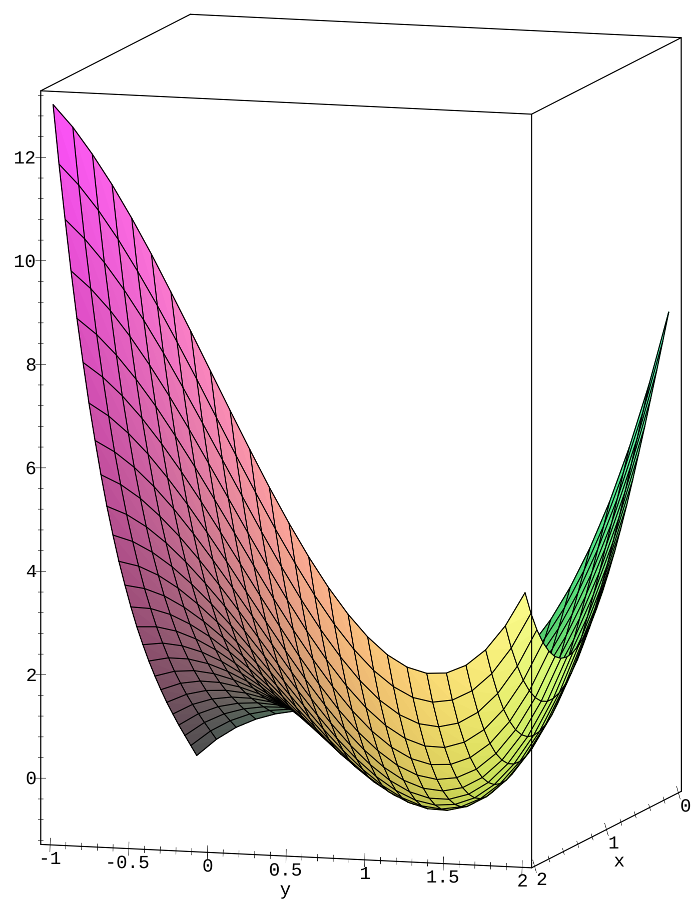
SBÍRKA PŘÍKLADŮ Z MATEMATICKÉ ANALÝZY 2

JIŘÍ BOUCHALA

Katedra aplikované matematiky, VŠB–TU Ostrava

jiri.bouchala@vsb.cz

www.am.vsb.cz/bouchala



Předmluva

Tato sbírka doplňuje přednášky z *Matematické analýzy II.* o příklady vhodné k přemýšlení a k procvičování probírané látky.

Tento text není ukončen. Průběžně ho měním a doplňuji. Prosím proto čtenáře o shovívavost a sdělení všech připomínek.

23. února 2000
Jiří Bouchala

Příklad 1.
Buď
$$M \stackrel{\text{def.}}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x^2+y^2 < 1\} \cup \{(1+\tfrac{1}{k}, 3-\tfrac{2}{k}) \in \mathbb{R}^2 :\ k \in \mathbb{N}\}.$$
Určete $\mathrm{int}M$, $\mathrm{ext}M$, $\overline{M}$, ∂M a množinu všech hromadných bodů množiny M.

Příklad 2.
Buď (P, ϱ) metrický prostor a buď $M \subset P$. Dokažte následující tvrzení:

a) pro každé $x \in P$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ je $U(x,\varepsilon)$ otevřená množina;

b) M je otevřená množina $\iff M = \mathrm{int}M \iff M \cap \partial M = \emptyset$;

c) M je uzavřená množina $\iff M = \overline{M} \iff \partial M \subset M$;

d) M je uzavřená množina $\iff \left[\left. \begin{array}{l} \forall k \in \mathbb{N}:\ x_k \in M \\ \lim x_k = x \in P \end{array} \right\} \Rightarrow x \in M \right]$;

e) $x \in P$ je hromadným bodem množiny $M \iff$
$\iff$ existuje posl. (x_k) v $M \setminus \{x\}$ taková, že $\lim x_k = x$;

f) $[\forall k \in \mathbb{N}:\ M_k$ je otevřená množina $] \Longrightarrow \bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k$ je otevřená množina
$\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k \stackrel{\text{def.}}{=} \{x \in P:\ \text{existuje } k \in \mathbb{N},\ \text{pro které je } x \in M_k\} \right)$;

g) $[\forall k \in \mathbb{N}:\ N_k$ je uzavřená množina $] \Longrightarrow \bigcap_{k \in \mathbb{N}} N_k$ je uzavřená množina
$\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} N_k \stackrel{\text{def.}}{=} \{x \in P:\ x \in N_k \text{ pro každé } k \in \mathbb{N}\} \right)$;

h) obecně neplatí ani jedno z tvrzení:

$[\forall k \in \mathbb{N}:\ M_k$ je otevřená množina $] \Longrightarrow \bigcap_{k \in \mathbb{N}} M_k$ je otevřená množina;

$[\forall k \in \mathbb{N}:\ N_k$ je uzavřená množina $] \Longrightarrow \bigcup_{k \in \mathbb{N}} N_k$ je uzavřená množina.

(Návod: najděte (např. pro $P = \mathbb{R}$) vhodné protipříklady.)

