

Základy variačního počtu a některé jeho aplikace

Calculus of variations and some of its applications

Zadání diplomové práce

Student: **Bc. Michaela Bailová**

Studijní program: N2647 Informační a komunikační technologie

Studijní obor: 1103T031 Výpočetní matematika

Téma: **Základy variačního počtu a některé jeho aplikace**
Calculus of variations and some its applications

Zásady pro vypracování:

V závěrečné práci bude rozebrána problematika hledání extrémů funkcionalů. Připomeňme, že funkcionalém rozumíme zobrazení z normovaného lineárního prostoru X do \mathbb{R} . Pokud bude mít X konečnou dimenzi, pak funkcional bude odpovídat funkci více proměnných. V práci nás však bude zajímat případ, kdy X má dimenzi nekonečnou. Ukážeme základní principy variačního počtu (Eulerova nutná podmínka, du Bois-Reymondovo lemma, apod.). Dále bude pozornost věnována klasickým úlohám variačního počtu (úloha o brachystochroně, tvar zavěšeného řetězu, rotační těleso s minimálním povrchem...).

Práce bude složena z následujících částí:

- 1) úvod, obecná tvrzení z funkcionální analýzy
- 2) formulace problému variačního počtu, metody řešení
- 3) konkrétní úlohy (např. úloha o brachystochroně, ...)
- 4) fyzikální pokusy týkající se některých řešených úloh

Seznam doporučené odborné literatury:

L. E. Elsgolc: Variační počet .

Formální náležitosti a rozsah diplomové práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí diplomové práce: **Mgr. Petr Vodstrčil, Ph.D.**

Datum zadání: 01.09.2014

Datum odevzdání: 07.05.2015



doc. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D.
vedoucí katedry



prof. RNDr. Václav Snášel, CSc.
děkan fakulty

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně. Uvedla jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpala.

V Ostravě 6. května 2015

.....*Bálová*.....

Na tomto místě bych ráda poděkovala vedoucímu práce, Mgr. Petru Vodstrčilovi, Ph.D., za veškerý čas věnovaný konzultacím, spoustu cenných rad a nápadů a značnou dávku trpělivosti. Velký dík rovněž patří mé rodině a blízkým, kteří mě podporovali během psaní práce, zejména pak mému otci za pomoc a technické zázemí při realizaci praktických pokusů.

Abstrakt

V rámci diplomové práce nejprve připomeneme některé partie funkcionální analýzy, které budou použity v následujících kapitolách. Poté formulujeme základní úlohu variačního počtu a veškerou teorii, jež bude zapotřebí k nalezení stacionárních bodů vyšetřovaného funkcionálu. Následně představíme způsob, kterým je možno korektně dokázat existenci extrému. Zbývá část práce je věnována nejběžnějším problémům variačního počtu, konkrétně úloze o brachystochroně a úloze o minimální ploše. Obě úlohy jsou kompletně vyřešeny analyticky a poté jsou představeny dvě vhodné numerické metody doplněné získanými výsledky. Součástí jsou rovněž i fotografie a videa z pokusů, které byly prováděny pro praktickou ilustraci.

Klíčová slova: Funkcionál, variační počet, základní úloha variačního počtu, Eulerova-Lagrangeova rovnice, lipschitzovské křivky, úloha o minimální ploše, úloha o brachystochroně.

Abstract

In this Master thesis at first some parts of functional analysis are mentioned which will be used in the following chapters. Afterwards, the fundamental problem of calculus of variations and whole theory which is necessary in order to find stationary points of explored functional. Thereafter, a way how to prove an existence of extrema will be shown correctly. The rest of the thesis deals with the most common problems of calculus variations which are, namely, the brachistochrone problem, and the minimal surface problem. Both of them are completely solved analytically. Consequently, there are introduced two suitable numerical methods supplemented by results. Photographs of several practical experiments committed for illustration and videos are integral parts of the thesis.

Keywords: Functional, calculus of variations, fundamental problem of calculus of variations, Euler-Lagrange equation, lipschitz curves, minimal surface problem, brachistochrone problem.

Obsah

1	Úvod	7
2	Připomenutí pojmů z funkcionální analýzy	8
3	Základní úloha variačního počtu	12
3.1	Úloha o minimální ploše	21
3.1.1	Neexistence extrému	22
3.1.2	Stacionární body	26
4	Formulace úloh variačního počtu v prostoru lipschitzovských křivek	30
4.1	Lipschitzovsky spojitě funkce	32
4.2	Formulace úloh variačního počtu	36
4.3	Úlohy monotónní v druhé proměnné	45
4.4	Úloha o minimální ploše	48
4.5	Úloha o brachystochroně	51
5	Numerické experimenty	56
5.1	Úloha o minimální ploše řešená pomocí Bézierových křivek	56
5.1.1	BFGS algoritmus	57
5.1.2	Numerické výsledky	58
5.2	Úloha o brachystochroně řešená pomocí Bézierových křivek	62
5.3	Úloha o minimální ploše řešená pomocí metody konečných prvků	63
5.3.1	Linearizace (Newtonova metoda)	64
5.3.2	Metoda konečných prvků	65
5.3.3	Numerické výsledky	67
6	Praktické experimenty	71
6.1	Úloha o minimální ploše	71
6.2	Úloha o brachystochroně	71
7	Závěr	74
8	Literatura	75
A	Příloha na CD	76
A.1	Videa	76
A.2	Bézierovy křivky	76
A.3	Metoda konečných prvků	76

1 Úvod

Cílem této diplomové práce je seznámit čtenáře se základy variačního počtu. Jedná se bezesporu o velmi zajímavou disciplínu, v níž se snoubí matematika a fyzika.

První kapitola je věnována připomenutí pojmů z funkcionální analýzy, jejichž znalost bude nezbytná pro další práci. Následuje formulace základní úlohy variačního počtu a veškerá teorie potřebná k nalezení stacionárních bodů vyšetřovaného funkcionálu. Tímto však úloha zdaleka nekončí, nyní bude nutné jednoznačně prokázat, že v daném bodě skutečně nastává extrém funkcionálu. V řadě publikací je tato fáze odbyta poukázáním na fyzikální význam řešené úlohy, v rámci práce však bude představen způsob, jak korektně matematicky dokázat existenci extrému.

Zbývá část je již věnována klasickým úlohám variačního počtu, úloze o minimální ploše a úloze o brachystochroně. Obě úlohy jsou kompletně vyřešeny analyticky a poté jsou představeny vhodné numerické metody doplněné získanými výsledky.

Pro praktickou ilustraci pak poslouží záznamy a fotografie z fyzikálních pokusů, které byly za tímto účelem prováděny.

2 Připomenutí pojmů z funkcionální analýzy

Dříve, než se budeme věnovat problematice variačního počtu, uveďme nejprve několik vět a definic z funkcionální analýzy, o něž se budeme nadále opírat. V této kapitole budeme čerpat ze skript [10]. Prvním z důležitých pojmů bude derivace.

Definice 2.1. *Budiž*

- X, Y normované lineární prostory,
- $f : X \rightarrow Y$,
- $x \in X$ vnitřní bod Df ,
- $h \in X$.

Existuje-li limita

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0, \lambda \in \mathbb{R}} \frac{f(x + \lambda h) - f(x)}{\lambda} \stackrel{\text{ozn.}}{=} D_h f(x),$$

nazýváme ji derivací f v bodě x ve směru h .

Existuje-li $D_h f(x)$ pro každé $h \in X$, nazýváme zobrazení

$$h \mapsto D_h f(x)$$

Gâteauxovým diferencíálem f v bodě x .

Poznámka 2.1. Výchše uvedené zobrazení nemusí být obecně lineární, vždy ale platí

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R}) : D_{\alpha h} f(x) = \alpha D_h f(x), \quad (1)$$

neboť

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) : D_{\alpha h} f(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0, \lambda \in \mathbb{R}} \alpha \frac{f(x + \alpha \lambda h) - f(x)}{\alpha \lambda} = \alpha D_h f(x)$$

a pro $\alpha = 0$ je vztah (1) splněn triviálně.

Příklad 2.1. Jako příklad funkce, jejíž Gâteauxův diferenciál není lineární, poslouží funkce dvou proměnných definovaná předpisem

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & y \neq 0 \\ x, & y = 0 \end{cases}.$$

Chceme ukázat, že je porušena podmínka

$$D_{[h_1+h_2]} f(x) = D_{h_1} f(x) + D_{h_2} f(x).$$

Můžeme spočítat následující směrové derivace, $D_{(1,1)} f(x) = 0$, $D_{(1,-1)} f(x) = 0$, $D_{(2,0)} f(x) = 2$. Pak

$$D_{(1,1)} f(x) + D_{(1,-1)} f(x) = 0,$$

ale

$$D_{[(1,1)+(1,-1)]} f(x) = D_{(2,0)} f(x) = 2.$$

Definice 2.2. Je-li zobrazení

$$h \mapsto D_h f(x)$$

spojitým lineárním zobrazením X do Y , nazýváme toto zobrazení Gâteauxovou (slabou) derivací f v bodě x a značíme ji $Df(x)$.

V některých případech budeme rovněž potřebovat derivaci zprava.

Definice 2.3. Existuje-li limita

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0+, \lambda \in \mathbb{R}} \frac{f(x + \lambda h) - f(x)}{\lambda} \stackrel{\text{ozn.}}{=} D_h^+ f(x),$$

nazýváme ji derivací f v bodě x ve směru h zprava.

Definice 2.4. Budiž

- X, Y normované lineární prostory,
- $f : X \rightarrow Y$,
- $x \in X$ vnitřní bod Df .

Řekneme, že f má v bodě x Fréchetův (totální) diferenciál, jestliže existuje spojitě lineární zobrazení prostoru X do prostoru Y - budeme jej značit $f'(x)$ - takové, že

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x) - (f'(x))(h)}{\|h\|} = 0.$$

Zobrazení $f'(x) \in \mathcal{L}(X, Y)$ se též nazývá Fréchetova (silná) derivace f v bodě x .

Pozorování 2.1. Existuje-li silná derivace, existuje i slabá a rovnají se.

V rámci práce se budeme zabývat hledáním extrémů funkcionalů. Nechť X je normovaný lineární prostor. Funkcionálem rozumíme zobrazení z X do \mathbb{R} . Uveďme ještě následující věty a definice.

Definice 2.5. Nechť X je normovaný lineární prostor a nechť M je podmnožinou X . Řekneme, že $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ má v bodě $x \in X$ lokální minimum, resp. ostré lokální minimum vzhledem k M , jestliže

$$x \in M \wedge (\exists \varepsilon > 0)(\forall y \in P(x, \varepsilon) \cap M) : f(x) \leq f(y),$$

resp.

$$x \in M \wedge (\exists \varepsilon > 0)(\forall y \in P(x, \varepsilon) \cap M) : f(x) < f(y).$$

Poznámka 2.2. Zvolíme-li za množinu M celý prostor X , přechází předchozí definice v definici lokálního minima v „klasickém“ smyslu. Pokud nebude množina M specifikována, budeme jí rozumět celý prostor X .

Podobně definujeme (ostré) lokální maximum. Nyní přistoupíme k formulaci nutné podmínky existence lokálního extrému.

Věta 2.1. (Eulerova nutná podmínka existence lokálního extrému)

Nechť

- X je normovaný lineární prostor,
- $f : X \rightarrow \mathbb{R}$,
- f má v bodě $x \in X$ lokální extrém,
- $h \in X$ je takové, že existuje $D_h f(x)$.

Pak

$$D_h f(x) = 0.$$

Důkaz. Zaveďme funkci $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ proměnné λ předpisem: $g(\lambda) = f(x + \lambda h)$. Hodnota $D_h f(x)$ odpovídá hodnotě derivace funkce g v bodě $\lambda = 0$, jelikož

$$g'(0) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{g(\lambda) - g(0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(x + \lambda h) - f(x)}{\lambda} = D_h f(x).$$

Pro f a g platí

- pokud má f lokální extrém v bodě x , má g lokální extrém v bodě $\lambda = 0$,
- pokud existuje $D_h f(x)$, existuje i $g'(0)$,

z toho vyplývá, že

$$g'(0) = 0 = D_h f(x).$$

□

Nás však budou zajímat extrémy globální. V dalších definicích budeme opět předpokládat, že X je normovaný lineární prostor.

Definice 2.6. Řekneme, že $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ nabývá na množině $M \subseteq Df \subseteq X$ globálního minima (resp. maxima) v bodě $c \in X$, pokud

$$c \in M \wedge f(c) = \min\{f(x) : x \in M\} \stackrel{\text{ozn.}}{=} \min_{x \in M} f(x),$$

resp.

$$c \in M \wedge f(c) = \max\{f(x) : x \in M\} \stackrel{\text{ozn.}}{=} \max_{x \in M} f(x).$$

Jednou z možností, jak formulovat postačující podmínku existence globálního extrému, je využít konvexitu funkcionálu f . Nejprve ale uveďme následující definice.

Definice 2.7. Množina $M \subseteq X$ se nazývá konvexní, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in M$ a každé $t \in \langle 0, 1 \rangle$ je $tx_1 + (1 - t)x_2 \in M$.

Definice 2.8. Nechť $M \subseteq X$ je konvexní množina. Řekneme, že $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ je konvexní na M , jestliže pro každé $t \in \langle 0, 1 \rangle$ a každé $x_1, x_2 \in M$ je

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

Věta 2.2. Nechť funkcionál $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ je konvexní na konvexní množině M a $x, y \in M$. Nechť dále existuje $D_{y-x}^+ f(x)$. Pak

$$f(y) \geq f(x) + D_{y-x}^+ f(x).$$

Důkaz. Nejprve vyjádříme derivaci zprava

$$D_{y-x}^+ f(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(x + \lambda(y-x)) - f(x)}{\lambda}.$$

Z konvexity f , pro $\lambda \in (0, 1)$, platí

$$\begin{aligned} \frac{f(x + \lambda(y-x)) - f(x)}{\lambda} &\leq \frac{\lambda f(y) + (1-\lambda)f(x) - f(x)}{\lambda} = \frac{\lambda f(y) - \lambda f(x)}{\lambda} = \\ &= f(y) - f(x), \end{aligned}$$

odtud

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(x + \lambda(y-x)) - f(x)}{\lambda} \leq f(y) - f(x).$$

Po úpravě

$$f(y) \geq f(x) + D_{y-x}^+ f(x).$$

□

Věta 2.3. Nechť

- M je konvexní podmnožina X ,
- $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ je konvexní na M ,
- $y_0 \in M$ a platí

$$(\forall y \in M) : D_{y-y_0}^+ f(y_0) \geq 0.$$

Pak je v bodě y_0 globální minimum f na M .

Důkaz. Je-li f konvexní, podle věty 2.2 platí

$$(\forall y \in M) : f(y) \geq f(y_0) + D_{y-y_0}^+ f(y_0) \geq f(y_0),$$

což přímo odpovídá definici globálního minima. □

Uvedenou větu můžeme obrátit, tentokrát již ale nebude zapotřebí, aby funkcionál f byl konvexní.

Věta 2.4. *Nechť*

- M je konvexní podmnožina X ,
- $f : X \rightarrow \mathbb{R}$,
- $y_0 \in M$ je bodem globálního minima f na M ,
- $y \in M$ je takové, že existuje $D_{y-y_0}^+ f(y_0)$.

Pak

$$D_{y-y_0}^+ f(y_0) \geq 0.$$

Důkaz. Nejprve vyjádříme derivaci ve směru

$$D_{y-y_0}^+ f(y_0) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+, \lambda \in \mathbb{R}} \frac{f(y_0 + \lambda(y - y_0)) - f(y_0)}{\lambda}.$$

Jelikož

$$(\forall \lambda \in (0, 1)) : y_0 + \lambda(y - y_0) \in M,$$

platí

$$\frac{f(y_0 + \lambda(y - y_0)) - f(y_0)}{\lambda} \geq 0$$

pro každé $\lambda \in (0, 1)$ a rovněž

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+, \lambda \in \mathbb{R}} \frac{f(y_0 + \lambda(y - y_0)) - f(y_0)}{\lambda} \geq 0,$$

což jsme chtěli dokázat. □

3 Základní úloha variačního počtu

V rámci práce pro nás budou podstatné funkcionály $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ ve tvaru

$$J(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx, \quad (2)$$

přičemž $X = C^1(\langle a, b \rangle)$ s jednou z uvedených norem: $\|f\| = \max_{x \in \langle a, b \rangle} |f(x)|$,
 $\|f\| = \max\{\max_{x \in \langle a, b \rangle} |f(x)|, \max_{x \in \langle a, b \rangle} |f'(x)|\}$ a F je funkce následujících vlastností:

- $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,
- $F \in C^1(\langle a, b \rangle \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

V dalších kapitolách budeme vyšetřovat extrémů takovýchto funkcionalů. Při formulaci nutné podmínky existence extrému budeme vycházet z věty 2.1.

Zaveďme nyní funkci φ proměnné t předpisem $\varphi(t) = J(y + th), t \in \mathbb{R}, h \in X$. Hodnota $D_h J(y)$ pak odpovídá derivaci této funkce v $t = 0$, neboť

$$\varphi'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(y + th) - J(y)}{t}.$$

Budeme-li derivovat funkcional (2) ve směru h , budeme vlastně počítat derivaci funkce

$$\varphi(t) = J(y + th) = \int_a^b F(x, y(x) + th(x), y'(x) + th'(x)) dx$$

podle proměnné t , tj.

$$\varphi'(t) = \frac{d}{dt} \int_a^b F(x, y(x) + th(x), y'(x) + th'(x)) dx.$$

Pro další postup bude nutné nejprve provést záměnu derivace a integrálu, k čemuž nám poslouží následující věta, kterou lze najít například ve skriptech [13].

Věta 3.1. *Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní (jordanovsky) měřitelná množina a nechť funkce f je spojitá na $A \times \langle c, d \rangle$ a má na této množině spojitou parciální derivaci podle poslední proměnné. Pak funkce $g : \langle c, d \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná předpisem*

$$g(t) = \int_A f(x, t) dx$$

má na intervalu $\langle c, d \rangle$ spojitou derivaci a platí

$$g'(t) = \int_A \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx,$$

tj.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_A f(x, t) dx = \int_A \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx.$$

Nejprve ověříme, zda jsou splněny všechny předpoklady. Protože nás bude zajímat pouze derivace v okolí nuly, stačí nám vyšetřovat vlastnosti funkce $f(x, t) = F(x, y(x) + th(x), y'(x) + th'(x))$ na množině $\langle a, b \rangle \times \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle$. Omezený uzavřený interval $\langle a, b \rangle$ je jordanovsky měřitelná kompaktní množina a vzhledem k předpokladům kladeným na funkci F je f spojitá na $\langle a, b \rangle \times \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle$. Dále nás bude zajímat derivace podle proměnné t , která bude vypadat následovně

$$f'_t(x, t) = F_y(x, y(x) + th(x), y'(x) + th'(x))h(x) + F_{y'}(x, y(x) + th(x), y'(x) + th'(x))h'(x).$$

Protože $F \in C^1(\langle a, b \rangle \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$, je f'_t spojitá na $\langle a, b \rangle \times \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle$. Jsou tedy splněny všechny předpoklady uvedené věty a můžeme přistoupit k záměně derivace a integrálu. Získáme

$$\varphi'(t) = \int_a^b \frac{d}{dt} F(x, y(x) + th(x), y' + th'(x)) dx.$$

Pro derivaci funkcionálu J v bodě y ve směru h pak platí

$$D_h J(y) = \varphi'(0) = \int_a^b F_y(x, y(x), y'(x))h(x) + F_{y'}(x, y(x), y'(x))h'(x) dx. \quad (3)$$

Tvrzení 3.1. *Nechť $M \subseteq DJ \subseteq X$ je konvexní množina. Má-li funkcionál (2) v bodě y_0 globální minimum na M , musí pro každé $y \in M$ platit*

$$\int_a^b F_y(x, y_0(x), y'_0(x))(y(x) - y_0(x)) + F_{y'}(x, y_0(x), y'_0(x))(y'(x) - y'_0(x)) dx \geq 0.$$

Toto tvrzení je důsledkem věty 2.4 a vztahu (3).

Nyní se budeme věnovat různým volbám množiny M . Nejprve předpokládejme, že máme hodnoty hledané extrémů předepsány v obou krajních bodech, tedy

$$M = \{y \in C^1(\langle a, b \rangle) : y(a) = A, y(b) = B\}.$$

Všimněme si, že množina M je konvexní. Předpokládejme, že $h \in C_0^1(\langle a, b \rangle) \stackrel{\text{ozn.}}{=} \{f \in C^1(\langle a, b \rangle), f(a) = f(b) = 0\}$ je libovolná funkce. Volme nejprve $y = y_0 + h$. Můžeme ověřit, že $y \in C^1(\langle a, b \rangle)$ a platí $y(a) = y_0(a) = A$ a $y(b) = y_0(b) = B$, tudíž $y \in M$. S přihlédnutím k větě 2.4

$$0 \leq D_{y_0+h-y_0} J(y_0) = D_h J(y_0).$$

Dále volme $y = y_0 - h$. Takto definované y je rovněž prvkem M , platí tedy

$$0 \leq D_{y_0-h-y_0} J(y_0) = D_{-h} J(y_0) = -D_h J(y_0),$$

tj.

$$0 \geq D_h J(y_0).$$

Znamená to tudíž, s vzhledem k (3), že pro každé $h \in C_0^1(\langle a, b \rangle)$ platí

$$\int_a^b F_y(x, y_0(x), y'_0(x))h(x) + F_{y'}(x, y_0(x), y'_0(x))h'(x) dx = D_h J(y_0) = 0. \quad (4)$$

Podobně budeme postupovat, pokud budeme mít zadánu hodnotu pouze v jednom z krajních bodů, to znamená

$$M = \{y \in C^1(\langle a, b \rangle) : y(a) = A \text{ (resp. } y(b) = B)\}.$$

Pak množina funkcí, pro kterou je splněna podmínka (4), bude vypadat následovně: $\{h \in C^1(\langle a, b \rangle), h(a) = 0, \text{ (resp. } h(b) = 0)\}$.

Pokud nemáme hodnotu hledané extrémály předepsanu ani v jednom z krajních bodů, bude (4) platit pro všechna $h \in C^1(\langle a, b \rangle)$.

Vztah uvedený v tvrzení 3.1 nám dává nutnou podmínku pro existenci extrému, není ale zcela vhodný pro řešení konkrétních příkladů. Než však přistoupíme k formulaci vhodnějšího kritéria pro jednotlivé typy úloh, zformulujme nejprve obecnou větu, z níž budeme v dalších kapitolách vycházet. Nejdříve však uveďme následující lemma.

