E) = \begin{bmatrix} -3-\lambda & -4 & -8 \\ 2 & 3-\lambda & 4 \\ 2 & 2 & 5-\lambda \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ char. polynom $\det(A - \lambda E) = \ldots\ldots = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 7\lambda + 3$.

$\Rightarrow$ (viz předchozí příklad) $\boxed{\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= 1 \\ \lambda_3 &= 3 \end{aligned}}$

Vlastní vektory:

$\lambda_3 = 3$: $\begin{bmatrix} -6 & -4 & -8 \\ 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} | : (-2) \\ | : 2 \\ | : 2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mid\cdot(-3) & \mid\cdot(-1) \\ \swarrow + & \\ & + \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \mid : 2 \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{-1} \end{bmatrix}$$

(2 stejné řádky)

Volme $x_3 = 1 \Rightarrow x_2 = 1$
$\Rightarrow x_1 = -2$

$\Downarrow$

Vl. vektor $\quad u = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ 1. řešení soustavy LDR:

$$y = e^{3x} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_{1,2} = 1$:

$$\begin{bmatrix} -4 & -4 & -8 \\ 2 & 2 & 4 \\ \cancel{2} & \cancel{2} & \cancel{4} \end{bmatrix} \begin{matrix} \mid : (-4) \\ \mid : 2 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(stejné řádky škrtáme)

$\Rightarrow$ vypadly 2 řádky $\Rightarrow$ volíme $x_2$ i $x_3$

Provedeme nezávislou volbu (2 volby):

| | $x_2$ | $x_3$ | | $x_1$ |
|---|---|---|---|---|
| 1) | 0 | 1 | $\Rightarrow$ | $-2$ |
| 2) | 1 | 0 | $\Rightarrow$ | $-1$ |

Existují tedy 2 lineárně nezávislé vlastní vektory

$$u_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad a \quad u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Downarrow$ 2. řešení:

$$y = e^x \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\Downarrow$ 3. řešení:

$$y = e^x \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Obecné řešení:

$$y = C_1 \cdot e^{3x} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 \cdot e^x \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + C_3 \cdot e^x \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$(C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R})$

Př. 4:

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= -3y_1 - 4y_2 - 8y_3 \\ y_2' &= 2y_1 + 3y_2 + 3y_3 \\ y_3' &= 2y_1 + 2y_2 + 5y_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -3 & -4 & -8 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A - \lambda E = \begin{bmatrix} -3-\lambda & -4 & -8 \\ 2 & 3-\lambda & 3 \\ 2 & 2 & 5-\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \text{char. polynom}$$

$$\det.(A - \lambda E) = \ldots\ldots = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 9\lambda + 5.$$

Snadno se vidí, že $\lambda_1 = 1$. $\Longrightarrow$ dělení

$$
\begin{array}{l}
(-\lambda^3+5\lambda^2-9\lambda+5) : (\lambda-1) = (-\lambda^2+4\lambda-5) \\
-(-\lambda^3+\lambda^2) \\
\hline
\quad 4\lambda^2-9\lambda+5 \\
\quad -(4\lambda^2-4\lambda) \\
\hline
\qquad -5\lambda+5 \\
\qquad -(-5\lambda+5) \\
\hline
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

$\Downarrow$ odtud získáme zbývající kořeny $\lambda_2, \lambda_3$

$$\Longrightarrow \quad -\lambda^2+4\lambda-5 = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-20}}{-2} = \frac{-4 \pm 2i}{-2} = 2 \pm i$$

(komplexně sdružené kořeny)

Vlastní vektory:

