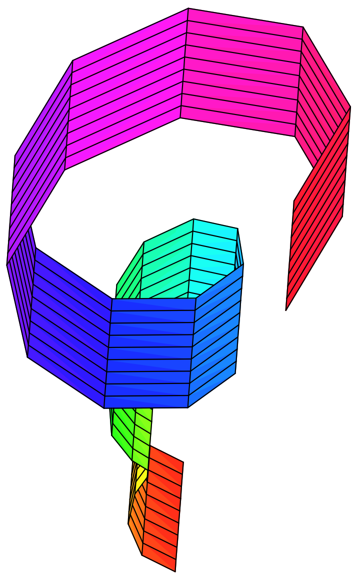
SBÍRKA PŘÍKLADŮ Z MATEMATICKÉ ANALÝZY 3

Jiří Bouchala

Katedra aplikované matematiky, VŠB–TU Ostrava

jiri.bouchala@vsb.cz

www.am.vsb.cz/bouchala



2000

Předmluva

Tato sbírka doplňuje přednášky z *Matematické analýzy III.* o příklady vhodné k přemýšlení a k procvičování probírané látky.

Tento text není ukončen. Průběžně ho měním a doplňuji. Prosím proto čtenáře o shovívavost a sdělení všech připomínek.

2. října 2000
Jiří Bouchala

Příklad 1.
Rozhodněte, zda posloupnost (a_k) v $\mathbb{R}^n$ konverguje, a určete její případnou limitu, je-li:

a) $n = 2$, $a_k \overset{\text{def.}}{=} \left(\frac{k^3-k}{2k^3+1}, \frac{3^k+2^k}{3^{k+1}+2^{k+1}}\right)$;

b) $n = 4$, $a_k \overset{\text{def.}}{=} \left(\frac{2k}{k^2+1}, \frac{(-1)^k}{k^2}, 0, \frac{2^k}{k}\right)$;

c) $n = 5$, $a_k \overset{\text{def.}}{=} \left(\left(\frac{k+2}{k}\right)^k, \sqrt[k]{k}, \frac{\sin k}{k}, \frac{k+1}{\sqrt{4k^2+1}}, (-1)^k \cdot (\sqrt{k} - \sqrt{k+1})\right)$.

Příklad 2.
Rozhodněte, zda je vektorová funkce f diferencovatelná v bodě c, a pokud ano, vypočtěte $f'(c)$ a $\mathrm{d}f_c(h)$, je-li:

a) $f(x,y,z) \overset{\text{def.}}{=} \left(x^3y^2z, \frac{x-y}{z}\right)$, $c = (1,2,3)$, $h = (h_1,h_2,h_3)$;

b) $f(x) \overset{\text{def.}}{=} (\cos x, \sin x)$, $c = \frac{\pi}{4}$, $h = -\sqrt{2}$;

c) $f(x,y,z) \overset{\text{def.}}{=} (xy, \sin(xy), \arcsin(x))$, $c = (1,1,6)$, $h = (h_1,h_2,h_3)$.

Příklad 3.
Vypočtěte $f'(c)$, $g'(f(c))$ a $(g \circ f)'(c)$, je-li: $c = (1,1)$,

$$f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} \left(x^2+y^2, \ln x + \ln y, \frac{x}{y}\right),\ g(u,v,w) \overset{\text{def.}}{=} \left(uv+1, u^2-v^2+w, w-u\right).$$

Příklad 4. Nakreslete množinu $\langle\varphi\rangle = \{\varphi(t) :\ t \in I\}$, je-li:

a) $\varphi(t) \overset{\text{def.}}{=} (3+2\cos t, 2+2\sin t)$, $I = \langle 0, 2\pi\rangle$;

b) $\varphi(t) \overset{\text{def.}}{=} (3+2\cos(2t), 2+2\sin(2t))$, $I = \langle 0, 2\pi\rangle$;

c) $\varphi(t) \overset{\text{def.}}{=} (\cos t, 2+\arcsin(\cos t))$, $I = \langle -\pi, \pi\rangle$;

d) $\varphi(t) \overset{\text{def.}}{=} (2\sin^2 t, 4\cos^2 t)$, $I = \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$;

e) $\varphi(t) \overset{\text{def.}}{=} (t^2-2t+3, t^2-2t+1)$, $I = (1, +\infty)$;

f) $\varphi(t) \overset{\text{def.}}{=} \left(\frac{2000}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{2000t}{\sqrt{1+t^2}}\right)$, $I = \mathbb{R}$.