Lemma 3.1. *Nechť funkce p je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a nechť dále $\int_a^b p(x)h'(x) dx = 0$ pro každé $h \in C_0^1(\langle a, b \rangle)$. Pak p je konstantní na $\langle a, b \rangle$.*

Důkaz. Definujme funkci h na intervalu $\langle a, b \rangle$ předpisem

$$h(x) = \int_a^x (p(t) - \bar{p}) dt.$$

Číslo \bar{p} volíme jako integrální průměr funkce p , tj.

$$\bar{p} = \frac{1}{b-a} \int_a^b p(t) dt.$$

V krajních bodech pak obdržíme

$$h(a) = \int_a^a (p(t) - \bar{p}) dt = 0,$$

$$h(b) = \int_a^b (p(t) - \bar{p}) dt = \int_a^b p(t) dt - \int_a^b \bar{p} dt = \int_a^b p(t) dt - (b-a) \frac{1}{b-a} \int_a^b p(t) dt = 0.$$

Dále na intervalu $\langle a, b \rangle$ platí

$$h'(x) = p(x) - \bar{p},$$

tzn.

$$h \in C_0^1(\langle a, b \rangle).$$

Z předpokladů věty plyne

$$\int_a^b p(x)h'(x) dx = 0,$$

tím pádem i

$$\int_a^b (p(x) - \bar{p})h'(x) dx = 0, \quad (5)$$

neboť

$$\int_a^b \bar{p}h'(x) dx = \bar{p}[h(x)]_a^b = 0.$$

Po dosazení za h do (5) získáváme

$$0 = \int_a^b (p(x) - \bar{p})h'(x) dx = \int_a^b (p(x) - \bar{p})(p(x) - \bar{p}) dx = \int_a^b (p(x) - \bar{p})^2 dx.$$

Tím pádem musí na celém intervalu $\langle a, b \rangle$ platit

$$p(x) - \bar{p} = 0,$$

a tedy

$$p(x) = \bar{p}.$$

□

Věta 3.2. *Nechť funkce u, v jsou spojité na intervalu $\langle a, b \rangle$ a nechť*

$$\int_a^b [u(x)h(x) + v(x)h'(x)] dx = 0$$

pro každé $h \in C_0^1(\langle a, b \rangle)$. Pak $v \in C^1(\langle a, b \rangle)$ a platí

$$\forall x \in \langle a, b \rangle : v'(x) = u(x).$$

Důkaz. Z předpokladů víme, že

$$\int_a^b [u(x)h(x) + v(x)h'(x)] dx = 0.$$

Na intervalu $\langle a, b \rangle$ definujme funkci A předpisem

$$A(x) = \int_a^x u(t) dt,$$

Odtud zřejmě

$$A'(x) = u(x)$$

pro každé $x \in \langle a, b \rangle$. Úpravou pomocí per partes získáme

$$\begin{aligned} \int_a^b u(x)h(x) + v(x)h'(x) dx &= \underbrace{[A(x)h(x)]_a^b}_{=0} - \int_a^b A(x)h'(x) dx + \\ &+ \int_a^b v(x)h'(x) dx = \int_a^b [v(x) - A(x)]h'(x) dx = 0. \end{aligned}$$

Vzhledem k předchozímu lemmatu existuje konstanta c taková, že na $\langle a, b \rangle$ platí

$$v(x) - A(x) = c.$$

Po úpravě

$$v(x) = A(x) + c.$$

Pro derivaci funkce v platí

$$v'(x) = A'(x) = u(x).$$

□

Uvedenou větu však můžeme modifikovat i pro obecnější volbu funkce h .

Věta 3.3. *Nechť funkce u, v jsou spojité na intervalu $\langle a, b \rangle$ a nechť*

$$\int_a^b [u(x)h(x) + v(x)h'(x)] dx = 0 \tag{6}$$

pro každé $h \in C^1(\langle a, b \rangle)$, pro něž platí $h(a) = 0$ (resp. $h(b) = 0$).

Pak $v \in C^1(\langle a, b \rangle)$,

$$v'(x) = u(x), \quad \forall x \in \langle a, b \rangle.$$

a

$$v(b) = 0 \text{ (resp. } v(a) = 0 \text{)}.$$

Důkaz. Nejprve si povšimněme, že pokud je vztah (6) splněn pro všechna h z předpokladů, je rovněž splněn i pro všechna h , která jsou nulová v obou krajních bodech. Je tedy vyhověno i podmínkám předchozí věty a díky ní již víme, že $v \in C^1(\langle a, b \rangle)$ a

$$v'(x) = u(x).$$

Vycházíme z rovnosti

$$\int_a^b [u(x)h(x) + v(x)h'(x)] dx = 0. \tag{7}$$

Použijeme metodu per partes, tentokrát již s poznatkem, že $v \in C^1(\langle a, b \rangle)$. Získáme

$$\begin{aligned} \int_a^b [u(x)h(x) + v(x)h'(x)] dx &= \int_a^b u(x)h(x) dx + [v(x)h(x)]_a^b - \int_a^b v'(x)h(x) dx = \\ &= \int_a^b \underbrace{[u(x) - v'(x)]}_{=0} h(x) dx + [v(x)h(x)]_a^b = 0. \end{aligned}$$

Odtud

$$v(b)h(b) - v(a)h(a) = 0.$$

Pro případ $h(a) = 0$ obdržíme

$$v(b)h(b) = 0,$$

odkud, pro volbu h tak, aby $h(a) = 0 \wedge h(b) = 1$, získáváme druhou podmínku

$$v(b) = 0.$$

Podobně budeme postupovat pro $h(b) = 0$, kde budeme volit h s vlastností $h(a) = 1 \wedge h(b) = 0$, a obdržíme

$$v(a) = 0.$$

□

Poznámka 3.1. Může se stát, vztah (6) platí pro všechna $h \in C^1(\langle a, b \rangle)$. V tom případě využijeme poznatků z předchozí věty, provedeme postupně obě volby h a dostaneme druhou podmínku

$$v(a) = v(b) = 0.$$

Nejčastějším typem úloh, s nimiž se můžeme setkat, je úloha s pevnými konci, kterou se nyní budeme zabývat. Obecně máme zadán funkcionál $J : C^1(\langle a, b \rangle) \rightarrow \mathbb{R}$ typu

$$J(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx,$$

kde $F \in C^1(\langle a, b \rangle \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$, a okrajové podmínky

$$y(a) = A, y(b) = B.$$

Množina M , na níž budeme hledat extrém, je tvaru

$$M = \{y \in C^1(\langle a, b \rangle) : y(a) = A, y(b) = B\}.$$

Tvrzení 3.2. Má-li funkcionál J v bodě y_0 globální extrém na M , musí platit

$$\int_a^b F_y(x, y_0, y_0')h + F_{y'}(x, y_0, y_0')h' dx = 0$$

pro každé $h \in C_0^1(\langle a, b \rangle)$.

Tento vztah rovněž není zcela vhodný pro počítání konkrétních příkladů. Pro formulaci vhodnějšího kritéria budeme vycházet z obecné věty 3.2, zvolíme-li $u = F_y, v = F_{y'}$.

Věta 3.4. (Eulerova-Lagrangeova). *Nechť M je definována jako výše a necht' v bodě $y = y_0(x)$ nastává globální extrém J na M . Pak*

$$F_y(x, y_0, y_0') - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y_0, y_0') = 0.$$

Dosud jsme se zabývali funkcionaly typu

$$J(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx,$$

kde funkce F závisí na x, y i y' . Situace se však může zjednodušit, pokud F nezávisí na některé ze zmíněných proměnných. Uveďme si zde tři základní případy.

- **F nezávisí na proměnné y'**

Dosazením do Eulerovy-Lagrangeovy rovnice získáme

$$F_y(x, y) = 0.$$

- **F nezávisí na proměnné y**

Podobně jako v předchozím bodě obdržíme

$$\frac{d}{dx} F_{y'}(x, y') = 0,$$

$$F_{y'}(x, y') = c \in \mathbb{R}.$$

- **F nezávisí na proměnné x**

Opět vyjdeme z Eulerovy-Lagrangeovy rovnice

$$F_y(y, y') - \frac{d}{dx} F_{y'}(y, y') = 0.$$

Celý vztah vynásobíme y'

$$y' F_y - y' \frac{d}{dx} F_{y'} = 0.$$

Dále upravíme

$$\begin{aligned} y' F_y - y' \frac{d}{dx} F_{y'} + [F_{y'} y'' - F_{y'} y''] [y' F_y + F_{y'} y''] - [y' \frac{d}{dx} F_{y'} + F_{y'} y''] &= \\ = \frac{d}{dx} F - \frac{d}{dx} (F_{y'} y') &= 0. \end{aligned}$$

Zintegrováním podle proměnné x obdržíme

$$F - F_{y'} y' = c,$$

kde c je reálná konstanta.

V předchozím postupu bylo nutné, aby funkce y byla třídy C^2 . Tato podmínka je však v příkladech, jimiž se budeme zabývat, splněna, jak si dokážeme v jedné z následujících kapitol.

Příklad 3.1. Najděme minimum funkcionálu $J : C^1(\langle 0, 1 \rangle) \rightarrow \mathbb{R}$, který je definován předpisem

$$J(y) = \int_0^1 [(y(x))^2 + (y'(x))^2] dx \quad (8)$$

na množině

$$M = \{y \in C^1(\langle 0, 1 \rangle), y(0) = 0, y(1) = 1\}.$$

Pro zajímavost, funkcionál (8) odpovídá $\|\cdot\|_{1,2}$ normě. Použitím Eulerova-Lagrangeova vzorce úloha přejde v obyčejnou diferenciální rovnici

$$y''(x) - y(x) = 0.$$

Její vyřešením získáme

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^x.$$

Zúročením okrajových podmínek vypočítáme konstanty C_1, C_2 . Obdrželi jsme „podezřelou“ funkci ve tvaru

$$y_0(x) = \frac{e(e^x - e^{-x})}{e^2 - 1}.$$

V tomto případě nebude obtížné ověřit, zda v y_0 nastává minimum zadaného funkcionálu. Chceme dokázat, že

$$J(y_0 + h) - J(y_0) \geq 0$$

pro každé $h \in C_0^1(\langle 0, 1 \rangle)$. Po dosazení

$$J(y_0 + h) - J(y_0) = \int_0^1 [(y_0(x) + h(x))^2 + (y_0'(x) + h'(x))^2] dx - \int_0^1 [(y_0(x))^2 + (y_0'(x))^2] dx.$$

Vztah na pravé straně rovnosti dále upravíme

$$\int_0^1 2y_0(x)h(x) + (h(x))^2 + 2y_0'(x)h'(x) + (h'(x))^2 dx$$

a pomocí metody per partes získáváme

$$\begin{aligned} & \int_0^1 [2y_0(x)h(x) + (h(x))^2 - 2y_0''(x)h(x) + (h'(x))^2] dx + \underbrace{[2y_0'(x)h(x)]_0^1}_{=0} = \\ & = \int_0^1 2h(x) \underbrace{[y_0(x) - y_0''(x)]}_{=0} + \underbrace{[h(x)^2 + (h'(x))^2]}_{\geq 0} dx \geq 0. \end{aligned}$$

Dalším způsobem, jak ověřit, zda v y_0 nastává minimum funkcionálu J , je využít jeho konvexitu. Nechť $y_1, y_2 \in M$ a $t \in \langle 0, 1 \rangle$. Ukážeme, že platí

$$J(ty_1 + (1-t)y_2) \leq tJ(y_1) + (1-t)J(y_2).$$

Po dosazení

$$\begin{aligned} \int_0^1 (ty_1 + (1-t)y_2)^2 + (ty_1' + (1-t)y_2')^2 dx &\leq t \int_0^1 y_1^2 + (y_1')^2 dx + \\ &+ (1-t) \int_0^1 y_2^2 + (y_2')^2 dx. \end{aligned}$$

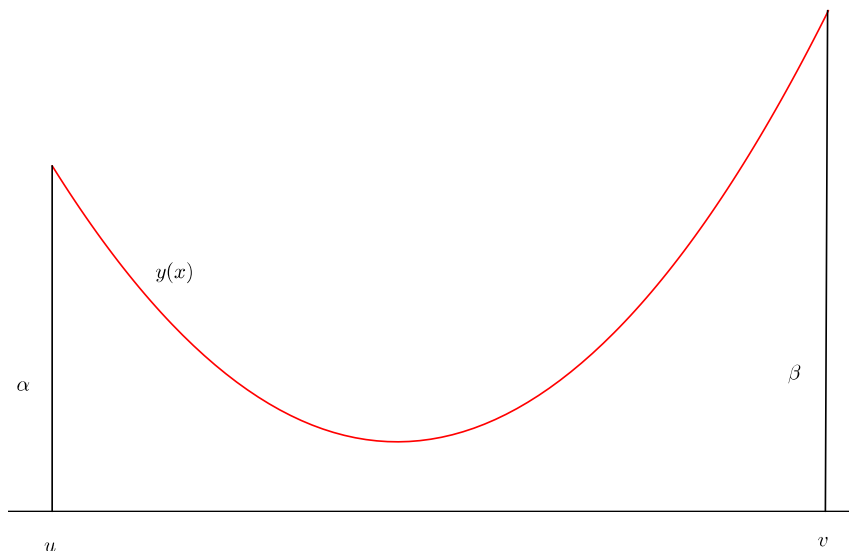
Roznásobíme a převedeme na jednu stranu

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^2 y_1^2 + 2t(1-t)y_1 y_2 + (1-t)^2 y_2^2 + t^2 (y_1')^2 + 2t(1-t)(y_1')(y_2') + (1-t)^2 (y_2')^2 - \\ - t [y_1^2 + (y_1')^2] - (1-t) [y_2^2 + (y_2')^2] dx \leq 0 \\ \int_0^1 [t(t-1)y_1^2 - 2t(t-1)y_1 y_2 + t(t-1)y_2^2] + [t(t-1)(y_1')^2 - 2t(t-1)(y_1')(y_2') + \\ + t(t-1)(y_2')^2] dx \leq 0 \\ \int_0^1 \underbrace{t(t-1)}_{\leq 0} (y_1 - y_2)^2 + \underbrace{t(t-1)}_{\leq 0} (y_1' - y_2')^2 dx \leq 0. \end{aligned}$$

Zjistili jsme, že funkcionál J je konvexní. Vzhledem k větě 2.3 nastává v y_0 globální minimum J na M .

3.1 Úloha o minimální ploše

Jakou křivku o koncových bodech $[u, \alpha], [v, \beta]$, kde $u < v, \alpha > 0, \beta > 0$, musíme nechat rotovat kolem souřadnicové osy x , aby vzniklá rotační plocha měla minimální povrch?



Povrch plochy, která vznikne rotací křivky $y = y(x)$, budeme počítat pomocí vzorce

$$S = 2\pi \int_u^v y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

Budeme tedy minimalizovat funkcionál $J : C^1(\langle u, v \rangle) \rightarrow \mathbb{R}$ definovaný předpisem

$$J(y) = 2\pi \int_u^v y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$$

na množině

$$M = \{y \in C^1(\langle u, v \rangle) : y(u) = \alpha, y(v) = \beta, y(x) \geq 0 \forall x \in \langle u, v \rangle\}.$$

3.1.1 Neexistence extrému

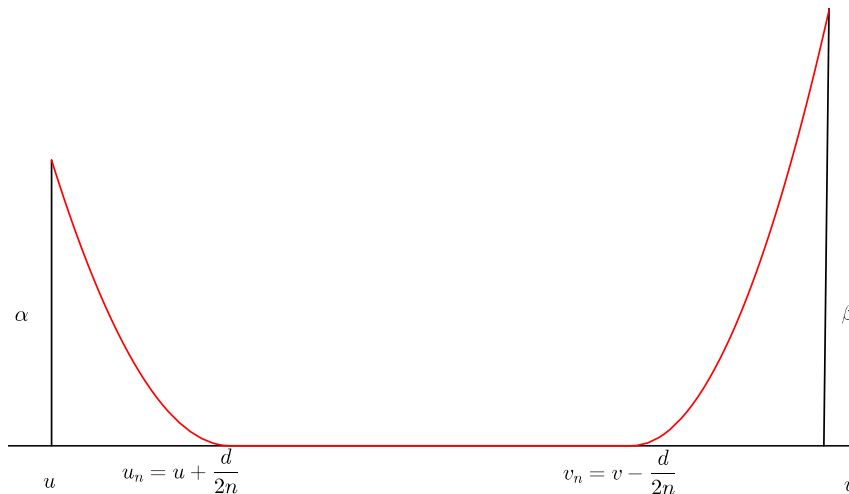
Hned na počátku můžeme identifikovat některé situace, v nichž nenastává extrém funkcionálu J . K tomu formulujeme následující věty.

Věta 3.5. *Nechť $y \in M$ a necht' dále $J(y) > \pi(\alpha^2 + \beta^2)$. Pak v bodě y nenastává minimum funkcionálu J .*

Důkaz. Budeme uvažovat posloupnost funkcí ve tvaru

$$y_n(x) = \begin{cases} \frac{4\alpha n^2}{d^2}(x - u_n)^2, & x \in \langle u, u_n \rangle \\ 0, & x \in \langle u_n, v_n \rangle \\ \frac{4\beta n^2}{d^2}(x - v_n)^2, & x \in \langle v_n, v \rangle \end{cases}$$

znázorněných na následujícím obrázku,



kde d je délka intervalu $\langle u, v \rangle$. Pro hodnoty funkcionálu platí

$$\begin{aligned} J(y_n) &= 2\pi \int_u^v y_n(x) \sqrt{1 + [y'_n(x)]^2} dx = \\ &= 2\pi \int_u^{u_n} y_n(x) \sqrt{1 + [y'_n(x)]^2} dx + 2\pi \int_{v_n}^v y_n(x) \sqrt{1 + [y'_n(x)]^2} dx. \end{aligned}$$

Protože

$$\sqrt{1 + [y'_n(x)]^2} \leq 1 + |y'_n(x)|,$$

můžeme psát

$$\begin{aligned} J(y_n) &\leq 2\pi \int_u^{u_n} y_n(x) (1 + |y'_n(x)|) dx + 2\pi \int_{v_n}^v y_n(x) (1 + |y'_n(x)|) dx = \\ &= 2\pi \int_u^{u_n} y_n(x) dx + 2\pi \int_u^{u_n} y_n(x) |y'_n(x)| dx + 2\pi \int_{v_n}^v y_n(x) dx + 2\pi \int_{v_n}^v y_n(x) |y'_n(x)| dx. \end{aligned}$$

Víme, že $y'_n(x) \leq 0$ na intervalu $\langle u, u_n \rangle$ a $y'_n(x) \geq 0$ na intervalu $\langle v_n, v \rangle$. Proto

$$\begin{aligned}
J(y_n) &\leq 2\pi \left(\int_u^{u_n} y_n(x) dx - \int_u^{u_n} y_n(x)y'_n(x) dx + \int_{v_n}^v y_n(x) dx + \int_{v_n}^v y_n(x)y'_n(x) dx \right) = \\
&= 2\pi \left(\int_u^{u_n} y_n(x) dx - \left[\frac{1}{2}y_n^2(x) \right]_u^{u_n} + \int_{v_n}^v y_n(x) dx + \left[\frac{1}{2}y_n^2(x) \right]_{v_n}^v \right) = \\
&= 2\pi \left(\int_u^{u_n} y_n(x) dx + \int_{v_n}^v y_n(x) dx + \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) \right) \leq 2\pi \int_u^{u_n} \alpha dx + 2\pi \int_{v_n}^v \beta dx + \\
&+ \pi(\alpha^2 + \beta^2) = \underbrace{2\pi(\alpha(u_n - u) + \beta(v - v_n))}_{\stackrel{\text{ozn.}}{=} C_n} + \pi(\alpha^2 + \beta^2) = C_n + \pi(\alpha^2 + \beta^2),
\end{aligned}$$

Navíc, vzhledem k tomu, jak jsme definovali hodnoty u_n a v_n , platí $0 \leq (u_n - u) \rightarrow 0$ a $0 \leq (v - v_n) \rightarrow 0$. Zjistili jsme, že

$$J(y_n) \leq \pi(\alpha^2 + \beta^2) + C_n,$$

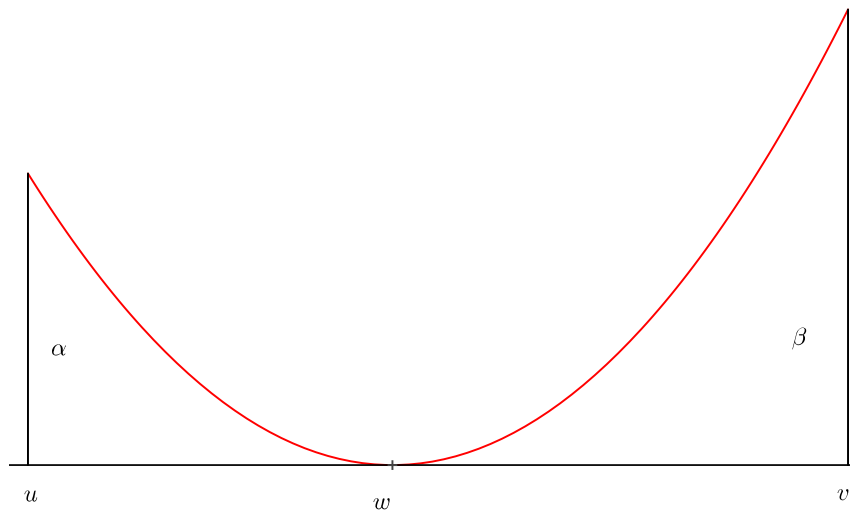
přičemž $C_n \rightarrow 0$, tím pádem

$$J(y_n) \rightarrow \pi(\alpha^2 + \beta^2).$$

Jelikož $J(y_n) \rightarrow \pi(\alpha^2 + \beta^2) < J(y)$, musí být od určitého indexu $n_0 \in \mathbb{N}$ již $J(y_n) < J(y)$ a tím pádem v bodě $y \in C^1(\langle u, v \rangle)$ nemůže být minimum funkcionálu J . \square

Věta 3.6. *Nechť $y \in M$ a necht' existuje $w \in (u, v)$ takové, že $y(w) = 0$. Pak v bodě y nenastává minimum funkcionálu J .*

Důkaz. Budeme se tedy zabývat situací, kdy $y(w) = 0$ pro nějaké $w \in (u, v)$.