$\lambda_1 = 1$:

$$
\begin{bmatrix} -4 & -4 & -8 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}
\begin{matrix} /:(-4) \\ \\ /:2 \end{matrix}
\sim
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}
\begin{matrix} /\cdot(-2) \quad /\cdot(-1) \\ + \\ + \end{matrix}
\sim
$$

$$
\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

Volme $x_2 = 1 \Longrightarrow x_3 = 0$

$\Longrightarrow x_1 = -1$

$$\Longrightarrow \text{vl. vektor} \quad u = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Longrightarrow$ 1. řešení soustavy LDR: $\quad y = e^t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 2+i$ ($\lambda_3$ se uvažovat nemusí):

$$\begin{bmatrix} -5-i & -4 & -8 \\ 2 & 1-i & 3 \\ 2 & 2 & 3-i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1-i & 3 \\ 2 & 2 & 3-i \\ -5-i & -4 & -8 \end{bmatrix} \begin{matrix} |\cdot(-1) \\ + \\ \phantom{x} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & 1-i & 3 \\ 0 & 1+i & -i \\ -5-i & -4 & -8 \end{bmatrix} \begin{matrix} |\cdot(5+i) \\ \phantom{x} \\ |\cdot 2 \end{matrix} + \sim \begin{bmatrix} 2 & 1-i & 3 \\ 0 & 1+i & -i \\ 0 & (5+i)(1-i)-8 & 3\cdot(5+i)-16 \end{bmatrix} \begin{matrix} \phantom{x} \\ |\cdot(2+4i) \\ |\cdot(1+i) \end{matrix} +$$

$(5+i)(1-i)-8 \to -2-4i$, $\quad 3\cdot(5+i)-16 \to -1+3i$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & 1-i & 3 \\ 0 & 1+i & -i \\ 0 & 0 & -i\cdot(2+4i)+(1+i)\cdot(-1+3i) \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1-i & 3 \\ 0 & 1+i & -i \end{bmatrix}$$

$-i\cdot(2+4i)+(1+i)\cdot(-1+3i) = 0$

Volme $x_3 = 1+i$, pak totiž $x_2 = i$

$$\Rightarrow 2x_1 = -3(1+i) - i(1-i) = -3-3i-i+i^2 = $$
$$= -4-4i \Rightarrow x_1 = -2-2i$$

$\Rightarrow$ vl. vektor $u = \begin{bmatrix} -2-2i \\ i \\ 1+i \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ řešení soustavy LDR:

$$y = e^{(2+i)x} \cdot \begin{bmatrix} -2-2i \\ i \\ 1+i \end{bmatrix}$$

(Jedná se však o řešení v kompl. oboru – to nechceme)

Musíme ho upravit: $\left[e^{A+Bi} = e^{A}\cdot(\cos B + i \sin B)\right]$

$$y = e^{2x}\cdot \underbrace{(\cos x + i\sin x)\cdot \begin{bmatrix} -2-2i \\ i \\ 1+i \end{bmatrix}}_{\text{roznásobíme}} =$$

$$= e^{2x}\cdot \begin{bmatrix} -2\cos x - 2i\cos x - 2i\sin x - 2i^2\sin x \\ i\cos x + i^2\sin x \\ \cos x + i\sin x + i\cos x + i^2\sin x \end{bmatrix} =$$

$$= e^{2x}\cdot \begin{bmatrix} -2\cos x - 2i\cos x - 2i\sin x + 2\sin x \\ i\cos x - \sin x \\ \cos x + i\sin x + i\cos x - \sin x \end{bmatrix}$$

2. řešení soustavy LDR:

$$\mathrm{Re}(y) = e^{2x}\cdot \begin{bmatrix} -2\cos x + 2\sin x \\ -\sin x \\ \cos x - \sin x \end{bmatrix}$$

3. řešení:

$$\mathrm{Im}(y) = e^{2x}\cdot \begin{bmatrix} -2\cos x - 2\sin x \\ \cos x \\ \sin x + \cos x \end{bmatrix}$$

Obecné řešení:

$$\left[ y = C_1\cdot e^{x}\cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2\cdot e^{2x}\cdot \begin{bmatrix} -2\cos x + 2\sin x \\ -\sin x \\ \cos x - \sin x \end{bmatrix} + C_3\cdot e^{2x}\cdot \begin{bmatrix} -2\cos x - 2\sin x \\ \cos x \\ \sin x + \cos x \end{bmatrix} \quad (C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}) \right]$$