Příklad 5. Parametrizujte množinu Ω, je-li:

a) $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 = 9 \ \wedge\ 2x+y-3z = 0\}$;

b) $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 = 4 \ \wedge\ x^2+y^2 = 2x \ \wedge\ z \geq 0\}$;

c) $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+z^2 = 9 \ \wedge \ x^2+y^2-z^2 = 0 \ \wedge \ z \geq 0\}$;

d) $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = x^2 - y^2 \ \wedge \ x^2+y^2 = 6\}$;

e) $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ y^2 = x \ \wedge \ z^2 = y\}$.

Příklad 6. Vypočtěte $\int_\varphi f(x,y)\,\mathrm{d}s$, je-li:

a) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} y^2, \ \varphi : \ \langle 0, 2\pi\rangle \to \mathbb{R}^2, \ \varphi(t) \overset{\text{def.}}{=} (2(t-\sin t), 2(1-\cos t))$;[1]

b) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} \sqrt{x^2+y^2}$ a φ je taková po částech hladká jednoduchá uzavřená křivka, že
$$\langle\varphi\rangle = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 = 6x\}.$$

Příklad 7. Vypočtěte $\int_k x^2 y\,\mathrm{d}s$, kde k je hranicí kruhové výseče
$$\{(r\cos t, r\sin t) \in \mathbb{R}^2 : \ r \in \langle 0, \sqrt{2}\rangle \ \wedge \ t \in \langle 0, \frac{\pi}{4}\rangle\}.$$

Příklad 8. Vypočtěte $\int_\varphi f(x,y,z)\,\mathrm{d}s$, je-li:

a) $f(x,y,z) \overset{\text{def.}}{=} \frac{z^2}{x^2+y^2}, \ \varphi : \ \langle 0, 2\pi\rangle \to \mathbb{R}^3, \ \varphi(t) \overset{\text{def.}}{=} (\cos t, \sin t, t)$;

b) $f(x,y,z) \overset{\text{def.}}{=} 2z - \sqrt{x^2+y^2}, \ \varphi : \ \langle 0, 2\pi\rangle \to \mathbb{R}^3, \ \varphi(t) \overset{\text{def.}}{=} (t\cos t, t\sin t, t)$.

Příklad 9. Vypočtěte $\int_k x^2\,\mathrm{d}s$, je-li:
$$k \overset{\text{def.}}{=} \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+z^2 = 9 \ \wedge \ x+y+z = 0\}.$$

Příklad 10. Vypočtěte délku křivky
$$\varphi : \ \langle 0, 2\pi\rangle \to \mathbb{R}^3, \ \varphi(t) \overset{\text{def.}}{=} (t\cos t, t\sin t, t).$$

Příklad 11. Vypočtěte obsah válcové plochy
$$\kappa \overset{\text{def.}}{=} \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ y^2 = 2x \ \wedge \ 0 \leq z \leq \sqrt{2x-4x^2}\}.$$

Příklad 12. Vypočtěte hmotnost „Vivianiovy křivky“
$$k \overset{\text{def.}}{=} \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+z^2 = 4 \ \wedge \ x^2+y^2 = 2x \ \wedge \ z \geq 0\},$$
je-li (délková) hustota v každém jejím bodě rovna vzdálenosti tohoto bodu od osy x.

---

[1] Poznámka a hádanka pro bystré čtenáře: *Všimněte si, že tento příklad není zcela korektní, a najděte způsob, jak vše napravit.*

Příklad 13. Vypočtěte:

a) $\int_{(\varphi)} (y-1)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$, kde $\varphi:\ \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle \to \mathbb{R}^2,\ \varphi(t) \overset{\text{def.}}{=} (3\cos t, 2\sin t)$;

b) $\int_{(\varphi)} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2-y^2)\,\mathrm{d}y$, kde $\varphi:\ \langle 0, 2\rangle \to \mathbb{R}^2,\ \varphi(t) \overset{\text{def.}}{=} (t, 1-|1-t|)$;

c) $\int_{(\varphi)} x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + (xz-y)\,\mathrm{d}z$, kde $\varphi:\ \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R}^3,\ \varphi(t) \overset{\text{def.}}{=} (t^2, 2t, 4t^3)$.

Příklad 14. Vypočtěte

$$\int_{(k)} \frac{1}{|x|+|y|}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{|x|+|y|}\,\mathrm{d}y,$$

je-li (k) orientovaný obvod čtverce o vrcholech $(1,0),\ (0,1),\ (-1,0)$ a $(0,-1)$, jehož orientace je dána uvedeným pořadím vrcholů.