Pro hodnotu funkciónálu pak platí

$$J(y) = 2\pi \int_u^v y(x) \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx.$$

Jelikož

$$\sqrt{1 + [y'(x)]^2} > \sqrt{[y'(x)]^2} = |y'(x)|,$$

můžeme psát

$$\begin{aligned} J(y) &= 2\pi \int_u^v y(x) \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx > 2\pi \int_u^v y(x) |y'(x)| dx = 2\pi \int_u^v |y(x) y'(x)| dx = \\ &= 2\pi \left(\int_u^w |y(x) y'(x)| dx + \int_w^v |y(x) y'(x)| dx \right) \geq 2\pi \left(\left| \int_u^w y(x) y'(x) dx \right| + \right. \\ &\quad \left. + \left| \int_w^v y(x) y'(x) dx \right| \right) = 2\pi \left| \left[\frac{1}{2} y^2(x) \right]_u^w \right| + 2\pi \left| \left[\frac{1}{2} y^2(x) \right]_w^v \right| = \pi(\alpha^2 + \beta^2), \end{aligned}$$

Zjistili jsme tedy, že $J(y) > \pi(\alpha^2 + \beta^2)$ a z předchozí věty víme, že v bodě y tím pádem nenastává minimum funkciónálu J . \square

3.1.2 Stacionární body

Vzhledem k předchozím úvahám se stačí omezit na případ, kdy $y(x) > 0$ na $\langle u, v \rangle$. Eulerova-Lagrangeova rovnice má tvar

$$\sqrt{1 + (y')^2} - \frac{d}{dx} \left(\frac{yy'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \right) = 0. \quad (9)$$

Jelikož integrand nezávisí na proměnné x , můžeme použít speciální variantu Eulerovy-Lagrangeovy rovnice a obdržíme

$$y\sqrt{1 + (y')^2} - y\frac{(y')^2}{\sqrt{1 + (y')^2}} = C_1,$$

kde $C_1 \in \mathbb{R}$. Obě strany rovnice vynásobíme $\sqrt{1 + (y')^2}$, čímž získáme

$$y(1 + (y')^2) - y(y')^2 = C_1\sqrt{1 + (y')^2}$$
$$y = C_1\sqrt{1 + (y')^2}.$$

Zavedeme substituci

$$y' = \sinh \varphi \quad (10)$$

a obdržíme

$$y = C_1\sqrt{1 + \sinh^2 \varphi} = C_1\sqrt{\cosh^2 \varphi} = C_1 \cosh \varphi. \quad (11)$$

Pro derivaci y platí

$$y' = C_1 \sinh(\varphi)\varphi'.$$

Porovnáním s (10)

$$\sinh \varphi = C_1 \sinh(\varphi)\varphi'.$$

Pokud by $\sinh \varphi = 0$, obdrželi bychom vzhledem k (10) konstantní řešení, které však nevyhovuje (9). Můžeme předpokládat, že $\sinh \varphi \neq 0$, a obdržíme

$$1 = C_1\varphi'.$$

Zintegrováním obou stran získáme

$$x = C_1\varphi + C_2,$$

můžeme vyjádřit φ

$$\varphi = \frac{x - C_2}{C_1}$$

a dosadit do (11). Tímto získáme obecnou rovnici hledané křivky

$$y(x) = C_1 \cosh \left(\frac{x - C_2}{C_1} \right).$$

Konstanty C_1 a C_2 získáme zúročením okrajových podmínek

$$\alpha = C_1 \cosh\left(\frac{u - C_2}{C_1}\right),$$

$$\beta = C_1 \cosh\left(\frac{v - C_2}{C_1}\right).$$

Pro další ilustraci nyní uvažujme zjednodušenou situaci, kdy oba koncové body budou umístěny ve stejné výšce (tzn. $\alpha = \beta$). Není obtížné si uvědomit, že konstantu C_2 můžeme dopočítat následovně

$$C_2 = \frac{u + v}{2},$$

jelikož

$$\alpha = C_1 \cosh\left(\frac{u - C_2}{C_1}\right) \tag{12}$$

a

$$\alpha = C_1 \cosh\left(\frac{v - C_2}{C_1}\right). \tag{13}$$

Porovnáním (12) a (13)

$$C_1 \cosh\left(\frac{u - C_2}{C_1}\right) = C_1 \cosh\left(\frac{v - C_2}{C_1}\right).$$

Z vlastností funkce \cosh mohou nastat dvě možnosti:

$$\frac{u - C_2}{C_1} = \frac{v - C_2}{C_1},$$

v tom případě by ale platilo $u = v$, což je v rozporu se zadáním úlohy, nebo

$$\frac{u - C_2}{C_1} = \frac{C_2 - v}{C_1}$$

$$C_2 = \frac{u + v}{2}.$$

Dále je potřeba zmínit, že v některých případech získáme dvě „podezřelé“ funkce, nebo dokonce vůbec žádnou. Budeme, bez ztráty obecnosti, uvažovat symetricky umístěné body o souřadnicích $[-L, \alpha]$, $[L, \alpha]$. Vzhledem k tomu, že je v tomto případě $C_2 = 0$, redukuje se rovnice křivky na tvar

$$y(x) = C_1 \cosh\left(\frac{x}{C_1}\right).$$

V krajních bodech pak obdržíme

$$\alpha = C_1 \cosh\left(\frac{L}{C_1}\right).$$

Budeme nyní zkoumat řešitelnost této rovnice vzhledem k neznámé C_1 . Zavedeme substituci $q = \frac{L}{C_1}$. Pak

$$\alpha = \frac{L}{q} \cosh(q),$$

$$\frac{\alpha}{L} = \frac{1}{q} \cosh(q).$$

Hodnotu mezního poměru $\frac{\alpha}{L}$ získáme jako minimum funkce

$$g(q) = \frac{1}{q} \cosh(q).$$

Zde se budeme muset uchýlit k numerickému výpočtu a získáme

$$\frac{\alpha}{L} \approx 1,508879561.$$

Je-li poměr $\frac{\alpha}{L}$ menší než tato mezní hodnota, nebude existovat ani jedna „podezřelá“ funkce. Pro $\frac{\alpha}{L} = 1,508879561$ získáváme jednu „podezřelou“ funkci a pokud $\frac{\alpha}{L} > 1,508879561$, obdržíme dokonce dvě.

Zajímavé je, že ačkoli pro poměr $\frac{\alpha}{L} > 1,508879561$ získáme dvě „podezřelé“ funkce, může se stát, že ani v jedné z nich nenastává minimum vyšetřovaného funkcionálu. Toto nastane ve chvíli, kdy, v souladu s větou 3.5, platí $J(y) > \pi(\alpha^2 + \beta^2) = \pi(2\alpha^2)$. Opět můžeme spočítat kritický poměr, tentokrát tak, aby

$$J(y) \leq 2\pi\alpha^2.$$

Dosazením a následnými úpravami získáme

$$\begin{aligned} J(y) &= 4\pi \int_0^L y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = 4\pi \int_0^L C_1 \cosh\left(\frac{x}{C_1}\right) \sqrt{1 + \left(\sinh\left(\frac{x}{C_1}\right)\right)^2} dx = \\ &= 4\pi \int_0^L C_1 \cosh^2\left(\frac{x}{C_1}\right) dx = 2\pi C_1 \int_0^L \left(1 + \cosh\left(\frac{2x}{C_1}\right)\right) dx = \\ &= 2\pi C_1 \left[L + \frac{C_1}{2} \sinh\left(\frac{2L}{C_1}\right) \right] = \pi C_1^2 \left[\frac{2L}{C_1} + \sinh\left(\frac{2L}{C_1}\right) \right] \leq 2\pi\alpha^2. \end{aligned} \quad (14)$$

Víme, že

$$\frac{\alpha}{C_1} = \cosh\left(\frac{L}{C_1}\right). \quad (15)$$

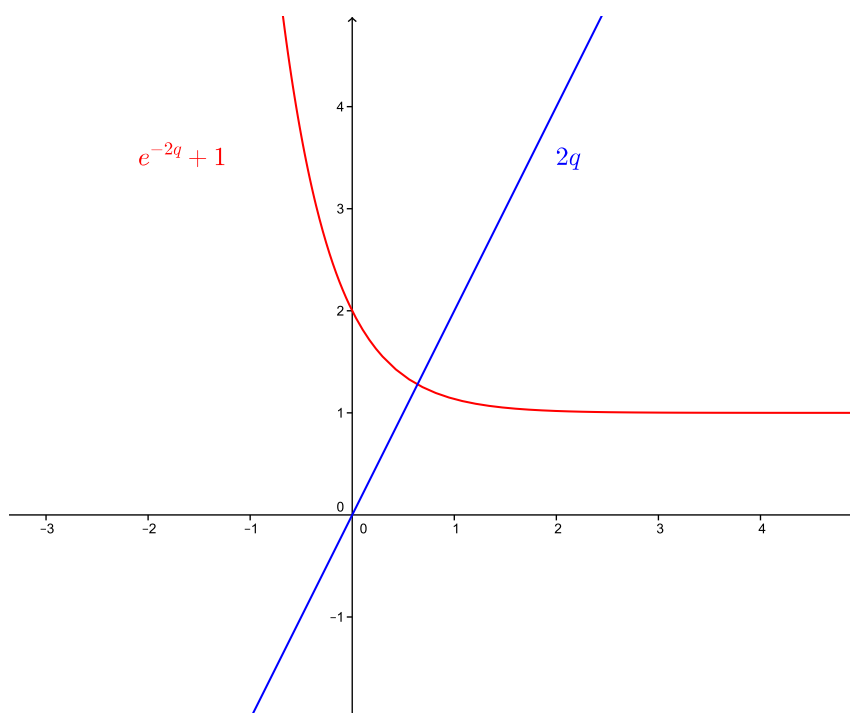
Po dosazení do (14)

$$C_1^2 \left[\frac{2L}{C_1} + \sinh\left(\frac{2L}{C_1}\right) \right] \leq 2C_1^2 \cosh^2\left(\frac{L}{C_1}\right).$$

Zavedeme substituci $q = \frac{L}{C_1}$,

$$\begin{aligned} 2q + \sinh 2q &\leq 2 \cosh^2 q, \\ 2q + \frac{e^{2q} - e^{-2q}}{2} &\leq 2 \frac{(e^q + e^{-q})^2}{4}, \\ 4q + e^{2q} - e^{-2q} &\leq e^{2q} + 2 + e^{-2q}, \\ 4q &\leq 2e^{-2q} + 2, \\ 2q &\leq e^{-2q} + 1. \end{aligned}$$

Nerovnici můžeme ilustrovat následujícím obrázkem



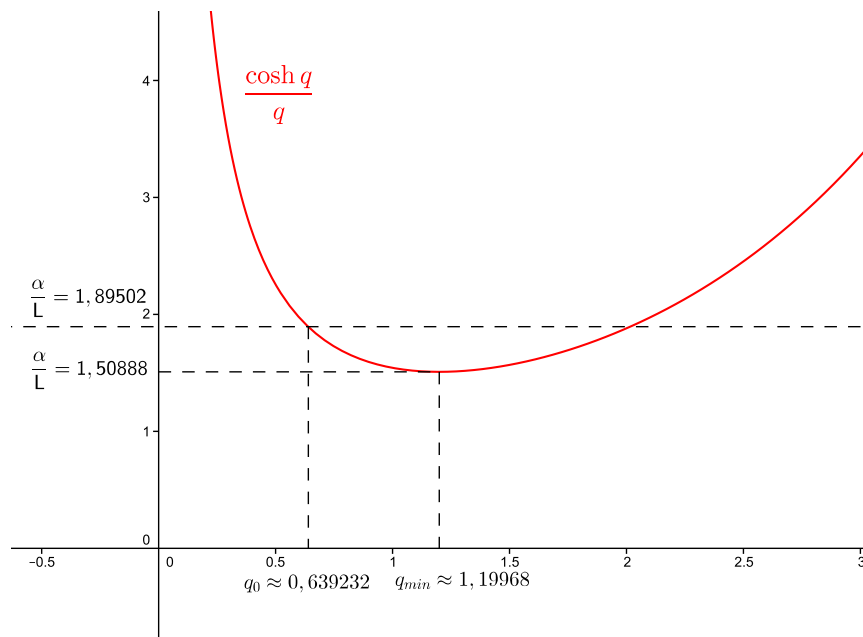
a jejím vyřešením získáme

$$q \leq q_0 \approx 0,639232.$$

Můžeme dopočítat příslušný poměr $\frac{\alpha}{L}$:

$$\frac{\alpha}{L} = \frac{C_1}{L} \cosh \frac{L}{C_1} = \frac{1}{q} \cosh q \geq \frac{1}{q_0} \cosh q_0 \approx 1,895025.$$

Nejllepší ilustrací zde bude graf funkce $\frac{\cosh q}{q}$.



Jak již bylo řečeno, pro hodnoty $\frac{\alpha}{L} < 1,50888$ neobdržíme žádný stacionární bod. Pro hodnoty $\frac{\alpha}{L}$ ležící mezi oběma mezními poměry získáme dva stacionární body, které nejsou extrémů funkcionálu. Z obrázku je dále patrné, že dostaneme-li dvě „podezřelé“ funkce, můžeme vyloučit tu s menší hodnotou C_1 . Situaci, kde jsou hodnoty $\frac{\alpha}{L}$ vyšší než 1,89502, budeme rozebírat dále. Uvedenými úvahami jsme tedy získali informaci o tom, kdy extrém nenastává. Abychom byli schopni říci něco o jeho existenci, bude nutné hledat řešení na obecnějším prostoru a pozměnit formulaci úlohy. Pro další postup je nejprve nutné shrnout pojmy, se kterými budeme dále pracovat.

4 Formulace úloh variačního počtu v prostoru lipschitzovských křivek

V rámci práce bude zapotřebí rozšířit prostor, na němž budeme hledat řešení. Integrály, které budeme počítat, budeme chápat jako Lebesgueovy. Nejprve uveďme následující definice, které můžeme najít například v [11].

Definice 4.1. Necht $1 \leq p < \infty$ a necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Potom definujeme

$$L^p(a, b) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^* : f \text{ je měřitelná, } \int_a^b |f|^p dx < \infty \right\}.$$

Rovněž definujeme normu

$$\|f\|_{L^p} \stackrel{\text{ozn.}}{=} \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

V dalších úvahách nebudeme rozlišovat pojem funkce a třída funkcí, což v praxi znamená, že funkce, které se liší na množině míry nula, budeme považovat za totožné. Pro praktické úlohy zobecníme prostory $L^p(a, b)$ i pro případ $p = \infty$.

Definice 4.2. Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Symbolem $L^\infty(a, b)$ značme množinu všech měřitelných funkcí f , pro něž existuje $M \in \mathbb{R}$ takové, že $|f(x)| \leq M$ pro skoro všechna $x \in \langle a, b \rangle$. Nejmenší konstanta M s touto vlastností se nazývá L^∞ -normou funkce f , tzn.

$$\|f\|_{L^\infty(a,b)} \stackrel{\text{ozn.}}{=} \operatorname{ess\,sup}_{x \in \langle a,b \rangle} |f(x)| \stackrel{\text{ozn.}}{=} \inf_{N \subset \langle a,b \rangle, \lambda(N)=0} \sup_{x \in \langle a,b \rangle \setminus N} |f(x)|.$$

Na závěr podkapitoly ještě uvedeme větu o záměně derivace a integrálu, tentokrát však pro Lebesgueův integrál. Věta byla převzata z [3].

Věta 4.1. Necht $f(x, t)$ je funkce $(n+1)$ proměnných definovaná na $A \times I$, kde $A \subseteq \mathbb{R}^n$ a $I \subseteq \mathbb{R}$ je otevřený interval. Dále necht jsou splněny následující podmínky:

- Pro každé $t \in I$ je funkce $f(\cdot, t)$ (definovaná na množině A) měřitelná.
- Existuje $t_0 \in I$ takové, že funkce $f(\cdot, t_0)$ je integrovatelná na A .
- Pro všechna $t \in I$ a skoro všechna $x \in A$ existuje (konečná) derivace $f'_t(x, t)$.
- Existuje funkce h integrovatelná na A taková, že pro všechna $t \in I$ a skoro všechna $x \in A$ platí

$$|f'_t(x, t)| \leq h(x).$$

Pak je funkce $f(\cdot, t)$ integrovatelná na A dokonce pro všechna $t \in I$. Navíc má funkce g definovaná předpisem

$$g(t) = \int_A f(x, t) dx$$

derivaci na intervalu I a platí

$$g'(t) = \int_A f'_t(x, t) dx,$$

tzn.

$$\frac{d}{dt} \int_A f(x, t) dx = \int_A f'_t(x, t) dx.$$

4.1 Lipschitzovsky spojité funkce

Nejprve shrňme několik typů spojitosti, s nimiž budeme dále pracovat.

Definice 4.3. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory. Zobrazení $f : X \rightarrow Y$ je stejnoměrně spojitě na neprázdné množině $M, M \subseteq X$, právě tehdy, když*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in M) : \|x - y\|_X < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_Y < \varepsilon.$$

Dále platí, že je-li f stejnoměrně spojitě na M , je na M spojitě. Je-li f spojitě v M a je-li M navíc kompaktní množina, je f také stejnoměrně spojitě v M . Pro další úvahy budeme potřebovat ještě následující definice.

Definice 4.4. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a nechť $\emptyset \neq M \subseteq X$. Zobrazení $f : X \rightarrow Y$ je lipschitzovsky spojitě na M právě tehdy, když*

$$(\exists L > 0)(\forall x, y \in M) : \|f(x) - f(y)\|_Y \leq L\|x - y\|_X.$$

Takovou konstantu L nazveme konstantou lipschitzovskosti.

Jako speciální případ uveďme ještě definici pro funkce jedné proměnné.

Definice 4.5. *Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval. Funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je lipschitzovsky spojitá v I právě tehdy, když*

$$(\exists L > 0)(\forall x, y \in I) : |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

Věta 4.2. *Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Vektorová funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je lipschitzovsky spojitá v M právě tehdy, když je lipschitzovsky spojitá ve všech složkách.*

Pro další účely nás bude rovněž zajímat diferencovatelnost funkce f . Následující věty byly hojně čerpany z [4].

Věta 4.3. *Nechť $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je lipschitzovsky spojitá v intervalu I s konstantou lipschitzovskosti L . Pak existuje f' skoro všude v I a navíc $|f'| \leq L$.*

Věta 4.4. *Nechť $f \in L^\infty(a, b)$, kde $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Pak*

$$A(x) = \int_a^x f(t) dt$$

je lipschitzovská na $\langle a, b \rangle$.

Důkaz. Stačí si rozepsat

$$|A(x) - A(y)| = \left| \int_a^x f(t) dt - \int_a^y f(t) dt \right| = \left| \int_y^x f(t) dt \right| \leq \int_y^x \underbrace{|f(t)|}_{\leq L \text{ s.v.}} dt \leq L|x - y|.$$

□

Definice 4.6. Funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je absolutně spojitá v intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N} : \left(I \ni a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \dots \leq a_n < b_n \in I, \sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta \right) \Rightarrow \sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Věta 4.5. Funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je absolutně spojitá na $\langle a, b \rangle$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, právě tehdy, existuje-li funkce $g \in L^1(a, b)$ taková, že

$$(\forall x \in \langle a, b \rangle) : f(x) = f(a) + \int_a^x g(t) dt.$$

Navíc pak platí

$$f'(x) = g(x)$$

pro skoro všechna $x \in (a, b)$. Integrál zde budeme chápat jako Lebesgueův.

Věta 4.6. (Integrace per partes) Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jsou absolutně spojitě v $\langle a, b \rangle$. Potom je

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx.$$

Věta 4.7. Je-li $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitzovsky spojitá na intervalu I , je na I také absolutně spojitá.

Důkaz. Stačí využít lipschitzovskou podmínku,

$$\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| \leq \sum_{k=1}^n L|b_k - a_k| < L\delta.$$

Pro každé $\varepsilon > 0$ pak můžeme zvolit $0 < \delta \leq \frac{\varepsilon}{L}$. □

Věta 4.8. Je-li f absolutně spojitá na intervalu I , je na I stejnoměrně spojitá.

Důkaz. K důkazu stačí využít definice absolutně spojitě funkce a zvolit $n = 1$. □

Poznámka 4.1. Můžeme shrnout, jak spolu souvisí jednotlivé typy spojitostí.

$$f \text{ je lipschitzovsky spojitá v } I \Rightarrow f \text{ je absolutně spojitá v } I \Rightarrow f \text{ je stejnoměrně spojitá v } I \Rightarrow f \text{ je spojitá v } I.$$

V dalších kapitolách bude zapotřebí provádět operace s lipschitzovskými funkcemi, uved' me ještě následující věty.

Věta 4.9. Necht X, Y jsou normované lineární prostory a $f, g : X \rightarrow Y$ jsou zobrazení lipschitzovská na množině $M \subseteq X$. Pak $f + g, f - g$ jsou rovněž lipschitzovská na M .

Důkaz. Nejprve se věnujme součtu $f + g$. Stačí si rozepsat

$$\begin{aligned} \|(f + g)(x) - (f + g)(y)\|_Y &= \|f(x) - f(y) + g(x) - g(y)\|_Y \leq \|f(x) - f(y)\|_Y + \\ &+ \|g(x) - g(y)\|_Y \leq L_1\|x - y\|_X + L_2\|x - y\|_X = (L_1 + L_2)\|x - y\|_X, \end{aligned}$$

kde L_1, L_2 jsou lipschitzovské konstanty f, g . Podobně budeme postupovat při důkazu, že $f - g$ je lipschitzovská. \square

Věta 4.10. Necht X, Y, Z jsou normované lineární prostory a $f : Y \rightarrow Z$ je lipschitzovské na množině M_2 a $g : X \rightarrow Y$ je lipschitzovské na neprázdné množině $M_1 \subseteq X, M_2 \subseteq Y$ a $g(M_1) \subseteq M_2$. Pak $f \circ g$ je rovněž lipschitzovské na M_1 .

Důkaz. K důkazu postačí využít lipschitzovské podmínky.

$$(\forall x, y \in M_1) : \|f(g(x)) - f(g(y))\|_Z \leq L\|g(x) - g(y)\|_Y \leq LM\|x - y\|_X,$$

kde L, M jsou konstanty lipschitzovskosti zobrazení f a g . \square

Věta 4.11. Necht f, g jsou funkce lipschitzovské na uzavřeném omezeném intervalu $\langle a, b \rangle$. Pak fg je rovněž lipschitzovská na $\langle a, b \rangle$. Je-li navíc $g \neq 0$ na $\langle a, b \rangle$, je funkce $\frac{f}{g}$ také lipschitzovská na $\langle a, b \rangle$.

Důkaz. Nejprve dokažme, že fg je lipschitzovská. Z lipschitzovské podmínky plyne

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|,$$

Podobně

$$|g(x) - g(y)| \leq M|x - y|,$$

kde L, M jsou konstanty lipschitzovskosti. Funkce f, g jsou lipschitzovské na $\langle a, b \rangle$, z Weierstrassovy věty víme, že existují $C, K \in \mathbb{R}$ tak, že pro každé $x \in \langle a, b \rangle$ platí

$$|f(x)| \leq C,$$

$$|g(x)| \leq K,$$

Pak pro každé $x, y \in \langle a, b \rangle$ platí

$$\begin{aligned} |(fg)(x) - (fg)(y)| &= |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)| \leq \\ &\leq |f(x)||g(x) - g(y)| + |g(y)||f(x) - f(y)| \leq (CM + KL)|x - y|. \end{aligned}$$

Podobně budeme postupovat při důkazu, že $\frac{f}{g}$ je lipschitzovská. Protože $g(x) \neq 0$ na uzavřeném omezeném intervalu, existuje kladná konstanta $m = \min_{x \in \langle a, b \rangle} |g(x)|$ taková, že $|g(x)| \geq m$ na celém intervalu. Pak pro každé $x, y \in \langle a, b \rangle$

$$\begin{aligned} \left| \frac{f}{g}(x) - \frac{f}{g}(y) \right| &= \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x)}{g(y)} + \frac{f(x)}{g(y)} - \frac{f(y)}{g(y)} \right| \leq |f(x)| \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)} \right| + \\ &+ \frac{1}{|g(y)|} |f(x) - f(y)| \leq C \frac{|g(x) - g(y)|}{|g(x)g(y)|} + \frac{1}{m} L|x - y| \leq \left(\frac{CM}{m^2} + \frac{L}{m} \right) |x - y|, \end{aligned}$$

kde L, M jsou konstanty lipschitzovskosti f a g . \square

Poznámka 4.2. Za zmínku stojí, že pokud se pohybujeme na otevřeném intervalu, výše uvedená věta neplatí. Například na intervalu $(0, +\infty)$ jsou funkce $f(x) = 1$ a $g(x) = x$ lipschitzovské, ale $\frac{f}{g}$ ani $g \cdot g$ lipschitzovské nejsou.