Příklad 3.
Určete a v $\mathbb{R}^2$ znázorněte definiční obor funkce f dané předpisem:

a) $f(x,y) \stackrel{\text{def.}}{=} \sqrt{9-x^2-y^2} - \sqrt{x^2-y^2-1}$;

b) $f(x,y) \stackrel{\text{def.}}{=} \ln \sqrt{1-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{9}y^2}$;

c) $f(x,y) \stackrel{\text{def.}}{=} \sqrt{x^2-1} + \sqrt{1-y^2}$;

d) $f(x,y) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{\sqrt{y-\sqrt{x}}}$;

e) $f(x,y) \stackrel{\text{def.}}{=} \sqrt{x^2-y^2}\cdot\ln(x\cdot y)$;

f) $f(x,y) \stackrel{\text{def.}}{=} \arcsin\left(\frac{x}{y^2}\right)+\arcsin(1-y)$;

g) $f(x,y) \stackrel{\text{def.}}{=} \arcsin\left(\frac{x-1}{y}\right)$;

h) $f(x,y) \stackrel{\text{def.}}{=} \sqrt{\ln(2\sin(x+y))}$;

i) $f(x,y) \stackrel{\text{def.}}{=} \ln\frac{x^2+y^2-2y}{x^2+y^2+2y}$;

k) $f(x,y) \stackrel{\text{def.}}{=} \ln(y\cdot\ln(x-y))$.

Příklad 4.
Znázorněte (v $\mathbb{R}^3$) graf funkce f definované předpisem:

a) $f(x,y) \stackrel{\text{def.}}{=} 1-|x|-|y|$;

b) $f(x,y) \stackrel{\text{def.}}{=} 4-x^2-y^2$;

c) $f(x,y) \stackrel{\text{def.}}{=} 4-x^2$;

d) $f(x,y) \stackrel{\text{def.}}{=} 2x-3y+1$.

Příklad 5.
Určete a v $\mathbb{R}^2$ znázorněte vrstevnice funkce f definované předpisem:

a) $f(x,y) \stackrel{\text{def.}}{=} 1-|x|-|y|$;

b) $f(x,y) \stackrel{\text{def.}}{=} 1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}$;

c) $f(x,y) \stackrel{\text{def.}}{=} \sin(x-y)$;

d) $f(x,y) \stackrel{\text{def.}}{=} \min\{x^2,\ y\}$;

e) $f(x,y) \stackrel{\text{def.}}{=} (3x+2y)-\sqrt{9x^2+12xy+4y^2}$;

f) $f(x,y) \stackrel{\text{def.}}{=} 2-3y^2$.

Příklad 6.
Rozhodněte, zda daná limita existuje, a pokud ano, spočtěte ji:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,4)} \sqrt{2x+y}$;

b) $\lim\limits_{\substack{(x,y,z)\to(1,1,2)\\ (x,y,z)\in\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ z>x+y\}}} \left(\frac{1}{x+y-z}\right)$;

c) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y=k\cdot x\}}} \left(\frac{x^2y^2}{x^4+y^4}\right),\ k\in\mathbb{R}$;

d) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,1)\\ (x,y)\in Df}} f(x,y),\ f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} \arcsin\left(\frac{1}{x-y}\right)$;

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left((x^2+y^2)\cdot\sin\frac{1}{xy}\right)$;

f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$.

Příklad 7.
Rozhodněte, zda je funkce f spojitá v Df; funkce f je definovaná předpisem:

a) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} \operatorname{sgn}(xy)$;

b) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} \operatorname{sgn}\frac{x^3y^3}{xy}$;

c) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} \begin{cases} \frac{x^3y}{x^6+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0); \end{cases}$

d) $f(x,y,z) \overset{\text{def.}}{=} \begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{1}{x^2+y^2+z^2}}, & (x,y,z)\neq(0,0,0),\\ 1, & (x,y,z)=(0,0,0). \end{cases}$

Příklad 8.
Rozhodněte, zda existují (první) parciální derivace funkce f v bodě c, a pokud ano, spočtěte je:

a) $f(x,y,z) \overset{\text{def.}}{=} 2x^3y-4xy^2+2x-2000,\ c=(1,-2,5)$;

b) $f(x,y,z) \overset{\text{def.}}{=} x^2\cdot\operatorname{sgn}(yz),\ c=(1,3,0)$.

Příklad 9.
Vypočtěte parciální derivace funkce f podle všech proměnných:

a) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} \ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$;

b) $f(x,y,z) \overset{\text{def.}}{=} x^y+\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{z^2}\right)$.

Příklad 10.
Vypočtěte všechny parciální derivace druhého řádu funkce f definované předpisem:

a) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} xy^5 + \sin(x \cdot \cos(y)) - x \cdot \mathrm{e}^{x+y^2}$;

b) $f(x,y,z) \overset{\text{def.}}{=} x^{\frac{y}{z}}$;

c) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} |x|$;

d) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} \frac{xy^2}{x^2-y}$.

Příklad 11.
Vypočtěte $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$, je-li:

a) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} \sin(xy^3) - \cos(3y+\pi)$;

b) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} \begin{cases} x \cdot y \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0; \end{cases}$

c) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} \begin{cases} x^2 \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) - y^2 \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right), & x \cdot y \neq 0, \\ 0, & x \cdot y = 0; \end{cases}$

d) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} \cdot \sin(x^2-y^2), & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Příklad 12.
Určete diferenciál funkce f v bodě c, je-li:

a) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} \ln \sqrt{2x^2-y^2},\ c = (3, -\sqrt{2})$;

b) $f(x,y,z) \overset{\text{def.}}{=} x^{yz},\ c = (1,-2,1)$;

c) $f(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \overset{\text{def.}}{=} \sin(\alpha+\beta) \cdot \cos(\gamma-\delta),\ c = (0,0,0,0)$;

d) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right),\ c = (x,y) \in Df$.