Příklad 15. Vypočtěte

$$\int_{(k)} y^2\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}y + x^2\,\mathrm{d}z,$$

kde orientace „křivky“

$$(k) \overset{\text{def.}}{=} \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2 = 9\ \wedge\ x^2+y^2 = 3x\ \wedge\ z \ge 0\}$$

je dána pořadím bodů: $(0,0,3),\ (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{\sqrt{2}}),\ (3,0,0)$.

Příklad 16. Vypočtěte $\int_{(k)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s$, kde:

$$f(x,y,z) \overset{\text{def.}}{=} (y^2-z^2, z^2-x^2, x^2-y^2),$$

$$(k) \overset{\text{def.}}{=} \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2 = 1\ \wedge\ x \ge 0\ \wedge\ y \ge 0\ \wedge\ z \ge 0\ \wedge\ xyz = 0\}$$

a orientace (k) je dána pořadím bodů: $(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)$.

Příklad 17. Vypočtěte pomocí Greenovy věty:

a)

$$\int_{(k)} \frac{1}{x}\mathrm{arctg}\,(\frac{y}{x})\,\mathrm{d}x + \frac{2}{y}\mathrm{arctg}\,(\frac{x}{y})\,\mathrm{d}y,$$

kde (k) je kladně orientovaná hranice oblasti

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2:\ (1 < x^2+y^2 < 4) \wedge (x < y < x\sqrt{3})\};$$

b)
$$\int_{(k)} yx^2 \,\mathrm{d}x + xy \,\mathrm{d}y,$$
kde (k) je obvod čtverce o vrcholech $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,0)$, jehož orientace je dána uvedeným pořadím vrcholů;

c) obsah elipsy
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\} \quad (a, b > 0);$$

d)
$$\int_{(\langle\varphi\rangle)} 3 \,\mathrm{d}x + 2 \,\mathrm{d}y,$$
je-li
$$\varphi : \langle 0, 2\pi \rangle \to \mathbb{R}^2, \; \varphi(t) \overset{\text{def.}}{=} (2(t - \sin t), 2(1 - \cos t)),$$
a orientace $(\langle\varphi\rangle)$ je dána pořadím bodů $\varphi(0)$, $\varphi(2\pi)$.[2]

Příklad 18. Vypočtěte:

a) $\int\limits_{(0,\frac{\pi}{4})}^{(\frac{\pi}{4},2)} f(x,y) \,\mathrm{d}s$, kde $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} (2xy - y\sin(xy), x^2 + 2 - x\sin(xy))$;

b) $\int\limits_{(2,0)}^{(1,1)} f(x,y) \,\mathrm{d}s$, kde $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} (2ye^{xy} + 2x + 2y^2, 2xe^{xy} + 4xy + 2y)$;

c) $\int\limits_{(\frac{\pi}{2},1)}^{(2,0)} f(x,y) \,\mathrm{d}s$, kde $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} (3x^2y + y\cos(xy), x^3 + 1 + x\cos(xy))$;

d) $\int\limits_{(2,1)}^{(-1,-2)} f(x,y) \,\mathrm{d}s$, kde $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} (9x^2y + 24xy^2 + 6 + 5y, 3x^3 + 24x^2y + 8 + 5x)$;

e) $\int\limits_{(-1,3,0)}^{(0,1,2)} 3x^2y^2z \,\mathrm{d}x + (2x^3yz - z^2) \,\mathrm{d}y + (x^3y^2 - 2yz + 3z^2) \,\mathrm{d}z$;

f) $\int\limits_{(0,0,1)}^{(1,1,1)} (y^2z^2 + 2z) \,\mathrm{d}x + (2xyz^2 + 2y) \,\mathrm{d}y + (2xy^2z + 2x + 1) \,\mathrm{d}z$;

g) $\int\limits_{(0,0,0)}^{(1,0,0)} (2x + 3y + \sin(z^2)) \,\mathrm{d}x + (2x) \,\mathrm{d}y + (2xz\cos(z^2)) \,\mathrm{d}z$.

---

[2] *Nápověda:* doplňte (a šikovně) „křivku“ $\langle\varphi\rangle$ na „uzavřenou křivku“.