Lemma 4.1. Necht funkce $p \in L^\infty(a, b)$ a necht dále $\int_a^b p(x)h'(x) dx = 0$ pro každou funkci h lipschitzovskou na $\langle a, b \rangle$, která splňuje $h(a) = h(b) = 0$. Pak p je konstantní skoro všude na $\langle a, b \rangle$.

Důkaz. Budeme postupovat stejně jako u lemmatu 3.1 v kapitole 3. Definujme funkci h předpisem

$$h(x) = \int_a^x (p(t) - \bar{p}) dt.$$

Z věty 4.4 víme, že h je lipschitzovská. Číslo \bar{p} volíme jako integrální průměr funkce p . Můžeme ověřit, že funkce h splňuje okrajové podmínky. Dále platí

$$h'(x) = p(x) - \bar{p} \quad \text{s.v. v } \langle a, b \rangle,$$

proto h je navíc lipschitzovská. Podobně jako u lemmatu 3.1 získáváme

$$\int_a^b (p(x) - \bar{p})(x)h'(x) dx = \int_a^b (p(x) - \bar{p})(p(x) - \bar{p}) dx = \int_a^b (p(x) - \bar{p})^2 dx = 0.$$

Tím pádem musí platit

$$p(x) - \bar{p} = 0 \quad \text{s.v. v } \langle a, b \rangle,$$

a tedy

$$p(x) = \bar{p} \quad \text{s.v. v } \langle a, b \rangle.$$

□

Lemma 4.2. Necht $u, v \in L^\infty(a, b)$ a

$$A(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_a^x u(t) dt.$$

Neht dále

$$\int_a^b u(x)h(x) + v(x)h'(x) dx = 0 \tag{16}$$

pro každou lipschitzovskou funkci h , která splňuje $h(a) = h(b) = 0$. Pak existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že

$$v(x) = A(x) + c \quad \text{s.v. v } \langle a, b \rangle.$$

Důkaz. Důkaz opět povedeme podobně jako v kapitole 3. Víme, že A je lipschitzovská a

$$A'(x) = u(x) \quad \text{s.v. v } \langle a, b \rangle.$$

Vrátíme se ke vztahu (16). Pomocí per partes upravíme

$$\begin{aligned} \int_a^b u(x)h(x) \, dx &= \int_a^b A'(x)h(x) \, dx = \underbrace{[A(x)h(x)]_a^b}_{=0} - \int_a^b A(x)h'(x) \, dx = \\ &= - \int_a^b A(x)h'(x) \, dx. \end{aligned}$$

Po dosazení

$$\begin{aligned} \int_a^b u(x)h(x) + v(x)h'(x) \, dx &= - \int_a^b A(x)h'(x) \, dx + \int_a^b v(x)h'(x) \, dx = \\ &= \int_a^b [v(x) - A(x)]h'(x) \, dx = 0. \end{aligned}$$

Vzhledem k předchozímu lemmatu existuje konstanta c taková, že

$$v(x) - A(x) = c \quad \text{s.v. v } \langle a, b \rangle.$$

Po úpravě

$$v(x) = A(x) + c \quad \text{s.v. v } \langle a, b \rangle.$$

□

4.2 Formulace úloh variačního počtu

Některé z úloh variačního počtu můžeme popsat pomocí funkcionálu J definovaného křivkovým integrálem prvního druhu

$$J(\varphi) = \int_{\varphi} h(x) \, ds,$$

kde

- $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \langle 0, +\infty \rangle \cup \{+\infty\}$ je nezáporná funkce spojitá (ve smyslu poznámky 4.3) na X , kde X je uzavřený, ne nutně omezený, dvojrozměrný interval,
- $J : \chi \rightarrow \langle 0, +\infty \rangle \cup \{+\infty\}$, kde χ je třída lipschitzovských křivek $\varphi : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}^2$, které splňují okrajovou podmínku

$$\varphi(0) = A, \quad \varphi(1) = B,$$

kde $A, B \in X$ jsou předepsané body, a jejich geometrický obraz leží v množině X , tzn. $\varphi(\langle 0, 1 \rangle) \subset X$.

Minimum funkcionálu J budeme hledat ve třídě χ . Dále označme symbolem $l(\varphi)$ délku křivky φ a $\chi_L = \{\varphi \in \chi : (\forall t_1, t_2 \in \langle 0, 1 \rangle) : |\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leq L|t_1 - t_2|\}$.

Poznámka 4.3. Budeme-li v této kapitole hovořit o spojitosti na uzavřené množině X , budeme tím rozumět, že funkce f splňuje podmínku

$$(\forall (x_n) \subset X) : x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x_0). \quad (17)$$

Nejprve formulujme následující větu.

Věta 4.12. *Nechť X je neprázdňá uzavřená podmnožina \mathbb{R}^2 a nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \langle 0, +\infty \rangle \cup \{+\infty\}$ splňuje podmínku (17). Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujme funkci $\tau_n(x)$ předpisem*

$$\tau_n(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq n \\ n + 1 - |x|, & n \leq |x| \leq n + 1 \\ 0, & |x| \geq n + 1 \end{cases},$$

přičemž $|x| \stackrel{\text{ozn.}}{=} \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, a položme

$$f_n(x) = \tau_n(x) \min\{f(x), n\}.$$

Pak f_n jsou spojitě a konečné na X , mají kompaktní nosič a navíc platí

$$f_n \nearrow f \text{ na } X.$$

Důkaz. Funkce τ_n a $\min\{f(x), n\}$ jsou spojitě, jejich součin je rovněž spojitý. Funkce τ_n navíc mají kompaktní nosič a tím pádem rovněž f_n má kompaktní nosič. Funkce $\min\{f(x), n\}$ a τ_n nabývají pouze konečných hodnot. Dále platí

$$0 \leq \tau_n \leq \tau_{n+1},$$

$$0 \leq \min\{f(x), n\} \leq \min\{f(x), n + 1\},$$

tím pádem rovněž

$$f_n \leq f_{n+1}.$$

Zbývá ukázat, že

$$f_n \rightarrow f$$

na X . Nechť $x \in X$ je libovolný bod. Nejprve vyšetřujme situaci, kdy $f(x) < +\infty$. Od jistého indexu n_0 již

$$\min\{f(x), n\} = f(x),$$

$$\tau_n(x) = 1,$$

tím pádem

$$f_n(x) = \tau_n(x)f(x) = f(x).$$

Zbývá vyšetřit případ, kdy $f(x) = +\infty$. Pak

$$\min\{f(x), n\} = n$$

a od jistého indexu $n_0 \in \mathbb{N}$ opět platí $\tau_n(x) = 1$. Proto

$$f_n(x) = n \rightarrow +\infty = f(x).$$

□

Značná část vět a definic uvedených v této kapitole byla inspirována textem [8].

Věta 4.13. *Nechť h, J, X, χ splňují vlastnosti uvedené na počátku kapitoly 4.2 a $L > 0$. Nechť (φ_k) je posloupnost z χ_L , která konverguje stejnoměrně k $\varphi \in \chi$. Potom $\varphi \in \chi_L$ a platí*

$$J(\varphi) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} J(\varphi_k).$$

Důkaz. Nejprve ukažme, že $\varphi \in \chi_L$. Zvolme $t_1, t_2 \in \langle 0, 1 \rangle$ libovolně, ale pevně. Pak, jelikož $(\varphi_k) \subset \chi_L$,

$$|\varphi_k(t_1) - \varphi_k(t_2)| \leq L|t_1 - t_2|.$$

Limitním přechodem pro $k \rightarrow +\infty$ obdržíme

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leq L|t_1 - t_2|,$$

tím pádem $\varphi \in \chi_L$.

Nyní zvolme $\varepsilon > 0$. Na základě předchozí a následně Leviho věty můžeme najít konečnou funkci f , která je spojitá na X a má kompaktní nosič, tak, aby

$$0 \leq f \leq h \quad \int_{\varphi} h \, ds \leq \int_{\varphi} f \, ds + \varepsilon. \quad (18)$$

Funkce f je spojitá a konečná na X a má kompaktní nosič, je tedy i stejnoměrně spojitá na X . Můžeme najít $\delta > 0$ tak, aby

$$(\forall x, y \in X) : |x - y| < 2\delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \quad (19)$$

Dále lze ukázat, že existuje „riemannovský“ součet

$$S(f, \varphi, D) = \sum_{i=1}^m f(x_i) |x_i - x_{i-1}|,$$

přičemž $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m = 1$, $x_i = \varphi(t_i)$, $\max_i |t_i - t_{i-1}| < \frac{\delta}{L}$ a

$$\int_{\varphi} f \, ds \leq S(f, \varphi, D) + \varepsilon. \quad (20)$$

Zvolme $k \in \mathbb{N}$ tak, aby

$$\|\varphi_k - \varphi\|_{\infty} \stackrel{\text{def.}}{=} \max_{t \in (0,1)} |\varphi_k(t) - \varphi(t)| < \min\left\{\delta, \frac{\varepsilon}{m(1 + f(x_1) + \dots + f(x_m))}\right\}. \quad (21)$$

Pak, pro každé t z intervalu $\langle t_{i-1}, t_i \rangle$, platí

$$|\varphi_k(t) - \varphi(t_i)| < 2\delta, \quad (22)$$

neboť

$$|\varphi_k(t) - \varphi(t_i)| = |\varphi_k(t) - \varphi_k(t_i) + \varphi_k(t_i) - \varphi(t_i)| \leq |\varphi_k(t) - \varphi_k(t_i)| + |\varphi_k(t_i) - \varphi(t_i)|. \quad (23)$$

Z lipschitzovskosti φ_k plyne

$$|\varphi_k(t) - \varphi_k(t_i)| \leq L|t - t_i| \leq L|t_{i-1} - t_i| < L \frac{\delta}{L} = \delta.$$

Navíc, na základě (21), platí

$$|\varphi_k(t_i) - \varphi(t_i)| \leq \|\varphi_k - \varphi\|_\infty < \delta.$$

Dosazením do (23) získáváme

$$|\varphi_k(t) - \varphi(t_i)| < \delta + \delta = 2\delta.$$

Můžeme psát

$$\begin{aligned} f(x_i)|x_i - x_{i-1}| &\leq \varepsilon|x_i - x_{i-1}| + (f(x_i) - \varepsilon)^+|x_i - x_{i-1}| \leq \varepsilon|x_i - x_{i-1}| + \\ &+ (f(x_i) - \varepsilon)^+(|\varphi(t_i) - \varphi_k(t_i)| + |\varphi_k(t_i) - \varphi_k(t_{i-1})| + |\varphi_k(t_{i-1}) - \varphi(t_{i-1})|), \end{aligned} \quad (24)$$

kde $(f(x_i) - \varepsilon)^+$ je kladná část $f(x_i) - \varepsilon$. Dále, s přihlédnutím k (21)

$$\begin{aligned} (f(x_i) - \varepsilon)^+|\varphi(t_i) - \varphi_k(t_i)| &\leq f(x_i)|\varphi(t_i) - \varphi_k(t_i)| \leq f(x_i)\|\varphi_k - \varphi\|_\infty \leq \\ &\leq f(x_i) \frac{\varepsilon}{m(1 + f(x_1) + \dots + f(x_m))} < \frac{\varepsilon}{m}, \end{aligned}$$

podobně

$$(f(x_i) - \varepsilon)^+|\varphi(t_{i-1}) - \varphi_k(t_{i-1})| < \frac{\varepsilon}{m}.$$

Nyní se budeme věnovat zbylému členu

$$(f(x_i) - \varepsilon)^+|\varphi_k(t_i) - \varphi_k(t_{i-1})| = (f(x_i) - \varepsilon)^+ \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi_k'(t) dt \right| \leq \quad (25)$$

$$\leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} (f(x_i) - \varepsilon)^+|\varphi_k'(t)| dt \leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\varphi_k(t))|\varphi_k'(t)| dt, \quad (26)$$

jelikož, vzhledem k (22) a (19), platí

$$|f(\varphi(t_i)) - f(\varphi_k(t))| < \varepsilon,$$

a tím pádem i (s připomenutím, že $x_i = \varphi(t_i)$),

$$f(x_i) < f(\varphi_k(t)) + \varepsilon.$$

Je-li $f(x_i) - \varepsilon \geq 0$, pak

$$(f(x_i) - \varepsilon)^+ = (f(x_i) - \varepsilon) \leq f(\varphi_k(t)). \quad (27)$$

V opačném případě by byl vztah (27) splněn triviálně, vzhledem k tomu, že u funkce f předpokládáme nezápornost.

Dosadíme zpět do původní nerovnosti (24)

$$f(x_i)|x_i - x_{i-1}| \leq \varepsilon|x_i - x_{i-1}| + \frac{2\varepsilon}{m} + \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\varphi_k(t))|\varphi_k'(t)| dt.$$

Sečteme přes i a, s přihlédnutím k (18) a (20), obdržíme

$$\begin{aligned} \int_{\varphi} h ds &\leq S(f, \varphi, D) + 2\varepsilon \leq \varepsilon l(\varphi) + 2\varepsilon + \int_0^1 f(\varphi_k(t))|\varphi_k'(t)| dt + 2\varepsilon = \varepsilon(4 + l(\varphi)) + \\ &+ \int_{\varphi_k} f ds \leq C\varepsilon + \int_{\varphi_k} h ds, \end{aligned}$$

kde $C = 4 + l(\varphi)$ je konstanta. To znamená, že pro každé $\varepsilon > 0$ platí

$$\int_{\varphi} h ds \leq C\varepsilon + \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\varphi_k} h ds.$$

Limitním přechodem pro $\varepsilon \rightarrow 0_+$ obdržíme

$$\int_{\varphi} h ds \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\varphi_k} h ds,$$

tzn.

$$J(\varphi) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} J(\varphi_k).$$

□

Věta 4.14. *Nechť h, J, X, χ splňují vlastnosti uvedené na počátku kapitoly 4.2 a χ_L je neprázdňá. Potom J nabývá minima na χ_L .*

Důkaz. Nechť $(\varphi_k) \subset \chi_L$ je minimalizující posloupnost, tj. $J(\varphi_k) \rightarrow \inf_{\psi \in \chi_L} J(\psi)$. Jelikož φ_k jsou lipschitzovské křivky se stejnou lipschitzovskou konstantou L , jsou rovněž stejně stejnoměrně spojité. Dále, opět díky lipschitzovské vlastnosti,

$$\begin{aligned} \forall t \in \langle 0, 1 \rangle : |\varphi_k(t)| &\leq |\varphi_k(t) - \varphi_k(0) + \varphi_k(0)| \leq |\varphi_k(t) - \varphi_k(0)| + |\varphi_k(0)| \leq \\ &\leq L|t| + |\alpha| \leq L + |\alpha| \stackrel{\text{ozn.}}{=} K, \end{aligned}$$

kde K je konstanta nezávislá na volbě t a k . To znamená, že φ_k jsou stejně omezené a stejně stejnoměrně spojité. Pak, na základě Arzelovy-Ascoliho věty, můžeme z (φ_k) vybrat stejnoměrně konvergentní podposloupnost, pro jejíž limitu φ díky uzavřenosti množiny X platí $\varphi((0, 1)) \subset X$ a $\varphi \in \chi_L$. Proved' me pro přehlednost přeznačení, označme (φ_k) vybranou stejnoměrně konvergentní posloupnost a φ její limitu, která je rovněž prvkem χ_L . Pak, podle věty 4.13, platí

$$J(\varphi) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} J(\varphi_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} J(\varphi_k) = \inf_{\psi \in \chi_L} J(\psi).$$

Křivka φ je tedy minimizér, tzn.

$$J(\varphi) = \min_{\psi \in \chi_L} J(\psi).$$

□

Poznámka 4.4. Má-li J na χ_L více minimizérů, můžeme mezi nimi vybrat ten, který má minimální délku. Ukažme, že takový minimizér skutečně existuje. Nechť $\Phi \subset \chi_L$ je množina všech minimizérů a

$$i \stackrel{\text{ozn.}}{=} \inf_{\psi \in \Phi} l(\psi).$$

Z definice infima existuje posloupnost $(\varphi_k) \subset \Phi$ tak, že

$$l(\varphi_k) \rightarrow i.$$

Stejně jako ve větě 4.14 z ní můžeme vybrat stejnoměrně konvergentní podposloupnost s limitou φ , kterou opět budeme značit stejně jako posloupnost původní. Dále víme, že

$$l(\varphi) = \int_{\varphi} 1 \, ds.$$

Můžeme použít větu 4.14, v níž zvolíme $h = 1$ (takto zvolená funkce h splňuje podmínky, které jsou kladeny na počátku kapitoly). Platí tedy

$$l(\varphi) = \int_{\varphi} ds \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\varphi_k} ds = \liminf_{k \rightarrow \infty} l(\varphi_k) = i. \quad (28)$$

Dále je potřeba ukázat, že rovněž φ je prvkem Φ . Vraťme se k funkcionálu s původní funkcí h . Z věty 4.14 víme, že

$$\int_{\varphi} h \, ds \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\varphi_k} h \, ds,$$

kde φ_k jsou minimizéry, takže výraz na pravé straně nerovnosti odpovídá minimu funkcionálu J . Z toho vyplývá, že rovněž $\varphi \in \Phi$, což, vzhledem k (28) znamená, že $l(\varphi) = \min_{\psi \in \Phi} l(\psi)$.

Poznámka 4.5. (Přirozená parametrizace křivky) Nechť

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)), \quad t \in \langle a, b \rangle$$

je lipschitzovská křivka a

$$l \stackrel{\text{def.}}{=} \int_a^b |\varphi'(t)| \, dt$$

její délka. Definujme funkci $d : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$ předpisem

$$d(\xi) = \inf \{ t \in \langle a, b \rangle : \int_a^t |\varphi'(s)| \, ds = \xi l \},$$

kde $\xi \in \langle 0, 1 \rangle$. Všimněme si, že $d(\xi)$ je funkce neklesající na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ a

$$\int_a^{d(\xi)} |\varphi'(s)| \, ds = \xi l.$$

Položme

$$\psi(\xi) = \varphi(d(\xi)) = (\varphi_1(d(\xi)), \varphi_2(d(\xi))), \quad \xi \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Pak ψ je opět lipschitzovská křivka, neboť

$$\begin{aligned} (\forall \xi_1, \xi_2 \in \langle 0, 1 \rangle) : |\psi(\xi_1) - \psi(\xi_2)| &= |\varphi(d(\xi_1)) - \varphi(d(\xi_2))| = \left| \int_{d(\xi_2)}^{d(\xi_1)} \varphi'(s) \, ds \right| \\ &\leq \left| \int_{d(\xi_2)}^{d(\xi_1)} |\varphi'(s)| \, ds \right| = \left| \int_a^{d(\xi_1)} |\varphi'(s)| \, ds - \int_a^{d(\xi_2)} |\varphi'(s)| \, ds \right| = |\xi_1 l - \xi_2 l| = l |\xi_1 - \xi_2|. \end{aligned}$$

Navíc lze ukázat, že

$$|\psi'(\xi)| = l$$

skoro všude na $\langle 0, 1 \rangle$ a pro každou funkci $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, která je nezáporná a spojitá na $\varphi(\langle a, b \rangle) = \psi(\langle 0, 1 \rangle)$, platí

$$\int_{\varphi} h \, ds = \int_{\psi} h \, ds.$$

Věta 4.15. (Věta o regularitě) Nechť h, J, X, χ splňují vlastnosti uvedené na počátku kapitoly 4.2 a nechť φ je minimizér J na χ parametrizovaný tak, že $|\varphi'|$ je konstanta, $\varphi(\langle 0, 1 \rangle) \subset \text{int} X$ a $0 < h < \infty$ na $\varphi(\langle 0, 1 \rangle)$. Nechť h je třídy $C^2(\text{int} X)$. Potom φ'' je lipschitzovská na $\langle 0, 1 \rangle$.

Důkaz. Na úvod je vhodné si uvědomit, že

$$l \stackrel{\text{ozn.}}{=} l(\varphi) = \int_{\varphi} ds = \int_0^1 |\varphi'(t)| dt = |\varphi'| \int_0^1 dt = |\varphi'|.$$

Vyšetřujeme extrém funkcionálu

$$J(\varphi) = \int_{\varphi} h(x) ds = \int_0^1 h(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + (\varphi_2'(t))^2} dt.$$

Zavedme funkci F proměnné λ předpisem $F(\lambda) = J(\varphi + \lambda\psi)$, kde $\lambda \in \mathbb{R}$ a ψ je lipschitzovská křivka $\psi : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}^2$ splňující $\psi(0) = \psi(1) = 0$.

$$F(\lambda) = \int_0^1 \underbrace{h(\varphi_1(t) + \lambda\psi_1(t), \varphi_2(t) + \lambda\psi_2(t))}_{\stackrel{\text{ozn.}}{=} g(t, \lambda)} |\varphi'(t) + \lambda\psi'(t)| dt.$$

Má-li J extrém v bodě φ , platí

$$D_{\psi}J(\varphi) = 0,$$

pokud derivace existuje. Budeme-li derivovat funkcionál J ve směru ψ , budeme vlastně počítat derivaci F podle proměnné λ ,

$$F'(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} J(\varphi + \lambda\psi).$$

Použijeme větu 4.1 o záměně derivace a integrálu. Označme pro přehlednost

$$f(t, \lambda) \stackrel{\text{ozn.}}{=} h(\varphi_1(t) + \lambda\psi_1(t), \varphi_2(t) + \lambda\psi_2(t)) |\varphi'(t) + \lambda\psi'(t)|.$$

Vzhledem k tomu, že nás zajímá derivace F v bodě $\lambda = 0$, bude nám stačit vyšetřovat vlastnosti funkce f na množině $\langle 0, 1 \rangle \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, přičemž ε je tak malé, aby pro každé $\lambda \in \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle$

$$(\varphi + \lambda\psi)(\langle 0, 1 \rangle) \subset \text{int } X,$$

$$l - |\lambda|M > 0,$$

kde M je konstanta lipschitzovskosti křivky ψ . Nejprve nás bude zajímat měřitelnost $f(\cdot, \lambda)$. Zobrazení φ , ψ a h jsou spojitá, jejich složení $g(\cdot, \lambda)$ je rovněž spojitě na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, je tedy i měřitelné pro každé $\lambda \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Z lipschitzovskosti φ a ψ dále plyne, že $|\varphi'(t) + \lambda\psi'(t)|$ je měřitelná pro každé $\lambda \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Zvolíme-li $\lambda_0 = 0$, je funkce $f(\cdot, \lambda_0)$ integrovatelná, jelikož $h \circ \varphi$ je spojitá a konečná na kompaktu $\langle 0, 1 \rangle$, tím pádem omezená, a $|\varphi'(t)|$ je rovněž omezená a měřitelná.