Příklad 13.
Dokažte, že funkce f definovaná předpisem $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} \sqrt{|xy|}$ je spojitá v bodě $(0,0)$, existují parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, ale přesto f není diferencovatelná v bodě $(0,0)$.

Příklad 14.

a) Najděte rovnice všech tečných rovin sestrojených k elipsoidu

$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + 2y^2 + z^2 = 1\}$, které jsou rovnoběžné s rovinou $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; 4x + 2y + z = 0\}$.

b) Najděte rovnice všech tečných rovin plochy $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; z = 2x^2 - y^2\}$, které jsou rovnoběžné s rovinou $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; 8x - 6y - z - 15 = 0\}$.

Příklad 15.
Určete délku úsečky, kterou na přímce $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x + 1 = 0 \; \wedge \; y - 2 = 0\}$ vytíná plocha $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; z = x^3 - y^2 + 2x - 3\}$ a tečná rovina k této ploše sestrojená v bodě $(1, 2, -4)$.

Příklad 16.
Dokažte, že funkce f definovaná předpisem

$$f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} \begin{cases} (x^2 + y^2) \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

má v nějakém okolí bodu $(0,0)$ parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ a že tyto parciální derivace nejsou spojité v $(0,0)$. Dokažte, že f je přesto diferencovatelná v bodě $(0,0)$.

Příklad 17.
Z přednášek víte, že pro $f : \; \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $c \in \mathbb{R}^n$ platí následující implikace:

f má v c spojité všechny parciální derivace prvního řádu $\Longrightarrow$ f je spojitá v bodě c;

f má v c spojité všechny parciální derivace prvního řádu $\Longrightarrow$ f je diferencovatelná v c;

*f má v c spojité všechny parciální derivace prvního řádu $\Longrightarrow$
$\Longrightarrow$ existují všechny parciální derivace prvního řádu f v c;*

f je diferencovatelná v c $\Longrightarrow$ existují všechny parciální derivace prvního řádu f v c;

f je diferencovatelná v c $\Longrightarrow$ f je spojitá v c.

Dokažte (nalezením vhodného protipříkladu), že (obecně) nelze žádnou z implikací obrátit (nechceme-li obdržet nepravdivé tvrzení).

Příklad 18.
Vypočtěte $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}(c)$, je-li:

a) $f(x,y,z) \overset{\text{def.}}{=} xyz, \; c = (5,1,2), \; u = \frac{1}{\|(4,0,-3)\|} \cdot (4,0,-3)$;

b) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$, $c = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $u = (u_1, u_2)$ je (jednotkový) směrový vektor tečny sestrojené ke kružnici $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2-2x = 0\}$ v bodě c takový, že $u_2 > 0$;

c) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} \ln(x^2+y^2)$, $c = (c_1, c_2) \neq (0,0)$, $u = (u_1, u_2)$ je (jednotkový) směrový vektor tečny sestrojené k vrstevnici $v_f(f(c))$.

Příklad 19.
Definujme funkci f předpisem $f(x,y,z) \overset{\text{def.}}{=} \sin(2x) + \cos y + 1$.
Určete pro jaká $c \in \mathbb{R}^3$ a $u \in \mathbb{R}^3$ je $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}(c)$ největší (resp. nejmenší).

Příklad 20.
Vypočtěte všechny parciální derivace prvního řádu funkce h definované předpisem:

a) $h(u,v) \overset{\text{def.}}{=} f(g_1(u,v), g_2(u,v))$, kde
$f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} \frac{x^3}{y}$, $g_1(u,v) \overset{\text{def.}}{=} u - 3v$, $g_2(u,v) \overset{\text{def.}}{=} 3u + v$;

b) $h(u,v,w) \overset{\text{def.}}{=} f(g(u,v,w))$, kde $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \sin(x^2)$, $g(u,v,w) \overset{\text{def.}}{=} \frac{u+v}{w}$.

Příklad 21.
Vypočtěte $\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial z}(x,y,z)$, je-li funkce h definovaná předpisem:

$$h(x,y,z) \overset{\text{def.}}{=} f(g_1(x,y,z), g_2(x,y,z));$$
$$f(u,v) \overset{\text{def.}}{=} 2u + 3uv^2,\ g_1(x,y,z) \overset{\text{def.}}{=} x + y^2 + z^3,\ g_2(x,y,z) \overset{\text{def.}}{=} x^3y^2z.$$

Příklad 22.
Určete $\mathrm{d}^k f_c$, je-li:

a) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} \sin(2x+y)$, $c = (0,\pi)$, $k = 2$;

b) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} \sin(2x+y)$, $c = (0,\pi)$, $k = 3$;

c) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} y \cdot \ln x$, $c = (1,3)$, $k = 3$;

d) $f(x,y,z) \overset{\text{def.}}{=} xyz$, $c = (-1,0,1)$, $k = 3$.