Příklad 19. Vypočtěte $\iint_\psi f(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma$, je-li:

a)

$$f(x,y,z) \overset{\text{def.}}{=} x+y+z,$$
$$D\psi = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle,\ \ \psi(u,v) \overset{\text{def.}}{=} (1,u,v);$$

b)

$$f(x,y,z) \overset{\text{def.}}{=} z(x^2+y^2),$$
$$D\psi = \langle 0,2\pi\rangle \times \langle -\frac{\pi}{2},0\rangle,\ \ \psi(u,v) \overset{\text{def.}}{=} (\cos u\cos v, \sin u\cos v, 1+\sin v).$$

Příklad 20. Vypočtěte $\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma$, kde

a)

$$f(x,y,z) \overset{\text{def.}}{=} z^2,$$
$$S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ z = xy \ \wedge\ x^2+y^2 \le 1\};$$

b)

$$f(x,y,z) \overset{\text{def.}}{=} xy,$$
$$S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2 = 4z \ \wedge\ x\ge 0 \ \wedge\ y \ge 0 \ \wedge\ z \le 1\};$$

c)

$$f(x,y,z) \overset{\text{def.}}{=} xy+yz+zx,$$
$$S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ z = \sqrt{x^2+y^2} \ \wedge\ x^2+y^2 \le 2x\};$$

d)

$$f(x,y,z) \overset{\text{def.}}{=} xyz,$$
$$S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2 = z^2 \ \wedge\ x\ge 0 \ \wedge\ y \ge 0 \ \wedge\ 0 \le z \le 1\};$$

e)

$$f(x,y,z) \overset{\text{def.}}{=} z,$$
$$S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :$$
$$x^2+y^2+z^2 = 9 \ \wedge\ x\ge 0 \ \wedge\ y \ge 0 \ \wedge\ z \ge 0 \ \wedge\ x+y \le 3\};$$

f)

$$f(x,y,z) \overset{\text{def.}}{=} \frac{1}{(1+x+y)^2},$$
S je povrch čtyřstěnu s vrcholy $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, a $(0,0,1)$;

g)

$$f(x,y,z) \overset{\text{def.}}{=} x^2 + y^2 + z,$$
$$S \text{ je hranice množiny } \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \; \wedge \; z \geq 0\}.$$

Příklad 21. Vypočtěte pomocí plošného integrálu obsah plochy S, je-li:

a) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; (x-8)^2 + (y-7)^2 + (6-z)^2 = 25\}$;

b) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; z = \frac{1}{2}(x^2+y^2) \; \wedge \; x^2 + y^2 \leq 1\}$;

c) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 = 100 \; \wedge \; -8 \leq z \leq 6\}$;

d) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 = 4 \; \wedge \; x^2 + y^2 \leq 2x \; \wedge \; z \geq 0\}$.

Příklad 22. Určete souřadnice těžiště plochy:

a)

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 = 36 \; \wedge \; z \geq 0\},$$

je-li její (plošná) hustota popsaná funkcí $h(x,y,z) \overset{\text{def.}}{=} \sqrt{x^2+y^2}$;

b)

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; z^2 = x^2 + y^2 \; \wedge \; 0 \leq z \leq 1\},$$

je-li její (plošná) hustota v každém jejím bodě rovna vzdálenosti tohoto bodu od osy z.

Příklad 23. Vypočtěte $\iint_{(\psi)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma$, je-li:

a)

$$f(x,y,z) \overset{\text{def.}}{=} (0, 0, x^2 + y^2),$$
$$D\psi = \langle 1, 2\rangle \times \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle, \;\; \psi(r,t) \overset{\text{def.}}{=} (r\cos t, r\sin t, 0);$$

b)

$$f(x,y,z) \overset{\text{def.}}{=} (-x^2 z, y, 2xy),$$
$$D\psi = \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle, \;\; \psi(u,v) \overset{\text{def.}}{=} (\cos u \cos v, 2\sin u \cos v, \sin v).$$

Příklad 24. Vypočtěte plošné integrály 2. druhu:

a)

$$\iint_{(L)} (2y - z, 6z - 2x, 3x - y) \, \mathrm{d}\sigma,$$

kde plocha

$$L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 2x + y + 2z = 6 \ \wedge \ x \geq 0 \ \wedge \ y \geq 0 \ \wedge \ z \geq 0\}$$

je orientovaná vektorovým polem $n(x, y, z) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{3}(2, 1, 2)$;

b)

$$\iint_{(L)} (x, y, xyz) \, \mathrm{d}\sigma,$$

kde plocha

$$L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = xy \ \wedge \ x^2 + y^2 \leq 5\}$$

je orientovaná pomocí normálových vektorů „svírajících“ s vektorem $(0, 0, 1)$ ostrý úhel;

c)

$$\iint_{(L)} (0, 0, x^2 y^2 z) \, \mathrm{d}\sigma,$$

kde plocha

$$L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \ \wedge \ z \leq 0\}$$

je orientovaná pomocí normálových vektorů „svírajících“ s vektorem $(0, 0, 1)$ ostrý úhel;

d)

$$\iint_{(L)} (x, y, z) \, \mathrm{d}\sigma,$$

kde L je záporně orientovaný povrch kužele

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \leq z^2 \ \wedge \ 0 \leq z \leq 1\}.$$