Dále budeme vyšetřovat derivaci f podle λ

$$f'_\lambda(t, \lambda) = \left(\sum_{i=1}^2 \left[\frac{\partial h}{\partial x_i}(\varphi_1(t) + \lambda\psi_1(t), \varphi_2(t) + \lambda\psi_2(t)) \right] \psi_i(t) \right) |\varphi'(t) + \lambda\psi'(t)| +$$

$$+ h(\varphi_1(t) + \lambda\psi_1(t), \varphi_2(t) + \lambda\psi_2(t)) \sum_{i=1}^2 \frac{(\varphi'_i(t) + \lambda\psi'_i(t))\psi'_i(t)}{|\varphi'(t) + \lambda\psi'(t)|} =$$

$$= [\nabla h(\varphi(t) + \lambda\psi(t))] \psi(t) |\varphi'(t) + \lambda\psi'(t)| + \quad (29)$$

$$+ h(\varphi(t) + \lambda\psi(t)) \frac{\varphi'(t) + \lambda\psi'(t)}{|\varphi'(t) + \lambda\psi'(t)|} \psi'(t). \quad (30)$$

Budeme hledat integrovatelnou majorantu. Vzhledem k předpokladům věty lze první člen (29) omezit konstantou. Abychom mohli konstantou omezit i druhý sčítanec (30), bude nutné vyšetřit výraz $|\varphi'(t) + \lambda\psi'(t)|$. Z trojúhelníkové nerovnosti

$$|\varphi'(t)| = |\varphi'(t) + \lambda\psi'(t) - \lambda\psi'(t)| \leq |\varphi'(t) + \lambda\psi'(t)| + |\lambda||\psi'(t)| \leq |\varphi'(t) + \lambda\psi'(t)| + |\lambda|M.$$

Po převedení

$$|\varphi'(t) + \lambda\psi'(t)| \geq |\varphi'(t)| - |\lambda|M = l - |\lambda|M \geq l - \varepsilon M > 0.$$

Funkci f'_λ tedy můžeme omezit konstantou, která je integrovatelnou majorantou. Rovněž to znamená, že f'_λ je konečná pro všechna $t \in \langle 0, 1 \rangle$ a skoro všechna $\lambda \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Derivace funkcionálu J v bodě φ ve směru ψ bude odpovídat derivaci F v bodě $\lambda = 0$.

$$F'(0) = \int_0^1 \nabla h(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \psi(t) |\varphi'(t)| + h(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|} \psi'(t) dt =$$

$$= \int_0^1 (\nabla h \circ \varphi)(t) \psi(t) \underbrace{|\varphi'(t)|}_{=l} + (h \circ \varphi)(t) \underbrace{\frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|}}_{=l} \psi'(t) dt = 0.$$

Nyní volme $u, v, A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $u(t) = (\nabla h \circ \varphi)(t)l$, $v(t) = (h \circ \varphi)(t)\varphi'(t)\frac{1}{l}$ a $A(t) = \int_0^t (\nabla h \circ \varphi)(s)l ds$. Funkce $(h \circ \varphi)$ je spojitá na $\langle 0, 1 \rangle$, to znamená, že je zde omezená. Podobně vektorová funkce $(\nabla h \circ \varphi)$ je spojitá na $\langle 0, 1 \rangle$, tím pádem obě složky jsou zde rovněž omezené a tím pádem i prvky prostoru $L^\infty(0, 1)$. Aplikací věty 4.2 na jednotlivé složky získáme vztah

$$(h \circ \varphi)(t)\varphi'(t)\frac{1}{l} = A(t) + c \quad \text{s.v. v } \langle 0, 1 \rangle. \quad (31)$$

Jelikož předpokládáme $h > 0$ na $\varphi(\langle 0, 1 \rangle)$, můžeme vyjádřit φ' jako

$$\varphi'(t) = l \frac{A(t) + c}{(h \circ \varphi)(t)} \quad \text{s.v. v } \langle 0, 1 \rangle.$$

Vektorová funkce $A(t)$ je lipschitzovská na $\langle 0, 1 \rangle$ a má dokonce lipschitzovskou derivaci, neboť $h \in C^2(\text{int } X)$, l a c jsou konstanty a funkce $(h \circ \varphi)(t)$ je složením dvou lipschitzovských funkcí, tím pádem z 4.10 lipschitzovská, a z předpokladů nabývá pouze kladných hodnot. To znamená, že φ' je rovněž lipschitzovská. Obě strany rovnosti lebesgueovsky zintegrujeme

$$\int_0^t \varphi'(s) \, ds = l \int_0^t \frac{A(s) + c}{(h \circ \varphi)(s)} \, ds$$

a obdržíme

$$\varphi(t) - \varphi(0) = l \int_0^t \frac{A(s) + c}{(h \circ \varphi)(s)} \, ds.$$

Integrand na pravé straně rovnosti je však spojitá funkce, integrál tedy můžeme chápat jako Riemannův. Nyní opět zderivujeme podle proměnné t . Získáme

$$\varphi'(t) = l \frac{A(t) + c}{(h \circ \varphi)(t)},$$

tentokrát už všude na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, a φ' je navíc lipschitzovská, díky větě 4.11. Dále rozepíšme derivaci $(h \circ \varphi)$,

$$(h \circ \varphi)' = (\nabla h \circ \varphi) \varphi',$$

přičemž výraz na pravé straně je skalárním součinem lipschitzovských funkcí. Platí tedy, že $(h \circ \varphi)'$ je lipschitzovská. Nyní se, s využitím věty 4.11, můžeme vrátit ke vztahu

$$\varphi'(t) = l \frac{A(t) + c}{(h \circ \varphi)(t)},$$

tentokrát již s informací, že $A(t) + c$ a $(h \circ \varphi)$ mají lipschitzovskou první derivaci, tím pádem i jejich podíl má lipschitzovskou první derivaci, neboť

$$\left(\frac{A(t) + c}{(h \circ \varphi)(t)} \right)' = \frac{(A(t) + c)'(h \circ \varphi)(t) - (A(t) + c)[(h \circ \varphi)(t)]'}{[(h \circ \varphi)(t)]^2}$$

a všechny členy v čitateli i jmenovateli jsou lipschitzovské. Znamená to tedy, že φ'' je lipschitzovská, což jsme chtěli dokázat. \square

4.3 Úlohy monotónní v druhé proměnné

Nyní budeme uvažovat uzavřený, ne nutně omezený, interval $I \subset \mathbb{R}$ a funkci $h : I \rightarrow \langle 0, +\infty \rangle \cup \{+\infty\}$, která je spojitá, neklesající a závisí pouze na proměnné y . Budeme vyšetřovat extrémův funkcionálu

$$J(\varphi) = \int_{\varphi} h(y) \, ds \tag{32}$$

na množině

$$\begin{aligned} \chi &= \{\varphi : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}^2 : \varphi = (x_\varphi, y_\varphi) \text{ lipschitzovská,} \\ \varphi(0) &= A = (x_A, y_A), \quad \varphi(1) = B = (x_B, y_B), \quad \varphi(\langle 0, 1 \rangle) \subset \mathbb{R} \times I\}. \end{aligned}$$

Jestliže je levý krajní bod intervalu I roven $-\infty$, předpokládejme navíc

$$\int_{-\infty}^{y_A} h(y) dy = \infty. \quad (33)$$

Pro připomenutí dodejme

$$\chi_L = \{\varphi \in \chi : (\forall t_1, t_2 \in \langle 0, 1 \rangle) : |\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leq L|t_1 - t_2|\}.$$

Věta 4.16. *Nechť $L > 0$ a nechť φ je minimizér J na χ_L , který má mezi minimizéry minimální délku. Potom x_φ je monotónní na $\langle 0, 1 \rangle$ a existuje $\xi \in \langle 0, 1 \rangle$ takové, že y_φ je nerostoucí na $\langle 0, \xi \rangle$ a neklesající na $\langle \xi, 1 \rangle$.*

Důkaz. Důkaz povedeme sporem. Nechť nejprve x_φ není monotónní. Potom existují $a, b \in \langle 0, 1 \rangle$ tak, že $a < b$, $x_\varphi(a) = x_\varphi(b)$ a x_φ není na $\langle a, b \rangle$ konstantní. Položme

$$x_\psi(t) = \begin{cases} x_\varphi(a), & t \in \langle a, b \rangle \\ x_\varphi(t), & t \in \langle 0, 1 \rangle \setminus \langle a, b \rangle \end{cases} \quad y_\psi = y_\varphi.$$

Potom $\psi \in \chi_L$ a $J(\psi) \leq J(\varphi)$, protože $h \circ y_\psi = h \circ y_\varphi$, $|\psi'| \leq |\varphi'|$, a zřejmě $l(\psi) < l(\varphi)$. Tím se dostáváme do sporu.

Podobně, nechť dále ξ je bod, v němž y_φ nabývá minima a nechť y_φ není nerostoucí na $\langle 0, \xi \rangle$. Pak existují $a, b \in \langle 0, \xi \rangle$ takové, že $a < b$, $y_\varphi(a) = y_\varphi(b)$ a na intervalu $\langle a, b \rangle$ platí $y_\varphi(t) > y_\varphi(a)$. Položme nyní

$$x_\psi = x_\varphi \quad y_\psi = \begin{cases} y_\varphi(a), & t \in \langle a, b \rangle \\ y_\varphi(t), & t \in \langle 0, 1 \rangle \setminus \langle a, b \rangle \end{cases}.$$

Opět $\psi \in \chi_L$ a $J(\psi) \leq J(\varphi)$, neboť $h \circ y_\psi \leq h \circ y_\varphi$, $|\psi'| \leq |\varphi'|$, a zřejmě $l(\psi) < l(\varphi)$, což je spor. Podobně budeme postupovat v případě, kdy y_φ není neklesající na $\langle \xi, 1 \rangle$. \square

Věta 4.17. *Funkcionál (32) má minimizér na χ .*

Důkaz. Předpokládejme, že existuje $\psi \in \chi$ takové, že $J(\psi) < \infty$. V opačném případě by platilo $J(\psi) = +\infty$ pro každé $\psi \in \chi$ a tvrzení by bylo triviální. Najdeme m_0 tak, aby $\psi \in \chi_{m_0}$. Nechť φ_{m_0} je minimizér J na χ_{m_0} . Pokud je takových více, budeme volit ten, který má nejmenší délku (viz poznámka 4.4).

Nyní budeme konstruovat posloupnost $(\varphi_m)_{m \geq m_0}$ následovně. Pokud je $m > m_0$ a φ_{m-1} je minimizérem J na χ_m , nechme $\varphi_m = \varphi_{m-1}$. V opačném případě definujeme φ_m jako minimizér J na χ_m , který má nejmenší délku.

Dále ukažme, že se konstrukce někdy zastaví, tzn. (φ_m) je od jistého indexu konstantní. Toto provedeme následovně. Nechť φ_{m-1} je minimizér na χ_{m-1} , který již není minimizérem na χ_m , a φ_m je minimizérem na χ_m , který má nejmenší délku. Pak platí

$$J(\varphi_m) < J(\varphi_{m-1}).$$

Nejdříve dokažme

$$l(\varphi_m) > m - 1. \quad (34)$$

Toto provedeme sporem, předpokládejme, že

$$l(\varphi_m) \leq m - 1.$$

Křivku φ_m můžeme přirozeně přeparametrizovat, viz poznámka 4.5. Pro přehlednost značme přeparametrizovanou křivku stejně jako křivku původní. Lze tedy předpokládat, že $|\varphi'_m| = l(\varphi_m) \stackrel{\text{ozn.}}{=} l$. Pak

$$(\forall x, y \in \langle 0, 1 \rangle) : |\varphi_m(x) - \varphi_m(y)| \leq \left| \int_x^y |\varphi'_m(t)| dt \right| = l|x - y|,$$

ovšem $l \leq m - 1$, tím pádem by $\varphi_m \in \chi_{m-1}$, což je spor, protože zároveň platí $J(\varphi_m) < J(\varphi_{m-1})$ a φ_{m-1} by tudíž nemohl být minimizérem na χ_{m-1} .

Z (34) pak plyne, že kdyby se konstrukce nezastavila, šly by délky φ_m do nekonečna. Dále označme

$$s_m = \min_{t \in \langle 0, 1 \rangle} y_{\varphi_m}(t) = y_{\varphi_m}(\xi_m).$$

Pak

$$\begin{aligned} l(\varphi_m) &= \int_0^1 \sqrt{[x'_{\varphi_m}(t)]^2 + [y'_{\varphi_m}(t)]^2} dt \leq \int_0^1 |x'_{\varphi_m}(t)| + |y'_{\varphi_m}(t)| dt = \int_0^1 |x'_{\varphi_m}(t)| dt - \\ &- \int_0^{\xi_m} y'_{\varphi_m}(t) dt + \int_{\xi_m}^1 y'_{\varphi_m}(t) dt = \left| \int_0^1 x'_{\varphi_m}(t) dt \right| - [y_{\varphi_m}(t)]_0^{\xi_m} + [y_{\varphi_m}(t)]_{\xi_m}^1 = \\ &= |x_B - x_A| + y_A + y_B - 2s_m. \end{aligned}$$

Zde se využívá věty 4.16, tzn. x_φ je monotónní na $\langle 0, 1 \rangle$, y_φ je nerostoucí na $\langle 0, \xi_m \rangle$ a neklesající na $\langle \xi_m, 1 \rangle$.

Jdou-li délky φ_m do nekonečna, znamená to

$$\infty \leftarrow l(\varphi_m) \leq |x_B - x_A| + y_A + y_B - 2s_m.$$

Toto může nastat, jen pokud $s_m \rightarrow -\infty$, protože zbylé členy jsou konstantní. Navíc platí

$$\begin{aligned} J(\varphi_m) &= \int_0^1 h(y_{\varphi_m}(t)) \sqrt{(x'_{\varphi_m}(t))^2 + (y'_{\varphi_m}(t))^2} dt \geq \int_0^1 h(y_{\varphi_m}(t)) |y'_{\varphi_m}(t)| dt \geq \\ &\geq \int_0^{\xi_m} h(y_{\varphi_m}(t)) |y'_{\varphi_m}(t)| dt = - \int_0^{\xi_m} h(y_{\varphi_m}(t)) (y'_{\varphi_m}(t)) dt = - \int_{y_{\varphi_m}(0)}^{y_{\varphi_m}(\xi_m)} h(y) dy = \\ &= \int_{s_m}^{y_A} h(y) dy. \end{aligned}$$

Pak by ovšem, vzhledem k (33),

$$J(\varphi_m) \geq \int_{s_m}^{y_A} h(y) dy \rightarrow \infty,$$

což je v rozporu s tím, že by $J(\varphi_m)$ měly tvořit nerostoucí posloupnost konečných čísel. \square

4.4 Úloha o minimální ploše

Se získanými poznatky se můžeme opět vrátit k úloze o minimální ploše, kterou jsme opustili ve chvíli, kdy jsme nebyli schopni rozhodnout o existenci minima v prostoru $C^1(\langle u, v \rangle)$. Jinak tomu však bude, pokud budeme hledat řešení na prostoru lipschitzovských křivek.

Nyní budeme vyšetřovat minimum funkcionálu

$$J(\varphi) = 2\pi \int_{\varphi} y ds \tag{35}$$

na množině

$$\begin{aligned} \chi &= \{\varphi : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}^2 : \varphi \text{ lipschitzovská,} \\ &\varphi(0) = (u, \alpha), \varphi(1) = (v, \beta), \varphi(\langle 0, 1 \rangle) \subset \mathbb{R} \times \langle 0, +\infty \rangle\}, \end{aligned}$$

přičemž $u < v, \alpha, \beta > 0$. Pro funkci h v obecné formulaci úlohy platí $h = y$. Tím pádem h je spojitá, rostoucí a závisí jen na proměnné y . Na základě vět z předchozí kapitoly má funkcionál J minimizér na χ .

Nechť $\varphi = (x_{\varphi}, y_{\varphi}) \in \chi$ je minimizér J parametrizovaný tak, že $|\varphi'|$ je konstantní. Nejprve nás bude zajímat případ, kdy $y_{\varphi} > 0$ pro každé $t \in \langle 0, 1 \rangle$. Jelikož jsou splněny všechny předpoklady věty o regularitě (věta 4.15), víme, že φ má lipschitzovsky spojitou druhou derivaci. Vzhledem k tomu, že $u < v$, musí existovat $t_0 \in (0, 1)$ takové, že

$x'_\varphi(t_0) > 0$. V opačném případě by totiž platilo

$$v = x_\varphi(1) = x_\varphi(0) + \int_0^1 \underbrace{x'_\varphi(t)}_{<0} dt \leq x_\varphi(0) = u.$$

Uvažujme maximální otevřený interval obsahující t_0 , na němž platí $x'_\varphi > 0$. Jeho krajní body označíme t_1, t_2 . To ovšem znamená, že $\varphi(\langle t_1, t_2 \rangle)$ je grafem funkce f , která je třídy $C^2((x_\varphi(t_1), x_\varphi(t_2)))$. Z předchozích kapitol již víme, že v tomto případě jsou jedinými možnými kandidáty funkce ve tvaru

$$f(x) = C_1 \cosh\left(\frac{x - C_2}{C_1}\right). \quad (36)$$

Ukážeme, že $t_1 = 0$ a $t_2 = 1$. Kdyby totiž například $t_1 > 0$, pak by $x'_\varphi(t_1) = 0$ (jinak by (t_1, t_2) nebyl maximální). Tím pádem by však muselo platit $|f'_+(x(t_1))| = +\infty$. Funkce \cosh však má na svém definičním oboru pouze konečné derivace. Podobně bychom postupovali, pokud by $t_2 < 1$. Jedinou přípustnou možností je tedy případ, kdy $t_1 = 0$, $t_2 = 1$, pro který na základě kapitoly 3.1 získáváme nejvýše dvě „podezřelé“ funkce tvaru (36).

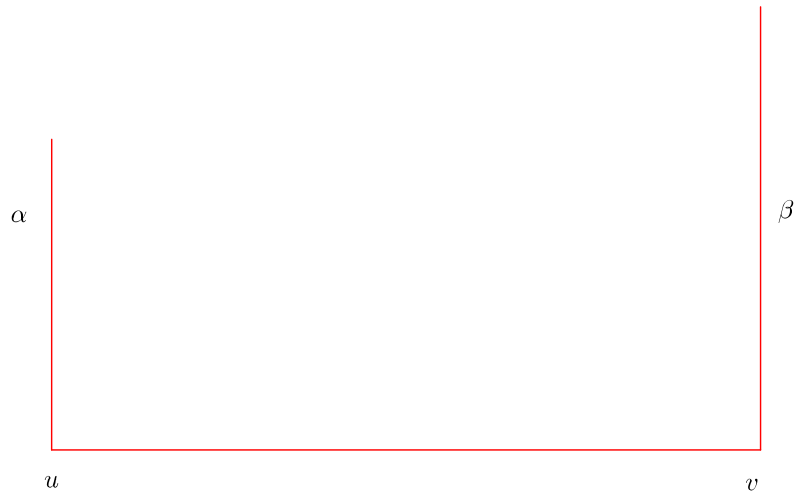
Dále budeme vyšetřovat případ, kdy $y_\varphi = 0$ pro nějaké $t \in \langle 0, 1 \rangle$. Stejně jako v kapitole 3.1 můžeme formulovat následující větu.

Věta 4.18. *Nechť $\varphi \in \chi$ a platí*

$$J(\varphi) > \pi(\alpha^2 + \beta^2).$$

Pak v bodě φ nenastává minimum funkcionálu J .

Důkaz. Důkaz je triviální, stačí za φ_0 zvolit křivku, která sestává ze svislého úseku z bodu (u, α) do $(u, 0)$, vodorovného úseku mezi body $(u, 0)$ a $(v, 0)$ a svislého úseku z $(v, 0)$ do (v, β) .



Obrázek 1: Graf křivky φ_0

Přímým dosazením do J obdržíme

$$J(\varphi_0) = \pi(\alpha^2 + \beta^2).$$

□

Další úvahy budou opět podobné jako v kapitole 3.1. Označme si nyní první a poslední hodnotu parametru t , v níž $y_\varphi = 0$, jako t_1, t_2 , tzn.

$$t_1 = \min\{t \in \langle 0, 1 \rangle : y_\varphi(t) = 0\},$$

$$t_2 = \max\{t \in \langle 0, 1 \rangle : y_\varphi(t) = 0\}.$$

Vzhledem k tomu, že

$$\sqrt{(x'_\varphi(t))^2 + (y'_\varphi(t))^2} \geq \sqrt{(y'_\varphi(t))^2} = |y'_\varphi(t)|,$$

můžeme psát

$$\begin{aligned}
 J(\varphi) &= 2\pi \int_0^1 y_\varphi(t) \sqrt{(x'_\varphi(t))^2 + (y'_\varphi(t))^2} dt \geq 2\pi \left(\int_0^{t_1} y_\varphi(t) |y'_\varphi(t)| dt + \right. \\
 &+ \left. \int_{t_1}^{t_2} y_\varphi(t) \sqrt{(x'_\varphi(t))^2 + (y'_\varphi(t))^2} dt + \int_{t_2}^1 y_\varphi(t) |y'_\varphi(t)| dt \right) = 2\pi \left(\int_0^{t_1} |y_\varphi(t) y'_\varphi(t)| dt + \right. \\
 &+ \left. \int_{t_1}^{t_2} y_\varphi(t) \sqrt{(x'_\varphi(t))^2 + (y'_\varphi(t))^2} dt + \int_{t_2}^1 |y_\varphi(t) y'_\varphi(t)| dt \right) \geq 2\pi \left(\left| \int_0^{t_1} y_\varphi(t) y'_\varphi(t) dt \right| + \right. \\
 &+ \left. \int_{t_1}^{t_2} y_\varphi(t) \sqrt{(x'_\varphi(t))^2 + (y'_\varphi(t))^2} dt + \left| \int_{t_2}^1 y_\varphi(t) y'_\varphi(t) dt \right| \right) = 2\pi \left(\left| \left[\frac{1}{2} (y_\varphi(t))^2 \right]_0^{t_1} \right| + \right. \\
 &\left. \int_{t_1}^{t_2} y_\varphi(t) \sqrt{(x'_\varphi(t))^2 + (y'_\varphi(t))^2} dt + \left| \left[\frac{1}{2} (y_\varphi(t))^2 \right]_{t_2}^1 \right| \right) = \pi\alpha^2 + \\
 &+ 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y_\varphi(t) \sqrt{(x'_\varphi(t))^2 + (y'_\varphi(t))^2} dt + \pi\beta^2 \geq \pi(\alpha^2 + \beta^2).
 \end{aligned}$$

Z předchozí věty však víme, že pokud $J(\varphi) > \pi(\alpha^2 + \beta^2)$, není v bodě φ minimum funkcionálu J . Bude nás tedy zajímat situace, kdy $J(\varphi) = \pi(\alpha^2 + \beta^2)$. Toto může nastat pouze v případě, kdy

$$\begin{aligned}
 x'_\varphi(t) &= 0 \text{ s.v. na } \langle 0, t_1 \rangle \\
 x'_\varphi(t) &= 0 \text{ s.v. na } \langle t_2, 1 \rangle \\
 y_\varphi(t) \underbrace{\sqrt{(x'_\varphi(t))^2 + (y'_\varphi(t))^2}}_{= \text{konst}} &= 0 \text{ s.v. na } \langle t_1, t_2 \rangle.
 \end{aligned}$$

Z poslední podmínky plyne, že $y_\varphi(t) = 0$ skoro všude na $\langle t_1, t_2 \rangle$. Z toho vyplývá, že jediná křivka, v níž může nastat minimum funkcionálu J , je křivka popsaná v důkazu věty 4.18 a znázorněná na obrázku 1.