Příklad 23.
Najděte Taylorovu polynomickou funkci m – tého řádu funkce f v bodě c, je-li:

a) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} \ln(1+x) \cdot \ln(1+y)$, $c = (0,0)$, $m = 2$;

b) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} x^y$, $c = (1,1)$, $m = 3$.

Příklad 24.
Rozviňte podle mocnin $(x+1)$ a $(y-2)$ polynomickou funkci f, která je definovaná předpisem $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} 2x^2 - 3xy + y^2 + 4x - 3y + 5$

Příklad 25.
Funkce g (o rovnici $y = g(x)$) je definovaná implicitně rovnicí $f(x,y) = 0$ a podmínkou $g(a) = b$. Určete $g'(a)$, $g''(a)$ a $g'''(a)$, je-li:

a) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} x - y + 4\sin y,\ (a,b) = (0,0)$,

b) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} y - x - \ln y,\ (a,b) = (\mathrm{e}-1, \mathrm{e})$,

c) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} \mathrm{e}^{x-y} - y + x^2 - 1,\ (a,b) = (1,1)$.

Příklad 26.
Určete směrnice tečen sestrojených ke křivce $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y^2 - xy = 4\}$ v jejích průsečících s přímkou $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x = 3\}$.

Příklad 27.
Funkce g (o rovnici $y = g(x)$) je definovaná implicitně rovnicí
$x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$ a podmínkou $g(1) = 1$. Zjistěte, zda je g ryze konvexní nebo ryze konkávní na nějakém okolí bodu 1.

Příklad 28.
Pomocí věty o implicitní funkci najděte rovnici tečné roviny plochy

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} - 1 = 0\}$$

sestrojené v jejím bodě $(1,-2,3)$.

Příklad 29.
Funkce g (o rovnici $z = g(x,y)$) je definovaná implicitně rovnicí
$x \cdot \cos y + y \cdot \cos z + z \cos x - 1 = 0$ a podmínkou $g(0,0) = 1$.
Určete $\mathrm{d}^2 g_c$, je-li $c = (0,0)$.

Příklad 30.
Najděte všechny lokální extrémy funkce f definované předpisem:

a) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} (x+1)^2 + y^2$,

b) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} (x-2y+1)^4$,

c) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} (x-2y+1)^3$,

d) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$,

e) $f(x,y,z) \overset{\text{def.}}{=} x^2 + (2y-1)^2 + (z+2)^2$,

f) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$,

g) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} 3x^2 + y^3 - 6xy - 9y + 2$,

h) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} x \cdot y \cdot \ln(x^2+y^2)$,

i) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} 1 - \sqrt{x^2+y^2}$,

j) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} (x^2+y^2) \cdot \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$.

Příklad 31.
Najděte všechny lokální extrémy funkce f vzhledem k množině M, je-li:

a) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} x^2 + 6y^2,\ M \overset{\text{def.}}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x - 3y = 1\}$,

b) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} -y + 4,\ M \overset{\text{def.}}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ (x-2)^2 + (y-2)^2 = 1\}$,

c) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} x + y,\ M \overset{\text{def.}}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{\alpha^2}\},\ (\alpha \in \mathbb{R}^+)$,

d) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} xy,\ M \overset{\text{def.}}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y = \ln x\}$,

e) $f(x,y,z) \overset{\text{def.}}{=} x - 2y + 2z,\ M \overset{\text{def.}}{=} \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Příklad 32.
Najděte globální extrémy funkce f na množině M, je-li:

a) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} x^3 + y^3 - 3xy,\ M \overset{\text{def.}}{=} \langle 0,2 \rangle \times \langle -1,2 \rangle$,

b) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} x^2 \cdot y,\ M \overset{\text{def.}}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 1\}$,

c) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} xy,\ M \overset{\text{def.}}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 2\}$,

d) $f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} x^2 - y^2 + 4,\ M \overset{\text{def.}}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 1\}$,

e) $f(x,y) \stackrel{\text{def.}}{=} x^2 + 2xy - 4x + 8y,\ M \stackrel{\text{def.}}{=} \langle 0,1\rangle \times \langle 0,2\rangle,$

f) $f(x,y,z) \stackrel{\text{def.}}{=} (x-1)^2 + (y-2)^5 + z^4,\ M \stackrel{\text{def.}}{=} \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ y \geq 2\}.$

Příklad 33.
Mezi všemi kvádry s tělesovou úhlopříčkou délky $2 \cdot \sqrt{3}$ vyberte ten, který má:

a) nejmenší objem,

b) největší objem.

Příklad 34.
Kladné číslo ϑ napište jako součin čtyř kladných činitelů tak, aby jejich součet byl:

a) minimální,

b) maximální.

Příklad 35.
Řešte metodou separace proměnných diferenciální rovnici:

a) $y' = x \cdot (1-y),$

b) $y' = \sqrt{1-y^2},$

c) $y \cdot y' + x - \frac{1}{x} = 0,$

d) $(1+\mathrm{e}^x) \cdot y \cdot y' = \mathrm{e}^x,$

e) $1 - 2x - y^2 \cdot y' = 0,$

f) $y' = -\frac{x \cdot \sqrt{1+y^2}}{y \cdot \sqrt{1+x^2}}.$

Příklad 36.
Najděte řešení Cauchyovy úlohy:

a) $\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{y \cdot y'}{\sqrt{1-y^2}} = 0, \\ y(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases}$

b) $\begin{cases} y \cdot \sqrt{1+x^2} - x \cdot y + (1+x^2) \cdot y' = 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

Příklad 37.
Najděte obecné řešení diferenciální rovnice:

a) $x \cdot y' - y = 0$,

b) $y' - y = x^2$,

c) $y' + x \cdot y = x$,

d) $y' - y \cdot \operatorname{tg} x = \cos x$.