Příklad 25. Vypočtěte pomocí Gauss-Ostrogradského věty:

a)

$$\iint_{(L)} (x^3 - yz, y^3 - zx, z^3 - xy) \, \mathrm{d}\sigma,$$

kde L je kladně orientovaný povrch koule

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 18z\};$$

b)

$$\iint_{(L)} (x-y+z, y-z+x, z-y+x)\ \mathrm{d}\sigma,$$

kde L je záporně orientovaný povrch osmistěnu

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ |x|+|y|+|z| \leq 3\};$$

c) tok vektorového pole

$$f(x,y,z) \overset{\text{def.}}{=} (x^2, y^2, z^2)$$

kladně orientovanou kulovou plochou se středem v bodě $(1,1,1)$ a poloměrem 1;

d) objem tělesa ohraničeného plochou ψ,[3] kde

$$D\psi = \langle 0, 2\pi\rangle \times \langle 0, 2\pi\rangle,$$
$$\psi(u,v) \overset{\text{def.}}{=} \big((a+b\cos v)\cos u, (a+b\cos v)\sin u, b\sin v\big)$$
$$(0 < b < a).$$

Příklad 26. Vypočtěte pomocí Stokesovy věty:

a)

$$\int_{(k)} z\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}z,$$

kde

$$k = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2 = 4\ \wedge\ \frac{x}{2} + \frac{z}{3} = 1\}$$

a orientace k je daná pořadím bodů

$$(2,0,0),\ (0,2,3),\ (-2,0,6);$$

b)

$$\int_{(\varphi)} -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + 0\,\mathrm{d}z,$$

kde

$$D\varphi = \langle 0, 2\pi\rangle,\ \varphi(t) \overset{\text{def.}}{=} (\sin t, \cos t, 0);$$

---

[3] Jedná se o tzv. `anuloid`.

c)

$$\int_{(\varphi)} x\,\mathrm{d}x + (x+y)\,\mathrm{d}y + (x+y+z)\,\mathrm{d}z,$$

kde

$$D\varphi = \langle 0, 2\pi\rangle,\ \ \varphi(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \bigl(3\cos t, 3\sin t, 3(\cos t + \sin t)\bigr);$$

d)

$$\int_{(k)} y^2\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}y + x^2\,\mathrm{d}z,$$

kde k je obvod trojúhelníku o vrcholech

$$(3,0,0),\ \ (0,0,3),\ \ (0,3,0),$$

jehož orientace je daná uvedeným pořadím vrcholů.

Příklad 27. Najděte všechna vlastní čísla a všechny jim odpovídající vlastní vektory daných matic:

$$\begin{pmatrix} 2, & 1 \\ -5, & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 2 \\ -5, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, & -2 \\ 4, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & -1 \\ -1, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & -1 \\ 1, & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 5 \\ 2, & 4 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 2, & 1, & -2 \\ -1, & 0, & 0 \\ 1, & 1, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 2, & 1, & -2 \\ 3, & 2, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3, & 0, & 2 \\ 1, & -1, & 0 \\ -2, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, & -1, & 0 \\ 6, & -3, & 2 \\ 8, & -6, & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 1, & 0 \\ 2, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 28. Najděte všechna řešení (na $\mathbb{R}$) soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$y' = \mathbb{A}y,$$

kde za matici $\mathbb{A}$ postupně dosazujte matice z Příkladu 27.