Nastávají tedy tři možnosti, v nichž by funkcionál J mohl mít minimum. Skutečný minimizér pak určíme dosazením jednotlivých kandidátů do funkcionálu J a porovnáním získaných hodnot.

4.5 Úloha o brachystochroně

Jakou dráhu musíme vymezit kuličce zanedbatelného průměru o hmotnosti m , aby se působením gravitace dostala z počátečního bodu $[0, 0]$, do koncového bodu $[u, \alpha]$, $u > 0$, $\alpha \leq 0$ za nejkratší čas?

Nejprve odvoďme tvar funkcionálu, jenž popisuje čas vzhledem k tvaru křivky a který budeme minimalizovat. Vyjděme ze zákona zachování energie, podle něhož

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(-y),$$

kde g je hodnota gravitačního zrychlení. Nyní můžeme vyjádřit rychlost

$$v = \sqrt{2g(-y)}.$$

Rozdělme dále dráhu na dostatečně malé elementy, pro jejichž délku platí

$$ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Čas potřebný pro zdolání jednoho elementu můžeme spočítat jako

$$t = \frac{ds}{v} = \frac{ds}{\sqrt{2g(-y)}}.$$

Provedeme-li součet přes všechny elementy, obdržíme

$$t = \int_{\varphi} \frac{ds}{\sqrt{2g(-y)}}.$$

Speciálně, je-li $\varphi(\langle 0, 1 \rangle)$ grafem funkce f třídy $C^1(\langle 0, u \rangle)$, pak

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^u \frac{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}{\sqrt{-f(x)}} dx. \quad (37)$$

Budeme tedy vyšetřovat minimum funkcionálu

$$J(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{\varphi} \frac{1}{\sqrt{(-y)}} ds \quad (38)$$

na množině

$$\begin{aligned} \chi &= \{\varphi : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}^2 : \varphi \text{ lipschitzovská,} \\ &\varphi(0) = (0, 0), \varphi(1) = (u, \alpha), \varphi(\langle 0, 1 \rangle) \subset \mathbb{R} \times (-\infty, 0)\}. \end{aligned}$$

Funkce h z obecné formulace (32) zde vypadá následovně

$$h(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2g(-y)}}, & y < 0 \\ +\infty, & y = 0 \end{cases},$$

je spojitá, nezáporná a rostoucí na intervalu $(-\infty, 0)$ a závisí pouze na proměnné y . Navíc je splněna podmínka (33), neboť

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2g(-y)}} dy = \frac{1}{\sqrt{2g}} [-2\sqrt{-y}]_{-\infty}^0 = +\infty.$$

Na základě věty 4.17 víme, že má funkcionál J minimizér na χ . Nechť $\varphi = (x_\varphi, y_\varphi)$ je minimizér, který je parametrizovaný tak, že $|\varphi'|$ je konstantní.

Nejprve ukážeme, že

$$\forall t \in (0, 1) : y_\varphi(t) < 0. \quad (39)$$

V opačném případě by existoval bod $t_0 \in (0, 1)$ takový, že $y_\varphi(t_0) = 0$. Položme $m_1 = \min_{t \in (0, t_0)} y_\varphi(t)$, $m_2 = \min_{t \in (t_0, 1)} y_\varphi(t)$. Ukažme, že $m_1 < 0$. Kdyby totiž $m_1 = 0$, pak by $J(\varphi) = +\infty$. Tím pádem by φ nemohl být minimizérem J , tedy musí platit $m_1 < 0$. Podobně ukážeme, že $m_2 < 0$. Proto, podobně jako v důkazu věty 4.16, existují body $a, b \in (0, 1)$, $a < t_0 < b$, takové, že $y_\varphi(a) = y_\varphi(b)$ a navíc $(\forall t \in (a, b)) : y_\varphi(t) > y_\varphi(a)$. Uvažujme křivku ψ , která je konstruována stejně jako v důkazu věty 4.16. Pak $J(\varphi) > J(\psi)$.

Budou nás tedy zajímat pouze ty minimizéry, pro které platí $y_\varphi < 0$ pro každé $t \in (0, 1)$. Podle věty o regularitě je $\varphi \in C^2((0, 1))$. Vzhledem k tomu, že $u > 0$, musí existovat $t_0 \in (0, 1)$ takové, že $x'_\varphi(t_0) > 0$. V opačném případě by opět

$$u = x_\varphi(1) = x_\varphi(0) + \int_0^1 \underbrace{x'_\varphi(t)}_{<0} dt \leq x_\varphi(0) = 0,$$

což je v rozporu se zadáním úlohy. Uvažujme maximální otevřený interval obsahující t_0 , na kterém platí $x'_\varphi > 0$. Jeho krajní body označme t_1, t_2 . To však znamená, že $\varphi(\langle t_1, t_2 \rangle)$ je grafem jisté funkce $y = f(x)$ třídy $C^2((x_\varphi(t_1), x_\varphi(t_2)))$, jež tím pádem musí splňovat Eulerovu-Lagrangeovu podmínku, která bude, vzhledem k tomu, že nyní vycházíme z funkcionálu (37), vypadat následovně

$$\frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{2(\sqrt{-y})^3} - \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'\sqrt{-y}}} \right) = 0. \quad (40)$$

Integrand však závisí pouze na proměnných y, y' , můžeme tedy použít speciální tvar Eulerovy-Lagrangeovy rovnice a získáme

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-2gy}} \sqrt{1 + (y')^2} - \frac{1}{\sqrt{-2gy}} \frac{(y')^2}{\sqrt{1 + (y')^2}} &= C_1 \\ \frac{1}{\sqrt{-2gy}} \frac{1 + (y')^2 - (y')^2}{\sqrt{1 + (y')^2}} &= C_1 \\ 1 &= C_1 \sqrt{-2gy} \sqrt{1 + (y')^2} \\ C_2 &= \sqrt{-y(1 + (y')^2)}. \end{aligned}$$

Zavedeme substituci

$$y' = \operatorname{tg} \varphi, \quad (41)$$

$\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Po dosazení

$$C_2 = \sqrt{-y(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)}$$

$$C_2^2 = -y(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)$$

$$y = -\frac{C_2^2}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = -C_2^2 \cos^2 \varphi = -C_2^2 \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi). \quad (42)$$

Tímto jsme získali y -ovou souřadnici hledané křivky v závislosti na parametru φ . Pro derivaci y platí

$$y' = C_2^2 \varphi' \sin 2\varphi.$$

Porovnáním s (41) pak

$$\operatorname{tg} \varphi = C_2^2 \varphi' \sin 2\varphi.$$

Rovnost dále upravíme

$$\operatorname{tg} \varphi = C_2^2 \varphi' 2 \sin \varphi \cos \varphi,$$

je-li $\sin \varphi = 0$, obdržíme konstantní řešení, které nevyhovuje původní Eulerově-Lagrangeově rovnici (40). Předpokládejme, že $\sin \varphi \neq 0$, získáme

$$1 = C_2^2 \varphi' 2 \cos^2 \varphi.$$

Zintegrováním obou stran obdržíme

$$x = \frac{C_2^2}{2}(2\varphi + \sin 2\varphi) + C. \quad (43)$$

Tímto jsme získali x -ovou souřadnici hledané křivky. Pro zjednodušení zavedme nové parametry

$$r = \frac{C_2^2}{2} > 0,$$

$$\pi - \theta = 2\varphi.$$

Dosazením do (42), (43) získáme parametrické rovnice funkce f ve tvaru

$$x_f = r(\theta - \sin \theta) + c, \quad (44)$$

$$y_f = r(\cos \theta - 1),$$

kde r, c jsou reálné konstanty. Takto definovaná křivka se nazývá cykloida.

Nyní ukažme, že $t_1 = 0$ a $t_2 = 1$. Kdyby například $t_1 > 0$, muselo by platit $x'_\varphi(t_1) = 0$ (jinak by interval (t_1, t_2) nemohl být maximální). Pak by ovšem $y'_\varphi(t_1) \neq 0$ a tím pádem $|f'_+(x_\varphi(t_1))| = +\infty$. Narozdíl od předchozí úlohy však ještě nedochází ke sporu, neboť cykloida může mít i nekonečnou derivaci. Nekonečná derivace funkce f by v řeči parametrizace (44) znamenala

$$x'_f = [r(\theta - \sin \theta) + c]' = 0.$$

Můžeme si všimnout, že derivace x_f ,

$$x'_f = r(1 - \cos \theta),$$

odpovídá $-y_f$ v parametrizaci (44). To by ovšem znamenalo, že rovněž $y_\varphi(t_1) = 0$, což je spor s (39). Podobně budeme postupovat, pokud $t_2 < 1$. Z toho vyplývá, že $(t_1, t_2) = (0, 1)$.

Nyní ještě ukažme, že existuje jediná cykloida tvaru

$$\begin{aligned}x_f &= r(\theta - \sin \theta) + c, \\y_f &= r(\cos \theta - 1),\end{aligned}$$

kde $\theta \in \langle \theta_1, \theta_2 \rangle \subseteq \langle 0, 2\pi \rangle$, která splňuje okrajové podmínky. Dosadíme souřadnice bodu $[0, 0]$.

$$\begin{aligned}0 &= r(\theta_1 - \sin \theta_1) + c, \\0 &= r(\cos \theta_1 - 1).\end{aligned}$$

Z druhé rovnice dopočteme parametr $\theta_1 = 0$ a dosazením do první rovnice obdržíme $c = 0$. Dále dosadíme souřadnice bodu $[u, \alpha]$ (již víme, že $c = 0$),

$$\begin{aligned}u &= r(\theta_2 - \sin \theta_2), \\ \alpha &= r(\cos \theta_2 - 1).\end{aligned}$$

Jelikož $u > 0$, můžeme obě rovnice podělit

$$\frac{\alpha}{u} = \frac{\cos \theta_2 - 1}{\theta_2 - \sin \theta_2}.$$

Ze zadání víme, že $\frac{\alpha}{u}$ je nekladné číslo. Vyšetřujeme tedy funkci

$$q(x) = \frac{\cos x - 1}{x - \sin x}$$

pro $x \in (0, 2\pi)$. Pro její derivaci platí

$$q'(x) = \frac{-\sin x(x - \sin x) - (\cos x - 1)(1 - \cos x)}{(x - \sin x)^2} = \frac{-x \sin x + 2 - 2 \cos x}{(x - \sin x)^2}.$$

Ukážeme, že $r(x) = -x \sin x + 2 - 2 \cos x > 0$ na intervalu $(0, 2\pi)$. Nejprve spočítáme derivaci funkce r a položíme ji rovnu nule

$$r'(x) = -\sin x - x \cos x + 2 \sin x = \sin x - x \cos x = 0.$$

Po úpravě obdržíme rovnici

$$\operatorname{tg} x = x,$$

jež má na $(0, 2\pi)$ právě jedno řešení, které označíme x_0 . Dále můžeme ověřit, že r je rostoucí na $\langle 0, x_0 \rangle$ a klesající na $\langle x_0, 2\pi \rangle$ a navíc $r(0) = r(2\pi) = 0$. Z toho plyne, že $r(x) > 0$ na intervalu $(0, 2\pi)$.

To ovšem znamená, že q je rostoucí na $(0, 2\pi)$. Protože navíc $\lim_{x \rightarrow 0^+} q(x) = -\infty$, $q(2\pi) = 0$ a q je spojitá na $(0, 2\pi)$, má rovnice $q(x) = p$, kde $p \leq 0$ je parametr, právě jedno řešení v intervalu $(0, 2\pi)$.

Zjistili jsme tedy, že jediným minimizérem, který přichází v úvahu, je cykloida, jejíž parametry jsme schopni jednoznačně dopočítat.

5 Numerické experimenty

5.1 Úloha o minimální ploše řešená pomocí Bézierových křivek

Pro hledání extrémály budeme využívat Bézierovy křivky s daným počtem řídicích bodů. Jejich první souřadnice budeme volit tak, aby byly rovnoměrně rozprostřeny na intervalu $(0, 1)$. Dále víme, že Bézierova křivka prochází krajními řídicími body. Druhé souřadnice zbylých bodů pak budou neznámými, které budeme hledat.

Druhou souřadnici libovolného bodu křivky můžeme dopočítat pomocí vzorce

$$B(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} P_i,$$

kde $t \in \langle 0, 1 \rangle$, n je index posledního z bodů a P_i , $i = 0, 1, \dots, n$, jsou druhé souřadnice řídicích bodů křivky. Podobný vztah máme i pro derivaci Bézierovy křivky,

$$B'(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} t^i (1-t)^{n-i-1} P'_i,$$

kde $P'_i = (P_{i+1} - P_i)$. Budeme hledat minimum funkcionálu

$$J(P) = 2\pi \int_0^1 B(t) \sqrt{1 + (B'(t))^2} dt.$$

Integrál budeme počítat numericky pomocí lichoběžníkového pravidla, které zde bude výhodnější z hlediska implementace. Zvolme $m \in \mathbb{N}$ a uvažujme ekvidistanční dělení

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = 1.$$

Délku každého podintervalu $\langle t_i, t_{i+1} \rangle$ budeme značit h . Pro hodnotu funkcionálu J platí

$$\begin{aligned} J(P) &= \sum_{j=0}^{m-1} \frac{h}{2} \left(B(t_j) \sqrt{1 + (B'(t_j))^2} + B(t_{j+1}) \sqrt{1 + (B'(t_{j+1}))^2} \right) = \\ &= \frac{h}{2} \sum_{j=0}^{m-1} \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t_j^i (1-t_j)^{n-i} P_i \sqrt{1 + \left(n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} t_j^i (1-t_j)^{n-i-1} P_i' \right)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t_{j+1}^i (1-t_{j+1})^{n-i} P_i \sqrt{1 + \left(n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} t_{j+1}^i (1-t_{j+1})^{n-i-1} P_i' \right)^2} \right). \end{aligned}$$

Funkcionál budeme minimalizovat vzhledem k druhým souřadnicím řídicích bodů a pro minimalizaci zvolíme BFGS algoritmus.

Z fyzikálního pohledu je zřejmé, že druhé souřadnice řídicích bodů musí být kladné, což můžeme ošetřit pomocí penalty. Hledáme tedy minimum funkce

$$f(P) := J(P) + \rho \frac{1}{2} \|\max\{0, -P\}\|^2 := J(P) + \rho \frac{1}{2} K(P),$$

kde K je penalizační funkce. Metoda vnější penalty je pak detailněji rozebrána například ve skriptech [12] na straně 75.

5.1.1 BFGS algoritmus

V rámci algoritmu budeme aproximovat Hessián na základě znalostí z předchozích iterací. Algoritmus je blíže popsán ve skriptech [12] na straně 54.

Nejprve budeme potřebovat gradient funkce $f(P)$. Jednotlivé složky můžeme získat jako derivace $J(P)$ podle proměnných P_i . V praxi však budeme gradient počítat numericky podle definice derivace. Dále spočteme gradient penalizačního členu K . Derivace K podle i -té složky bude vypadat následovně

$$\frac{\partial K}{\partial P_i} = 2 \max\{0, -P_i\} \alpha(P),$$

kde $\alpha(P) = 0$, pokud $\max\{0, -P_i\} = 0$, a $\alpha(P) = -1$, pokud $\max\{0, -P_i\} = -P_i$. Gradient pak bude vektorem těchto prvních derivací.

Vstupními argumenty BFGS algoritmu bude vektor neznámých souřadnic v počáteční iteraci (jako nejlepší varianta se jeví počáteční iterace $u = 1$, což tady znamená volbu $P_1 = \dots = P_n = 1$), hodnota gradientu funkce f v příslušných bodech, maximální přípustná chyba řešení a délka kroku pro obdélníkové pravidlo. Jako počáteční aproximaci Hessiánu budeme volit jednotkovou matici.

5.1.2 Numerické výsledky

V rámci kapitoly budeme sledovat, jak se mění hodnota funkcionálu a tvar řešení v závislosti na parametrech. Můžeme například měnit počet bodů, jimiž budeme prokládat Bézierovu křivku, a počet podintervalů, na nichž budeme počítat lichoběžníkové pravidlo. Pro srovnání, velikost plochy, kterou opisuje analyticky získaná křivka, je

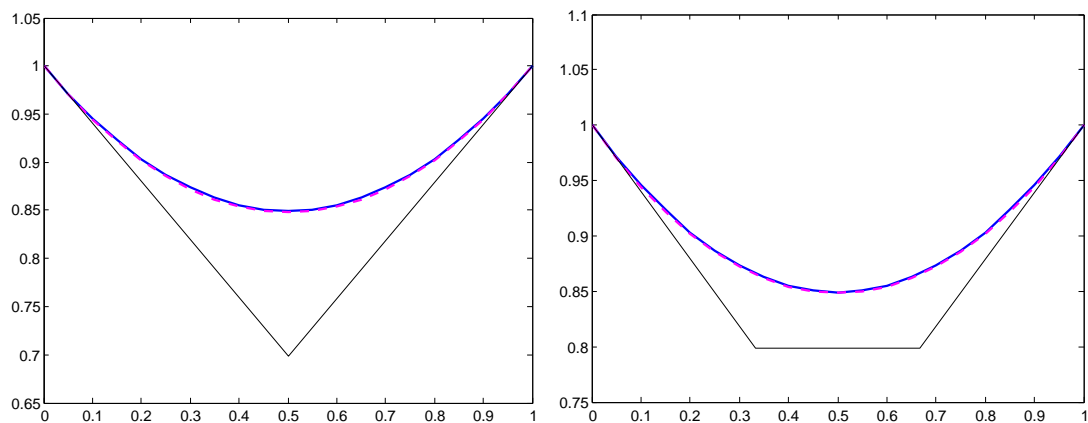
$$S = 2\pi \int_a^b y(x) \sqrt{1 + (y(x)')^2} dx \approx 5,991796978.$$

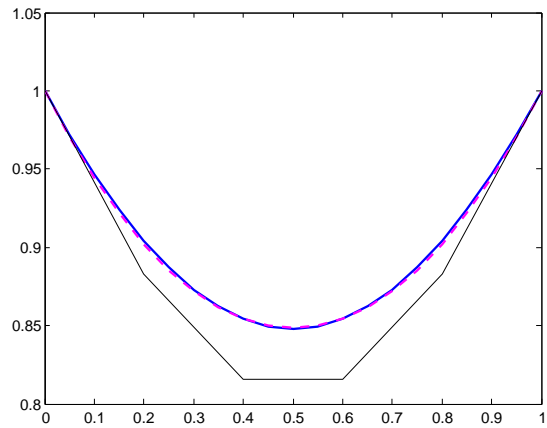
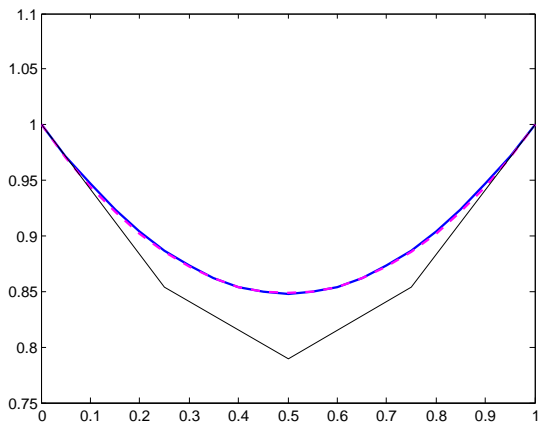
Nejprve budeme sledovat hodnotu funkcionálu a tvar výsledné křivky pro 3,4,5 a 6 řídicích bodů. Velikost kroku volíme $h = 0,05$. Hodnoty funkcionálu jsou zaneseny v následující tabulce.

Počet bodů	$J(P)$
3	5,9918592
4	5,9918596
5	5,9917989
6	5,9917692

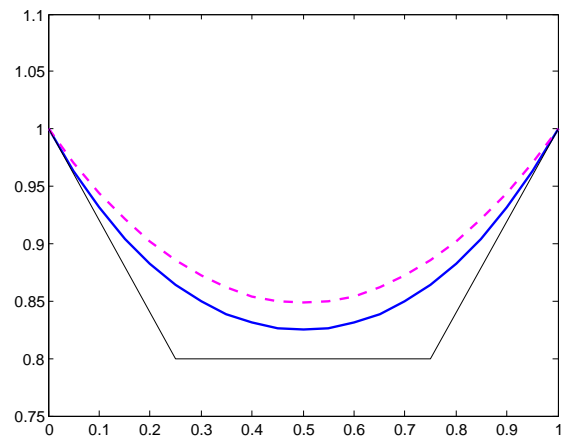
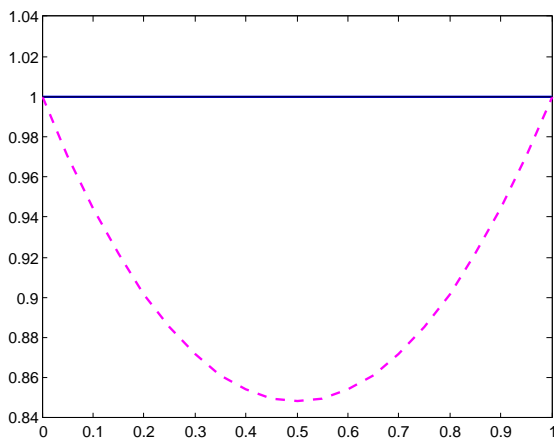
Výsledky byly získány za 4-6 iterací.