Příklad 38.
Najděte maximální řešení Cauchyovy úlohy:

a) $\begin{cases} y' + \frac{y}{x} = 3x, \\ y(1) = 1; \end{cases}$

b) $\begin{cases} y' - y \cdot \operatorname{cotg} x = \mathrm{e}^x \cdot \sin x, \\ y(\frac{\pi}{2}) = 0; \end{cases}$

c) $\begin{cases} y' - \frac{2}{x+1} \cdot y = (x+1)^3, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

Příklad 39.
Řešte Bernoulliovu diferenciální rovnici:

a) $y' + \frac{y}{2} = \frac{x-1}{2} \cdot y^3$,

b) $y' + 4xy = 2 \cdot x \cdot \mathrm{e}^{-x^2} \cdot \sqrt{y}$,

c) $y' + \frac{y}{x} = y^2 \cdot \frac{\ln x}{x}$,

d) $y' - y \cdot \operatorname{tg} x = y^4 \cdot \cos x$.

Příklad 40.
Najděte řešení Cauchyovy úlohy:

a) $\begin{cases} y' + \frac{y}{x} = y^2 \cdot \ln x, \\ y(1) = \frac{1}{2}; \end{cases}$

b) $\begin{cases} y' - \frac{x \cdot y}{2 \cdot (x^2 - 1)} = \frac{x}{2 \cdot y}, \\ y(2) = 1; \end{cases}$

c) $\begin{cases} xy' - y = \frac{x^2}{y}, \\ y(1) = \mathrm{e}^2. \end{cases}$

Příklad 41.
Zjistěte, zda (a na jaké oblasti) je daná diferenciální rovnice exaktní, a pokud ano, vyřešte ji:

a) $(2x^3 - xy^2) + (2y^3 - x^2y) \cdot y' = 0,$

b) $\mathrm{e}^y + (x \cdot \mathrm{e}^y - 2y) \cdot y' = 0,$

c) $\frac{1}{y} + \frac{y^2 - x}{y^2} \cdot y' = 0,$

d) $(6x^5y \cdot \sin x + x^6y \cdot \cos x) + (x^6 \cdot \sin x + 4) \cdot y' = 0,$

e) $(6x^2 + 1) \cdot \mathrm{e}^{3x^2+2y^2} + 4xy \cdot \mathrm{e}^{3x^2+2y^2} \cdot y' = 0,$

f) $(6x^2y^3 + 2x) + (3xy^4 + 2y) \cdot y' = 0.$

Příklad 42.
Najděte řešení Cauchyovy úlohy:

a) $\begin{cases} (x^3 + xy^2) + (x^2y + y^3) \cdot y' = 0, \\ y(3) = -4; \end{cases}$

b) $\begin{cases} -\frac{y}{x^2+y^2} + \frac{x}{x^2+y^2} \cdot y' = 0, \\ y(\pi) = \pi. \end{cases}$

Příklad 43.
Dokažte, že diferenciální rovnice

$$-\frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{x}{x^2 + y^2} \cdot y' = 0$$

není exaktní v $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Příklad 44.
Vyřešte diferenciální rovnici:

$$(x \cdot \sin y + y) + (x^2 \cdot \cos y + x \cdot \ln x) \cdot y' = 0.$$

(Návod: najděte funkci $\mu:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (t. zv. *integrační faktor*) takovou, abyste „po přenásobení dané rovnice“ funkcí $\mu = \mu(x)$ dostali rovnici exaktní.)

Příklad 45.
Najděte obecné řešení diferenciální rovnice:

$$(1 - x^2) \cdot y'' + 2xy' - 2y = 2$$

na intervalu $(-1, 1)$, znáte-li tato dvě řešení příslušné homogenní rovnice:

$$y_1(x) \overset{\text{def.}}{=} x, \quad y_2(x) \overset{\text{def.}}{=} x^2 + 1.$$

Příklad 46.
Najděte obecné řešení lineární diferenciální rovnice:

a) $y'' + 2y' - 3y = 0,$

b) $y'' - 4y' + 4y = 0,$

c) $y'' - 6y' + 10y = 0,$

d) $y''' - y' = 0,$

e) $y^{(4)} + 4y''' + 6y'' + 4y' + y = 0,$

f) $y^{(5)} + 2y''' + y' = 0,$

g) $y'' + 2y' + y = \frac{1}{x} \cdot \mathrm{e}^{-x},$

h) $y''' + y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x},$

i) $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x - 3,$

j) $y'' - 3y' + 2y = 2 \cdot \mathrm{e}^{x} \cdot \cos x,$

k) $y^{(4)} + y''' = \cos(4x),$

l) $y^{(5)} - y''' = x^2 - 1,$

m) $y'' - 4y' + 4y = 2 \cdot (\sin(2x) + x),$

n) $y^{(4)} - y = x \cdot \mathrm{e}^{x} + \cos x.$

Příklad 47.
Najděte řešení Cauchyovy úlohy:

a) $\begin{cases} y'' + 6y' + 34y = 0, \\ y(0) = 2,\ y'(0) = -11; \end{cases}$

b) $\begin{cases} y^{(4)} - y = 0, \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 1,\ y'''(0) = 0; \end{cases}$

c) $\begin{cases} y'' - 5y' + 4y = \mathrm{e}^{2x}, \\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1; \end{cases}$

d) $\begin{cases} y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{-x}, \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3; \end{cases}$

e) $\begin{cases} y'' + 3y' + 7y = \cos x, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2; \end{cases}$

f) $\begin{cases} y''' - 6y'' + 11y' - 6y = \mathrm{e}^{4x}, \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0. \end{cases}$