Příklad 29.
Najděte všechna řešení (na $\mathbb{R}$) soustavy lineárních diferenciálních rovnic:

a) $y' = \begin{pmatrix} 2, & -1 \\ 3, & -2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x \\ x \end{pmatrix};$

b) $y' = \begin{pmatrix} 1, & \sqrt{3} \\ \sqrt{3}, & -1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x \\ \sqrt{3}\,\mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix};$

c) $y' = \begin{pmatrix} 2, & -5 \\ 1, & -2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} -\cos x \\ \sin x \end{pmatrix};$

d) $y' = \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 4, & -2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2x} \\ -2\,\mathrm{e}^x \end{pmatrix};$

e) $y' = \begin{pmatrix} 4, & -2 \\ 8, & -4 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} x^{-3} \\ -x^{-2} \end{pmatrix}$ (zde hledejte řešení jen na $\mathbb{R}^+$);

f) $y' = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4}, & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4}, & -\frac{5}{4} \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 2x \\ \mathrm{e}^x \end{pmatrix};$

g) $y' = \begin{pmatrix} 2, & -1 \\ 3, & -2 \end{pmatrix} y + \mathrm{e}^x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix};$

h) $y' = \begin{pmatrix} -3, & \sqrt{2} \\ \sqrt{2}, & -2 \end{pmatrix} y + \mathrm{e}^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix};$

i) $y' = \begin{pmatrix} 2, & -5 \\ 1, & -2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos x \end{pmatrix}$;

j) $y' = \begin{pmatrix} 2, & 3 \\ 3, & 2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 8\,\mathrm{e}^x \\ 5x \end{pmatrix}$;

k) $y' = \begin{pmatrix} -2, & 2 \\ 3, & -1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$;

l) $y' = \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ -2, & -1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} -\cos x \\ \sin x + \cos x \end{pmatrix}$.

Příklad 30.
Najděte řešení Cauchyovy úlohy:

a) $y' = \begin{pmatrix} 4, & 5 \\ -4, & -4 \end{pmatrix} y, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$;

b) $y' = \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ -2, & 4 \end{pmatrix} y, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$;

c) $y' = \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ -2, & -1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} -\cos x \\ \sin x + \cos x \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$;

d) $y' = \begin{pmatrix} 1, & -1 \\ 2, & -1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos x} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

e) $y' = \begin{pmatrix} 2, & 1, & -2 \\ -1, & 0, & 0 \\ 1, & 1 & -1 \end{pmatrix} y, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$;

f) $y' = \begin{pmatrix} 2, & 1, & 0 \\ 0, & 2, & 4 \\ 1, & 0 & -1 \end{pmatrix} y, \quad y(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$;

g) $y' = \begin{pmatrix} 2, & 1, & -2 \\ -1, & 0, & 0 \\ 1, & 1 & -1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 2 - x \\ 1 \\ 1 - x \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Příklad 31. Rozhodněte, které z následujících řad jsou `absolutně konvergentní`, které `konvergentní` a které `divergentní`:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$,

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n$, č) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}$,

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{2n+1}{3n-1}\right)^n$, ď) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)} \cdot \frac{1}{4^n}$,

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n-\ln n}$, f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{10^n}{n!}$,

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n+1}$, h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n^2}$,

ch) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$, i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$,

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$, k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sin\frac{1}{2\sqrt{n}}$,

l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$, m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^3}$,

n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!(n+3)!3^n}{(2n)!}$, ň) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left((n+\frac{1}{n})\pi\right)$,

o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{1}{n}$, p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$,

q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{3^n}$, r) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\frac{\pi}{2^n}$,

ř) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{e})^n n!}{n^n}$, s) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{\sqrt{2^n}}$,

š) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+7}{3n-1999}\right)^n$, t) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, ť) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$, u) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$,

v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\left(3+\frac{1}{n}\right)^{n}}$, w) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}} \cos\frac{1}{n^3}$,

x) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\sqrt{n}}\sin\frac{1}{n^2}$, y) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n^5-7n^2+1998}{1999n^5+6n^4-1}$,

z) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2^{n+1}}$, ž) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+7}{3n+2001}\right)^{n}$.

Literatura

[1] J. Bouchala, *Matematická analýza 3 (Diferenciální a integrální počet vektorových funkcí)*, VŠB-TU, Ostrava, 2001.

[2] J. Bouchala, *Číselné řady*, www.am.vsb.cz/bouchala, 2001.

[3] J. Eliaš, J. Horváth, J. Kajan, *Zbierka úloh z vyššej matematiky (3. časť)*, Alfa, Bratislava, 1967.

[4] J. Eliaš, J. Horváth, J. Kajan, R. Šulka, *Zbierka úloh z vyššej matematiky (4. časť)*, Alfa, Bratislava, 1970.

[5] J. Charvát, M. Hála, V. Kelar, Z. Šibrava, *Příklady k Matematice II*, ČVUT, Praha, 1992.

[6] K. Rektorys a spol., *Přehled užité matematiky I a II*, Prometheus, Praha, 1995.