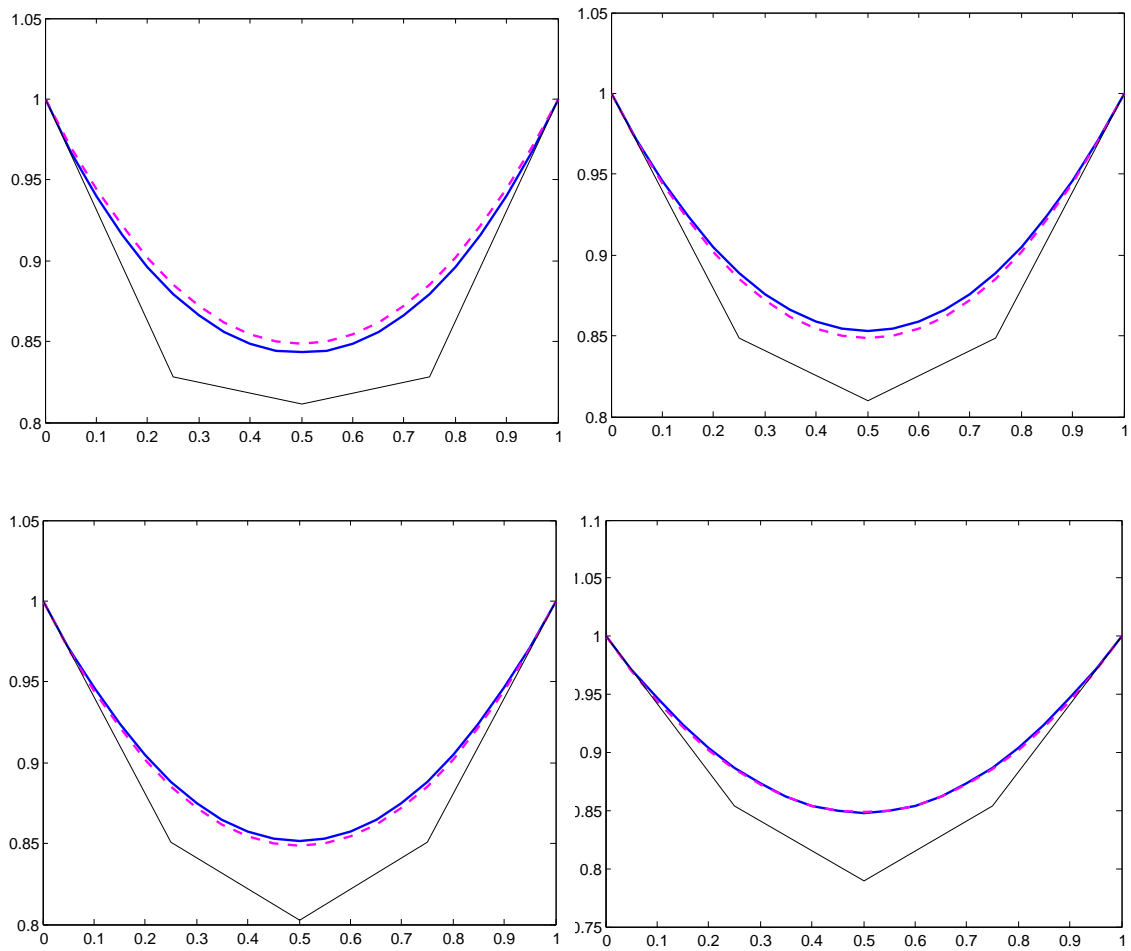
Průběh výsledné křivky pak můžeme sledovat na obrázcích. Černou barvou je znázorněn řídicí polygon Bézierovy křivky, modrou barvou získaná křivka a růžovou analytické řešení.



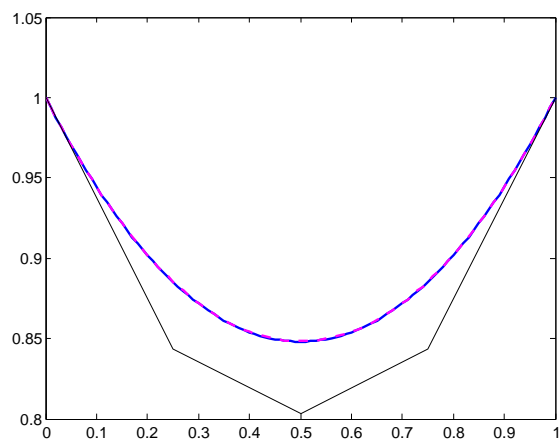
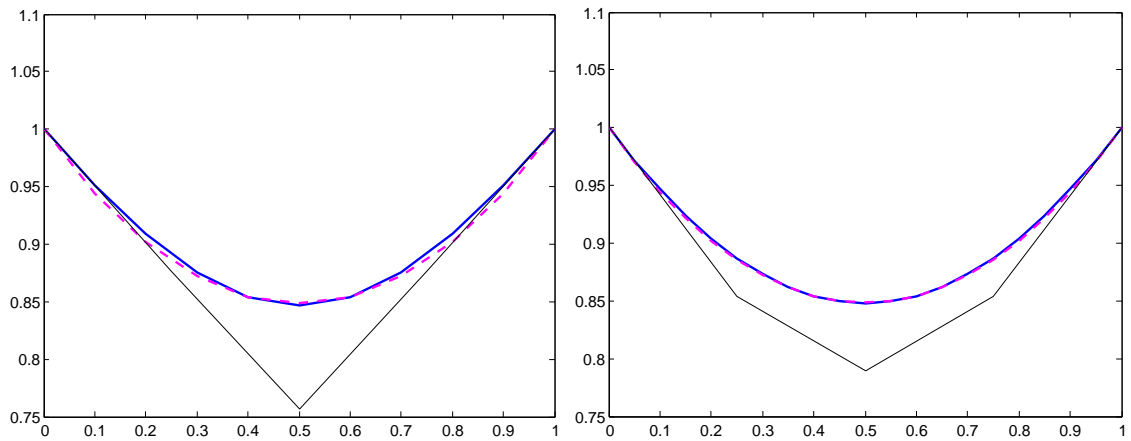


Jak si můžeme povšimnout, už pro tři řídicí body dosahujeme velmi přesné aproximace řešení i hodnoty funkcionálu. Dále můžeme pozorovat, jak se tvaruje Bézierova křivka konstruovaná pomocí pěti řídicích bodů s každou další iterací BFGS algoritmu.

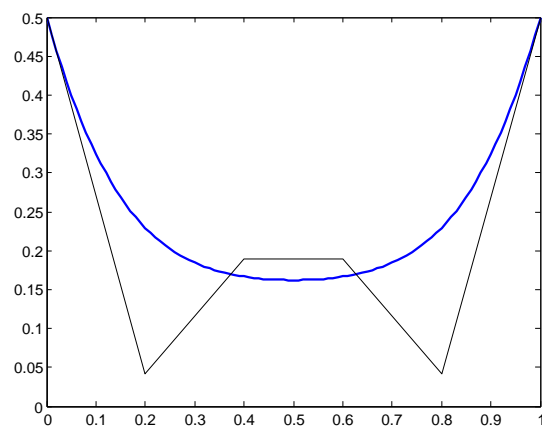




Ještě můžeme sledovat, jak se mění tvar řešení pro různé volby dělení intervalu. Budeme volit délku kroku h postupně 0, 1; 0, 05; 0, 01.



Zde jsou však případné odchylky způsobeny zejména chybou numerické integrace.
 Nyní můžeme nastavit počáteční podmínky tak, aby $\frac{\alpha}{L} < 1, 50888$.

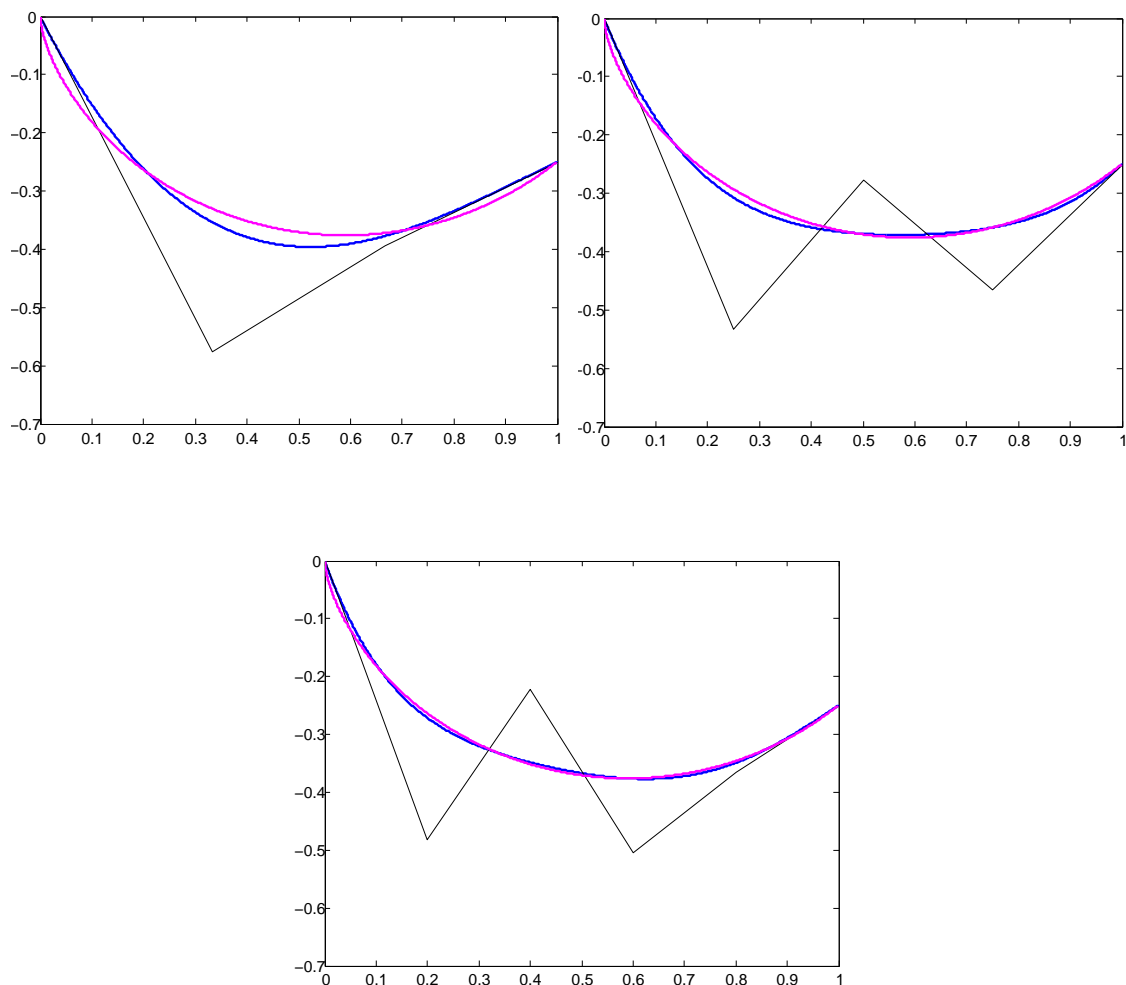


Na obrázku můžeme vidět, že se tvar řešení liší od těch předchozích a více se podobá řešení z obrázku 1. Tvarování však nedospěje až do konce, jelikož řídicí body mohou mít pouze kladné souřadnice a hodnota funkcionálu se mění tak nepatrně, že je v určitém okamžiku proces zastaven ukončující podmínkou.

5.2 Úloha o brachystochroně řešená pomocí Bézierových křivek

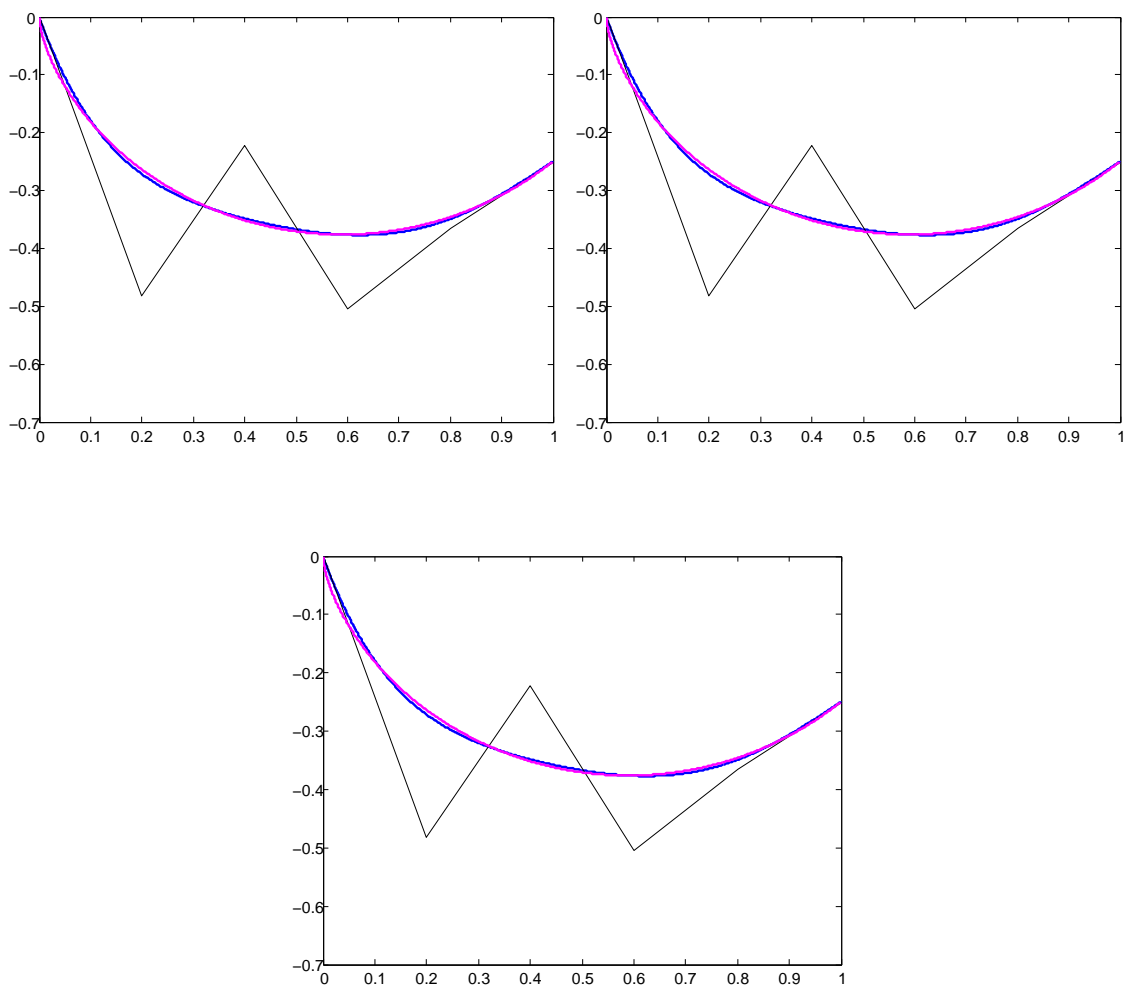
Stejná metoda, která byla představena v předchozí kapitole, může být použita i pro hledání optimální dráhy mezi dvěma body. V algoritmu bude pouze zapotřebí pozměnit funkcionál, jehož extrém budeme hledat, a tím pádem i funkci, která se bude minimalizovat v rámci BFGS algoritmu. Pro srovnání, hodnota funkcionálu (38) pro analyticky získané řešení je 0,6803584855.

Nejprve můžeme pozorovat, jak se mění tvar řešení a hodnota funkcionálu s rostoucím počtem řídicích bodů (4, 5 a 6). Budeme dále volit $h = 0,01$. Výsledky můžeme vidět na obrázcích.



Hodnoty funkcionálu byly postupně 0,635279, 0,640342 a 0,614321. Za zmínku stojí, že přesnost řešení nyní výrazněji závisí na počtu řídicích bodů.

Dále uvažujme Bézierovu křivku se šesti řídicími body a sledujme, jak se mění řešení a hodnota funkcionálu v závislosti na velikosti podintervalů. Pro ilustraci tentokrát volme $h = 0,01$, $h = 0,005$, $h = 0,005$. Výsledky jsou zaneseny v následujících obrázcích.



Hodnoty funkcionálu byly postupně 0,645579, 0,614321, 0,595810.

5.3 Úloha o minimální ploše řešená pomocí metody konečných prvků

Tato kapitola bude mít spíše experimentální charakter a teoretický základ nebude rozebrán do hloubky. Cílem zde bylo pouze představit další možnou metodu, která při testování rovněž dávala pěkné výsledky.

Řešení zde budeme hledat na Sobolevových prostorech $W^{1,2}$, které jsou rozebrány například v [11].

Úloha minimalizace funkcionálu J zde přejde v úlohu hledání funkce $u \in W^{1,2}(0, 1)$, $u(0) = 1$, $u(1) = 1$ tak, aby platilo

$$A(u, v) = 0$$

pro každé $v \in W_0^{1,2}(0, 1) \stackrel{\text{ozn.}}{=} \{w \in W^{1,2}(0, 1), w(0) = w(1) = 0\}$, přičemž

$$A(u, v) = J'(u)(v) = \int_0^1 v \sqrt{1 + (u')^2} + u \frac{v' u'}{\sqrt{1 + (u')^2}} dx = 0$$

odpovídá derivaci funkcionálu J v bodě u ve směru v . $A(u, v)$ však není lineární v proměnné u . Další fází tedy bude linearizace.

5.3.1 Linearizace (Newtonova metoda)

Pro volbu u^k provedeme aproximaci

$$\langle A(u), v \rangle \approx \langle A(u^k) + A'(u^k)(\Delta u^k), v \rangle,$$

kde $A'(u^k) : W_0^{1,2}(0, 1) \rightarrow (W_0^{1,2}(0, 1))^*$ bude popsáno níže. Prostor $(W_0^{1,2}(0, 1))^*$ zde chápeme jako duál prostoru $W_0^{1,2}(0, 1)$. Přejdeme k následující posloupnosti úloh, kde hledáme $\Delta u^k \in W_0^{1,2}(0, 1)$:

$$\langle A'(u^k)(\Delta u^k), v \rangle = -\langle A(u^k), v \rangle \quad \forall v \in W_0^{1,2}(0, 1). \quad (45)$$

Pro další krok platí vztah

$$u^{k+1}(x) = u^k(x) + \alpha \Delta u^k(x).$$

Koeficient α hledáme tak, aby platilo

$$J(u^k + \alpha \Delta u^k) < J(u^k).$$

Dále odvodíme vztah pro levou stranu rovnice (45), k čemuž budeme potřebovat druhou variaci funkcionálu J . Zavedme funkci ψ jako funkci parametru t tak, že

$$\psi(t) = J'(u + t\Delta u)(v),$$

$$\psi(t) = \int_0^1 v \sqrt{1 + (u' + t\Delta u')^2} + (u + t\Delta u) \frac{v'(u' + t\Delta u')}{\sqrt{1 + (u' + t\Delta u')^2}} dx.$$

Pro její derivaci platí

$$\begin{aligned} \psi(t) = & \int_0^1 \frac{v(u' + t\Delta u')\Delta u'}{\sqrt{1 + (u' + t\Delta u')^2}} + \Delta u' \frac{v'(u' + t\Delta u')}{\sqrt{1 + (u' + t\Delta u')^2}} + \\ & + (u + t\Delta u)v' \frac{\Delta u' \sqrt{1 + (u' + t\Delta u')^2} - (u' + t\Delta u) \frac{\Delta u'(u' + t\Delta u')}{\sqrt{1 + (u' + t\Delta u')^2}}}{1 + (u' + t\Delta u')^2} dx \end{aligned}$$

a pro volbu $t = 0$

$$\begin{aligned} \varphi'(0) &= \int_0^1 \frac{vu'\Delta u'}{\sqrt{1+(u')^2}} + \Delta u' \frac{v'u'}{\sqrt{1+(u')^2}} + uv' \frac{\Delta u' \sqrt{1+(u')^2} - u' \frac{\Delta u' u'}{\sqrt{1+(u')^2}}}{1+(u')^2} dx = \\ &= \int_0^1 \frac{u'}{\sqrt{1+(u')^2}} \Delta u' v + \frac{u'}{\sqrt{1+(u')^2}} \Delta u' v' + \frac{u}{(\sqrt{1+(u')^2})^3} \Delta u' v' dx \stackrel{\text{ozn.}}{=} B_u(\Delta u, v). \end{aligned}$$

Nástin algoritmu

Na počátku zvolíme $u^0(x) = 1$, případně jinou počáteční aproximaci, která splňuje okrajové podmínky. Hledáme $\Delta u^k(x) \in W_0^{1,2}(0, 1)$ tak, aby

$$B_{u^k}(\Delta u^k, v) = -A(u^k, v) \stackrel{\text{ozn.}}{=} b_{u^k}(v), \quad \forall v \in W_0^{1,2}(0, 1). \quad (46)$$

$$u^{k+1} = u^k + \alpha \Delta u^k.$$

Úlohu (46) budeme řešit numericky pomocí metody konečných prvků.

5.3.2 Metoda konečných prvků

Uvažujme ekvidistantní dělení intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, $x_1 < \dots < x_n$. Nechť u , Δu , v jsou po částech lineární funkce a systém $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ je systém bázových funkcí metody konečných prvků. Odvodíme matice metody konečných prvků a vektor pravé strany úlohy (46).

Matice B

Prvky matice dostaneme z již získaného funkcionálu

$$B_u(\Delta u, v) = \int_0^1 \underbrace{\frac{u'}{\sqrt{1+(u')^2}} \Delta u' v}_{B_1} + \underbrace{\frac{u'}{\sqrt{1+(u')^2}} \Delta u' v'}_{B_2} + \underbrace{\frac{u}{(\sqrt{1+(u')^2})^3} \Delta u' v'}_{B_3} dx.$$

Dále platí

$$\varphi_p(x) = \begin{cases} \frac{1}{h}(x - x_{p-1}), & x \in (x_{p-1}, x_p) \\ -\frac{1}{h}(x - x_{p+1}), & x \in (x_p, x_{p+1}) \end{cases}$$

$$B_u(\varphi_i, \varphi_j) = \sum_{p=1}^{m-1} \int_{x_p}^{x_{p+1}} \rho_p u' \varphi_i' \varphi_j + \rho_p u' \varphi_i' \varphi_j' + u \rho_p^3 \varphi_i' \varphi_j' dx,$$

přičemž hodnoty u, u', ρ na jednotlivých segmentech můžeme dopočítat pomocí vztahů

$$u = \frac{u_{p+1} + u_p}{2},$$

$$u' = \frac{u_{p+1} - u_p}{x_{p+1} - x_p},$$

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{1 + (u')^2}}.$$

Nyní můžeme dopočítat jednotlivé složky matice tuhosti

$$\begin{aligned} B_1 &= u' \rho \begin{pmatrix} \int_{x_p}^{x_{p+1}} \left(-\frac{1}{h}\right) \left(-\frac{1}{h}\right) (x - x_{p+1}) dx & \int_{x_p}^{x_{p+1}} \left(-\frac{1}{h}\right) \frac{1}{h} (x - x_p) dx \\ \int_{x_p}^{x_{p+1}} \frac{1}{h} \left(-\frac{1}{h}\right) (x - x_{p+1}) dx & \int_{x_p}^{x_{p+1}} \frac{1}{h} \frac{1}{h} (x - x_p) dx \end{pmatrix} = \\ &= u' \rho \begin{pmatrix} -\frac{1}{h} \frac{h}{2} & -\frac{1}{h} \frac{h}{2} \\ \frac{1}{h} \frac{h}{2} & \frac{1}{h} \frac{h}{2} \end{pmatrix} = u' \rho \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_2 &= u' \rho \begin{pmatrix} \int_{x_p}^{x_{p+1}} \left(-\frac{1}{h}\right) (x - x_{p+1}) \left(-\frac{1}{h}\right) dx & \int_{x_p}^{x_{p+1}} \left(-\frac{1}{h}\right) (x - x_{p+1}) \frac{1}{h} dx \\ \int_{x_p}^{x_{p+1}} \frac{1}{h} (x - x_p) \left(-\frac{1}{h}\right) dx & \int_{x_p}^{x_{p+1}} \frac{1}{h} (x - x_p) \frac{1}{h} dx \end{pmatrix} = \\ &= u' \rho \begin{pmatrix} -\frac{1}{h} \frac{h}{2} & \frac{1}{h} \frac{h}{2} \\ -\frac{1}{h} \frac{h}{2} & \frac{1}{h} \frac{h}{2} \end{pmatrix} = u' \rho \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_3 &= u \rho^3 \begin{pmatrix} \int_{x_p}^{x_{p+1}} \left(-\frac{1}{h}\right) \left(-\frac{1}{h}\right) dx & \int_{x_p}^{x_{p+1}} \left(-\frac{1}{h}\right) \frac{1}{h} dx \\ \int_{x_p}^{x_{p+1}} \frac{1}{h} \left(-\frac{1}{h}\right) dx & \int_{x_p}^{x_{p+1}} \frac{1}{h} \frac{1}{h} dx \end{pmatrix} = \\ &= u \rho^3 \begin{pmatrix} \frac{1}{h^2} h & -\frac{1}{h^2} h \\ -\frac{1}{h^2} h & \frac{1}{h^2} h \end{pmatrix} = u \rho^3 \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Matice tuhosti B pak bude součtem B_1 , B_2 a B_3 .