Příklad 48.
Najděte všechna řešení t. zv. okrajové úlohy:

a) $\begin{cases} y'' + y = \sin x, \\ y(0) = 0,\ y(\pi) = 0; \end{cases}$

b) $\begin{cases} y'' + y = \cos x, \\ y(0) = 0,\ y(\pi) = 0; \end{cases}$

c) $\begin{cases} y'' + \frac{1}{4} \cdot y = \sin x, \\ y(0) = 0,\ y(\pi) = 0; \end{cases}$

b) $\begin{cases} y'' + \frac{1}{4} \cdot y = \cos x, \\ y(0) = 0,\ y(\pi) = 0. \end{cases}$

Příklad 49.
Sestavte diferenciální rovnici, jejíž obecné řešení má tvar:

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3\,\mathrm{e}^{-2x}\sin(2x) + c_4\,\mathrm{e}^{-2x}\cos(2x) + 2\sin x;\ \ c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

Příklad 50.
Vypočtěte pomocí Fubiniovy věty dvojný integrál:

a) $\displaystyle\iint\limits_{\langle 0,2\rangle \times \langle 1,3\rangle} x^3 \cdot y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y;$

b) $\displaystyle\iint\limits_{\langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle} x \cdot \mathrm{e}^{x+y} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y;$

c) $\displaystyle\iint\limits_{\langle 0,1\rangle \times \langle -2,2\rangle} \mathrm{e}^{-x^2} \cdot y^2 \cdot \sin(y^3) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y;$

d) $\displaystyle\iint\limits_{M} x \cdot y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M \stackrel{\text{def.}}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y^2 \leq 2x \ \wedge\ x \leq 2\};$

e) $\displaystyle\iint\limits_{M} \sqrt{1 - x^2 - y^2} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$
kde $M \stackrel{\text{def.}}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 1 \ \wedge\ x \geq 0 \ \wedge\ y \leq 0\};$

f) $\iint\limits_M (2x+y-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,
je-li $M \subset \mathbb{R}^2$ množina ohraničená křivkami: $y=x,\ y=2x,\ x=1$;

g) $\iint\limits_M \frac{y^2}{x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,
je-li $M \subset \mathbb{R}^2$ množina ohraničená křivkami: $xy=1,\ y=\frac{x}{4},\ y=3$;

h) $\iint\limits_M x\cdot y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,
je-li $M \subset \mathbb{R}^2$ množina ohraničená křivkami: $y=2x-x^2,\ y=-x$.

Příklad 51.
Zaměňte pořadí integrace ($f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f\in C(\mathbb{R}^2)$):

a) $\int\limits_1^{\mathrm{e}}\left(\int\limits_0^{\ln x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$;

b) $\int\limits_{-1}^{0}\left(\int\limits_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$;

c) $\int\limits_0^{2}\left(\int\limits_{\frac{x}{2}}^{2x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$.

Příklad 52.
Definujme funkci $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ předpisem:

$$f(x,y) \overset{\text{def.}}{=} \begin{cases} 0, & \text{je-li } x\in\mathbb{Q}, \\ y, & \text{je-li } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$$

Najděte chybu v tvrzení:

$$\iint\limits_{\langle 0,1\rangle\times\langle -1,1\rangle} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^1\left(\int\limits_{-1}^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 0\,\mathrm{d}x = 0.$$

Příklad 53.
Vypočtěte (s danou nápovědou) dvojný integrál:

a) $\iint\limits_M \frac{x}{y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,
kde $M \stackrel{\text{def.}}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \le y \le 2x \ \wedge\ x^2 \le y \le 2x^2\} \setminus \{(0,0)\}$
(*volte substituci:* $x = \frac{u}{v},\ y = \frac{u^2}{v}$);

b) $\iint\limits_M (x+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M \stackrel{\text{def.}}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \le 4y\}$
(*volte substituci:* $x = r \cdot \cos t,\ y = r \cdot \sin t + 2$).

Příklad 54.
Vypočtěte pomocí substituce do polárních souřadnic dvojný integrál:

a) $\iint\limits_M \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,
kde $M \stackrel{\text{def.}}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \frac{1}{2} \le x^2 + y^2 \le 1 \ \wedge\ x \ge 0 \ \wedge y \ge 0\}$;

b) $\iint\limits_M (2 - x - 3y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M \stackrel{\text{def.}}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \le 4\}$;

c) $\iint\limits_M (x+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M \stackrel{\text{def.}}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \le 4y\}$;

d) $\iint\limits_M \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,
kde $M \stackrel{\text{def.}}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \le x^2 + y^2 \le 9 \ \wedge\ \frac{x}{\sqrt{3}} \le y \le \sqrt{3} \cdot x\}$;

e) $\iint\limits_M \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,
kde $M \stackrel{\text{def.}}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \le x^2 + y^2 \le 3x \ \wedge\ \frac{x}{\sqrt{3}} \le y \le 2x\} \setminus \{(0,0)\}$;

f) $\iint\limits_M (x^2 + y^2)^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M \stackrel{\text{def.}}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ (x^2 + y^2)^2 \le 2 \cdot x \cdot y\}$.

Příklad 55.
Vypočtěte pomocí substituce do zobecněných polárních souřadnic dvojný integrál:

a) $\iint\limits_M (9x^2 + 4y^2 + 4)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M \stackrel{\text{def.}}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 1\}$;

b) $\displaystyle\iint\limits_M \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,

kde $M \overset{\text{def.}}{=} \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1 \ \wedge\ x\ge 0 \ \wedge\ y\le \frac{b}{a}\cdot x\}$
$(a,b\in\mathbb{R}^+,\ a\ne b)$;

c) $\displaystyle\iint\limits_M x^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $M \overset{\text{def.}}{=} \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ (x-2)^2+4y^2\le 4\}$.

Příklad 56.
Vypočtěte (t. zv. *Laplaceův)* integrál:

$$\int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x,$$

a to pomocí dvojných integrálů:

a) $\displaystyle\iint\limits_{I_a} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $a\in\mathbb{R}^+$ a $I_a \overset{\text{def.}}{=} \langle 0,a\rangle\times\langle 0,a\rangle$;

b) $\displaystyle\iint\limits_{J_a} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ \iint\limits_{K_a} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ \iint\limits_{L_a} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,

kde $a\in\mathbb{R}^+$, $J_a \overset{\text{def.}}{=} \langle -a,a\rangle\times\langle -a,a\rangle$,

$K_a \overset{\text{def.}}{=} \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2\le a^2\}$,

$L_a \overset{\text{def.}}{=} \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2\le 2a^2\}$.

Příklad 57.
Vypočtěte míru množiny $M\subset\mathbb{R}^2$, je-li:

a) množina M ohraničená křivkami: $x\cdot y=6,\ 3x-y-7=0,\ x=1$;

b) $M \overset{\text{def.}}{=} \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2\le 9 \ \wedge\ x^2+y^2\ge 6y \ \wedge\ x\ge 0 \ \wedge\ y\ge 0\}$;

c) $M \overset{\text{def.}}{=} \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ (x^2+y^2)^2\le 32\cdot x\cdot y\}$;

d) $M \overset{\text{def.}}{=} \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ (x^2+y^2)^2\le 32\cdot(x^2-y^2)\}$

(∂M … t. zv. *Bernoulliova lemniskáta*);

e) množina M ohraničená křivkami: $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{5},\ x+y=5$;

f) množina M ohraničená křivkami:

$$\{(x,0)\in\mathbb{R}^2 :\ x\in\langle 0, 24\cdot\pi\rangle\},$$

$$\{(r\cdot\cos t, r\cdot\sin t)\in\mathbb{R}^2 :\ r=6\cdot\varphi\ \wedge\ \varphi\in\langle 0,4\cdot\pi\rangle\}.$$

Příklad 58.
Vypočtěte pomocí dvojného integrálu objem („válcového“) tělesa T, je-li:

a) $T \overset{\text{def.}}{=} \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2\le r^2\}\ \ (r\in\mathbb{R}^+)$;

b) $T \overset{\text{def.}}{=} \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2\le 36\ \wedge\ x^2+y^2\le 6x\}$
(t. zv. *Vivianiovo těleso*);

c) těleso T ohraničené (v $\mathbb{R}^3$) plochami: $z=x^2,\ y=0,\ y+z=2$.

Příklad 59.
Vypočtěte pomocí dvojného integrálu obsah plochy P, je-li:

a) $P \overset{\text{def.}}{=} \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2=36\ \wedge\ x^2+y^2\le 6x\ \wedge\ z\ge 0\}$
(t. zv. *Vivianiovo okénko*);

b) $P \overset{\text{def.}}{=} \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2=r^2\}\ \ (r\in\mathbb{R}^+)$.

Příklad 60.
Vypočtěte pomocí Fubiniovy věty trojný integrál:

a) $\iiint\limits_J (x+y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde $J \overset{\text{def.}}{=} \langle 0,3\rangle\times\langle 0,2\rangle\times\langle 0,1\rangle$;

b) $\iiint\limits_J y\cdot z^2\cdot\cos x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde $J \overset{\text{def.}}{=} \langle 0,2\pi\rangle\times\langle -1,3\rangle\times\langle 1,2\rangle$;

c) $\iiint\limits_\Omega z\cdot\cos(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ je množina ohraničená plochami:
$y=0,\ z=0,\ z=\sqrt{x},\ x+y=\frac{\pi}{2}$;

d) $\iiint\limits_\Omega z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ je množina ohraničená plochami:
$z^2=\frac{x^2+y^2}{4},\ z=4$;

e) $\iiint\limits_{\Omega} 18 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je množina ohraničená plochami:
$x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ 3x + 6y + 4z = 12;$

f) $\iiint\limits_{\Omega} x^3 \cdot y^2 \cdot z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je množina ohraničená plochami:
$x = 1,\ y = x,\ z = 0,\ z = x \cdot y;$

g) $\iiint\limits_{\Omega} x \cdot y \cdot z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je množina ohraničená plochami:
$y = x^2,\ x = y^2,\ z = 0,\ z = x \cdot y;$

h) $\iiint\limits_{\Omega} \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$,
kde $\Omega \overset{\text{def.}}{=} \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 \le 4 \ \wedge\ x \ge 1 \ \wedge\ z \ge 0\};$

i) $\iiint\limits_{\Omega} z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$,
kde $\Omega \overset{\text{def.}}{=} \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 \le 4 \ \wedge\ x^2 + y^2 \le 3z\};$

j) $\iiint\limits_{\Omega} x^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$,
kde $\Omega \overset{\text{def.}}{=} \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ |x| + |y| + |z| \le 1\}.$