Vektor \mathbf{b}

Prvky vektoru pravé strany získáme ze vztahu

$$b_u(v) = \int_0^1 - \underbrace{v \sqrt{1 + (u')^2}}_{b_1} - \underbrace{\frac{uu'}{\sqrt{1 + (u')^2}} v'}_{b_2} dx.$$

$$b_u(\varphi_i) = \sum_{p=1}^{m-1} - \int_{x_p}^{x_{p+1}} \frac{1}{\rho} \varphi_i - \rho u u' \varphi_i' dx.$$

Složky vektoru pravé strany získáme následovně.

$$b_1 = -\frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} \int_{x_p}^{x_{p+1}} \left(-\frac{1}{h}\right) (x - x_{p+1}) dx \\ \int_{x_p}^{x_{p+1}} \frac{1}{h} (x - x_p) dx \end{pmatrix} = \frac{-h}{2\rho} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$b_2 = -uu'\rho \begin{pmatrix} \int_{x_p}^{x_{p+1}} \left(-\frac{1}{h}\right) dx \\ \int_{x_p}^{x_{p+1}} \frac{1}{h} dx \end{pmatrix} = -uu'\rho \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vektor b pak bude součtem b_1, b_2 .

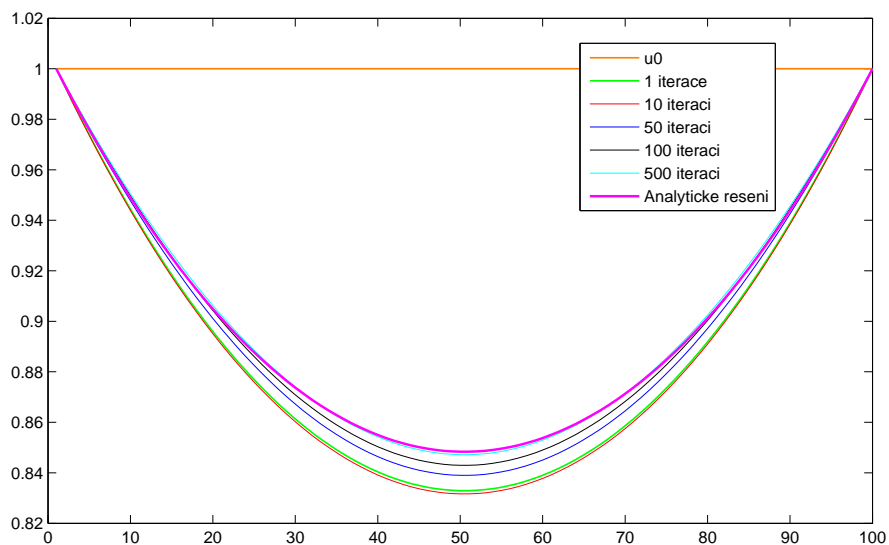
5.3.3 Numerické výsledky

V rámci této kapitoly budeme sledovat, jak se mění hodnota funkcionálu a řešení pro různé parametry. Můžeme měnit počet segmentů, na nichž pracujeme, tvar počáteční aproximace u_0 a počet iterací, které se budou provádět (případně jinou ukončující podmínku). Již víme, že velikost plochy, kterou opisuje analyticky získaná křivka, je

$$S = 2\pi \int_0^1 u_A(x) \sqrt{1 + (u'_A(x))^2} dx \approx 5,991796978.$$

Počáteční aproximace $u_0 = 1$

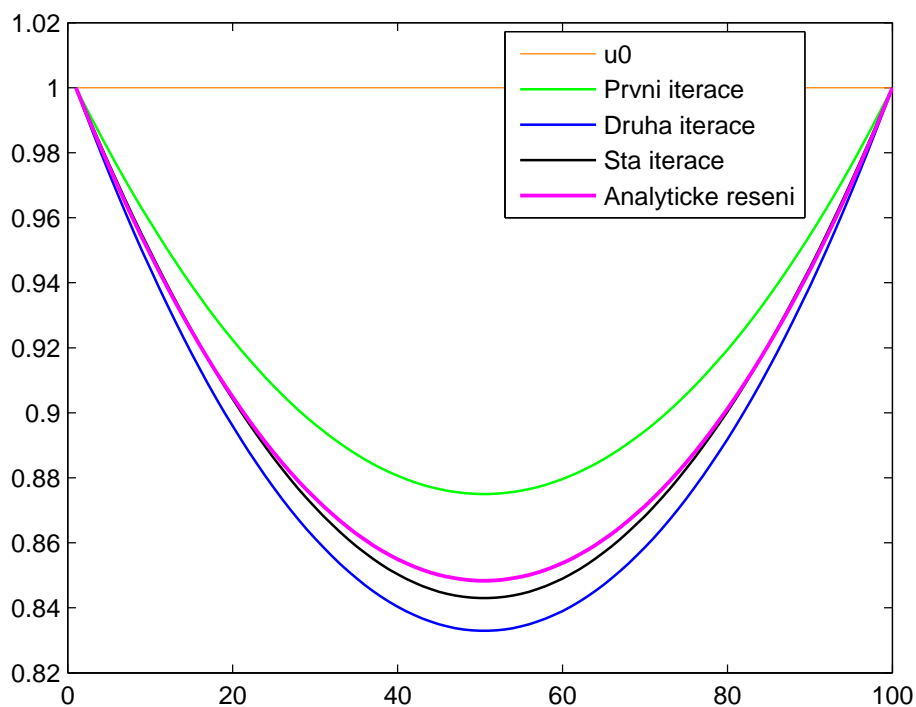
Nejprve budeme sledovat, jak se mění tvar řešení s rostoucím počtem iterací, zvolíme-li počet segmentů $n = 100$. Výsledky jsou zaneseny v následujícím obrázku.



Oranžovou barvou je znázorněna počáteční aproximace, výraznější linií pak analytické řešení. Můžeme vidět, že již při první iteraci získalo řešení požadovaný tvar a s dalšími iteracemi se blíží řešení analytickému. Dále budeme pozorovat hodnotu funkcionálu, která se rovněž blíží hodnotě analytické.

i	1	10	50	100	500
J	5,9949	5,9944	5,9927	5,9924	5,9921

Nyní můžeme například sledovat, jak se mění tvar řešení v jednotlivých iteracích.

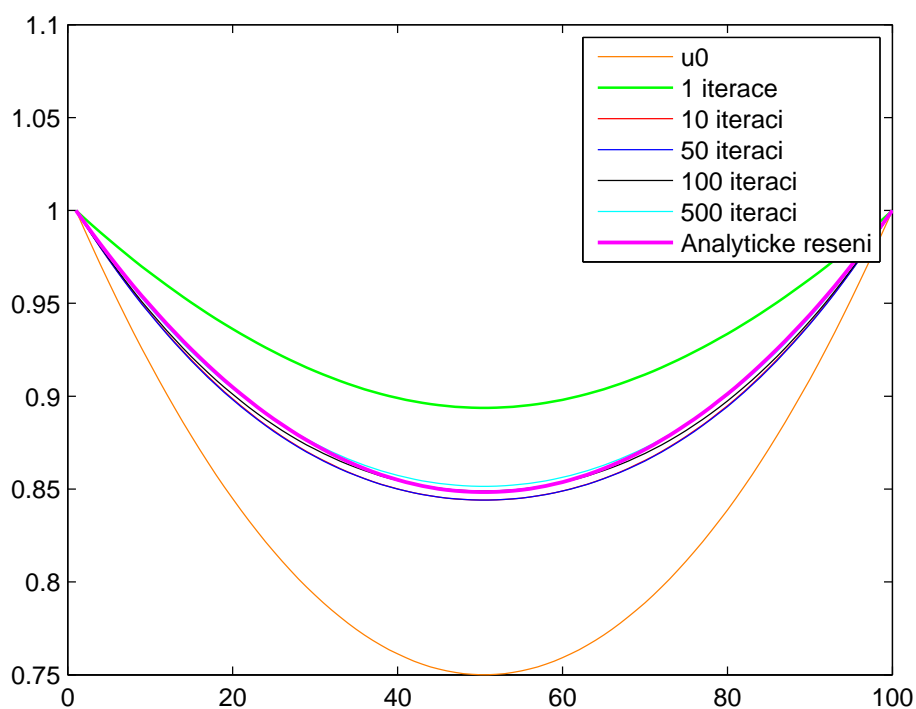


Na obrázku opět můžeme vidět, jak se postupně mění tvar řešení. Pod pojmem „první iterace“ zde rozumíme iteraci, v níž se používá počáteční aproximace a její přírůstek. Opět je zde patrné, že řešení získá požadovaný tvar poměrně záhy, v tomto případě se po druhé iteraci ustálí a postupně se blíží skutečnému řešení.

Počáteční aproximace parabolou

Jelikož máme jistou představu, jakého tvaru nabývá přesné řešení, rovněž se nabízí zvolit jako počáteční aproximaci funkci s parabolickým průběhem, která splňuje počáteční podmínky, v tomto případě například

$$y = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$



Oranžovou barvou je zde znázorněna počáteční aproximace. Opět můžeme sledovat, jak se tvar řešení blíží řešení analytickému.

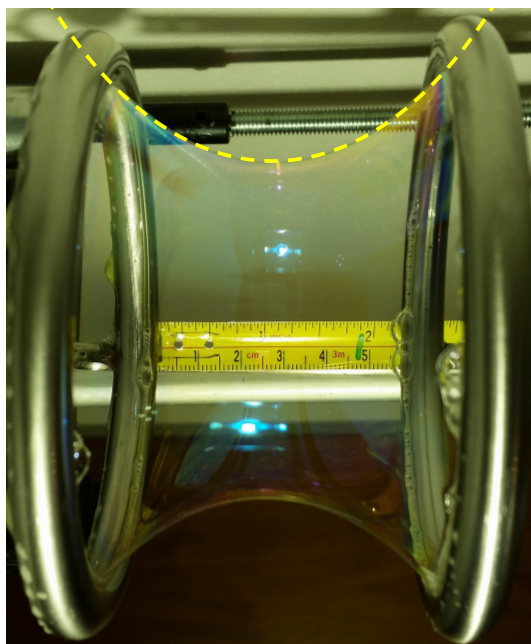
i	1	10	50	100	500
J	6,0167	5,9929	5,9931	5,9927	5,9922

Nabízí se rovněž zvolit počáteční aproximaci blízkou analytickému řešení. V tomto případě získáme pro různé počty iterací hodnotu funkcionálu 5,9918, což je nejlepší hodnota ze všech experimentů, a grafy jednotlivých řešení splynou.

6 Praktické experimenty

6.1 Úloha o minimální ploše

V rámci experimentu byl pozorován průhyb mýdlové bubliny mezi dvěma obručemi o vnitřním průměru 9 cm. Na obrázku můžeme vidět, že analyticky získané řešení skutečně odpovídá reálnému tvaru povrchu.



Rovněž bylo experimentálně zjištěno, že ve výšce 5,9 cm se povrch zformoval ve dvě kruhové plochy uvnitř obručí. Tato hodnota odpovídá meznímu poměru $\frac{\alpha}{L} = 1,5089$, který byl analyticky spočten v kapitole 3.1. Videozáznam z celého pokusu můžeme najít na přiloženém CD.

6.2 Úloha o brachystochroně

Pro účely experimentu byly zhotoveny tři dráhy s krajními body $[0 \text{ m}; 0 \text{ m}]$, $[1,25 \text{ m}; -0,3 \text{ m}]$. První odpovídala cykloidě s parametrickým vyjádřením

$$x = 0,2326(\theta - \sin \theta),$$

$$y = 0,2326(\cos \theta - 1),$$

$\theta \in \langle 0 \text{ rad}; 4,4181 \text{ rad} \rangle$, druhá parabole o rovnici

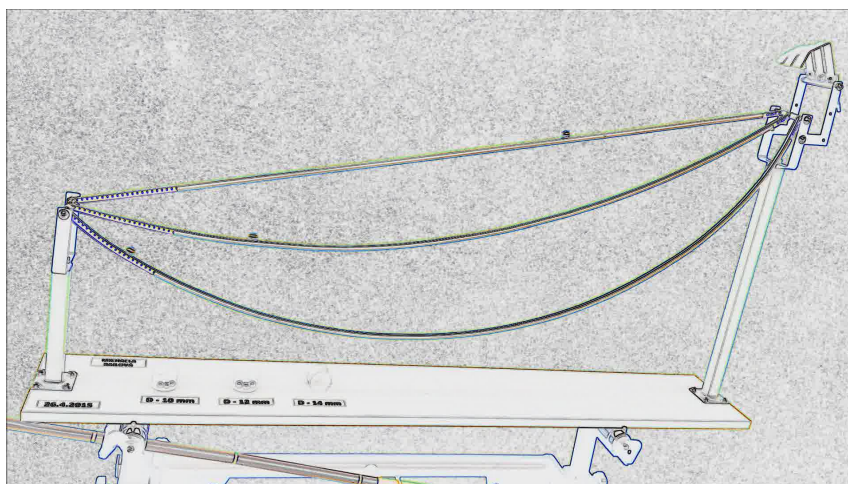
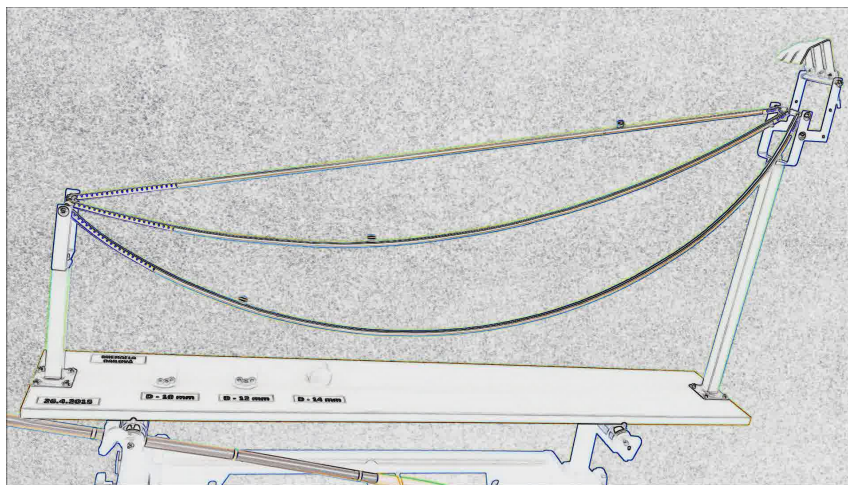
$$y(x) = 0,3578x^2 - 0,6872x,$$

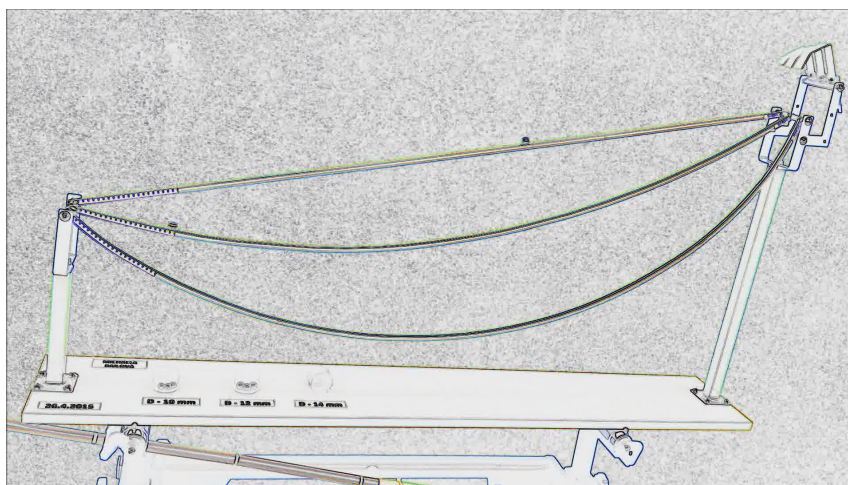
$x \in \langle 0; 1,25 \rangle$ m, a třetí lineární funkci s předpisem

$$y(x) = -0,24x,$$

$x \in \langle 0; 1,25 \rangle$ m.

Analyticky spočítané časy byly postupně 0,6804, 0,7534 a 1,0599 sekund. Praktické experimenty byly prováděny pro tři průměry kuliček, 10, 12 a 14 mm. Na obrázcích jsou zachyceny poslední tři snímky zhotovené při pokusu s kuličkou o průměru 10 mm. Snímky byly pro přehlednost převedeny do grafického režimu.





Při pokusech bylo potvrzeno, že dráha odpovídající rovnici cykloidy je skutečně nejrychlejší ze všech testovaných. Video z celého průběhu experimentu včetně naměřených časů se rovněž nachází na příloženém CD.

7 Závěr

Ačkoli je variační počet poměrně známá a dlouho existující oblast matematiky, ukázalo se jako téměř nemožné najít publikaci, v níž by byl popsán kompletní postup minimalizace funkcionálu u klasických úloh. Ve většině případů řešení skončilo nalezením stacionárního bodu a odkazem na fyzikální podstatu, v lepším případě důkazem existence lokálního extrému.

Za jeden z přínosů této diplomové práce považuji fakt, že je zde kromě aparátu pro nalezení stacionárních bodů rovněž patřičně rozebrán způsob, jak ukázat, že v daném bodě skutečně nastává extrém funkcionálu. Tuto část považuji za zajímavou, jelikož přechod do prostoru lipschitzovských křivek je podle mého názoru elegantní způsob, jak prokázat existenci extrému v klasických úlohách.

Přínosné rovněž bylo samotné řešení konkrétních úloh. Detailně byla zpracována především úloha o minimální ploše, která sloužila jako most mezi formulací v prostoru C^1 a v prostoru lipschitzovských křivek. Za zmínku rovněž stojí, že na řešitelnost úlohy má podstatný vliv i poloha počátečních bodů. V rámci práce byly odvozeny jejich mezní konfigurace. Rovněž tato pasáž se v literatuře příliš nevyskytuje a to mnohdy vede k neúplným nebo chybným diskuzím řešení. Obě úlohy jsou zároveň počítány i numerickými metodami, jejichž výsledky jsou demonstrovány v příslušných kapitolách. Veškeré algoritmy byly implementovány pomocí softwaru Matlab.

Za pozornost také stojí praktické experimenty, které měly za úkol přiblížit příslušné úlohy, ilustrovat platnost analyticky a numericky získaných výsledků a jistým způsobem tak uzavřít celou práci.

8 Literatura

- [1] ELSGOLC, Lev D. *Calculus of variations*. 1. vydání. Dover Publications, 2006. ISBN 0-496-45799-0.
- [2] DOLEJŠÍ, Vít, NAJZAR, Karel. *Nelineární funkcionální analýza*. 1. vydání. Praha: Matfyzpress, 2010. ISBN 978-80-7378-137-8.
- [3] JARNÍK, Vojtěch. *Integrální počet (II)*. 3. vydání. Praha: Academia, 1984.
- [4] JARNÍK, Vojtěch. *Diferenciální počet (II)*. 4. vydání. Praha: Academia, 1984.
- [5] TROUTMAN, John L. *Variational Calculus and Optimal Control: Optimization with Elementary Convexity (Undergraduate Texts in Mathematics)*. 2. vydání. New York. Springer, 1995. ISBN 0-387-94511-3
- [6] DIERKES, Ulrich, HILDEBRANDT, Stefan, SAUVIGNY, Friedrich. *Minimal surfaces*. Rozšířené 2. vydání. Springer, 2010. ISBN: 978-3-642-11697-1.
- [7] DRÁBEK, Pavel, MILOTA, Jaroslav. *Methods of Nonlinear Analysis: Applications to Differential Equations*. 2. vydání. Springer, 2013. ISBN 978-3-0348-0386-1.
- [8] MALÝ, Jan. *Klasické úlohy variačního počtu*, [online]. [cit. 6.5.2015]. Dostupné z: <<http://www.karlin.mff.cuni.cz/maly/vp1.pdf>>
- [9] Došlý, Ondřej. *Variační počet* [online]. [cit. 6.5.2015]. Dostupné z: <<http://www.math.muni.cz/dosly/>>
- [10] BOUCHALA, Jiří. *Úvod do funkcionální analýzy* [online]. 2012 [cit. 6.5.2015]. Dostupné z: <<http://homel.vsb.cz/bou10/archiv/ufa.pdf>>
- [11] BOUCHALA, Jiří. *Variační metody* [online]. 2012 [cit. 6.5.2015]. Dostupné z: <<http://homel.vsb.cz/bou10/VM/VM.pdf>>
- [12] DOSTÁL, Zdeněk, BEREMLIJSKI, Petr. *Metody optimalizace* [online]. 2012 [cit. 6.5.2015]. Dostupné z: <http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/metody_optimalizace.pdf>
- [13] POSPÍŠIL, Zdeněk. *Diferenciální a integrální počet funkcí jedné proměnné* [online]. [cit. 6.5.2015]. Dostupné z: <https://www.math.muni.cz/pospisil/FILES/MA_VUT.pdf>

A Příloha na CD

Příložené CD obsahuje následující soubory

A.1 Videá

Uloha_o_minimalni_plose.wmv - videozáznam z pokusu k úloze o minimální ploše

Uloha_o_brachystochrone.wmv - videozáznam z pokusu k úloze o brachystochroně

A.2 Bézierovy křivky

ulohy_skript.m - skript pro volání jednotlivých metod

bublina.m - funkce pro řešení úlohy o minimální ploše

brachystochrona.m - funkce pro řešení úlohy o brachystochroně

bfgs.m - funkce pro minimalizaci prostřednictvím BFGS algoritmu

BezFunc.m - funkce pro numerický výpočet funkcionálu

BezNum.m - funkce pro numerický výpočet Bézierovy křivky

BezDiff.m - funkce pro numerický výpočet derivace Bézierovy křivky

gradPi.m - funkce pro výpočet derivace ve směru

penaltaGrad.m - funkce pro výpočet gradientu penalizační funkce

A.3 Metoda konečných prvků

minimalni_plocha_skript.m - skript pro volání jednotlivých metod

MKP.m - funkce pro minimalizaci funkcionálu prostřednictvím metody konečných prvků a Newtonovy metody

alokA.m - funkce pro alokaci matice tuhosti

alokb.m - funkce pro alokaci vektoru pravé strany

funkcional.m - funkce pro numerický výpočet minimalizovaného funkcionálu.