Příklad 61.
Vypočtěte pomocí substituce do sférických souřadnic trojný integrál:

a) $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$,
kde $\Omega \overset{\text{def.}}{=} \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 \le 4\};$

b) $\iiint\limits_{\Omega} z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$,
kde $\Omega \overset{\text{def.}}{=} \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ z \ge x^2 + y^2 \ \wedge\ 0 \le z \le 1\};$

c) $\iiint\limits_{\Omega} z^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$,
kde $\Omega \overset{\text{def.}}{=} \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 \le 9 \ \wedge\ x^2 + y^2 \le 3z^2 \ \wedge\ z \ge 0\};$

d) $\iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$

kde $\Omega \stackrel{\text{def.}}{=} \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ 4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 9\ \wedge\ z \ge 0\}.$

Příklad 62.
Vypočtěte pomocí substituce do zobecněných sférických souřadnic trojný integrál:

a) $\iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$

kde $\Omega \stackrel{\text{def.}}{=} \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} \le 1\};$

b) $\iiint\limits_{\Omega} x \cdot y \cdot z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$

kde $\Omega \stackrel{\text{def.}}{=} \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{49} + z^2 \le 1\ \wedge\ x \ge 0\ \wedge\ y \ge 0\ \wedge\ z \ge 0\};$

c) $\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$

kde $\Omega \stackrel{\text{def.}}{=} \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \le 2z\}.$

Příklad 63.
Vypočtěte pomocí substituce do cylindrických souřadnic trojný integrál:

a) $\iiint\limits_{\Omega} z \cdot \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$

kde $\Omega \stackrel{\text{def.}}{=} \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 \le 2x\ \wedge\ y \ge 0\ \wedge\ 0 \le z \le 3\};$

b) $\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$

kde $\Omega \stackrel{\text{def.}}{=} \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ z \ge x^2 + y^2\ \wedge\ 0 \le z \le 1\};$

c) $\iiint\limits_{\Omega} z \cdot (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$

kde $\Omega \stackrel{\text{def.}}{=} \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 \le 6z\ \wedge\ z \le 6\};$

d) $\iiint\limits_{\Omega} x^2 \cdot y^2 \cdot z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$

kde $\Omega \stackrel{\text{def.}}{=} \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 1\};$

e) $\iiint\limits_{\Omega} z \cdot (x^4 + y^4)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$

kde $\Omega \overset{\text{def.}}{=} \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 \le 1 \ \wedge\ z \ge 0 \ \wedge\ x^2 + y^2 + z^2 \le 4\};$

f) $\iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2) \cdot z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$

kde $\Omega \overset{\text{def.}}{=} \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \le z \le 4 - x^2 - y^2\}.$

Příklad 64.
Vypočtěte míru množiny $M \subset \mathbb{R}^3$, je-li:

a) množina M ohraničená plochami: $(z-2)^2 = \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2},\ z = 0;$

b) množina M (t. zv. *anuloid*) ohraničená plochou:

$(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = b^2 \quad (a, b \in \mathbb{R},\ 0 < b < a);$

c) $M \overset{\text{def.}}{=} \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 \le 4 \ \wedge\ z^2 \ge x^2 + y^2\};$

d) $M \overset{\text{def.}}{=} \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 \le 2z \ \wedge\ x^2 + y^2 \le 2 - z\};$

e) $M \overset{\text{def.}}{=} \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ (x^2 + y^2 + z^2)^2 \le 3 \cdot z \cdot (x^2 + y^2)\};$

f) $M \overset{\text{def.}}{=} \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ (x^2 + y^2 + z^2)^3 \le 8 \cdot x \cdot y \cdot z\};$

g) $M \overset{\text{def.}}{=} \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} \le 1 \ \wedge\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} \le \frac{z^2}{4} \ \wedge\ z \ge 0\}.$

Literatura

[1] J. Charvát, M. Hála, V. Kelar, Z. Šibrava, *Příklady k Matematice II*, ČVUT, Praha, 1992.
[2] J. Eliaš, J. Horváth, J. Kajan, R. Šulka, *Zbierka úloh z vyššej matematiky (4. časť)*, Alfa, Bratislava, 1970.
[3] J. Veselý, *Matematická analýza pro učitele (první díl)*, Matfyzpress, Praha, 1997.
[4] J. Veselý, *Matematická analýza pro učitele (druhý díl)*, Matfyzpress, Praha, 1997.
[5] K. Rektorys a spol., *Přehled užité matematiky I a II*, Prometheus, Praha, 1995.
[6] Z. Došlá, R. Plch, P. Sojka, *Matematická analýza s programem Maple (Diferenciální počet funkcí více proměnných)*, „www.math.muni.cz/~ plch/mapm/“, 1999.